绝密★启用前

2022年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目，在规定的位置贴好条形码.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上、写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\},B=\left\{x\middle|0\le x<\frac{5}{2}\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{-2,-1,0\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{1,2\}$

【答案】A

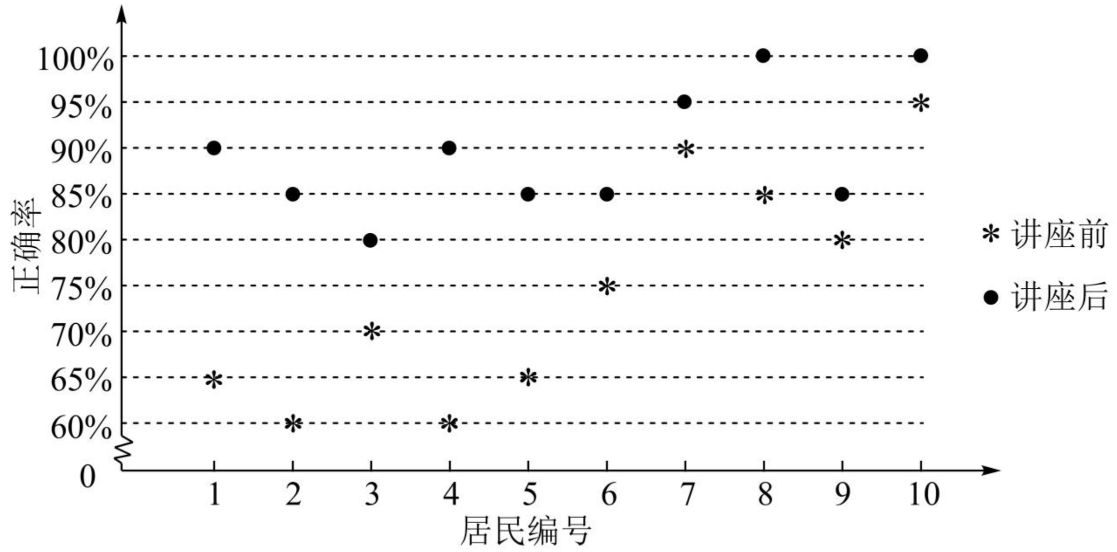
【解析】

【分析】根据集合的交集运算即可解出．

【详解】因为 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\left\{x\middle|0\le x<\frac{5}{2}\right\}$，所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$．

故选：A.

2. 某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识．为了解讲座效果，随机抽取10位社区居民，让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷，这10位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图：



则（　　）

A. 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于70%

B. 讲座后问卷答题的正确率的平均数大于85%

C. 讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

D. 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

【答案】B

【解析】

【分析】由图表信息，结合中位数、平均数、标准差、极差的概念，逐项判断即可得解.

【详解】讲座前中位数为$\dfrac{70\%+75\%}{2}>70\%$,所以A错；

讲座后问卷答题的正确率只有一个是80%,4个85%,剩下全部大于等于90%,所以讲座后问卷答题的正确率的平均数大于85%,所以B对；

讲座前问卷答题的正确率更加分散,所以讲座前问卷答题的正确率的标准差大于讲座后正确率的标准差,所以C错；

讲座后问卷答题的正确率的极差为$100\%-80\%=20\%$，

讲座前问卷答题的正确率的极差为$95\%-60\%=35\%>20\%$,所以D错.

故选:B

.

3. 若$z=1+\mathrm{i}$．则$|\mathrm{i}z+3\overline{z}|=$（　　）

A. $4\sqrt{5}$　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{2}$

【答案】D

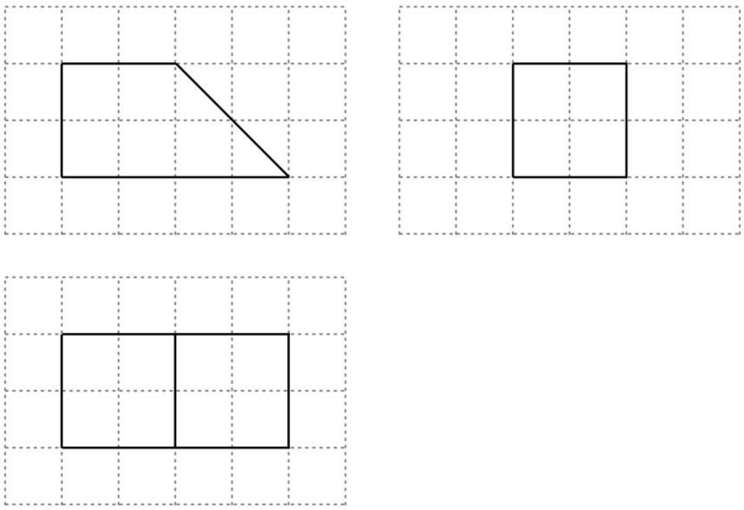
【解析】

【分析】根据复数代数形式的运算法则，共轭复数的概念以及复数模的计算公式即可求出．

【详解】因为$z=1+\mathrm{i}$，所以$\mathrm{i}z+3\overline{z}=\mathrm{i}\left(1+\mathrm{i}\right)+3\left(1-\mathrm{i}\right)=2-2\mathrm{i}$，所以$\left|\mathrm{i}z+3\overline{z}\right|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$．

故选：D.

