

## 2011 年全国统一高考数学试卷（文科）（大纲版）

### 一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. （5 分）设集合  $U=\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $M=\{1, 2, 3\}$ ,  $N=\{2, 3, 4\}$ , 则  $\complement_U (M \cap N) = ( \quad )$
- A.  $\{1, 2\}$       B.  $\{2, 3\}$       C.  $\{2, 4\}$       D.  $\{1, 4\}$
2. （5 分）函数  $y=2\sqrt{x}$  ( $x \geq 0$ ) 的反函数为  $( \quad )$
- A.  $y=\frac{x^2}{4}$  ( $x \in \mathbb{R}$ )    B.  $y=\frac{x^2}{4}$  ( $x \geq 0$ )    C.  $y=4x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ )    D.  $y=4x^2$  ( $x \geq 0$ )
3. （5 分）设向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ ,  $|\vec{a}+2\vec{b}| = ( \quad )$
- A.  $\sqrt{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C.  $\sqrt{5}$       D.  $\sqrt{7}$
4. （5 分）若变量  $x$ 、 $y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y \leq 6 \\ x-3y \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$ , 则  $z=2x+3y$  的最小值为  $( \quad )$
- A. 17      B. 14      C. 5      D. 3
5. （5 分）下面四个条件中, 使  $a > b$  成立的充分而不必要的条件是  $( \quad )$
- A.  $a > b+1$       B.  $a > b-1$       C.  $a^2 > b^2$       D.  $a^3 > b^3$
6. （5 分）设  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $a_1=1$ , 公差  $d=2$ ,  $S_{k+2} - S_k = 24$ , 则  $k = ( \quad )$
- A. 8      B. 7      C. 6      D. 5
7. （5 分）设函数  $f(x) = \cos \omega x$  ( $\omega > 0$ ), 将  $y=f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度后, 所得的图象与原图象重合, 则  $\omega$  的最小值等于  $( \quad )$
- A.  $\frac{1}{3}$       B. 3      C. 6      D. 9
8. （5 分）已知直二面角  $\alpha - l - \beta$ , 点  $A \in \alpha$ ,  $AC \perp l$ ,  $C$  为垂足, 点  $B \in \beta$ ,  $BD \perp l$ ,  $D$  为垂足, 若  $AB=2$ ,  $AC=BD=1$ , 则  $CD = ( \quad )$
- A. 2      B.  $\sqrt{3}$       C.  $\sqrt{2}$       D. 1
9. （5 分）4 位同学每人从甲、乙、丙 3 门课程中选修 1 门, 则恰有 2 人选修课程甲的不同选法共有  $( \quad )$
- A. 12 种      B. 24 种      C. 30 种      D. 36 种

10. (5分) 设  $f(x)$  是周期为 2 的奇函数, 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) = 2x(1-x)$ ,

则  $f(-\frac{5}{2}) =$  ( )

- A.  $-\frac{1}{2}$                       B.  $-\frac{1}{4}$                       C.  $\frac{1}{4}$                       D.  $\frac{1}{2}$

11. (5分) 设两圆  $C_1$ 、 $C_2$  都和两坐标轴相切, 且都过点  $(4, 1)$ , 则两圆心的距离  $|C_1C_2| =$  ( )

- A. 4                      B.  $4\sqrt{2}$                       C. 8                      D.  $8\sqrt{2}$

12. (5分) 已知平面  $\alpha$  截一球面得圆  $M$ , 过圆心  $M$  且与  $\alpha$  成  $60^\circ$  二面角的平面  $\beta$  截该球面得圆  $N$ , 若该球的半径为 4, 圆  $M$  的面积为  $4\pi$ , 则圆  $N$  的面积为 ( )

- A.  $7\pi$                       B.  $9\pi$                       C.  $11\pi$                       D.  $13\pi$

## 二、填空题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 满分 20 分)

13. (5分)  $(1-x)^{10}$  的二项展开式中,  $x$  的系数与  $x^9$  的系数之差为: \_\_\_\_\_.

14. (5分) 已知  $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ ,  $\tan \alpha = 2$ , 则  $\cos \alpha =$  \_\_\_\_\_.

15. (5分) 已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E$  为  $C_1D_1$  的中点, 则异面直线  $AE$  与  $BC$  所成的角的余弦值为 \_\_\_\_\_.

16. (5分) 已知  $F_1$ 、 $F_2$  分别为双曲线  $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$  的左、右焦点, 点  $A \in C$ , 点  $M$  的坐标为  $(2, 0)$ ,  $AM$  为  $\angle F_1AF_2$  的平分线, 则  $|AF_2| =$  \_\_\_\_\_.

## 三、解答题 (共 6 小题, 满分 70 分)

17. (10分) 设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $a_2 = 6$ ,  $6a_1 + a_3 = 30$ , 求  $a_n$  和  $S_n$ .

18. (12 分)  $\triangle ABC$  的内角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的对边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ . 已知  $a\sin A + c\sin C -$

$$\sqrt{2}a\sin C = b\sin B,$$

(I) 求  $B$ ;

(II) 若  $A=75^\circ$ ,  $b=2$ , 求  $a$ ,  $c$ .

