

2021 年普通高等学校招生全国统一考试

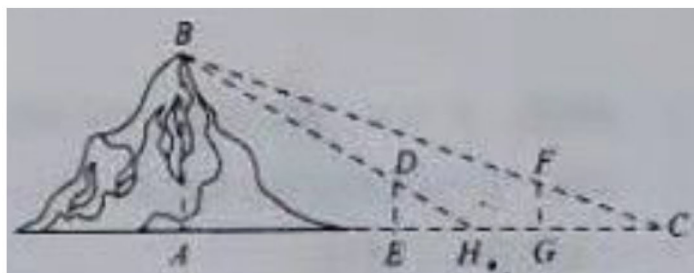
理科数学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $2(z + \bar{z}) + 3(z - \bar{z}) = 4 + 6i$, 则 $z =$ ()
A. $1 - 2i$ B. $1 + 2i$ C. $1 + i$ D. $1 - i$
2. 已知集合 $S = \{s | s = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $T = \{t | t = 4n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, 则 $S \cap T =$ ()
A. \emptyset B. S C. T D. \mathbf{Z}
3. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x < 1$; 命题 $q: \forall x \in \mathbf{R}, e^{|x|} \geq 1$. 则下列命题中为真命题的是 ()
A. $p \wedge q$ B. $\neg p \wedge q$ C. $p \wedge \neg q$ D. $\neg(p \vee q)$
4. 设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中为奇函数的是 ()
A. $f(x-1) - 1$ B. $f(x-1) + 1$ C. $f(x+1) - 1$ D. $f(x+1) + 1$
5. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成的角为 ()
A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$
6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训, 每名志愿者只分配到 1 个项目, 每个项目至少分配 1 名志愿者, 则不同的分配方案共有 ()
A. 60 种 B. 120 种 C. 240 种 D. 480 种
7. 把函数 $y = f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的图像, 则 $f(x) =$ ()
A. $\sin(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{12})$ B. $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})$ C. $\sin(2x - \frac{7\pi}{12})$ D. $\sin(2x + \frac{\pi}{12})$
8. 在区间 $(0, 1)$ 与 $(1, 2)$ 中各随机取一个数, 则两数之和大于 $\frac{7}{4}$ 的概率为 ()
A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{23}{32}$ C. $\frac{9}{32}$ D. $\frac{2}{9}$
9. 魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作, 其中第一题是测量海岛的高, 如图, 点 E, H, G 在水平线 AC 上, DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度, 称为“表高”, EG 称为“表距”, GC 和 EH 都称为“表目距”, GC 与 EH 的差称为“表目距的差”, 则海岛的高 $AB =$ ()



- A. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$ B. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$ C. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$ D. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$

10. 设 $a \neq 0$, 若 $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的最大值点, 则 ()

- A. $a < b$ B. $a > b$ C. $ab < a^2$ D. $ab > a^2$

11. 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点, 若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB| \leq 2b$, 则 C 的离心率的取值范围是 ()

- A. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ B. $[\frac{1}{2}, 1)$ C. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ D. $(0, \frac{1}{2}]$

12. 设 $a = 2\ln 1.01, b = \ln 1.02, c = \sqrt{1.04} - 1$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

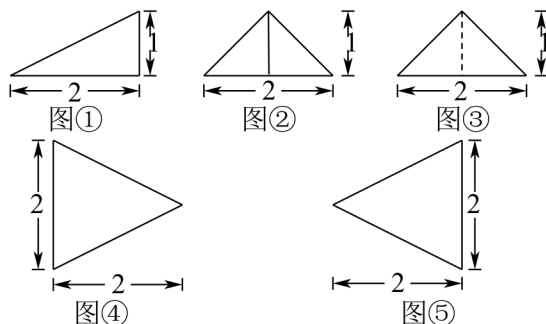
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1 (m > 0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + my = 0$, 则 C 的焦距为 _____.

14. 已知向量 $\vec{a} = (1, 3), \vec{b} = (3, 4)$, 若 $(\vec{a} - \lambda\vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $\lambda =$ _____.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 $\sqrt{3}, B = 60^\circ, a^2 + c^2 = 3ac$, 则 $b =$ _____.

16. 以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图, 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为 _____ (写出符合要求的一组答案即可).



三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。

第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分)

某厂研制了一种生产高精产品的设备, 为检验新设备生产产品的某项指标有无提高, 用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品, 得到各件产品该项指标数据如下:

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 \bar{x} 和 \bar{y} , 样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2 .

(1) 求 $\bar{x}, \bar{y}, s_1^2, s_2^2$;

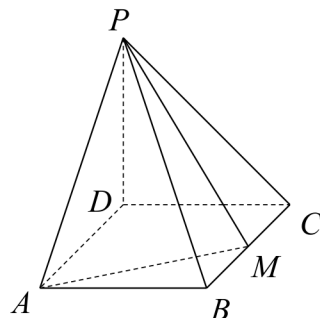
(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高 (如果 $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$, 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高).

18. (12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $PD = DC = 1$, M 为 BC 的中点, 且 $PB \perp AM$.

(1) 求 BC ;

(2) 求二面角 $A-PM-B$ 的正弦值.



19. (12 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积, 已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$.

(1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. (12 分)

设函数 $f(x) = \ln(a-x)$, 已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点.

(1) 求 a ;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{x+f(x)}{xf(x)}$, 证明: $g(x) < 1$.

21. (12 分)

已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 且 F 与圆 $M: x^2 + (y+4)^2 = 1$ 上点的距离的最小值为 4.

(1) 求 p ;

(2) 若点 P 在 M 上, PA, PB 是 C 的两条切线, A, B 是切点, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的圆心为 $C(2, 1)$, 半径为 1.

(1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程;

(2) 过点 $F(4, 1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求这两条切线的极坐标方程.

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x) = |x-a| + |x+3|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集;

(2) 若 $f(x) > -a$, 求 a 的取值范围.