4. 如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为 1，则该多面体的体积为（　　）



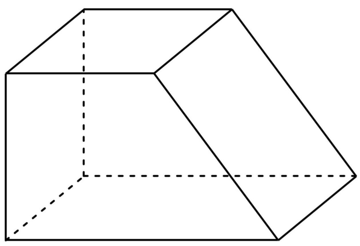
A. 8　　　　B. 12　　　　C. 16　　　　D. 20

【答案】B

【解析】

【分析】由三视图还原几何体，再由棱柱的体积公式即可得解.

【详解】由三视图还原几何体，如图，



则该直四棱柱的体积$V=\dfrac{2+4}{2}\times 2\times 2=12$.

故选：B.

5. 将函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$的图像向左平移$\dfrac{\pi}{2}$个单位长度后得到曲线$C$，若$C$关于$y$轴对称，

则ω的最小值是（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】先由平移求出曲线C的解析式，再结合对称性得$\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即可求出$\omega$的最小值.

【详解】由题意知：曲线C为$y=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin(\omega x+\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3})$，又$C$关于$y$轴对称，则

$\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

解得$\omega=\frac{1}{3}+2k,k\in\mathbf{Z}$，又$\omega>0$，故当$k=0$时，$\omega$的最小值为$\frac{1}{3}$.

故选：C.

6. 从分别写有1，2，3，4，5，6的6张卡片中无放回随机抽取2张，则抽到的2张卡片上的数字之积是4的倍数的概率为（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】先列举出所有情况，再从中挑出数字之积是4的倍数的情况，由古典概型求概率即可.

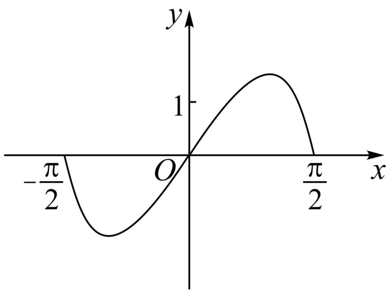
【详解】从6张卡片中无放回抽取2张，共有

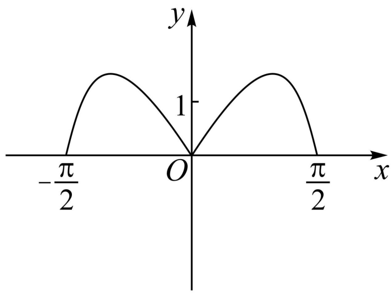
$(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)$ 15种情况，

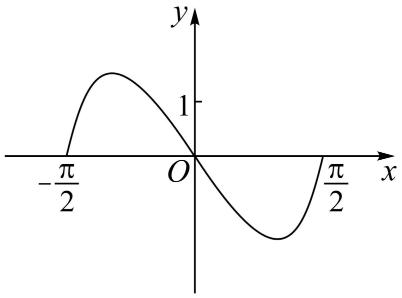
其中数字之积为4的倍数的有$(1,4),(2,4),(2,6),(3,4),(4,5),(4,6)$ 6种情况，故概率为$\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

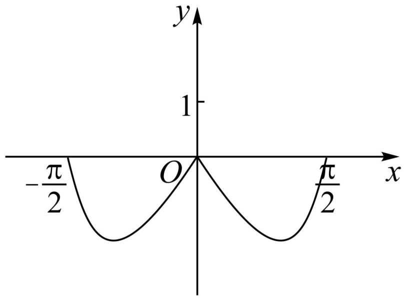
故选：C.

7. 函数$y=\left(3^x-3^{-x}\right)\cos x$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的图象大致为（　　）

A.


B.


C.


D.


【答案】A

【解析】

【分析】由函数的奇偶性结合指数函数、三角函数的性质逐项排除即可得解.

【详解】令 $f\left(x\right)=\left(3^{x}-3^{-x}\right)\cos x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

则 $f\left(-x\right)=\left(3^{-x}-3^{x}\right)\cos\left(-x\right)=-\left(3^{x}-3^{-x}\right)\cos x=-f\left(x\right)$,

所以 $f\left(x\right)$ 为奇函数，排除 BD;

又当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$3^{x}-3^{-x}>0,\cos x>0$，所以 $f\left(x\right)>0$，排除 C.

故选：A.

8. 当 $x=1$ 时，函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$ 取得最大值 -2，则 $f'(2)=$（　　）

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意可知 $f\left(1\right)=-2$，$f'\left(1\right)=0$ 即可解得 a,b，再根据 $f'\left(x\right)$ 即可解出.