19. (12 分) 根据以往统计资料, 某地车主购买甲种保险的概率为 0.5, 购买乙种保险但不购买甲种保险的概率为 0.3, 设各车主购买保险相互独立.

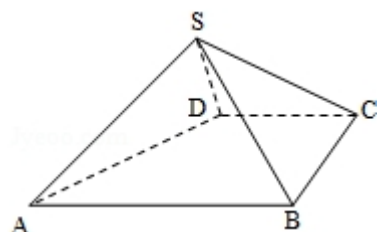
(I) 求该地 1 位车主至少购买甲、乙两种保险中的 1 种的概率;

(II) 求该地的 3 位车主中恰有 1 位车主甲、乙两种保险都不购买的概率.

20. (12 分) 如图, 四棱锥  $S-ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $BC \perp CD$ , 侧面  $SAB$  为等边三角形,  $AB=BC=2$ ,  $CD=SD=1$ .

(I) 证明:  $SD \perp$  平面  $SAB$ ;

(II) 求  $AB$  与平面  $SBC$  所成的角的大小.



21. (12 分) 已知函数  $f(x) = x^3 + 3ax^2 + (3 - 6a)x + 12a - 4$  ( $a \in \mathbb{R}$ )

(I) 证明: 曲线  $y = f(x)$  在  $x = 0$  处的切线过点  $(2, 2)$ ;

(II) 若  $f(x)$  在  $x = x_0$  处取得极小值,  $x_0 \in (1, 3)$ , 求  $a$  的取值范围.

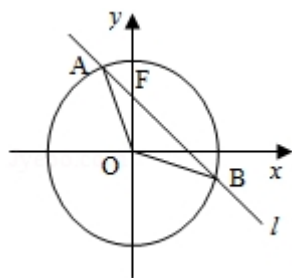
22. (12 分) 已知  $O$  为坐标原点,  $F$  为椭圆  $C: x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$  在  $y$  轴正半轴上的焦

点, 过  $F$  且斜率为  $-\sqrt{2}$  的直线  $l$  与  $C$  交于  $A$ 、 $B$  两点, 点  $P$  满足  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$

.

(I) 证明: 点  $P$  在  $C$  上;

(II) 设点  $P$  关于点  $O$  的对称点为  $Q$ , 证明:  $A$ 、 $P$ 、 $B$ 、 $Q$  四点在同一圆上.



# 2011 年全国统一高考数学试卷（文科）（大纲版）

参考答案与试题解析

## 一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. （5 分）设集合  $U=\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $M=\{1, 2, 3\}$ ,  $N=\{2, 3, 4\}$ , 则  $C_U(M \cap N) = ( \quad )$

- A.  $\{1, 2\}$                       B.  $\{2, 3\}$                       C.  $\{2, 4\}$                       D.  $\{1, 4\}$

【考点】1H: 交、并、补集的混合运算.

【专题】11: 计算题.

【分析】先根据交集的定义求出  $M \cap N$ , 再依据补集的定义求出  $C_U(M \cap N)$ .

【解答】解:  $\because M=\{1, 2, 3\}$ ,  $N=\{2, 3, 4\}$ ,  $\therefore M \cap N=\{2, 3\}$ , 则  $C_U(M \cap N) = \{1, 4\}$ ,

故选: D.

【点评】本题考查两个集合的交集、补集的定义, 以及求两个集合的交集、补集的方法.

2. （5 分）函数  $y=2\sqrt{x}$  ( $x \geq 0$ ) 的反函数为 ( )

- A.  $y=\frac{x}{4}$  ( $x \in \mathbb{R}$ )    B.  $y=\frac{x^2}{4}$  ( $x \geq 0$ )    C.  $y=4x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ )    D.  $y=4x^2$  ( $x \geq 0$ )

【考点】4R: 反函数.

【专题】11: 计算题.

【分析】由原函数的解析式解出自变量  $x$  的解析式, 再把  $x$  和  $y$  交换位置, 注明反函数的定义域 (即原函数的值域).

【解答】解:  $\because y=2\sqrt{x}$  ( $x \geq 0$ ),

$$\therefore x=\frac{y^2}{4}, y \geq 0,$$

故反函数为  $y = \frac{x^2}{4}$  ( $x \geq 0$ ) .

故选：B.

【点评】本题考查函数与反函数的定义，求反函数的方法和步骤，注意反函数的定义域是原函数的值域.

3. (5 分) 设向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ ,  $|\vec{a} + 2\vec{b}| =$  ( )

- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\sqrt{5}$                       D.  $\sqrt{7}$

【考点】91: 向量的概念与向量的模; 90: 平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】11: 计算题.

【分析】由  $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + 2\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2}$ , 代入已知可求

【解答】解:  $\because |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ ,

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + 2\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2} = \sqrt{1 - 2 + 4} = \sqrt{3}$$

故选：B.

【点评】本题主要考查了向量的数量积 性质的基本应用，属于基础试题

4. (5 分) 若变量  $x$ 、 $y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y < 6 \\ x-3y \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$ , 则  $z = 2x + 3y$  的最小值为 ( )

- A. 17                      B. 14                      C. 5                      D. 3

【考点】7C: 简单线性规划.

【专题】31: 数形结合.

