2021年普通高等学校招生全国统一考试（新高考Ⅰ卷）

数 学

一、单选题

1.设集合 $A=\{x\mid -2<x<4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\bigcap B=$（　　）

A. $\{2\}$

B. $\{2,3\}$

C. $\{3,4\}$

D. $\{2,3,4\}$

答案：

B

解析：

$A\bigcap B=\{2,3\}$，选 B.

2.已知 $z=2-i$，则 $z(\overline{z}+i)=$（　　）

A. $6-2i$

B. $4-2i$

C. $6+2i$

D. $4+2i$

答案：

C

解析：

$\overline{z}=2+i, z(\overline{z}+i)=(2-i)(2+2i)=6+2i$，选 C.

3.已知圆锥的底面半径为 $\sqrt{2}$，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的母线长为（　　）

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. 4

D. $4\sqrt{2}$

答案：

B

解析：

设母线长为 l，则 $\pi l=2\sqrt{2}\pi\Rightarrow l=2\sqrt{2}$.

4.下列区间中，函数 $f(x)=7\sin(x-\frac{\pi}{6})$ 单调递增的区间是（　　）

A. $(0,\frac{\pi}{2})$

B. $(\frac{\pi}{2},\pi)$

C. $(\pi,\frac{3\pi}{2})$

D. $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$

答案：

A

解析：

$f(x)$ 单调递增区间为：$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le x-\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)\Rightarrow 2k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le 2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in Z)$，令 $k=0$，故选 A.

5.已知 F_1，F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，点 M 在 C 上，则 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 的最大值为（　　）

A. 13

B. 12

C. 9

D. 6

答案：

C

解析：

由椭圆定义，$|MF_1|+|MF_2|=6$，则$|MF_1||MF_2|\le(\frac{|MF_1|+|MF_2|}{2})^2=9$，故选 C.

6. 若 $\tan\theta=-2$，则 $\frac{\sin\theta(1+\sin2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$（　　）

A. $-\frac{6}{5}$

B. $-\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{6}{5}$

答案：

C

解析：

$\frac{\sin\theta(1+\sin2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{2}{5}$，故选 C.

7. 若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=e^x$ 的两条切线，则（　　）

A. $e^b<a$

B. $e^a<b$

C. $0<a<e^b$

D. $0<b<e^a$

答案：

D

解析：

设切点为 $P(x_0,y_0)$，

$\because y=e^x$，$\therefore y'=e^x$，

则切线斜率 $k=e^{x_0}$，

切线方程为 $y-b=e^{x_0}(x-a)$，

又$\because P(x_0,y_0)$ 在切线上以及 $y=e^x$ 上，

则有 $e^{x_0}-b=e^{x_0}(x_0-a)$，

整理得 $e^{x_0}(x_0-a-1)+b=0$，

令 $g(x)=e^x(x-a-1)+b$，

则 $g'(x)=e^x(x-a)$，

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增，

则 $g(x)$ 在 $x=a$ 时取到极小值即最小值 $g(a)=b-e^a$，

又由已知过 (a,b) 可作 $y=e^x$ 的两条切线，

等价于 $g(x)=e^x(x-a-1)+b$ 有两个不同的零点，

则 $g_{\min}(x)=g(a)=b-e^a<0$，得 $e^a>b$，

又当 $x\to-\infty$ 时，$e^x(x-a-1)\to0$，则 $e^x(x-a-1)+b\to b$，

$\therefore b>0$，

当 $x=1+a>a$ 时，有 $g(1+a)=b>0$，

即 $g(x)$ 有两个不同的零点.

$\therefore 0<b<e^a$.