【详解】因为函数 $f\left(x\right)$ 定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，所以依题可知，$f\left(1\right)=-2$，$f'\left(1\right)=0$，而 $f'\left(x\right)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^{2}}$,

所以 $b=-2,a-b=0$，即 $a=-2,b=-2$，所以 $f'\left(x\right)=-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^{2}}$，因此函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上递增，在

$(1,+\infty)$上递减，$x=1$时取最大值，满足题意，即有$f'(2)=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

故选：B.

9. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知B_1D与平面$ABCD$和平面AA_1B_1B所成的角均为30°，则（　　）

A. $AB=2AD$

B. AB与平面AB_1C_1D所成的角为30°

C. $AC=CB_1$

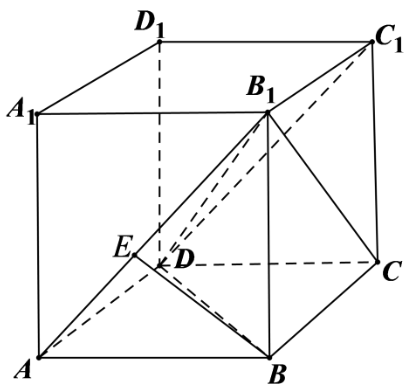
D. B_1D与平面BB_1C_1C所成的角为45°

【答案】D

【解析】

【分析】根据线面角的定义以及长方体的结构特征即可求出.

【详解】如图所示：



不妨设$AB=a,AD=b,AA_1=c$，依题以及长方体的结构特征可知，B_1D与平面$ABCD$所成角为$\angle B_1DB$，B_1D与平面AA_1B_1B所成角为$\angle DB_1A$，所以$\sin 30^\circ=\frac{c}{B_1D}=\frac{b}{B_1D}$，即$b=c$，$B_1D=2c=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，解得$a=\sqrt{2}c$.

对于A，$AB=a$，$AD=b$，$AB=\sqrt{2}AD$，A错误；

对于B，过B作$BE\perp AB_1$于E，易知$BE\perp$平面AB_1C_1D，所以AB与平面AB_1C_1D所成角为$\angle BAE$，因为$\tan\angle BAE=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\angle BAE\neq 30^\circ$，B错误；

对于C，$AC=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}c$，$CB_1=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}c$，$AC\neq CB_1$，C错误；

对于D，B_1D与平面BB_1C_1C所成角为$\angle DB_1C$，$\sin\angle DB_1C=\frac{CD}{B_1D}=\frac{a}{2c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，而$0<\angle DB_1C<90^\circ$，

所以$\angle DB_1C=45^{\circ}$．D 正确．

故选：D．

10. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为2π，侧面积分别为$S_{甲}$和$S_{乙}$，体积分别为$V_{甲}$和$V_{乙}$．若$\dfrac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则$\dfrac{V_{甲}}{V_{乙}}=$（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $\dfrac{5\sqrt{10}}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】设母线长为l，甲圆锥底面半径为r_1，乙圆锥底面圆半径为r_2，根据圆锥的侧面积公式可得$r_1=2r_2$，再结合圆心角之和可将r_1,r_2分别用l表示，再利用勾股定理分别求出两圆锥的高，再根据圆锥的体积公式即可得解.

【详解】解：设母线长为l，甲圆锥底面半径为r_1，乙圆锥底面圆半径为r_2，

则$\dfrac{S_{甲}}{S_{乙}}=\dfrac{\pi r_1 l}{\pi r_2 l}=\dfrac{r_1}{r_2}=2$，

所以$r_1=2r_2$，

又$\dfrac{2\pi r_1}{l}+\dfrac{2\pi r_2}{l}=2\pi$，

则$\dfrac{r_1+r_2}{l}=1$，

所以$r_1=\dfrac{2}{3}l,r_2=\dfrac{1}{3}l$，

所以甲圆锥的高$h_1=\sqrt{l^2-\dfrac{4}{9}l^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}l$，

乙圆锥的高$h_2=\sqrt{l^2-\dfrac{1}{9}l^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}l$，

所以 $\dfrac{V_{甲}}{V_{乙}}=\dfrac{\frac{1}{3}\pi r_1^2h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2h_2}=\dfrac{\frac{4}{9}l^2\times\frac{\sqrt{5}}{3}l}{\frac{1}{9}l^2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}l}=\sqrt{10}$.

故选：C.

11. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{3}$，A_1,A_2 分别为 C 的左、右顶点，B 为 C 的上顶点. 若 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$，则 C 的方程为（　　）

A. $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{16}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$

【答案】B

【解析】

【分析】根据离心率及 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$，解得关于 a^2,b^2 的等量关系式，即可得解.

【详解】解：因为离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{1}{3}$，解得 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{8}{9}$，$b^2=\dfrac{8}{9}a^2$，

A_1,A_2 分别为 C的左右顶点，则 $A_1\left(-a,0\right),A_2\left(a,0\right)$，

B 为上顶点，所以 $B(0,b)$.