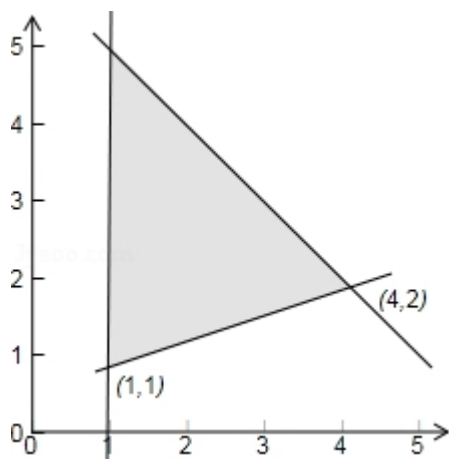
【分析】我们先画出满足约束条件  $\begin{cases} x+y < 6 \\ x-3y \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$  的平面区域，然后求出平面区域内

各个顶点的坐标，再将各个顶点的坐标代入目标函数，比较后即可得到目标函数的最值.

【解答】解：约束条件  $\begin{cases} x+y \leq 6 \\ x-3y \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$  的平面区域如图所示：

由图可知，当  $x=1$ ， $y=1$  时，目标函数  $z=2x+3y$  有最小值为 5

故选：C.



【点评】本题考查的知识点是线性规划，其中画出满足约束条件的平面区域是解答本题的关键.

5. (5 分) 下面四个条件中，使  $a > b$  成立的充分而不必要的条件是 ( )

A.  $a > b+1$

B.  $a > b-1$

C.  $a^2 > b^2$

D.  $a^3 > b^3$

【考点】29: 充分条件、必要条件、充要条件.

【专题】5L: 简易逻辑.

【分析】利用不等式的性质得到  $a > b+1 \Rightarrow a > b$ ；反之，通过举反例判断出  $a > b$  推不出  $a > b+1$ ；利用条件的定义判断出选项.

【解答】解： $a > b+1 \Rightarrow a > b$ ；

反之，例如  $a=2$ ， $b=1$  满足  $a > b$ ，但  $a=b+1$  即  $a > b$  推不出  $a > b+1$ ，

故  $a > b+1$  是  $a > b$  成立的充分而不必要的条件.

故选：A.

【点评】本题考查不等式的性质、考查通过举反例说明某命题不成立是常用方法

6. (5分) 设  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $a_1=1$ , 公差  $d=2$ ,  $S_{k+2}-S_k=24$ , 则  $k=(\quad)$

- A. 8                      B. 7                      C. 6                      D. 5

【考点】85: 等差数列的前  $n$  项和.

【专题】11: 计算题.

【分析】先由等差数列前  $n$  项和公式求得  $S_{k+2}$ ,  $S_k$ , 将  $S_{k+2}-S_k=24$  转化为关于  $k$  的方程求解.

【解答】解: 根据题意:

$$S_{k+2}=(k+2)^2, S_k=k^2$$

$\therefore S_{k+2}-S_k=24$  转化为:

$$(k+2)^2-k^2=24$$

$$\therefore k=5$$

故选: D.

【点评】本题主要考查等差数列的前  $n$  项和公式及其应用, 同时还考查了方程思想, 属中档题.

7. (5分) 设函数  $f(x)=\cos \omega x$  ( $\omega>0$ ), 将  $y=f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度后, 所得的图象与原图象重合, 则  $\omega$  的最小值等于  $(\quad)$

- A.  $\frac{1}{3}$                       B. 3                      C. 6                      D. 9

【考点】HK: 由  $y=A\sin(\omega x+\phi)$  的部分图象确定其解析式.

【专题】56: 三角函数的求值.

【分析】函数图象平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度后, 所得的图象与原图象重合, 说明函数平移整数个周期, 容易得到结果.

【解答】解:  $f(x)$  的周期  $T=\frac{2\pi}{\omega}$ , 函数图象平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度后, 所得的图象



与原图象重合，说明函数平移整数个周期，所以  $\frac{\pi}{3} = k \cdot \frac{2\pi}{\omega}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 令  $k=1$ , 可得  $\omega=6$ .

故选：C.

**【点评】** 本题是基础题，考查三角函数的图象的平移，三角函数的周期定义的理解，考查技术能力，常考题型.

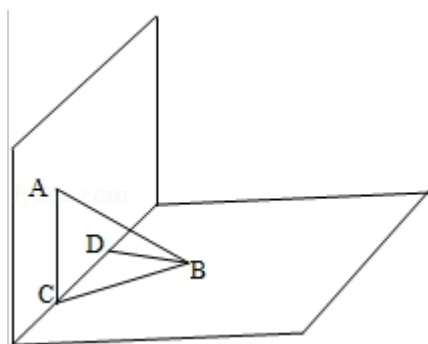
8. (5 分) 已知直二面角  $\alpha - l - \beta$ , 点  $A \in \alpha$ ,  $AC \perp l$ ,  $C$  为垂足, 点  $B \in \beta$ ,  $BD \perp l$ ,  $D$  为垂足, 若  $AB=2$ ,  $AC=BD=1$ , 则  $CD=$  ( )
- A. 2                      B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\sqrt{2}$                       D. 1

**【考点】** MK: 点、线、面间的距离计算.

**【专题】** 11: 计算题.

**【分析】** 根据线面垂直的判定与性质, 可得  $AC \perp CB$ ,  $\triangle ACB$  为直角三角形, 利用勾股定理可得  $BC$  的值; 进而在  $\text{Rt}\triangle BCD$  中, 由勾股定理可得  $CD$  的值, 即可得答案.

