2013 年全国统一高考数学试卷（理科）（大纲版）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．（5 分）设集合 A={1，2，3}，B={4，5}，M={x|x=a+b，a∈A，b∈B}，则 M 中元素的个数为（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

2．（5 分）$(1+\sqrt{3}i)^3$=（　　）

A．﹣8　　B．8　　C．﹣8i　　D．8i

3．（5 分）已知向量$\vec{m}$=（λ+1，1），$\vec{n}$=（λ+2，2），若（$\vec{m}+\vec{n}$）⊥（$\vec{m}-\vec{n}$），则 λ=（　　）

A．﹣4　　B．﹣3　　C．﹣2　　D．﹣1

4．（5 分）已知函数 f（x）的定义域为（﹣1，0），则函数 f（2x+1）的定义域为（　　）

A．（﹣1，1）　　B．$(-1,-\frac{1}{2})$　　C．（﹣1，0）　　D．$(\frac{1}{2},1)$

5．（5 分）函数 f（x）=$\log_2(1+\frac{1}{x})$（x＞0）的反函数 $f^{-1}(x)$=（　　）

A．$\frac{1}{2^x-1}(x>0)$　　B．$\frac{1}{2^x-1}(x\neq 0)$　　C．2^x-1（x∈R）　　D．2^x-1（x＞0）

6．（5 分）已知数列{a_n}满足 $3a_{n+1}+a_n=0$，$a_2=-\frac{4}{3}$，则{a_n}的前 10 项和等于（　　）

A．﹣6（$1-3^{-10}$）　　B．$\frac{1}{9}(1-3^{-10})$　　C．3（$1-3^{-10}$）　　D．3（$1+3^{-10}$）

7．（5 分）$(1+x)^3(1+y)^4$的展开式中 x^2y^2 的系数是（　　）

A．5　　B．8　　C．12　　D．18

8．（5 分）椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左、右顶点分别为 A_1、A_2，点 P 在 C 上且直线 PA_2 斜率的取值范围是[﹣2，﹣1]，那么直线 PA_1 斜率的取值范围是（　　）

A．$[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$　　B．$[\frac{3}{8}, \frac{3}{4}]$　　C．$[\frac{1}{2}, 1]$　　D．$[\frac{3}{4}, 1]$

9．（5 分）若函数 f（x）$=x^2+ax+\frac{1}{x}$在$(\frac{1}{2}, +\infty)$是增函数，则 a 的取值范围是（　　）

A．[﹣1，0]　　B．[﹣1，+∞）　　C．[0，3]　　D．[3，+∞）

10．（5 分）已知正四棱柱 ABCD﹣ $A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，则 CD 与平面 BDC_1 所成角的正弦值等于（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

11．（5 分）已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，点 M（﹣2，2），过点 F 且斜率为 k 的直线与 C 交于 A，B 两点，若$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则 k=（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．2

12．（5 分）已知函数 f（x）=cosxsin2x，下列结论中不正确的是（　　）

A．y=f（x）的图象关于（π，0）中心对称

B．y=f(x)的图象关于$x=\frac{\pi}{2}$对称

C．f(x)的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

D．f（x）既是奇函数，又是周期函数

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13．（5 分）已知 α 是第三象限角，sinα=﹣$\frac{1}{3}$，则 cotα=________.

14．（5 分）6 个人排成一行，其中甲、乙两人不相邻的不同排法共有 种．（用数字作答）

15．（5 分）记不等式组$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x+3y\geqslant 4 \\ 3x+y\leqslant 4 \end{cases}$所表示的平面区域为 D．若直线 y=a（x+1）与 D 有公共点，则 a 的取值范围是________.

16．（5 分）已知圆 O 和圆 K 是球 O 的大圆和小圆，其公共弦长等于球 O 的半径，$OK=\frac{3}{2}$，且圆O与圆K所在的平面所成角为60°，则球 O 的表面积等于

.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（10 分）等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n．已知 $S_3=a_2^2$，且 S_1，S_2，S_4 成等比数列，求$\{a_n\}$的通项式．

18．（12 分）设△ABC 的内角 A，B，C 的内角对边分别为 a，b，c，满足（a+b+c）（a﹣ b+c）=ac．

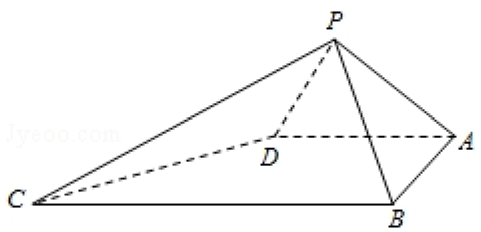
（Ⅰ）求 B．

（Ⅱ）若 $\sin A\sin C=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，求 C．

19．（12 分）如图，四棱锥 P﹣ ABCD 中，∠ABC=∠BAD=90°，BC=2AD，△PAB 与△PAD 都是等边三角形．

（Ⅰ）证明：PB⊥CD；

（Ⅱ）求二面角 A﹣ PD﹣ C 的大小．



20．（12 分）甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛，其中两人比赛，另一人当裁

判，每局比赛结束时，负的一方在下一局当裁判，设各局中双方获胜的概率均为$\frac{1}{2}$，各局比赛的结果都相互独立，第 1 局甲当裁判.

（Ⅰ）求第 4 局甲当裁判的概率；

（Ⅱ）X 表示前 4 局中乙当裁判的次数，求 X 的数学期望.

21．（12 分）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 3，直线 y=2 与 C 的两个交点间的距离为$\sqrt{6}$.