8. 有 6 个相同的球，分别标有数字 $1,2,3,4,5,6$，从中有放回的随机取两次，每次取 1 个球. 甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则（　　）

A. 甲与丙相互独立

B. 甲与丁相互独立

C. 乙与丙相互独立

D. 丙与丁相互独立

答案：

B

解析：

由题意知，两点数和为8的所有可能为：$(2,6)$，$(3,5)$，$(4,4)$，$(5,3)$，$(6,2)$，

两点数和为7的所有可能为：$(1,6)$，$(2,5)$，$(3,4)$，$(4,3)$，$(5,2)$，$(6,1)$，

$\therefore P(\text{甲})=\frac{1}{6}$，$P(\text{乙})=1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$，$P(\text{丙})=\frac{5}{36}$，$P(\text{丁})=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$，

$P(\text{甲丙})=0$，$P(\text{甲丁})=\frac{1}{36}$，$P(\text{乙丙})=\frac{1}{36}$，$P(\text{丙丁})=0$，

故$P(\text{甲丁})=P(\text{甲})\cdot P(\text{丁})$，B 正确，故选 B.

二、多选题

9. 有一组样本数据$x_1,x_2,\cdots,x_n$，由这组数据得到新样本数据$y_1,y_2,\cdots,y_n$，其中$y_1=x_i+c(i=1,2\cdots,n)$，c为非零常数，则（　　）

A. 两组样本数据的样本平均数相同

B. 两组样本数据的样本中位数相同

C. 两组样本数据的样本标准差相同

D. 两组样本数据的样本极差相同

答案：

C、D

解析：

对于 A 选项：$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n_1}$，$\overline{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+c$，$\therefore\overline{x}\neq\overline{y}$，∴A 错误；

对于 B 选项：可假设数据样本$x_1,x_2,\cdots,x_n$中位数为m，由$y_i=x_i+c$可知数据样本$y_1,y_2,\cdots,y_n$的中位数为$m+c$，∴B 错误；

对于 C 选项：
$$S_1=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}$$

$$S_2=\sqrt{\frac{1}{n}[(y_1-\overline{y})^2+(y_2-\overline{y})^2+\cdots+(y_n-\overline{y})^2]}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}=S_1$$
，∴C 正确；

对于 D 选项：∵$y_i=x_i+c$，∴两组样本数据极差相同，∴D 正确。

10. 已知O为坐标原点，点$P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,-\sin\beta)$，$P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，$A(1,0)$，则（　　）

A. $|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|$

B. $|\overrightarrow{AP_1}|=|\overrightarrow{AP_2}|$

C. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$

D. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

答案：

A、C

解析：

$|\overrightarrow{OP_1}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$，$|\overrightarrow{OP_2}|=\sqrt{\cos^2\beta+(-\sin\beta)^2}=1$，∴A 正确；

$\overrightarrow{AP_1}^2=(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha=2-2\cos\alpha$，

$\overrightarrow{AP_2}^2=(\cos\beta-1)^2+(-\sin\beta)^2=2-2\cos\beta$，$2-2\cos\alpha\neq2-2\cos\beta$，∴B 错；

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\cos(\alpha+\beta)$，$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$，∴C 正确；

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\cos\alpha$，$\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)-\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+2\beta)$，

∴D 错.

11. 已知点P在圆$(x-5)^2+(y-5)^2=16$上，点$A(4,0)$，$B(0,2)$，则（　　）

A. 点P到直线AB的距离小于10

B. 点P到直线AB的距离大于2

C. 当$\angle PBA$最小时，$|PB|=3\sqrt{2}$

D. 当$\angle PBA$最大时，$|PB|=3\sqrt{2}$

答案：

A、C、D

解析：

由已知易得直线 AB 的方程为 $x+2y-4=0$．

圆心 $(5,5)$ 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|5+10-4|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{11}{\sqrt{5}}>4$，