**【解答】** 解: 根据题意, 直二面角  $\alpha - l - \beta$ , 点  $A \in \alpha$ ,  $AC \perp l$ , 可得  $AC \perp$  面  $\beta$ , 则  $AC \perp CB$ ,  $\triangle ACB$  为  $\text{Rt}\triangle$ , 且  $AB=2$ ,  $AC=1$ , 由勾股定理可得,  $BC=\sqrt{3}$ ; 在  $\text{Rt}\triangle BCD$  中,  $BC=\sqrt{3}$ ,  $BD=1$ , 由勾股定理可得,  $CD=\sqrt{2}$ ; 故选: C.



**【点评】** 本题考查两点间距离的计算, 计算时, 一般要把空间图形转化为平面图

形，进而构造直角三角形，在直角三角形中，利用勾股定理计算求解.

9. (5分) 4位同学每人从甲、乙、丙3门课程中选修1门，则恰有2人选修课程甲的不同选法共有 ( )
- A. 12种                      B. 24种                      C. 30种                      D. 36种

【考点】D3: 计数原理的应用.

【专题】11: 计算题.

【分析】本题是一个分步计数问题，恰有2人选修课程甲，共有  $C_4^2$  种结果，余下的两个人各有两种选法，共有  $2 \times 2$  种结果，根据分步计数原理得到结果.

【解答】解：由题意知本题是一个分步计数问题，

$\therefore$  恰有2人选修课程甲，共有  $C_4^2=6$  种结果，

$\therefore$  余下的两个人各有两种选法，共有  $2 \times 2=4$  种结果，

根据分步计数原理知共有  $6 \times 4=24$  种结果

故选：B.

【点评】本题考查分步计数问题，解题时注意本题需要分步来解，观察做完这件事一共有几步，每一步包括几种方法，这样看清楚把结果数相乘得到结果.

10. (5分) 设  $f(x)$  是周期为2的奇函数，当  $0 \leq x \leq 1$  时， $f(x) = 2x(1-x)$ ，则  $f(-\frac{5}{2}) = ( )$
- A.  $-\frac{1}{2}$                       B.  $-\frac{1}{4}$                       C.  $\frac{1}{4}$                       D.  $\frac{1}{2}$

【考点】3I: 奇函数、偶函数；3Q: 函数的周期性.

【专题】11: 计算题.

【分析】由题意得  $f(-\frac{5}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = -f(\frac{1}{2})$ ，代入已知条件进行运算.

【解答】解： $\because f(x)$  是周期为2的奇函数，当  $0 \leq x \leq 1$  时， $f(x) = 2x(1-x)$

,

$$\therefore f\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\times\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2},$$

故选：A.

【点评】本题考查函数的周期性和奇偶性的应用，以及求函数的值.

11. (5分) 设两圆  $C_1$ 、 $C_2$  都和两坐标轴相切，且都过点  $(4, 1)$ ，则两圆心的距离  $|C_1C_2| = ( \quad )$

- A. 4                      B.  $4\sqrt{2}$                       C. 8                      D.  $8\sqrt{2}$

【考点】J1：圆的标准方程.

【专题】5B：直线与圆.

【分析】圆在第一象限内，设圆心的坐标为  $(a, a)$ ， $(b, b)$ ，利用条件可得  $a$  和  $b$  分别为  $x^2 - 10x + 17 = 0$  的两个实数根，再利用韦达定理求得两圆心的距离  $|C_1C_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(a-b)^2}$  的值.

【解答】解： $\because$  两圆  $C_1$ 、 $C_2$  都和两坐标轴相切，且都过点  $(4, 1)$ ，故圆在第一象限内，

设两个圆的圆心的坐标分别为  $(a, a)$ ， $(b, b)$ ，由于两圆都过点  $(4, 1)$ ，则有  $\sqrt{(a-4)^2 + (a-1)^2} = |a|$ ， $\sqrt{(b-4)^2 + (b-1)^2} = |b|$ ，

故  $a$  和  $b$  分别为  $(x-4)^2 + (x-1)^2 = x^2$  的两个实数根，

即  $a$  和  $b$  分别为  $x^2 - 10x + 17 = 0$  的两个实数根， $\therefore a+b=10$ ， $ab=17$ ，

$\therefore (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 32$ ， $\therefore$  两圆心的距离  $|C_1C_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(a-b)^2} = 8$ ，

故选：C.

【点评】本题考查直线和圆相切的性质，两点间的距离公式、韦达定理的应用，属于基础题.

12. (5分) 已知平面  $\alpha$  截一球面得圆  $M$ ，过圆心  $M$  且与  $\alpha$  成  $60^\circ$  二面角的平面  $\beta$  截该球面得圆  $N$ ，若该球的半径为 4，圆  $M$  的面积为  $4\pi$ ，则圆  $N$  的面积为 (  $\quad$  )

A.  $7\pi$

B.  $9\pi$

C.  $11\pi$

D.  $13\pi$

【考点】MJ：二面角的平面角及求法.