（I）求 a，b；

（II）设过 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别相交于 A、B 两点，且$|AF_1|=|BF_1|$，证明：$|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$成等比数列.

22．（12 分）已知函数$f(x)=\ln(1+x)-\frac{x(1+\lambda x)}{1+x}$.

（I）若 x≥0 时，f（x）≤0，求 λ 的最小值；

（II）设数列$\{a_n\}$的通项 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，证明：$a_{2n}-a_n+\frac{1}{4n}>\ln 2$.

2013年全国统一高考数学试卷（理科）（大纲版）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．（5分）设集合A={1，2，3}，B={4，5}，M={x|x=a+b，a∈A，b∈B}，则M中元素的个数为（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【考点】13：集合的确定性、互异性、无序性；1A：集合中元素个数的最值．

【专题】11：计算题．

【分析】利用已知条件，直接求出a+b，利用集合元素互异求出M中元素的个数即可．

【解答】解：因为集合A={1，2，3}，B={4，5}，M={x|x=a+b，a∈A，b∈B}，

所以a+b的值可能为：1+4=5、1+5=6、2+4=6、2+5=7、3+4=7、3+5=8，

所以M中元素只有：5，6，7，8．共4个．

故选：B．

【点评】本题考查集合中元素个数的最值，集合中元素的互异性的应用，考查计算能力．

2．（5分）$(1+\sqrt{3}i)^3$=（　　）

A．﹣8　　B．8　　C．﹣8i　　D．8i

【考点】A5：复数的运算．

【分析】复数分子、分母同乘﹣8，利用1的立方虚根的性质（$(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2})^3=1$），化简即可．

【解答】解：$(1+\sqrt{3}i)^3=\frac{-8(1+\sqrt{3}i)^3}{-8}=-8(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2})^3=-8$

故选：A．

【点评】复数代数形式的运算，是基础题．

3．（5 分）已知向量$\vec{m}$=（λ+1，1），$\vec{n}$=（λ+2，2），若（$\vec{m}+\vec{n}$）⊥（$\vec{m}-\vec{n}$），则 λ=（　　）

A．﹣4　　B．﹣3　　C．﹣2　　D．﹣1

【考点】9T：数量积判断两个平面向量的垂直关系．

【专题】5A：平面向量及应用．

【分析】利用向量的运算法则、向量垂直与数量积的关系即可得出．

【解答】解：∵$\vec{m}=(\lambda+1,\ 1)$，$\vec{n}=(\lambda+2,\ 2)$．

∴$\vec{m}+\vec{n}$=（2λ+3，3），$\vec{m}-\vec{n}=(-1,\ -1)$．

∵$(\vec{m}+\vec{n})\perp(\vec{m}-\vec{n})$，

∴$(\vec{m}+\vec{n})\cdot(\vec{m}-\vec{n})=0$，

∴﹣（2λ+3）﹣3=0，解得 λ=﹣3．

故选：B．

【点评】熟练掌握向量的运算法则、向量垂直与数量积的关系是解题的关键．

4．（5 分）已知函数 f（x）的定义域为（﹣1，0），则函数 f（2x+1）的定义域为（　　）

A．（﹣1，1）　　B．$(-1,\ -\frac{1}{2})$　　C．（﹣1，0）　　D．$(\frac{1}{2},\ 1)$

【考点】33：函数的定义域及其求法．

【专题】51：函数的性质及应用．

【分析】原函数的定义域，即为 2x+1 的范围，解不等式组即可得解．

【解答】解：∵原函数的定义域为（﹣ 1，0），

∴﹣ 1＜2x+1＜0，解得﹣ 1＜x＜﹣ $\frac{1}{2}$.

∴则函数 f（2x+1）的定义域为$(-1, -\frac{1}{2})$.

故选：B．

【点评】考查复合函数的定义域的求法，注意变量范围的转化，属简单题．

5．（5 分）函数 f（x）=$\log_2$（1+$\frac{1}{x}$）（x＞0）的反函数 f^{-1}（x）=（　　）

A．$\frac{1}{2^x-1}(x>0)$　B．$\frac{1}{2^x-1}(x\neq0)$　C．2^x﹣ 1（x∈R）　D．2^x﹣ 1（x＞0）

【考点】4R：反函数．

【专题】51：函数的性质及应用．

【分析】把 y 看作常数，求出 x：x=$\frac{1}{2^y+1}$，x，y 互换，得到 y=$\log_2$（1+$\frac{1}{x}$）的反函数．注意反函数的定义域．

【解答】解：设 y=$\log_2$（1+$\frac{1}{x}$），

把 y 看作常数，求出 x：

1+$\frac{1}{x}$=2^y，x=$\frac{1}{2^y-1}$，其中 y＞0，

x，y 互换，得到 y=$\log_2$（1+$\frac{1}{x}$）的反函数：y=$\frac{1}{2^x-1}(x>0)$，

故选：A．

【点评】本题考查对数函数的反函数的求法，解题时要认真审题，注意对数式和指数式的相互转化．

6．（5 分）已知数列{a_n}满足 $3a_{n+1}+a_n=0$，$a_2=-\frac{4}{3}$，则{a_n}的前 10 项和等于（　　）

A．﹣ 6（1﹣ 3^{-10}）　B．$\frac{1}{9}(1-3^{-10})$　C．3（1﹣ 3^{-10}）

D. $3(1+3^{-10})$

【考点】89：等比数列的前 n 项和.

【专题】11：计算题；54：等差数列与等比数列.