∴直线 AB 与圆相离，

则 P 到 AB 的距离的取值范围为 $[\frac{11}{\sqrt{5}}-4,\frac{11}{\sqrt{5}}+4]$，

又 $4<\frac{11}{\sqrt{5}}<5$，

则 A 正确，B 错误，

由图易得，

当 P 在点 P_1 处时，BP_1 与圆 C 相切，

此时 $\angle PBA=\angle P_1BA$ 最小，

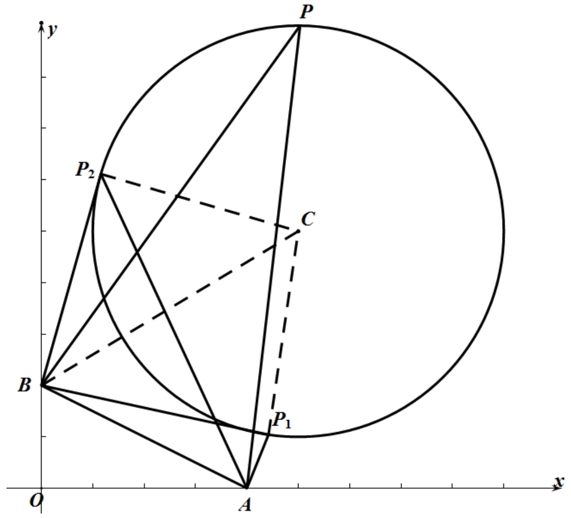
$|BC|=\sqrt{5^2+(5-2)^2}=\sqrt{34}$，$|CP_1|=4$，

$\therefore BP_1=3\sqrt{2}$，

同理当 P 在点 P_2 处，$\angle PBA=\angle P_2BA$ 最大，

此时 $BP_2=\sqrt{BC^2-P_2C^2}=3\sqrt{2}$．

故 C、D 正确.



12. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=1$，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中 $\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则（　　）

A. 当 $\lambda=1$ 时，ΔAB_1P 的周长为定值

B. 当 $\mu=1$ 时，三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值

C. 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1P\perp BP$

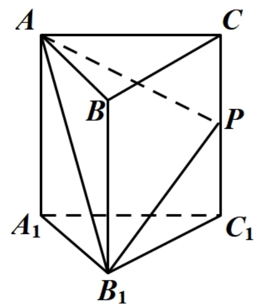
D. 当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P

答案:

B、D

解析:

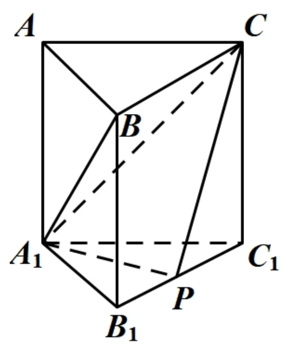
对于 A，当 $\lambda=1$ 时，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，$\therefore\overrightarrow{CP}=\mu\overrightarrow{BB_1}$，此时 P 在线段 CC_1 上运动，此时 ΔAB_1P 的周长不为定值，A 错.



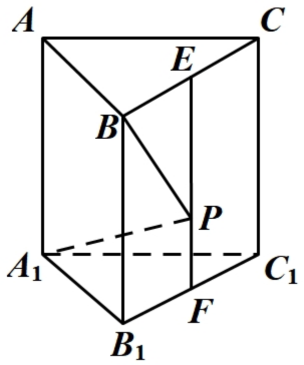
对于 B，当 $\mu=1$ 时，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}\Rightarrow\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{BC}$，此时 P 在线段 B_1C_1 上运动,

$\because B_1C_1//$ 平面 A_1BC，$\therefore$ 点 P 到平面 A_1BC 的距离即为点 B_1 到平面 A_1BC 的距离，

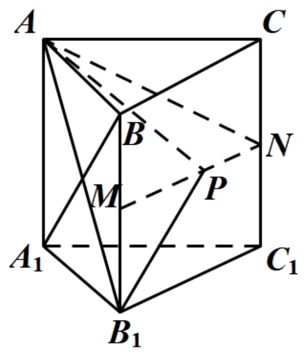
$\therefore V_{P-A_1BC}=V_{B_1-A_1BC}$ 为定值，B 正确.



对于C，当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，分别取$BC$，$B_1C_1$的中点$E,F$，此时$P$在线段$EF$上运动，要使$A_1P\perp BP$，只需$A_1P$在平面$BCC_1B_1$上的射影$PF$与$BP$垂直，此时$P$在$E$或$F$的位置，有两个$P$，C错误.



对于D，$\mu=\frac{1}{2}$时，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$，分别取$BB_1,CC_1$的中点$M,N$，则$P$在线段$MN$上运动，∵正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AA_1=1$，$\therefore A_1B\perp AB_1$，要使得$A_1B\perp$平面$AB_1P$，只需$A_1B$在平面$BCC_1B_1$上的射影与$B_1P$垂直，有且只有一个点$P$即为$N$点时，满足题意，D正确.