所以 $\overrightarrow{BA_1}=(-a,-b),\overrightarrow{BA_2}=(a,-b)$，因为 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$

所以 $-a^2+b^2=-1$，将 $b^2=\dfrac{8}{9}a^2$ 代入，解得 $a^2=9,b^2=8$，

故椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$.

故选：B.

12. 已知 $9^m=10,a=10^m-11,b=8^m-9$，则（　　）

A. $a>0>b$　　B. $a>b>0$　　C. $b>a>0$　　D. $b>0>a$

【答案】A

【解析】

【分析】根据指对互化以及对数函数的单调性即可知 $m=\log_9 10>1$，再利用基本不等式，换底公式可得 $m>\lg 11$，$\log_8 9>m$，然后由指数函数的单调性即可解出.

【详解】由$9^m=10$可得$m=\log_9 10=\dfrac{\lg 10}{\lg 9}>1$，而$\lg 9\lg 11<\left(\dfrac{\lg 9+\lg 11}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\lg 99}{2}\right)^2<1=(\lg 10)^2$，

所以$\dfrac{\lg 10}{\lg 9}>\dfrac{\lg 11}{\lg 10}$，即$m>\lg 11$，所以$a=10^m-11>10^{\lg 11}-11=0$.

又$\lg 8\lg 10<\left(\dfrac{\lg 8+\lg 10}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\lg 80}{2}\right)^2<(\lg 9)^2$，所以$\dfrac{\lg 9}{\lg 8}>\dfrac{\lg 10}{\lg 9}$，即$\log_8 9>m$，

所以$b=8^m-9<8^{\log_8 9}-9=0$．综上，$a>0>b$.

故选：A.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量$\vec{a}=(m,3),\vec{b}=(1,m+1)$．若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$m=$____________.

【答案】$-\dfrac{3}{4}$##-0.75

【解析】

【分析】直接由向量垂直的坐标表示求解即可.

【详解】由题意知：$\vec{a}\cdot\vec{b}=m+3(m+1)=0$，解得$m=-\dfrac{3}{4}$.

故答案为：$-\dfrac{3}{4}$.

14. 设点M在直线$2x+y-1=0$上，点$(3,0)$和$(0,1)$均在$\odot M$上，则$\odot M$的方程为____________.

【答案】$(x-1)^2+(y+1)^2=5$

【解析】

【分析】设出点M的坐标，利用$(3,0)$和$(0,1)$均在$\odot M$上，求得圆心及半径，即可得圆的方程.

【详解】解：$\because$点M在直线$2x+y-1=0$上，

$\therefore$设点M为$(a,1-2a)$，又因为点$(3,0)$和$(0,1)$均在$\odot M$上，

$\therefore$点M到两点的距离相等且为半径R，

$\therefore\sqrt{(a-3)^2+(1-2a)^2}=\sqrt{a^2+(-2a)^2}=R$，

$a^2-6a+9+4a^2-4a+1=5a^2$，解得$a=1$，

$\therefore M(1,-1)$，$R=\sqrt{5}$，

$\odot M$的方程为$(x-1)^2+(y+1)^2=5$.

故答案为：$(x-1)^2+(y+1)^2=5$

15. 记双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 e，写出满足条件"直线 $y=2x$ 与 C 无公共点"的 e 的一个值______________.

【答案】2（满足 $1<e\le\sqrt{5}$ 皆可）

【解析】

【分析】根据题干信息，只需双曲线渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 中 $0<\frac{b}{a}\le 2$ 即可求得满足要求的 e 值.

【详解】解：$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，所以 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，

结合渐近线的特点，只需 $0<\frac{b}{a}\le 2$，即 $\frac{b^2}{a^2}\le 4$，

可满足条件"直线 $y=2x$ 与 C 无公共点"

所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\le\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$，

又因为 $e>1$，所以 $1<e\le\sqrt{5}$，

故答案为：2（满足 $1<e\le\sqrt{5}$ 皆可）

16. 已知 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，$\angle ADB=120^\circ, AD=2, CD=2BD$．当 $\frac{AC}{AB}$ 取得最小值时，$BD=$________.

【答案】$\sqrt{3}-1$##$-1+\sqrt{3}$

【解析】

【分析】设 $CD=2BD=2m>0$，利用余弦定理表示出 $\frac{AC^2}{AB^2}$ 后，结合基本不等式即可得解.