【分析】由已知可知，数列$\{a_n\}$是以$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列，结合已知$a_2=-\frac{4}{3}$可求 a_1，然后代入等比数列的求和公式可求

【解答】解：∵$3a_{n+1}+a_n=0$

∴$\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{1}{3}$

∴数列$\{a_n\}$是以$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列

∵ $a_2=-\frac{4}{3}$

∴$a_1=4$

由等比数列的求和公式可得，$S_{10}=\frac{4[1-(-\frac{1}{3})^{10}]}{1+\frac{1}{3}}=3(1-3^{-10})$

故选：C.

【点评】本题主要考查了等比数列的通项公式及求和公式的简单应用，属于基础试题

7. （5 分）$(1+x)^3(1+y)^4$的展开式中 x^2y^2 的系数是（　　）

A. 5　　B. 8　　C. 12　　D. 18

【考点】DA：二项式定理.

【专题】11：计算题.

【分析】由题意知利用二项展开式的通项公式写出展开式的通项，令 x 的指数为 2，写出出展开式中 x^2 的系数，第二个因式 y^2 的系数，即可得到结果.

【解答】解：$(x+1)^3$的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_3^rx^r$

令 r=2 得到展开式中 x^2 的系数是 $C_3^2=3$，

（1+y）^{4}的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_4^r y^r$

令 r=2 得到展开式中 y^2 的系数是 $C_4^2=6$，

（1+x）^{3}（1+y）^{4}的展开式中 x^2y^2 的系数是：3×6=18，

故选：D．

【点评】本题考查利用二项展开式的通项公式解决二项展开式的特定项问题，本题解题的关键是写出二项式的展开式，所有的这类问题都是利用通项来解决的．

8．（5 分）椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左、右顶点分别为 A_1、A_2，点 P 在 C 上且直线 PA_2 斜率的取值范围是[﹣2，﹣1]，那么直线 PA_1 斜率的取值范围是（　　）

A．$[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}]$　　B．$[\frac{3}{8},\ \frac{3}{4}]$　　C．$[\frac{1}{2},\ 1]$　　D．$[\frac{3}{4},\ 1]$

【考点】I3：直线的斜率；KH：直线与圆锥曲线的综合．

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】由椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$可知其左顶点 A_1（﹣2，0），右顶点 A_2（2，0）．设 P（x_0，y_0）（$x_0\neq\pm2$），代入椭圆方程可得$\frac{y_0^2}{x_0^2-4}=-\frac{3}{4}$．利用斜率计算公式可得$k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}$，再利用已知给出的$k_{PA_1}$的范围即可解出．

【解答】解：由椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$可知其左顶点 A_1（﹣2，0），右顶点 A_2（2，0）．

设 P（x_0，y_0）（$x_0\neq\pm2$），则$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，得$\frac{y_0^2}{x_0^2-4}=-\frac{3}{4}$．

∵$k_{PA_2}=\frac{y_0}{x_0-2}$，$k_{PA_1}=\frac{y_0}{x_0+2}$，

$\therefore k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-4}=-\dfrac{3}{4}$,

$\because -2\leqslant k_{PA_2}\leqslant -1$,

$\therefore -2\leqslant -\dfrac{3}{4k_{PA_1}}\leqslant -1$，解得$\dfrac{3}{8}\leqslant k_{PA_1}\leqslant\dfrac{3}{4}$.

故选：B.

【点评】熟练掌握椭圆的标准方程及其性质、斜率的计算公式、不等式的性质等是解题的关键.

9．（5 分）若函数 f（x）$=x^2+ax+\dfrac{1}{x}$在$(\dfrac{1}{2},+\infty)$是增函数，则 a 的取值范围是（　　）

A．[﹣ 1，0]　　B．[﹣ 1，+∞）　　C．[0，3]　　D．[3，+∞）

【考点】6B：利用导数研究函数的单调性.

【专题】53：导数的综合应用.

【分析】由函数$f(x)=x^2+ax+\dfrac{1}{x}$在（$\dfrac{1}{2}$，+∞）上是增函数，可得$f'(x)=2x+a-\dfrac{1}{x^2}\geqslant 0$ 在（$\dfrac{1}{2}$，+∞）上恒成立，进而可转化为 $a\geqslant\dfrac{1}{x^2}-2x$ 在（$\dfrac{1}{2}$，+∞）上恒成立，构造函数求出$\dfrac{1}{x^2}-2x$ 在（$\dfrac{1}{2}$，+∞）上的最值，可得 a 的取值范围.

【解答】解：$\because f(x)=x^2+ax+\dfrac{1}{x}$在（$\dfrac{1}{2}$，+∞）上是增函数，

故$f'(x)=2x+a-\dfrac{1}{x^2}\geqslant 0$ 在（$\dfrac{1}{2}$，+∞）上恒成立，

即 $a\geqslant\dfrac{1}{x^2}-2x$ 在（$\dfrac{1}{2}$，+∞）上恒成立，

令 $h(x)=\dfrac{1}{x^2}-2x$，

则 $h'(x)=-\dfrac{2}{x^3}-2$，

当 $x\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$时，$h'(x)<0$，则 h（x）为减函数.

$\therefore h(x)<h(\dfrac{1}{2})=3$

∴$a\geq 3$.

故选：D.

【点评】本题考查的知识点是利用导数研究函数的单调性，恒成立问题，是导数的综合应用，难度中档.

10．（5 分）已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，则 CD 与平面 BDC_1 所成角的正弦值等于（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

【考点】MI：直线与平面所成的角.