【专题】11：计算题；16：压轴题.

【分析】先求出圆 M 的半径，然后根据勾股定理求出 OM 的长，找出二面角的平面角，从而求出 ON 的长，最后利用垂径定理即可求出圆 N 的半径，从而求出面积.

【解答】解：∵圆 M 的面积为  $4\pi$

∴圆 M 的半径为 2

根据勾股定理可知  $OM=2\sqrt{3}$

∵过圆心 M 且与  $\alpha$  成  $60^\circ$  二面角的平面  $\beta$  截该球面得圆 N

∴  $\angle OMN=30^\circ$ ，在直角三角形 OMN 中， $ON=\sqrt{3}$

∴圆 N 的半径为  $\sqrt{13}$

则圆的面积为  $13\pi$

故选：D.



【点评】本题主要考查了二面角的平面角，以及解三角形知识，同时考查空间想象能力，分析问题解决问题的能力，属于基础题.

## 二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13. （5 分） $(1-x)^{10}$  的二项展开式中， $x$  的系数与  $x^9$  的系数之差为： 0 .

【考点】DA：二项式定理.

【专题】11：计算题.

【分析】利用二项展开式的通项公式求出展开式的通项，令  $x$  的指数分别取 1；9 求出展开式的  $x$  的系数与  $x^9$  的系数；求出两个系数的差.

【解答】解：展开式的通项为  $T_{r+1}=(-1)^r C_{10}^r x^r$

所以展开式的  $x$  的系数  $-10$

$x^9$  的系数  $-10$

$x$  的系数与  $x^9$  的系数之差为  $(-10) - (-10) = 0$

故答案为: 0

【点评】 本题考查利用二项展开式的通项公式解决二项展开式的特定项问题.

14. (5 分) 已知  $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ ,  $\tan\alpha=2$ , 则  $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

【考点】 GG: 同角三角函数间的基本关系.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 先利用  $\alpha$  的范围确定  $\cos\alpha$  的范围, 进而利用同角三角函数的基本关系, 求得  $\cos\alpha$  的值.

【解答】 解:  $\because \alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ ,

$\therefore \cos\alpha < 0$

$$\therefore \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

故答案为:  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

【点评】 本题主要考查了同角三角函数基本关系的应用. 解题的关键是利用那个角的范围确定三角函数符号.

15. (5 分) 已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E$  为  $C_1D_1$  的中点, 则异面直线  $AE$  与  $BC$  所成的角的余弦值为  $\frac{2}{3}$ .

【考点】 LM: 异面直线及其所成的角.

【专题】 11: 计算题; 16: 压轴题; 31: 数形结合; 35: 转化思想.

【分析】 根据题意知  $AD \parallel BC$ ,  $\therefore \angle DAE$  就是异面直线  $AE$  与  $BC$  所成角, 解三角形即可求得结果.

【解答】解：连接 DE，设 AD=2

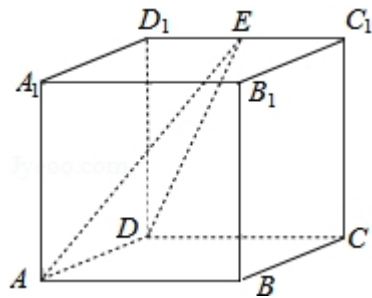
易知 AD//BC，

∴ ∠DAE 就是异面直线 AE 与 BC 所成角，

在△RtADE 中，由于 DE=√5，AD=2，可得 AE=3

$$\therefore \cos \angle DAE = \frac{AD}{AE} = \frac{2}{3},$$

故答案为：  $\frac{2}{3}$  .



【点评】此题是个基础题．考查异面直线所成角问题，求解方法一般是平移法，转化为平面角问题来解决，体现了数形结合和转化的思想．

16. （5 分）已知  $F_1$ 、 $F_2$  分别为双曲线  $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$  的左、右焦点，点  $A \in C$ ，

点 M 的坐标为 (2, 0)，AM 为  $\angle F_1AF_2$  的平分线，则  $|AF_2| = \underline{6}$  .

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】16：压轴题．

【分析】利用双曲线的方程求出双曲线的参数值；利用内角平分线定理得到两条焦半径的关系，再利用双曲线的定义得到两条焦半径的另一条关系，联立求出焦半径．

【解答】解：

不妨设 A 在双曲线的右支上

∵ AM 为  $\angle F_1AF_2$  的平分线

$$\therefore \frac{|AF_1|}{|AF_2|} = \frac{|F_1M|}{|MF_2|} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{又} \because |AF_1| - |AF_2| = 2a = 6$$

解得  $|AF_2|=6$

故答案为 6

【点评】本题考查内角平分线定理；考查双曲线的定义：解有关焦半径问题常用双曲线的定义.

### 三、解答题（共 6 小题，满分 70 分）

17. （10 分）设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，已知  $a_2=6$ ， $6a_1+a_3=30$ ，求  $a_n$  和  $S_n$ .