【详解】设 $CD=2BD=2m>0$，

则在 $\triangle ABD$ 中，$AB^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cos\angle ADB=m^2+4+2m$，

在 $\triangle ACD$ 中，$AC^2=CD^2+AD^2-2CD\cdot AD\cos\angle ADC=4m^2+4-4m$，

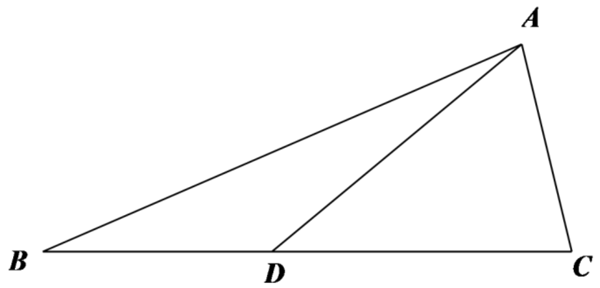
所以 $\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{4m^2+4-4m}{m^2+4+2m}=\frac{4\left(m^2+4+2m\right)-12\left(1+m\right)}{m^2+4+2m}=4-\frac{12}{\left(m+1\right)+\frac{3}{m+1}}$

$$\geq 4-\frac{12}{2\sqrt{(m+1)\cdot\frac{3}{m+1}}}=4-2\sqrt{3}$$，

当且仅当 $m+1=\frac{3}{m+1}$ 即 $m=\sqrt{3}-1$ 时，等号成立，

所以当 $\frac{AC}{AB}$ 取最小值时，$m=\sqrt{3}-1$.

故答案为：$\sqrt{3}-1$.



三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17. 甲、乙两城之间的长途客车均由 A 和 B 两家公司运营，为了解这两家公司长途客车的运行情况，随机调查了甲、乙两城之间的 500 个班次，得到下面列联表：

	准点班次数	未准点班次数
A	240	20
B	210	30

（1）根据上表，分别估计这两家公司甲、乙两城之间的长途客车准点的概率；

（2）能否有 90%的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关？

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

【答案】（1）A，B 两家公司长途客车准点的概率分别为$\frac{12}{13}$，$\frac{7}{8}$

（2）有

【解析】

【分析】（1）根据表格中数据以及古典概型的概率公式可求得结果；

（2）根据表格中数据及公式计算K^2，再利用临界值表比较即可得结论.

【小问 1 详解】

根据表中数据，A 共有班次 260 次，准点班次有 240 次，

设 A 家公司长途客车准点事件为 M，

则$P(M)=\frac{240}{260}=\frac{12}{13}$；

B 共有班次 240 次，准点班次有 210 次，

设 B 家公司长途客车准点事件为 N，

则$P(N)=\frac{210}{240}=\frac{7}{8}$.

A 家公司长途客车准点的概率为$\frac{12}{13}$；

B 家公司长途客车准点的概率为$\frac{7}{8}$.

【小问 2 详解】

列联表

	准点班次数	未准点班次数	合计
A	240	20	260
B	210	30	240
合计	450	50	500

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$=\frac{500\times(240\times30-210\times20)^2}{260\times240\times450\times50}\approx3.205>2.706,$$

根据临界值表可知，有90%的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关.

18. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．已知 $\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$．

（1）证明：$\{a_n\}$ 是等差数列；

（2）若 a_4,a_7,a_9 成等比数列，求 S_n 的最小值．

【答案】（1）证明见解析；

（2）-78．

【解析】

【分析】（1）依题意可得 $2S_n+n^2=2na_n+n$，根据 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\geq 2\end{cases}$，作差即可得到 $a_n-a_{n-1}=1$，从而得证；

（2）由（1）及等比中项的性质求出 a_1，即可得到 $\{a_n\}$ 的通项公式与前 n 项和，再根据二次函数的性质计算可得．

【小问 1 详解】

解：因为 $\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$，即 $2S_n+n^2=2na_n+n$①，

当 $n\geq 2$ 时，$2S_{n-1}+(n-1)^2=2(n-1)a_{n-1}+(n-1)$②，

①−②得，$2S_n+n^2-2S_{n-1}-(n-1)^2=2na_n+n-2(n-1)a_{n-1}-(n-1)$，

即 $2a_n+2n-1=2na_n-2(n-1)a_{n-1}+1$，

即 $2(n-1)a_n-2(n-1)a_{n-1}=2(n-1)$，所以 $a_n-a_{n-1}=1$，$n\geq 2$ 且 $n\in\mathrm{N}^*$，

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为公差的等差数列．

【小问 2 详解】

解：由（1）可得 $a_4=a_1+3$，$a_7=a_1+6$，$a_9=a_1+8$，

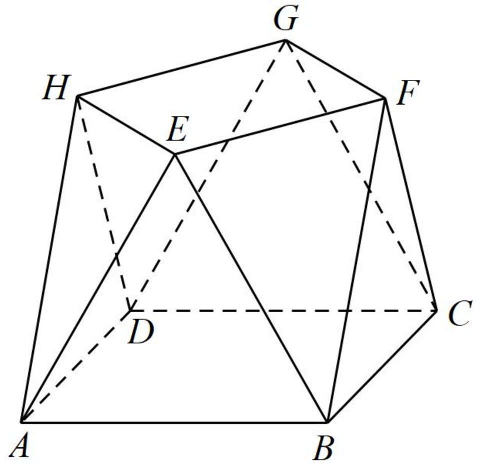
又 a_4，a_7，a_9 成等比数列，所以 $a_7^2=a_4\cdot a_9$，