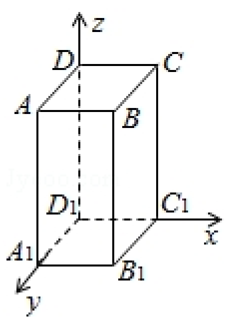
【专题】15：综合题；16：压轴题；5G：空间角；5H：空间向量及应用.

【分析】设 AB=1，则 $AA_1=2$，分别以 $\overrightarrow{D_1A_1}$、$\overrightarrow{D_1C_1}$、$\overrightarrow{D_1D}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系，设 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDC_1 的一个法向量，CD 与平面 BDC_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{DC}|}\right|$，在空间坐标系下求出向量坐标，代入计算即可.

【解答】解：设 AB=1，则 $AA_1=2$，分别以 $\overrightarrow{D_1A_1}$、$\overrightarrow{D_1C_1}$、$\overrightarrow{D_1D}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系，

如下图所示：



则 D（0，0，2），C_1（1，0，0），B（1，1，2），C（1，0，2），

$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DC_1}=(1,0,-2)$，$\overrightarrow{DC}=(1,0,0)$，

设$\vec{n}$=（x，y，z）为平面 BDC_1 的一个法向量，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+y=0\\x-2z=0\end{cases}$，取$\vec{n}$=（2，﹣2，1），

设 CD 与平面 BDC_1 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\vec{n}||\overrightarrow{DC}|}|=\dfrac{2}{3}$，

故选：A．

【点评】本题考查直线与平面所成的角，考查空间向量的运算及应用，准确理解线面角与直线方向向量、平面法向量夹角关系是解决问题的关键．

11．（5 分）已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，点 M（﹣ 2，2），过点 F 且斜率为 k 的直线与 C 交于 A，B 两点，若$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则 k=（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．2

【考点】9O：平面向量数量积的性质及其运算；K8：抛物线的性质．

【专题】11：计算题；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】斜率 k 存在，设直线 AB 为 y=k（x﹣ 2），代入抛物线方程，利用$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$=（$x_1+2$，$y_1-2$）•（$x_2+2$，$y_2-2$）=0，即可求出 k 的值．

【解答】解：由抛物线 C：$y^2=8x$ 得焦点（2，0），

由题意可知：斜率 k 存在，设直线 AB 为 y=k（x﹣ 2），

代入抛物线方程，得到 $k^2x^2-(4k^2+8)x+4k^2=0$，△＞0，

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）．

∴$x_1+x_2=4+\dfrac{8}{k^2}$，$x_1x_2=4$．

∴$y_1+y_2=\dfrac{8}{k}$，$y_1y_2=-16$，

又$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，

∴$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$=（$x_1+2$，$y_1-2$）•（$x_2+2$，$y_2-2$）$=\dfrac{16}{k^2}-\dfrac{16}{k}+4=0$

∴k=2.

故选：D.

【点评】本题考查直线与抛物线的位置关系，考查向量的数量积公式，考查学生的计算能力，属于中档题.

12．（5 分）已知函数 f（x）=cosxsin2x，下列结论中不正确的是（　　）

A．y=f（x）的图象关于（π，0）中心对称

B．y=f(x)的图象关于$x=\frac{\pi}{2}$对称

C．f(x)的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

D．f（x）既是奇函数，又是周期函数

【考点】H1：三角函数的周期性；HW：三角函数的最值.

【专题】11：计算题；57：三角函数的图像与性质.

【分析】根据函数图象关于某点中心对称或关于某条直线对称的公式，对 A、B 两项加以验证，可得它们都正确．根据二倍角的正弦公式和同角三角函数的关系化简，得 f（x）=2sinx（1﹣ $\sin^2x$），再换元：令 t=sinx，得到关于 t 的三次函数，利用导数研究此函数的单调性可得 f（x）的最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{9}$，故 C 不正确；根据函数周期性和奇偶性的定义加以验证，可得 D 项正确．由此可得本题的答案.

【解答】解：对于 A，因为 f（π+x）=cos（π+x）sin（2π+2x）=﹣ cosxsin2x，

f（π﹣ x）=cos（π﹣ x）sin（2π﹣ 2x）=cosxsin2x，所以 f（π+x）+f（π﹣ x）=0，

可得 y=f（x）的图象关于（π，0）中心对称，故 A 正确；

对于 B，因为 f（$\frac{\pi}{2}$+x）=cos（$\frac{\pi}{2}$+x）sin（π+2x）=﹣ sinx（﹣ sin2x）=sinxsin2x，

f（$\frac{\pi}{2}$﹣ x）=cos（$\frac{\pi}{2}$﹣ x）sin（π﹣ 2x）=sinxsin2x，所以 f（$\frac{\pi}{2}$+x）=f（$\frac{\pi}{2}$﹣ x），

可得 y=f（x）的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$对称，故 B 正确；

对于 C，化简得 f（x）$=\cos x\sin 2x=2\cos^2 x\sin x=2\sin x(1-\sin^2 x)$，

令 $t=\sin x$，f（x）=g（t）$=2t(1-t^2)$，$-1\leqslant t\leqslant 1$，

∵g（t）$=2t(1-t^2)$的导数 g'（t）$=2-6t^2=2(1+\sqrt{3}t)(1-\sqrt{3}t)$

∴当 $t\in(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3})$ 时或 $t\in(\frac{\sqrt{3}}{3},1)$ 时 g'（t）<0，函数 g（t）为减函数；

当 $t\in(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ 时 g'（t）>0，函数 g（t）为增函数.