三、填空题

13. 已知函数$f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$是偶函数，则$a=$_________.

答案：

1

解析：

因为$f(x)$为偶函数，则$f(-x)=f(x)$，即$x^3(a2^x-2^{-x})=-x^3(a2^{-x}-2^x)$，整理则有

$(a-1)(2^x+2^{-x})=0$，故$a=1$.

14. 已知O为坐标原点，抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，P为C上一点，PF与x轴垂直，Q为x轴上一点，且$PQ\perp OP$. 若$|FQ|=6$，则C的准线方程为_________.

答案：

$x=-\frac{3}{2}$

解析：

因为PF垂直x轴，故点P坐标为$(\frac{p}{2},p)$，又因为$OP\perp PF$，则$\frac{FQ}{PF}=\frac{PF}{OF}=2$，即$\frac{6}{p}=2$，故$p=3$，则准线方程为$x=-\frac{3}{2}$.

15. 函数$f(x)=|2x-1|-2\ln x$的最小值为_________.

答案：

1

解析：

当$x>\frac{1}{2}$时，$f(x)=2x-1-2\ln x$，$f'(x)=2-\frac{2}{x}$，$f'(x)<0$时，$\frac{1}{2}<x<1$，$f'(x)>0$时，$x>1$，

$\therefore f(x)$在$(\frac{1}{2},1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，当$0<x\le\frac{1}{2}$时，$f(x)=1-2x-2\ln x$，函数单调递减，

综上，函数在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以函数最小值为$f(1)=1$.

16. 某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折. 规格为$20\text{dm}\times12\text{dm}$的长方形纸，对折1次共可以得到$10\text{dm}\times12\text{dm}$，$20\text{dm}\times6\text{dm}$两种规格的图形，它们的面积之和$S_1=240\text{dm}^2$，对折2次共可以得到$5\text{dm}\times12\text{dm}$，$10\text{dm}\times6\text{dm}$，$20\text{dm}\times3\text{dm}$三种规格的图形，它们的面积之和$S_2=180\text{dm}^2$，以此类推. 则对折4次共可以得到不同规格图形的种数为__________；如果对折n次，那么$\sum_{k=1}^{n}S_k=$_________dm^2.

答案：

5

$720-\frac{240n+720}{2^n}$

解析：

（1）易知有$20\text{dm}\times\frac{3}{4}\text{dm}$，$10\text{dm}\times\frac{3}{2}\text{dm}$，$5\text{dm}\times3\text{dm}$，$\frac{5}{2}\text{dm}\times6\text{dm}$，$\frac{5}{4}\text{dm}\times12\text{dm}$，共5种规格.

（2）由题可知对折k次共有$k+1$种规格，且面积为$\frac{240}{2^k}$，故$S_k=\frac{240(k+1)}{2^k}$，则$\sum_{k=1}^{n}S_k=240\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2^k}$，记

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2^k}$，则$\frac{1}{2}T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2^{k+1}}$，故

$\frac{1}{2}T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2^{k+1}}=1+(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+2}{2^{k+1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{2^{k+1}})-\frac{n+1}{2^{n+1}}$

$=1+\frac{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}$，则$T_n=3-\frac{n+3}{2^n}$，故

$\sum_{k=1}^{n}S_k=240(3-\frac{n+3}{2^n})=720-\frac{240n+720}{2^n}$.

四、解答题

17. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n\text{为奇数}\\a_n+2,n\text{为偶数}\end{cases}$.

（1）记$b_n=a_{2n}$，写出b_1，b_2，并求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求$\{a_n\}$的前20项和.

答案：

见解析；

解析：

（1）$b_1=a_2=a_1+1=2$，$a_3=a_2+2=4$，$b_2=a_4=a_3+1=5$，

$b_{n+1}-b_n=a_{2n+2}-a_{2n}=(a_{2n+1}+1)-a_{2n}=a_{2n}+3-a_{2n}=3$，

$\therefore\{b_n\}$是以3为公差的等差数列，$\therefore b_n=2+(n-1)\times3=3n-1$.

（2）$a_2+a_4+\cdots+a_{20}=\frac{10(2+29)}{2}=155$，

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=a_2-1+a_4-1+\cdots+a_{20}-1=155-10=145$，$\therefore S_{20}=155+145=300$.