即 $(a_1+6)^2=(a_1+3)\cdot(a_1+8)$，解得 $a_1=-12$，

所以 $a_n=n-13$，所以 $S_n=-12n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{25}{2}n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{25}{2}\right)^2-\frac{625}{8}$，

所以，当 $n=12$ 或 $n=13$ 时 $(S_n)_{\min}=-78$．

19. 小明同学参加综合实践活动，设计了一个封闭的包装盒，包装盒如图所示：底面 $ABCD$ 是边长为 8（单位：cm）的正方形，$\triangle EAB,\triangle FBC,\triangle GCD,\triangle HDA$ 均为正三角形，且它们所在的平面都与平面 $ABCD$ 垂直．



（1）证明：$EF//$ 平面 $ABCD$；

（2）求该包装盒的容积（不计包装盒材料的厚度）．

【答案】（1）证明见解析；

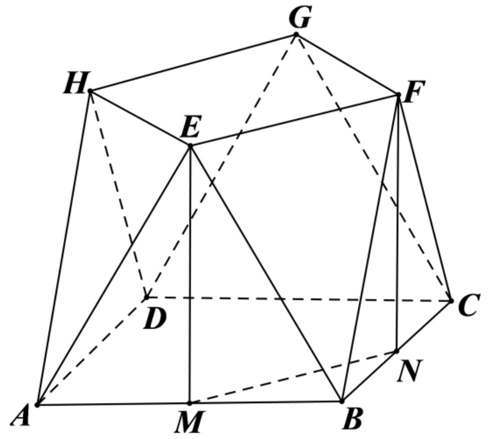
（2）$\dfrac{640}{3}\sqrt{3}$．

【解析】

【分析】(1)分别取 AB,BC 的中点 M,N，连接 MN，由平面知识可知 $EM\perp AB,FN\perp BC$，$EM=FN$，依题从而可证 $EM\perp$ 平面 $ABCD$，$FN\perp$ 平面 $ABCD$，根据线面垂直的性质定理可知 $EM//FN$，即可知四边形 $EMNF$ 为平行四边形，于是 $EF//MN$，最后根据线面平行的判定定理即可证出；

（2）再分别取 AD,DC 中点 K,L，由（1）知，该几何体的体积等于长方体 $KMNL-EFGH$ 的体积加上四棱锥 $B-MNFE$ 体积的 4 倍，即可解出．

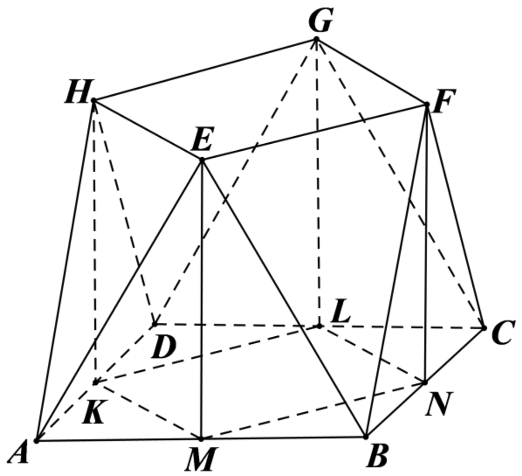
【小问 1 详解】

如图所示：，

分别取 AB,BC 的中点 M,N，连接 MN，因为 $\triangle EAB,\triangle FBC$ 为全等的正三角形，所以

$EM\perp AB,FN\perp BC$，$EM=FN$，又平面 $EAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $EAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$EM\subset$ 平面 EAB，所以 $EM\perp$ 平面 $ABCD$，同理可得 $FN\perp$ 平面 $ABCD$，根据线面垂直的性质定理可知 $EM//FN$，而 $EM=FN$，所以四边形 $EMNF$ 为平行四边形，所以 $EF//MN$，又 $EF\not\subset$ 平面 $ABCD$，$MN\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $EF//$ 平面 $ABCD$.

【小问 2 详解】

如图所示：，

分别取 AD,DC 中点 K,L，由（1）知，$EF//MN$ 且 $EF=MN$，同理有，$HE//KM,HE=KM$，$HG//KL,HG=KL$，$GF//LN,GF=LN$，由平面知识可知，$BD\perp MN$，$MN\perp MK$，$KM=MN=NL=LK$，所以该几何体的体积等于长方体 $KMNL-EFGH$ 的体积加上四棱锥 $B-MNFE$ 体积的 4 倍.