因此函数 g（t）的最大值为 $t=-1$ 时或 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$时的函数值，

结合 $g(-1)=0<g(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{4\sqrt{3}}{9}$，可得 g（t）的最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

由此可得 f（x）的最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{9}$而不是$\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 C 不正确；

对于 D，因为 $f(-x)=\cos(-x)\sin(-2x)=-\cos x\sin 2x=-f(x)$，所以 f（x）是奇函数.

因为 $f(2\pi+x)=\cos(2\pi+x)\sin(4\pi+2x)=\cos x\sin 2x=f(x)$，

所以 2π 为函数的一个周期，得 f（x）为周期函数．可得 f（x）既是奇函数，又是周期函数，得 D 正确.

综上所述，只有 C 项不正确.

故选：C.

【点评】本题给出三角函数式，研究函数的奇偶性、单调性和周期性．着重考查了三角恒等变换公式、利用导数研究函数的单调性和函数图象的对称性等知识，属于中档题.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13．（5 分）已知 α 是第三象限角，$\sin\alpha=-\frac{1}{3}$，则 $\cot\alpha=$__$2\sqrt{2}$__.

【考点】GG：同角三角函数间的基本关系.

【专题】56：三角函数的求值.

【分析】根据 α 是第三象限的角，得到 cosα 小于 0，然后由 sinα 的值，利用同角三角函数间的基本关系求出 cosα 的值，进而求出 cotα 的值.

【解答】解：由 α 是第三象限的角，得到 cosα＜0，

又 sinα=$-\frac{1}{3}$，所以 cosα=$-\sqrt{1-(-\frac{1}{3})^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

则 cotα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\sqrt{2}$

故答案为：$2\sqrt{2}$

【点评】此题考查学生灵活运用同角三角函数间的基本关系化简求值，是一道基础题．学生做题时注意 α 的范围．

14．（5 分）6 个人排成一行，其中甲、乙两人不相邻的不同排法共有 480 种．（用数字作答）

【考点】D9：排列、组合及简单计数问题．

【专题】11：计算题．

【分析】排列好甲、乙两人外的 4 人，然后把甲、乙两人插入 4 个人的 5 个空位中即可．

【解答】解：6 个人排成一行，其中甲、乙两人不相邻的不同排法：排列好甲、乙两人外的 4 人，有 A_4^4中方法，

然后把甲、乙两人插入 4 个人的 5 个空位，有 A_5^2种方法，

所以共有：$A_4^4\cdot A_5^2$=480．

故答案为：480．

【点评】本题考查了乘法原理，以及排列的简单应用，插空法解答不相邻问题．

15．（5 分）记不等式组$\begin{cases}x\geqslant 0\\x+3y\geqslant 4\\3x+y\leqslant 4\end{cases}$所表示的平面区域为 D．若直线 y=a（x+1）与 D 有公共点，则 a 的取值范围是 $[\frac{1}{2}，4]$．

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】16：压轴题；59：不等式的解法及应用．

【分析】本题考查的知识点是简单线性规划的应用，我们要先画出满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 0\\x+3y\geqslant 4\\3x+y\leqslant 4\end{cases}$ 的平面区域，然后分析平面区域里各个角点，然后将其代入 y=a（x+1）中，求出 y=a（x+1）对应的 a 的端点值即可．

【解答】解：满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 0\\x+3y\geqslant 4\\3x+y\leqslant 4\end{cases}$ 的平面区域如图示：

因为 y=a（x+1）过定点（﹣1，0）．

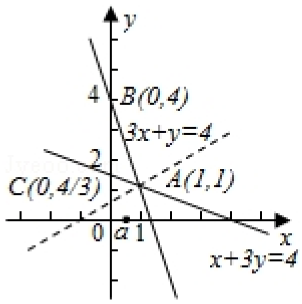
所以当 y=a（x+1）过点 B（0，4）时，得到 a=4，

当 y=a（x+1）过点 A（1，1）时，对应 $a=\frac{1}{2}$．

又因为直线 y=a（x+1）与平面区域 D 有公共点．

所以 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 4$．

故答案为：$[\frac{1}{2}，4]$



【点评】在解决线性规划的小题时，我们常用"角点法"，其步骤为：①由约束条件画出可行域⇒②求出可行域各个角点的坐标⇒③将坐标逐一代入目标函数⇒④验证，求出最优解．

16．（5 分）已知圆 O 和圆 K 是球 O 的大圆和小圆，其公共弦长等于球 O 的半径，$OK=\frac{3}{2}$，且圆O与圆K所在的平面所成角为60°，则球 O 的表面积等于 16π．

【考点】LG：球的体积和表面积．

【专题】16：压轴题；5F：空间位置关系与距离．

【分析】正确作出图形，利用勾股定理，建立方程，即可求得结论．

【解答】解：如图所示，设球 O 的半径为 r，AB 是公共弦，∠OCK 是面面角

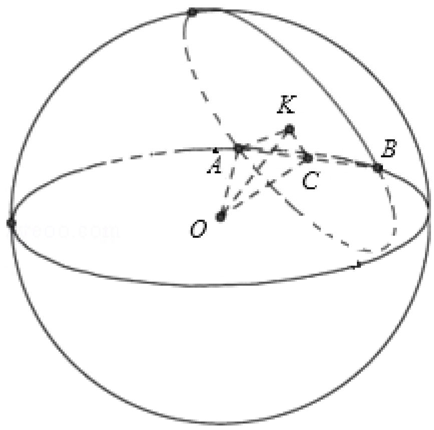
根据题意得 $OC=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，$CK=\frac{\sqrt{3}}{4}r$