18. 某学校组织“一带一路”知识竞赛，有A，B两类问题. 每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束；若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束. A类问题中的每个问题回答正确得20分，否则得0分；B类问题中的每个问题回答正确得80分，否则得0分.

已知小明能正确回答A类问题的概率为0.8， 能正确回答B类问题的概率为0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

（1）若小明先回答A类问题，记X为小明的累计得分，求X的分布列；

（2）为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

答案：

见解析；

解析：

（1）若小明先回答A问题，记X为小明累计得分，则X的取值可能为：100，20，0，因为各题互相独立，由分步完成原理得$P(X=100)=0.8\times0.6=0.48$，$P(X=20)=0.8\times(1-0.6)=0.32$，

$P(X=0)=1-0.8=0.2$，列表如下：

X	100	20	0
P	0.48	0.32	0.2

则X的数学期望$E(X)=100\times0.48+20\times0.32+0\times0.2=54.4$.

（2）若小明先回答B问题，记Y为小明的累计得分，则Y的取值可能为100，80，0，因为各题互相独立，由独立性原理知$P(Y=100)=0.6\times0.8=0.48$，$P(Y=80)=0.6\times0.2=0.12$，$P(Y=0)=1-0.6=0.4$，列表如下：

Y	100	80	0
P	0.48	0.12	0.4

先答B类，则Y的数学期望为：$E(Y)=100\times0.48+80\times0.12+0\times0.4=57.6$，

由（1）知$E(Y)>E(X)$，$\therefore$小明先选B类问题作答.

19. 记ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c. 已知$b^2=ac$，点D在边AC上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

（1）证明：$BD=b$；

（2）若$AD=2DC$，求$\cos\angle ABC$.

答案：

见解析；

解析：

（1）由 $BD\sin\angle ABC=a\sin C$，根据正弦定理可得，∴ $BD\cdot b=ac$，

又 $b^2=ac$，∴ $BD\cdot b=b^2$，∴ $BD=b$.

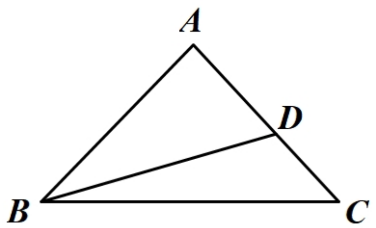
（2）$AD=\frac{2}{3}b$，$CD=\frac{1}{3}b$，又由（1）$BD=b$

$\cos\angle ADB=\dfrac{\frac{4}{9}b^2+b^2-c^2}{2\cdot\frac{2}{3}b\cdot b}=\dfrac{\frac{13}{9}b^2-c^2}{\frac{4}{3}b^2}$，$\cos\angle BDC=\dfrac{\frac{1}{9}b^2+b^2-a^2}{2\cdot\frac{1}{3}b\cdot b}=\dfrac{\frac{10}{9}b^2-a^2}{\frac{2}{3}b^2}$，

$\cos\angle ADB+\cos\angle BDC=0$，∴ $\frac{13}{9}b^2-c^2+\frac{20}{9}b^2-2a^2=0$，

∴ $\frac{11}{3}ac-c^2-2a^2=0$，$(\frac{c}{a})^2-\frac{11}{3}\cdot\frac{c}{a}+2=0$，∴ $\frac{c}{a}=3$ 或 $\frac{2}{3}$，

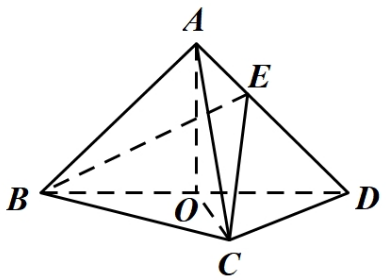
$\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+c^2-ac}{2ac}=\dfrac{7}{12}$ 或 $\dfrac{7}{6}$（舍），∴ $\cos\angle ABC=\dfrac{7}{12}$.



20. 如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，$AB=AD$，O 为 BD 的中点.