因为 $MN=NL=LK=KM=4\sqrt{2}$，$EM=8\sin 60^{\circ}=4\sqrt{3}$，点 B 到平面 $MNFE$ 的距离即为点 B 到直线 MN 的距离 d，$d=2\sqrt{2}$，所以该几何体的体积

$V=\left(4\sqrt{2}\right)^2\times4\sqrt{3}+4\times\frac{1}{3}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{3}\times2\sqrt{2}=128\sqrt{3}+\frac{256}{3}\sqrt{3}=\frac{640}{3}\sqrt{3}$.

20. 已知函数 $f(x)=x^3-x,g(x)=x^2+a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ 处的切线也是曲线 $y=g(x)$ 的切线.

（1）若 $x_1=-1$，求 a；

（2）求 a 的取值范围.

【答案】（1）3　（2）$\left[-1,+\infty\right)$

【解析】

【分析】（1）先由 $f(x)$ 上的切点求出切线方程，设出 $g(x)$ 上的切点坐标，由斜率求出切点坐标，再由函数值求出 a 即可；

（2）设出 $g(x)$ 上的切点坐标，分别由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 及切点表示出切线方程，由切线重合表示出 a，构造函数，求导求出函数值域，即可求得 a 的取值范围.

【小问 1 详解】

由题意知，$f(-1)=-1-(-1)=0$，$f'(x)=3x^2-1$，$f'(-1)=3-1=2$，则 $y=f(x)$ 在点 $\left(-1,0\right)$ 处的切线方程为 $y=2(x+1)$，

即 $y=2x+2$，设该切线与 $g(x)$ 切于点 $\left(x_2,g(x_2)\right)$，$g'(x)=2x$，则 $g'(x_2)=2x_2=2$，解得 $x_2=1$，则 $g(1)=1+a=2+2$，解得 $a=3$；

【小问 2 详解】

$f'(x)=3x^2-1$，则 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线方程为 $y-\left(x_1^3-x_1\right)=\left(3x_1^2-1\right)(x-x_1)$，整理得 $y=\left(3x_1^2-1\right)x-2x_1^3$，

设该切线与 $g(x)$ 切于点 $\left(x_2,g(x_2)\right)$，$g'(x)=2x$，则 $g'(x_2)=2x_2$，则切线方程为 $y-\left(x_2^2+a\right)=2x_2(x-x_2)$，整理得 $y=2x_2x-x_2^2+a$，

则 $\begin{cases}3x_1^2-1=2x_2\\-2x_1^3=-x_2^2+a\end{cases}$，整理得 $a=x_2^2-2x_1^3=\left(\frac{3x_1^2}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-2x_1^3=\frac{9}{4}x_1^4-2x_1^3-\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{4}$，

令 $h(x)=\frac{9}{4}x^4-2x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$，则 $h'(x)=9x^3-6x^2-3x=3x(3x+1)(x-1)$，令 $h'(x)>0$，解得

$-\frac{1}{3}<x<0$ 或 $x>1$，

令 $h'(x)<0$，解得 $x<-\frac{1}{3}$ 或 $0<x<1$，则 x 变化时，$h'(x),h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},0\right)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$h(x)$	↘	$\frac{5}{27}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	-1	↗

则 $h(x)$ 的值域为 $[-1,+\infty)$，故 a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

21. 设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $D(p,0)$，过 F 的直线交 C 于 M，N 两点．当直线 MD 垂直于 x 轴时，$|MF|=3$.

（1）求 C 的方程；

（2）设直线 MD,ND 与 C 的另一个交点分别为 A，B，记直线 MN,AB 的倾斜角分别为 α,β．当 $\alpha-\beta$ 取得最大值时，求直线 AB 的方程．

【答案】（1） $y^2=4x$；

（2） $AB:x=\sqrt{2}y+4$.

【解析】

【分析】（1）由抛物线的定义可得 $|MF|=p+\frac{p}{2}$，即可得解；

（2）设点的坐标及直线 $MN:x=my+1$，由韦达定理及斜率公式可得 $k_{MN}=2k_{AB}$，再由差角的正切公式及基本不等式可得 $k_{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，设直线 $AB:x=\sqrt{2}y+n$，结合韦达定理可解．

【小问 1 详解】

抛物线的准线为 $x=-\frac{p}{2}$，当 MD 与 x 轴垂直时，点 M 的横坐标为 p，

此时 $|MF|=p+\frac{p}{2}=3$，所以 $p=2$，

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$；

【小问 2 详解】

设 $M\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right),N\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right),A\left(\frac{y_3^2}{4},y_3\right),B\left(\frac{y_4^2}{4},y_4\right)$，直线 $MN:x=my+1$，

由 $\begin{cases}x=my+1\\y^2=4x\end{cases}$ 可得 $y^2-4my-4=0$，$\Delta>0,y_1y_2=-4$，

由斜率公式可得 $k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}=\frac{4}{y_1+y_2}$，$k_{AB}=\frac{y_3-y_4}{\frac{y_3^2}{4}-\frac{y_4^2}{4}}=\frac{4}{y_3+y_4}$，