在△OCK 中，$OC^2=OK^2+CK^2$，即$\frac{3}{4}r^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{16}r^2$

∴$r^2=4$

∴球 O 的表面积等于 $4\pi r^2=16\pi$

故答案为 16π



【点评】本题考查球的表面积，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题．

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（10 分）等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n．已知 $S_3=a_2^2$，且 S_1，S_2，S_4 成等比数列，求$\{a_n\}$的通项式．

【考点】85：等差数列的前 n 项和；88：等比数列的通项公式．

【专题】11：计算题；54：等差数列与等比数列．

【分析】由 $s_3=a_2^2$，结合等差数列的求和公式可求 a_2，然后由 $S_2^2=S_1\cdot S_4$，结合等差数列的求和公式进而可求公差 d，即可求解通项公式

【解答】解：设数列的公差为 d

由 $s_3=a_2^2$得，$3a_2=a_2^2$

∴$a_2=0$ 或 $a_2=3$

由题意可得，$S_2{}^2=S_1\cdot S_4$

∴ $(2a_2-d)^2=(a_2-d)(4a_2+2d)$

若 $a_2=0$，则可得 $d^2=-2d^2$ 即 $d=0$ 不符合题意

若 $a_2=3$，则可得 $(6-d)^2=(3-d)(12+2d)$

解可得 $d=0$ 或 $d=2$

∴$a_n=3$ 或 $a_n=2n-1$

【点评】本题主要考查了等差数列的通项公式及求和公式的应用，等比数列的性质的简单应用，属于基础试题

18．（12 分）设△ABC 的内角 A，B，C 的内角对边分别为 a，b，c，满足 $(a+b+c)(a-b+c)=ac$．

（Ⅰ）求 B．

（Ⅱ）若 $\sin A\sin C=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，求 C．

【考点】GP：两角和与差的三角函数；HR：余弦定理．

【专题】58：解三角形．

【分析】（I）已知等式左边利用多项式乘多项式法则计算，整理后得到关系式，利用余弦定理表示出 cosB，将关系式代入求出 cosB 的值，由 B 为三角形的内角，利用特殊角的三角函数值即可求出 B 的度数；

（II）由（I）得到 A+C 的度数，利用两角和与差的余弦函数公式化简 $\cos(A-C)$，变形后将 $\cos(A+C)$ 及 $2\sin A\sin C$ 的值代入求出 $\cos(A-C)$ 的值，利用特殊角的三角函数值求出 A－C 的值，与 A+C 的值联立即可求出 C 的度数．

【解答】解：（I）∵$(a+b+c)(a-b+c)=(a+c)^2-b^2=ac$，

∴$a^2+c^2-b^2=-ac$，

∴$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{1}{2}$，

又 B 为三角形的内角，

则 B=120°；

（II）由（I）得：A+C=60°，∵sinAsinC=$\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，cos（A+C）=$\frac{1}{2}$，

∴cos（A﹣C）=cosAcosC+sinAsinC=cosAcosC﹣sinAsinC+2sinAsinC=cos（A+C）+2sinAsinC=$\frac{1}{2}$+2×$\frac{\sqrt{3}-1}{4}$=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴A﹣C=30°或 A﹣C=﹣30°，

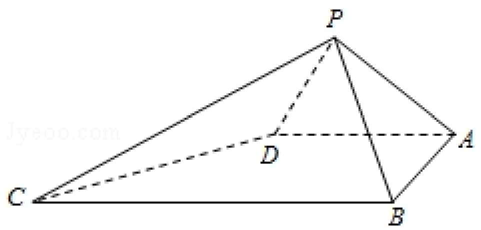
则 C=15°或 C=45°．

【点评】此题考查了余弦定理，两角和与差的余弦函数公式，以及特殊角的三角函数值，熟练掌握余弦定理是解本题的关键．

19．（12 分）如图，四棱锥 P﹣ABCD 中，∠ABC=∠BAD=90°，BC=2AD，△PAB 与△PAD 都是等边三角形．

（Ⅰ）证明：PB⊥CD；

（Ⅱ）求二面角 A﹣PD﹣C 的大小．



【考点】LW：直线与平面垂直；M5：共线向量与共面向量．

【专题】11：计算题；5G：空间角．

【分析】（I）取 BC 的中点 E，连接 DE，过点 P 作 PO⊥平面 ABCD 于 O，连接 OA、OB、OD、OE．可证出四边形 ABED 是正方形，且 O 为正方形 ABED 的中心．因此 OE⊥OB，结合三垂线定理，证出 OE⊥PB，而 OE 是△BCD 的中位线，可得 OE∥CD，因此 PB⊥CD；

（II）由（I）的结论，证出 CD⊥平面 PBD，从而得到 CD⊥PD．取 PD 的中点 F，PC 的中点 G，连接 FG，可得 FG∥CD，所以 FG⊥PD．连接 AF，可得 AF⊥PD

，因此∠AFG为二面角A－PD－C的平面角，连接AG、EG，则EG∥PB，可得EG⊥OE．设AB=2，可求出AE、EG、AG、AF和FG的长，最后在△AFG中利用余弦定理，算出∠AFG=π－ $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$，即得二面角A－PD－C的平面角大小．