【考点】88：等比数列的通项公式；89：等比数列的前  $n$  项和.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】设出等比数列的公比为  $q$ ，然后根据等比数列的通项公式化简已知得两等式，得到关于首项与公比的二元一次方程组，求出方程组的解即可得到首项和公比的值，根据首项和公比写出相应的通项公式及前  $n$  项和的公式即可.

【解答】解：设  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ ，由题意得：

$$\begin{cases} a_1 q = 6 \\ 6a_1 + a_1 q^2 = 30 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a_1 = 3 \\ q = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 3 \end{cases},$$

当  $a_1=3$ ， $q=2$  时： $a_n=3 \times 2^{n-1}$ ， $S_n=3 \times (2^n - 1)$ ；

当  $a_1=2$ ， $q=3$  时： $a_n=2 \times 3^{n-1}$ ， $S_n=3^n - 1$ .

【点评】此题考查学生灵活运用等比数列的通项公式及前  $n$  项和的公式化简求值，是一道基础题.

18. （12 分） $\triangle ABC$  的内角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的对边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ . 已知  $a \sin A + c \sin C - \sqrt{2} a \sin C = b \sin B$ ,

(I) 求  $B$ ;

(II) 若  $A=75^\circ$ ， $b=2$ ，求  $a$ ， $c$ .

【考点】HU：解三角形.

【专题】11：计算题.

【分析】（Ⅰ）利用正弦定理把题设等式中的角的正弦转换成边的关系，代入余弦定理中求得  $\cos B$  的值，进而求得  $B$ .

（Ⅱ）利用两角和公式先求得  $\sin A$  的值，进而利用正弦定理分别求得  $a$  和  $c$ .

【解答】解：（Ⅰ）由正弦定理得  $a^2 + c^2 - \sqrt{2}ac = b^2$ ,

由余弦定理可得  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ,

故  $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $B = 45^\circ$

（Ⅱ） $\sin A = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

故  $a = b \times \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{3}$

$\therefore c = b \times \frac{\sin C}{\sin B} = 2 \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6}$

【点评】本题主要考查了解三角形问题. 考查了对正弦定理和余弦定理的灵活运用.

19. （12 分）根据以往统计资料，某地车主购买甲种保险的概率为 0.5，购买乙种保险但不购买甲种保险的概率为 0.3，设各车主购买保险相互独立.

（Ⅰ）求该地 1 位车主至少购买甲、乙两种保险中的 1 种的概率；

（Ⅱ）求该地的 3 位车主中恰有 1 位车主甲、乙两种保险都不购买的概率.

【考点】C5：互斥事件的概率加法公式；CN：二项分布与  $n$  次独立重复试验的模型.

【专题】5I：概率与统计.

【分析】（Ⅰ）设该车主购买乙种保险的概率为  $p$ ，由相互独立事件概率公式可得  $p(1 - 0.5) = 0.3$ ，解可得  $p$ ，先求出该车主甲、乙两种保险都不购买的概率，由对立事件的概率性质计算可得答案.

（Ⅱ）该地的 3 位车主中恰有 1 位车主甲、乙两种保险都不购买，是一个  $n$  次独



立重复试验恰好发生  $k$  次的概率，根据上一问的结果得到该地的一位车主甲、乙两种保险都不购买的概率，代入公式得到结果.

**【解答】**解：（I）设该车主购买乙种保险的概率为  $p$ ,

根据题意可得  $p \times (1 - 0.5) = 0.3$ , 解可得  $p = 0.6$ ,

该车主甲、乙两种保险都不购买的概率为  $(1 - 0.5)(1 - 0.6) = 0.2$ ,

由对立事件的概率该车主至少购买甲、乙两种保险中的 1 种的概率  $1 - 0.2 = 0.8$

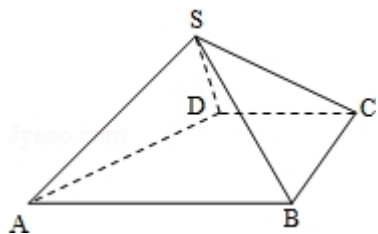
（II）每位车主甲、乙两种保险都不购买的概率为 0.2，则该地的 3 位车主中恰有 1 位车主甲、乙两种保险都不购买的概率  $P = C_3^1 \times 0.2 \times 0.8^2 = 0.384$ .

**【点评】**本题考查互斥事件的概率公式加法公式，考查  $n$  次独立重复试验恰好发生  $k$  次的概率，考查对立事件的概率公式，是一个综合题目.

20. （12 分）如图，四棱锥  $S-ABCD$  中， $AB \parallel CD$ ,  $BC \perp CD$ , 侧面  $SAB$  为等边三角形， $AB = BC = 2$ ,  $CD = SD = 1$ .

（I）证明： $SD \perp$  平面  $SAB$ ;

（II）求  $AB$  与平面  $SBC$  所成的角的大小.