（1）证明：$OA\perp CD$；

（2）若 ΔOCD 是边长为1的等边三角形，点 E 在棱 AD 上，$DE=2EA$，且二面角 $E-BC-D$ 的大小为 45°，求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.



答案：

见解析

解析：

（1）平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，∵ $AB=AD$，O 为 BD 中点，∴ $AO\perp BD$，$AO\subset$ 平面 ABD，∴ $AO\perp$ 平面 BCD，$CD\subset$ 平面 BCD，∴ $AO\perp CD$.

（2）方法一：取 OD 中点 F，∵ ΔOCD 为正三角形，∴ $CF\perp OD$，过 O 作 $OM//CF$ 与 BC 交于 M 点，则 $OM\perp OD$，∴ OM，OD，OA 两两垂直，以 O 为坐标原点，分别以 OM，OD，OA 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，$B(0,-1,0)$，$C(\frac{\sqrt3}{2},\frac{1}{2},0)$，$D(0,1,0)$，设 $A(0,0,t)$，则 $E(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}t)$，$OA\perp$ 平面 BCD，

∴平面 BCE 的法向量为 $\vec n=(x,y,z)$，$\begin{cases}\vec n\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec n\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，∴ $\begin{cases}\frac{\sqrt3}{2}x+\frac{3}{2}y=0\\ \frac{4}{3}y+\frac{2}{3}tz=0\end{cases}$，不妨设 $x=\sqrt3$，则 $y=-1$，$z=\frac{2}{t}$

，则 $\vec n=(\sqrt3,-1,\frac{2}{t})$，二面角 $E-BC-D$ 的大小为 45°，∴ $\dfrac{\sqrt2}{2}=\dfrac{\vec n\cdot\overrightarrow{OA}}{|\vec n||\overrightarrow{OA}|}=\dfrac{2}{t\sqrt{4+\frac{4}{t^2}}}$，∴ $t=1$，

$S_{\Delta OCD}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt3}{2}=\frac{\sqrt3}{4}$，∴ $S_{\Delta BCD}=\frac{\sqrt3}{2}$，∴ $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot OA=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt3}{2}\times1=\frac{\sqrt3}{6}$.

方法二：过 E 作 $EH\perp BD$ 交 BD 于点 H，再过 H 作 $HI\perp BC$ 交 BC 于点 I，显然这样会有 $EH\perp$ 平面 BCD，而这个正三角形 OCD 加上 $BO=DO$，可知 $BC\perp CD$，意味着 $HI//CD$，同时很自然的也会有 $EH\perp HI$，而二面角 $E-BC-D$ 很显然就是 $\angle EIH$，这个是 45°，说明 $EH=HI$，

综合上面的条件，会得到 $\frac{OH}{DH}=\frac{AE}{ED}=\frac{1}{2}$，然后 $\frac{BH}{DH}=2$，再然后 $\frac{2}{3}=\frac{BH}{BD}=\frac{HI}{CD}$，故 $HI=EH=\frac{2}{3}$，同时 $\frac{EH}{AO}=\frac{ED}{AD}=\frac{2}{3}$，得到 $AO=1$，那么就有 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}AO\cdot S_{\Delta BCD}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt3=\frac{\sqrt3}{6}$.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1(-\sqrt{17},0)$，$F_2(\sqrt{17},0)$，点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=2$. 记 M 的轨迹为 C.

（1）求 C 的方程；

（2）设点 T 在直线 $x=\frac{1}{2}$ 上，过 T 的两条直线分别交 C 于 A，B 两点和 P，Q 两点，且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

答案：

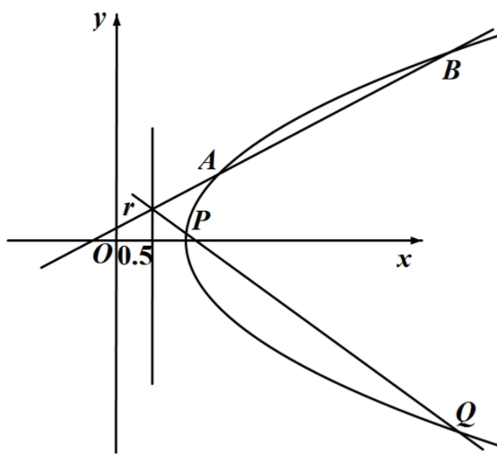
见解析

解析：

（1）$c=\sqrt{17}$，$2a=2$，$a=1$，$b=4$，

C表示双曲线的右支，C的方程为$x^2-\frac{y^2}{16}=1(x\ge 1)$.