【解答】解：（I）取BC的中点E，连接DE，可得四边形ABED是正方形

过点P作PO⊥平面ABCD，垂足为O，连接OA、OB、OD、OE

∵△PAB与△PAD都是等边三角形，∴PA=PB=PD，可得OA=OB=OD

因此，O是正方形ABED的对角线的交点，可得OE⊥OB

∵PO⊥平面ABCD，得直线OB是直线PB在内的射影，∴OE⊥PB

∵△BCD中，E、O分别为BC、BD的中点，∴OE∥CD，可得PB⊥CD；

（II）由（I）知CD⊥PO，CD⊥PB

∵PO、PB是平面PBD内的相交直线，∴CD⊥平面PBD

∵PD⊂平面PBD，∴CD⊥PD

取PD的中点F，PC的中点G，连接FG，

则FG为△PCD有中位线，∴FG∥CD，可得FG⊥PD

连接AF，由△PAD是等边三角形可得AF⊥PD，∴∠AFG为二面角A－PD－C的平面角

连接AG、EG，则EG∥PB

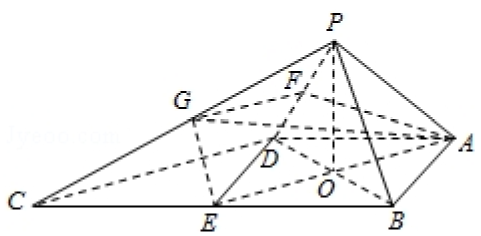
∵PB⊥OE，∴EG⊥OE，

设AB=2，则AE=$2\sqrt{2}$，EG=$\frac{1}{2}$PB=1，故AG=$\sqrt{AE^2+EG^2}$=3

在△AFG中，FG=$\frac{1}{2}$CD=$\sqrt{2}$，AF=$\sqrt{3}$，AG=3

∴$\cos\angle AFG=\frac{2+3-9}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，得∠AFG=π－ $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$，

即二面角A－PD－C的平面角大小是π－ $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$．



【点评】本题给出特殊的四棱锥，求证直线与直线垂直并求二面角平面角的大小，着重考查了线面垂直的判定与性质、三垂线定理和运用余弦定理求二面的大小等知识，属于中档题．

20．（12 分）甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛，其中两人比赛，另一人当裁判，每局比赛结束时，负的一方在下一局当裁判，设各局中双方获胜的概率均为$\frac{1}{2}$，各局比赛的结果都相互独立，第 1 局甲当裁判．

（Ⅰ）求第 4 局甲当裁判的概率；

（Ⅱ）X 表示前 4 局中乙当裁判的次数，求 X 的数学期望．

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式；CH：离散型随机变量的期望与方差．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】（I）令 A_1 表示第 2 局结果为甲获胜，A_2 表示第 3 局甲参加比赛时，结果为甲负，A 表示第 4 局甲当裁判，分析其可能情况，每局比赛的结果相互独立且互斥，利用独立事件、互斥事件的概率求解即可．

（II）X 的所有可能值为 0，1，2．分别求出 X 取每一个值的概率，列出分布列后求出期望值即可．

【解答】解：（I）令 A_1 表示第 2 局结果为甲获胜．A_2 表示第 3 局甲参加比赛时，结果为甲负．A 表示第 4 局甲当裁判．

则 $A=A_1 \bullet A_2$，$P(A)=P(A_1 \bullet A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{1}{4}$；

（Ⅱ）X 的所有可能值为 0，1，2．令 A_3 表示第 3 局乙和丙比赛时，结果为乙胜．

B_1 表示第 1 局结果为乙获胜，B_2 表示第 2 局乙和甲比赛时，结果为乙胜，B_3 表示第 3 局乙参加比赛时，结果为乙负，

则 $P(X=0)=P(B_1B_2\overline{B_3})=P(B_1)P(B_2)P(\overline{B_3})=\frac{1}{8}$.

$P(X=2)=P(\overline{B_1}B_3)=P(\overline{B_1})P(B_3)=\frac{1}{4}$.

$P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=2)=\frac{5}{8}$.

从而 $EX=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{5}{8}+2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{8}$.

【点评】本题考查互斥、独立事件的概率，离散型随机变量的分布列和期望等知识，同时考查利用概率知识解决问题的能力.

21．（12 分）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 3，直线 y=2 与 C 的两个交点间的距离为$\sqrt{6}$.

（I）求 a，b；

（II）设过 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别相交于 A、B 两点，且$|AF_1|=|BF_1|$，证明：$|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$成等比数列.

【考点】K4：椭圆的性质；KH：直线与圆锥曲线的综合.

【专题】14：证明题；15：综合题；16：压轴题；35：转化思想；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】（I）由题设，可由离心率为 3 得到参数 a，b 的关系，将双曲线的方程用参数 a 表示出来，再由直线y=2与C的两个交点间的距离为$\sqrt{6}$建立方程求出参数 a 即可得到双曲线的方程；

（II）由（I）的方程求出两焦点坐标，设出直线 l 的方程设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），将其与双曲线 C 的方程联立，得出 $x_1+x_2=\frac{6k^2}{k^2-8}$，$x_1x_2=\frac{9k^2+8}{k^2-8}$，再利用$|AF_1|=|BF_1|$建立关于 A，B 坐标的方程，得出两点横坐标的关系 $x_1+x_2=-\frac{2}{3}$，由此方程求出 k 的值，得出直线的方程，从而可求得：$|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$，再利用等比数列的性质进行判断即可证明出结论.