**【考点】**LW：直线与平面垂直；MI：直线与平面所成的角.

**【专题】**11：计算题；14：证明题.

**【分析】**（1）利用线面垂直的判定定理，即证明  $SD$  垂直于面  $SAB$  中两条相交的直线  $SA$ ,  $SB$ ；在证明  $SD$  与  $SA$ ,  $SB$  的过程中运用勾股定理即可

（II）求  $AB$  与平面  $SBC$  所成的角的大小即利用平面  $SBC$  的法向量  $\vec{n}$  与  $\vec{AB}$  间的夹角关系即可，当  $\vec{n}$  与  $\vec{AB}$  间的夹角为锐角时，所求的角即为它的余角；当  $\vec{n}$  与  $\vec{AB}$  间的夹角为钝角时，所求的角为  $\langle \vec{n}, \vec{AB} \rangle - \frac{\pi}{2}$

【解答】（Ⅰ）证明：在直角梯形 ABCD 中，

$$\because AB \parallel CD, BC \perp CD, AB=BC=2, CD=1$$

$$\therefore AD = \sqrt{(AB-CD)^2 + BC^2} = \sqrt{5}$$

$$\because \text{侧面 } SAB \text{ 为等边三角形, } AB=2$$

$$\therefore SA=2$$

$$\because SD=1$$

$$\therefore AD^2 = SA^2 + SD^2$$

$$\therefore SD \perp SA$$

同理：SD ⊥ SB

$$\because SA \cap SB = S, SA, SB \subset \text{面 } SAB$$

$$\therefore SD \perp \text{平面 } SAB$$

（Ⅱ）建立如图所示的空间坐标系

则 A (2, -1, 0), B (2, 1, 0), C (0, 1, 0),

作出 S 在底面上的投影 M，则由四棱锥 S-ABCD 中，AB ∥ CD，BC ⊥ CD，侧面 SAB

为等边三角形知，M 点一定在 x 轴上，又 AB=BC=2，CD=SD=1. 可解得  $MD = \frac{1}{2}$

，从而解得  $SM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故可得 S ( $\frac{1}{2}$ , 0,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ )

$$\text{则 } \overrightarrow{SB} = (\frac{3}{2}, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \overrightarrow{SC} = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

设平面 SBC 的一个法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\text{则 } \overrightarrow{SB} \cdot \vec{n} = 0, \quad \overrightarrow{SC} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\text{即 } \begin{cases} \frac{3}{2}x + y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ -\frac{1}{2}x + y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\text{取 } x=0, y=\frac{\sqrt{3}}{2}, z=1$$

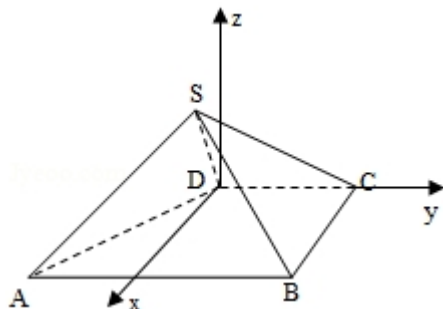
即平面 SBC 的一个法向量为  $\vec{n} = (x, y, z) = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$

$$\text{又 } \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$$

$$\cos \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$\therefore \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle = \arccos \frac{\sqrt{21}}{7}$$

即 AB 与平面 SBC 所成的角的大小为  $\arcsin \frac{\sqrt{21}}{7}$



**【点评】** 本题考查了直线与平面垂直的判定，直线与平面所成的角以及空间向量的基本知识，属于中档题.

21. (12 分) 已知函数  $f(x) = x^3 + 3ax^2 + (3 - 6a)x + 12a - 4$  ( $a \in \mathbb{R}$ )

(I) 证明：曲线  $y = f(x)$  在  $x=0$  处的切线过点  $(2, 2)$ ；

(II) 若  $f(x)$  在  $x=x_0$  处取得极小值， $x_0 \in (1, 3)$ ，求  $a$  的取值范围.

**【考点】** 6E：利用导数研究函数的最值；6H：利用导数研究曲线上某点切线方程.

**【专题】** 11：计算题；16：压轴题.

**【分析】** (I) 求出函数  $f(x)$  在  $x=0$  处的导数和  $f(0)$  的值，结合直线方程的点斜式方程，可求切线方程；

(II)  $f(x)$  在  $x=x_0$  处取得最小值必是函数的极小值，可以先通过讨论导数的零点存在性，得出函数有极小值的  $a$  的大致取值范围，然后通过极小值对应的  $x_0 \in (1, 3)$ ，解关于  $a$  的不等式，从而得出取值范围

**【解答】** 解：(I)  $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3 - 6a$

由  $f(0) = 12a - 4$ ， $f'(0) = 3 - 6a$ ，

可得曲线  $y = f(x)$  在  $x=0$  处的切线方程为  $y = (3 - 6a)x + 12a - 4$ ，

当  $x=2$  时,  $y=2(3-6a)+12a-4=2$ , 可得点  $(2, 2)$  在切线上

$\therefore$  曲线  $y=f(x)$  在  $x=0$  的切线过点  $(2, 2)$

(II) 由  $f'(x)=0$  得

$$x^2+2ax+1-2a=0 \dots (1)$$

方程 (1) 的根的判别式

$$\Delta=4a^2-4(1-2a)=4(a+1+\sqrt{2})(a+1-\sqrt{2})$$

① 当  $-\sqrt{2}-1 \leq a \leq \sqrt{2}-1$  时, 函数  $f(x)$  没有极小值

② 当  $a < -\sqrt{2}-1$  或  $a > \sqrt{2}-1$  时,

由  $f'(x)=0$  得  $x_1=-a-\sqrt{a^2+2a-1}$ ,  $x_2=-a+\sqrt{a^2+2a-1}$

故  $x_0=x_2$ , 由题设可知  $1 < -a+\sqrt{a^2+2a-1} < 3$

(i) 当  $a > \sqrt{2}-1$  时, 不等式  $1 < -a+\sqrt{a^2+2a-1} < 3$  没有实数解;