（2）设$T(\frac{1}{2},m)$，设直线AB的方程为：$y=k_1(x-\frac{1}{2})+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，



$$\begin{cases} y=k_1(x-\frac{1}{2})+m \\ 16x^2-y^2=16 \end{cases}\Rightarrow 16x^2-[k_1^{\ 2}(x^2-x+\frac{1}{4})+2k_1m(x-\frac{1}{2})+m^2]=16,$$

$(16-k_1^{\ 2})x^2+(k_1^{\ 2}-2k_1m)x-\frac{1}{4}k_1^{\ 2}+k_1m-m^2-16=0$，

$\therefore |TA|\cdot|TB|=(1+k_1)^2[(x_1-\frac{1}{2})(x_2-\frac{1}{2})]=(1+k_1^{\ 2})[x_1x_2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{4}]$

$$=(1+k_1^{\ 2})[\frac{k_1m-\frac{1}{4}k_1^{\ 2}-m^2-16}{16-k_1^{\ 2}}-\frac{1}{2}\frac{2k_1m-k_1^{\ 2}}{16-k_1^{\ 2}}+\frac{1}{4}]=(1+k_1^{\ 2})\frac{-m^2-12}{16-k_1^{\ 2}}=(1+k_1^{\ 2})\frac{m^2+12}{k_1^{\ 2}-16},$$

设$k_{PQ}=k_2$，同理可得$|TP|\cdot|TQ|=(1+k_2^{\ 2})\frac{m^2+12}{k_2^{\ 2}-16}$，

$\therefore (1+k_1^{\ 2})\cdot\frac{m^2+12}{k_1^{\ 2}-16}=(1+k_2^{\ 2})\cdot\frac{m^2+12}{k_2^{\ 2}-16}\Rightarrow k_2^{\ 2}-16k_1^{\ 2}=k_1^{\ 2}-16k_2^{\ 2}$，$\therefore k_1^{\ 2}=k_2^{\ 2}$，

$\because k_1\ne k_2$，$\therefore k_1=-k_2$，$k_1+k_2=0$.

22.已知函数$f(x)=x(1-\ln x)$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）设a，b为两个不相等的正数，且$b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$.

答案：

见解析

解析：

（1）$f'(x)=-\ln x$，令$f'(x)=0\Rightarrow x=1$，

当$0<x<1$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当$x>1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

（2）$\frac{\ln a}{a}-\frac{\ln b}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$，$\therefore \frac{\ln a+1}{a}=\frac{\ln b+1}{b}$，

令$\frac{1}{a}=m$，$\frac{1}{b}=n$，即证$2<m+n<e$，$\therefore m(1-\ln m)=n(1-\ln n)$，

令$f(x)=x(1-\ln x)$，$f'(x)=-\ln x$，令$f'(x)=0\Rightarrow x=1$，

当$0<x<1$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当$x>1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

$\because f(m)=f(n)$，$\therefore 0<m<1$，$1<n<e$，

要证$m+n>2$，即证$f(n)<f(2-m)$，即证$f(m)<f(2-m)$，

令$F(x)=f(x)-f(2-x)=x(1-\ln x)-(2-x)[1-\ln(2-x)]$，$x\in(0,1)$，

$F'(x)=-\ln x-\ln(2-x)=\ln\frac{1}{x(2-x)}>0$，$F(x)$单调递增，$\therefore F(x)<F(1)=0$，左边证毕！再证右边：$\because$

$m(1-\ln m)=n(1-\ln n)>m$，要证$m+n<e$，即证$n(1-\ln n)+n<e$，

令$g(x)=x(1-\ln x)+x$，$1<x<e$，$\therefore g'(x)=1-\ln x-1+1=1-\ln x>0$，

$\therefore g(x)$在$(1,e)$上单调递增，$\therefore g(x)<g(e)=e$，$\therefore g(n)<e$，证毕！