【解答】解：（I）由题设知$\frac{c}{a}=3$，即$\frac{b^2+a^2}{a^2}=9$，故 $b^2=8a^2$

所以 C 的方程为 $8x^2-y^2=8a^2$

将 y=2 代入上式，并求得 $x=\pm\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}$，

由题设知，$2\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$，解得 $a^2=1$

所以 $a=1$，$b=2\sqrt{2}$

（II）由（I）知，F_1（﹣3，0），F_2（3，0），C 的方程为 $8x^2-y^2=8$　　①

由题意，可设 l 的方程为 $y=k(x-3)$，$|k|<2\sqrt{2}$代入①并化简得 $(k^2-8)x^2-6k^2x+9k^2+8=0$

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

则 $x_1\leqslant-1$，$x_2\geqslant1$，$x_1+x_2=\frac{6k^2}{k^2-8}$，$x_1x_2=\frac{9k^2+8}{k^2-8}$，于是

$|AF_1|=\sqrt{(x_1+3)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1+3)^2+8x_1^2-8}=-(3x_1+1)$，

$|BF_1|=\sqrt{(x_2+3)^2+y_2^2}=\sqrt{(x_2+3)^2+8x_2^2-8}=3x_2+1$，

$|AF_1|=|BF_1|$得$-(3x_1+1)=3x_2+1$，即 $x_1+x_2=-\frac{2}{3}$

故$\frac{6k^2}{k^2-8}=-\frac{2}{3}$，解得 $k^2=\frac{4}{5}$，从而 $x_1x_2=\frac{9k^2+8}{k^2-8}=-\frac{19}{9}$

由于$|AF_2|=\sqrt{(x_1-3)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-3)^2+8x_1^2-8}=1-3x_1$，

$|BF_2|=\sqrt{(x_2-3)^2+y_2^2}=\sqrt{(x_2-3)^2+8x_2^2-8}=3x_2-1$，

故$|AB|=|AF_2|-|BF_2|=2-3(x_1+x_2)=4$，$|AF_2||BF_2|=3(x_1+x_2)-9x_1x_2-1=16$

因而$|AF_2||BF_2|=|AB|^2$，所以$|AF_2|$、$|AB|$、$|BF_2|$成等比数列

【点评】本题考查直线与圆锥曲线的综合关系，考查了运算能力，题设条件的转化能力，方程的思想运用，此类题综合性强，但解答过程有其固有规律，一般需要把直线与曲线联立利用根系关系，解答中要注意提炼此类题解答过程中的共性，给以后解答此类题提供借鉴．

22．（12 分）已知函数$f(x)=\ln(1+x)-\frac{x(1+\lambda x)}{1+x}$．

（I）若 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\leqslant0$，求 λ 的最小值；

（II）设数列$\{a_n\}$的通项 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，证明：$a_{2n}-a_n+\frac{1}{4n}>\ln2$．

【考点】6E：利用导数研究函数的最值；8E：数列的求和；8K：数列与不等式的综合．

【专题】16：压轴题；35：转化思想；53：导数的综合应用；54：等差数列与等比数列．

【分析】（I）由于已知函数的最大值是0，故可先求出函数的导数，研究其单调性，确定出函数的最大值，利用最大值小于等于0求出参数λ的取值范围，即可求得其最小值；

（II）根据（I）的证明，可取 $\lambda=\frac{1}{2}$，由于 x＞0 时，f（x）＜0 得出 $\frac{x(2+x)}{2+2x}>\ln(1+x)$，考察发现，若取 $x=\frac{1}{k}$，则可得出 $\frac{2k+1}{2k(k+1)}>\ln(\frac{k+1}{k})$，以此为依据，利用放缩法，即可得到结论

【解答】解：（I）由已知，f（0）=0，

$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{(1+2\lambda x)(1+x)-x(1+\lambda x)}{(1+x)^2}=\frac{(1-2\lambda)x-\lambda x^2}{(1+x)^2}$，

∴f′（0）=0

欲使 x≥0 时，f（x）≤0 恒成立，则 f（x）在（0，+∞）上必为减函数，即在（0，+∞）上 f′（x）＜0 恒成立，

当 λ≤0 时，f′（x）＞0 在（0，+∞）上恒成立，为增函数，故不合题意，

若 $0<\lambda<\frac{1}{2}$ 时，由 f′（x）＞0 解得 $x<\frac{1-2\lambda}{\lambda}$，则当 $0<x<\frac{1-2\lambda}{\lambda}$，f′（x）＞0，所以当 $0<x<\frac{1-2\lambda}{\lambda}$ 时，f（x）＞0，此时不合题意，

若 $\lambda\geq\frac{1}{2}$，则当 x＞0 时，f′（x）＜0 恒成立，此时 f（x）在（0，+∞）上必为减函数，所以当 x＞0 时，f（x）＜0

恒成立，

综上，符合题意的 λ 的取值范围是 $\lambda\geq\frac{1}{2}$，即 λ 的最小值为 $\frac{1}{2}$

（II）令 $\lambda=\frac{1}{2}$，由（I）知，当 x＞0 时，f（x）＜0，即 $\frac{x(2+x)}{2+2x}>\ln(1+x)$

取 $x=\frac{1}{k}$，则 $\frac{2k+1}{2k(k+1)}>\ln(\frac{k+1}{k})$

于是 $a_{2n}-a_n+\frac{1}{4n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}$

$=\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2(n+1)}+\cdots+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}$

$=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2(n+3)}+\cdots++\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{4n}$

$=\sum_{k=n}^{2n-1}\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)}\right)$

$=\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{2k+1}{2k(k+1)}>\sum_{k=n}^{2n-1}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln 2n-\ln n=\ln 2$

所以 $a_{2n}-a_n+\frac{1}{4n}>\ln 2$

【点评】本题考查了数列中证明不等式的方法及导数求最值的普通方法，解题的关键是充分利用已有的结论再结合放缩法，本题考查了推理判断的能力及转化化归的思想，有一定的难度