直线 $MD:x=\frac{x_1-2}{y_1}\cdot y+2$，代入抛物线方程可得 $y^2-\frac{4\left(x_1-2\right)}{y_1}\cdot y-8=0$，

$\Delta>0,y_1y_3=-8$，所以 $y_3=2y_2$，同理可得 $y_4=2y_1$，

所以 $k_{AB}=\frac{4}{y_3+y_4}=\frac{4}{2\left(y_1+y_2\right)}=\frac{k_{MN}}{2}$

又因为直线 MN、AB 的倾斜角分别为 α,β，

所以 $k_{AB}=\tan\beta=\frac{k_{MN}}{2}=\frac{\tan\alpha}{2}$，

若要使 $\alpha-\beta$ 最大，则 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

设 $k_{MN}=2k_{AB}=2k>0$，则 $\tan\left(\alpha-\beta\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{k}{1+2k^2}=\frac{1}{\frac{1}{k}+2k}\le\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{k}\cdot 2k}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

当且仅当 $\frac{1}{k}=2k$ 即 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立，

所以当 $\alpha-\beta$ 最大时，$k_{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，设直线 $AB:x=\sqrt{2}y+n$，

代入抛物线方程可得 $y^2-4\sqrt{2}y-4n=0$，

$\Delta>0,y_3y_4=-4n=4y_1y_2=-16$，所以 $n=4$，

所以直线 $AB:x=\sqrt{2}y+4$.

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是利用抛物线方程对斜率进行化简，利用韦达定理得出坐标间的关

系.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{2+t}{6} \\ y=\sqrt{t} \end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x=-\dfrac{2+s}{6} \\ y=-\sqrt{s} \end{cases}$（$s$ 为参数）.

（1）写出 C_1 的普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_3 的极坐标方程为 $2\cos\theta-\sin\theta=0$，求 C_3 与 C_1 交点的直角坐标，及 C_3 与 C_2 交点的直角坐标.

【答案】（1） $y^2=6x-2\left(y\ge 0\right)$；

（2） C_3,C_1 的交点坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，$\left(1,2\right)$， C_3,C_2 的交点坐标为 $\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)$，$\left(-1,-2\right)$.

【解析】

【分析】(1)消去 t，即可得到 C_1 的普通方程；

(2)将曲线 C_2,C_3 的方程化成普通方程，联立求解即解出.

【小问 1 详解】

因为 $x=\dfrac{2+t}{6}$， $y=\sqrt{t}$，所以 $x=\dfrac{2+y^2}{6}$，即 C_1 的普通方程为 $y^2=6x-2\left(y\ge 0\right)$.

【小问 2 详解】

因为 $x=-\dfrac{2+s}{6},y=-\sqrt{s}$，所以 $6x=-2-y^2$，即 C_2 的普通方程为 $y^2=-6x-2\left(y\le 0\right)$，

由 $2\cos\theta-\sin\theta=0\Rightarrow 2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta=0$，即 C_3 的普通方程为 $2x-y=0$.

联立 $\begin{cases} y^2=6x-2\left(y\ge 0\right) \\ 2x-y=0 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$，即交点坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，$\left(1,2\right)$；

联立 $\begin{cases} y^2=-6x-2\left(y\le 0\right) \\ 2x-y=0 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$，即交点坐标为 $\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)$，$\left(-1,-2\right)$.

[选修 4-5：不等式选讲]

23. 已知 a，b，c 均为正数，且 $a^2+b^2+4c^2=3$，证明：

（1）$a+b+2c\le 3$；

（2）若 $b=2c$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\ge 3$.

【答案】（1）见解析　　（2）见解析

【解析】

【分析】（1）根据 $a^2+b^2+4c^2=a^2+b^2+\left(2c\right)^2$，利用柯西不等式即可得证；

（2）由（1）结合已知可得 $0<a+4c\le 3$，即可得到 $\frac{1}{a+4c}\ge\frac{1}{3}$，再根据权方和不等式即可得证.

【小问 1 详解】

证明：由柯西不等式有 $\left[a^2+b^2+\left(2c\right)^2\right]\left(1^2+1^2+1^2\right)\ge\left(a+b+2c\right)^2$，

所以 $a+b+2c\le 3$，

当且仅当 $a=b=2c=1$ 时，取等号，

所以 $a+b+2c\le 3$；

【小问 2 详解】

证明：因为 $b=2c$，$a>0$，$b>0$，$c>0$，由（1）得 $a+b+2c=a+4c\le 3$，

即 $0<a+4c\le 3$，所以 $\frac{1}{a+4c}\ge\frac{1}{3}$，

由权方和不等式知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{4c}\ge\frac{\left(1+2\right)^2}{a+4c}=\frac{9}{a+4c}\ge 3$，

当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{2}{4c}$，即 $a=1$，$c=\frac{1}{2}$ 时取等号，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\ge 3$.

路华教育

扫一扫上面的二维码图案，加我微信