(ii) 当  $a < -\sqrt{2}-1$  时, 不等式  $1 < -a+\sqrt{a^2+2a-1} < 3$

化为  $a+1 < \sqrt{a^2+2a-1} < a+3$ ,

解得  $-\frac{5}{2} < a < -\sqrt{2}-1$

综合①②, 得  $a$  的取值范围是  $(-\frac{5}{2}, -\sqrt{2}-1)$

**【点评】**将字母  $a$  看成常数, 讨论关于  $x$  的三次多项式函数的极值点, 是解决本题的难点, 本题中处理关于  $a$  的无理不等式, 计算也比较繁, 因此本题对能力的要求比较高.

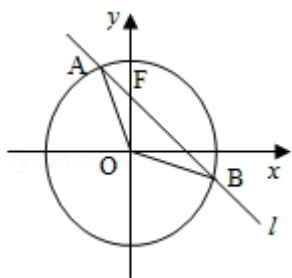
22. (12 分) 已知  $O$  为坐标原点,  $F$  为椭圆  $C: x^2+\frac{y^2}{2}=1$  在  $y$  轴正半轴上的焦

点, 过  $F$  且斜率为  $-\sqrt{2}$  的直线  $l$  与  $C$  交于  $A$ 、 $B$  两点, 点  $P$  满足  $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\vec{0}$

.

(I) 证明: 点  $P$  在  $C$  上;

(II) 设点  $P$  关于点  $O$  的对称点为  $Q$ , 证明:  $A$ 、 $P$ 、 $B$ 、 $Q$  四点在同一圆上.



【考点】9S：数量积表示两个向量的夹角；KH：直线与圆锥曲线的综合．

【专题】15：综合题；16：压轴题；35：转化思想．

【分析】（1）要证明点 P 在 C 上，即证明 P 点的坐标满足椭圆 C 的方程

$x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ ，根据已知中过 F 且斜率为  $-\sqrt{2}$  的直线 l 与 C 交于 A、B 两点，点 P

满足  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OP} = \vec{0}$ ，我们求出点 P 的坐标，代入验证即可．

（2）若 A、P、B、Q 四点在同一圆上，则我们可以先求出任意三点确定的圆的方程，然后将第四点坐标代入验证即可．

【解答】证明：（I）设 A  $(x_1, y_1)$ ，B  $(x_2, y_2)$

椭圆 C：  $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$  ①，则直线 AB 的方程为：  $y = -\sqrt{2}x + 1$  ②

联立方程可得  $4x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$ ，

则  $x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，  $x_1 \times x_2 = -\frac{1}{4}$

则  $y_1 + y_2 = -\sqrt{2}(x_1 + x_2) + 2 = 1$

设 P  $(p_1, p_2)$ ，

则有：  $\vec{OA} = (x_1, y_1)$ ，  $\vec{OB} = (x_2, y_2)$ ，  $\vec{OP} = (p_1, p_2)$ ；

$\therefore \vec{OA} + \vec{OB} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ ；  $\vec{OP} = (p_1, p_2) = -(\vec{OA} + \vec{OB}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$

$\therefore$  p 的坐标为  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$  代入①方程成立，所以点 P 在 C 上．

（II）设点 P 关于点 O 的对称点为 Q，证明：A、P、B、Q 四点在同一圆上．

设线段 AB 的中点坐标为  $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ ，即  $(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2})$ ，

则过线段 AB 的中点且垂直于 AB 的直线方程为： $y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} (x - \frac{\sqrt{2}}{4})$ ，即

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{4}; \quad ③$$

∵ P 关于点 O 的对称点为 Q，故 O (0,0) 为线段 PQ 的中点，

则过线段 PQ 的中点且垂直于 PQ 的直线方程为： $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$  ④；

③④联立方程组，解之得： $x = -\frac{\sqrt{2}}{8}, y = \frac{1}{8}$

③④的交点就是圆心  $O_1 (-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{1}{8})$ ，

$$r^2 = |O_1P|^2 = (-\frac{\sqrt{2}}{8} - (-\frac{\sqrt{2}}{8}))^2 + (-1 - \frac{1}{8})^2 = \frac{99}{64}$$

故过 P Q 两点圆的方程为： $(x + \frac{\sqrt{2}}{8})^2 + (y - \frac{1}{8})^2 = \frac{99}{64}$ ...⑤，

把  $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$  ...②代入⑤，

$$\text{有 } x_1 + x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y_1 + y_2 = 1$$

∴ A, B 也是在圆⑤上的.

∴ A、P、B、Q 四点在同一圆上.

**【点评】** 本题考查的知识点是直线与圆锥曲线的关系，向量在几何中的应用，其中判断点与曲线关系时，所使用的坐标代入验证法是解答本题的关键.