2019 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅰ）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（5 分）已知集合 $M=\{x|-4<x<2\}$，$N=\{x|x^2-x-6<0\}$，则 $M\cap \mathbf{N}=$（　　）

A．$\{x|-4<x<3\}$　　B．$\{x|-4<x<-2\}$　　C．$\{x|-2<x<2\}$　　D．$\{x|2<x<3\}$

2．（5 分）设复数 z 满足 $|z-i|=1$，z 在复平面内对应的点为（x，y），则（　　）

A．$(x+1)^2+y^2=1$　　B．$(x-1)^2+y^2=1$

C．$x^2+(y-1)^2=1$　　D．$x^2+(y+1)^2=1$

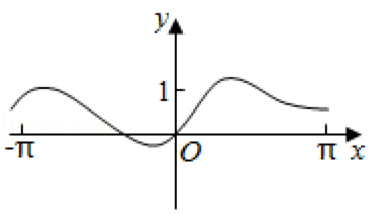
3．（5 分）已知 $a=\log_2 0.2$，$b=2^{0.2}$，$c=0.2^{0.3}$，则（　　）

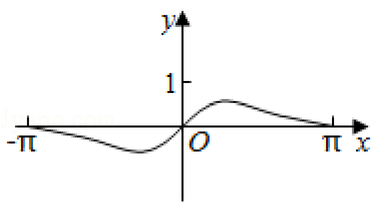
A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<a<b$　　D．$b<c<a$

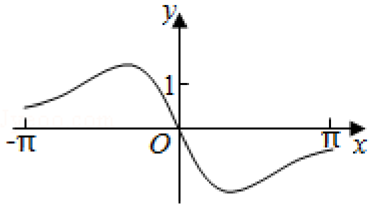
4．（5 分）古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，称为黄金分割比例），著名的“断臂维纳斯”便是如此．此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为 105cm，头顶至脖子下端的长度为 26cm，则其身高可能是（　　）

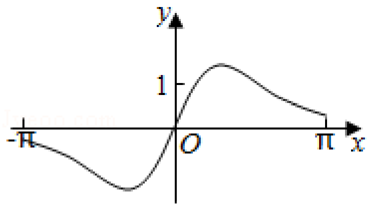
A．165cm　　B．175cm　　C．185cm　　D．190cm

5．（5 分）函数 $f(x)=\frac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在$[-\pi,\pi]$的图象大致为（　　）

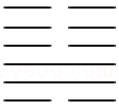
A．

B．

C. 

D. 

6.（5 分）我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化．每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”，如图就是一重卦．在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦恰有 3 个阳爻的概率是（　　）

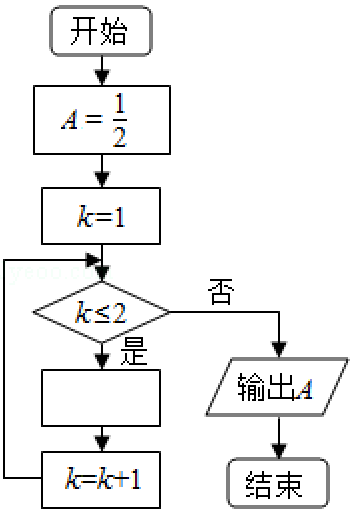


A．$\frac{5}{16}$　　　　B．$\frac{11}{32}$　　　　C．$\frac{21}{32}$　　　　D．$\frac{11}{16}$

7.（5 分）已知非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2|\vec{b}|$，且（$\vec{a}-\vec{b}$）⊥$\vec{b}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　　　B．$\frac{\pi}{3}$　　　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　　　D．$\frac{5\pi}{6}$

8.（5 分）如图是求$\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$的程序框图，图中空白框中应填入（　　）



A．$A=\frac{1}{2+A}$　　　　B．$A=2+\frac{1}{A}$　　　　C．$A=\frac{1}{1+2A}$　　　　D．$A=1+\frac{1}{2A}$

9.（5 分）记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和．已知 $S_4=0$，$a_5=5$，则（　　）

A．$a_n=2n-5$　　　　B．$a_n=3n-10$　　　　C．$S_n=2n^2-8n$　　　　D．$S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$

10.（5 分）已知椭圆 C 的焦点为 F_1（－1，0），F_2（1，0），过 F_2 的直线与 C 交于 A，B 两点．若$|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

11.（5 分）关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论：

①$f(x)$ 是偶函数

②$f(x)$ 在区间（$\frac{\pi}{2}$，π）单调递增

③$f(x)$ 在[－π，π]有 4 个零点

④$f(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是（　　）

A. ①②④　　B. ②④　　C. ①④　　D. ①③

12.（5 分）已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，△ABC 是边长为 2 的正三角形，E，F 分别是 PA，AB 的中点，$\angle CEF=90^\circ$，则球 O 的体积为（　　）

A. $8\sqrt{6}\pi$　　B. $4\sqrt{6}\pi$　　C. $2\sqrt{6}\pi$　　D. $\sqrt{6}\pi$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.（5 分）曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点（0，0）处的切线方程为_______.

14.（5 分）记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_4{}^2=a_6$，则 $S_5=$_______.

15.（5 分）甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）．根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”．设甲队主场取胜的概率为 0.6，客场取胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以 4：1 获胜的概率是_______.

16.（5 分）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A，B 两点．若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则 C 的离心率为_______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．设（$\sin B - \sin C$）^{2}＝$\sin^2A - \sin B\sin C$．

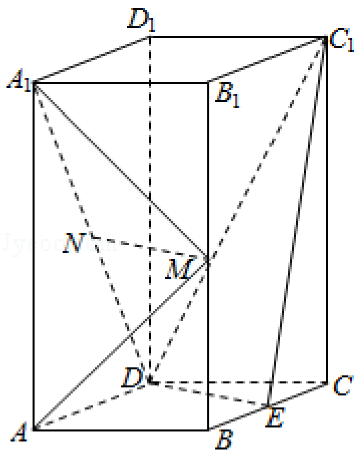
（1）求 A；

（2）若 $\sqrt{2}a+b=2c$，求 $\sin C$．

18.（12 分）如图，直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，E，M，N 分别是 BC，BB_1，A_1D 的中点．

（1）证明：MN∥平面 C_1DE；

（2）求二面角 $A - MA_1 - N$ 的正弦值．



19．（12 分）已知抛物线 C：$y^2=3x$ 的焦点为 F，斜率为$\frac{3}{2}$的直线 l 与 C 的交点为 A，B，与 x 轴的交点为 P．

（1）若$|AF|+|BF|=4$，求 l 的方程；

（2）若$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求$|AB|$．

20．（12 分）已知函数 $f(x)=\sin x-ln(1+x)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数．证明：

（1）$f'(x)$ 在区间 $(-1,\frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点；

（2）$f(x)$ 有且仅有 2 个零点．

21．（12 分）为治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验．试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验．对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药．一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验．当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效．为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分，乙药得 -1 分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分，甲药得 -1 分；若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分．甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β，一轮试验中甲药的得分记为 X.

（1）求 X 的分布列；

（2）若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分，p_i（$i=0$，1，…，8）表示“甲药的累计得分为 i 时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则 $p_0=0$，$p_8=1$，$p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}$（$i=1$，2，…，7），其中 $a=P$（$X=-1$），$b=P$（$X=0$），$c=P$（$X=1$）．假设 $\alpha=0.5$，$\beta=0.8$．

（i）证明：$\{p_{i+1}-p_i\}$（$i=0$，1，2，…，7）为等比数列；

（ii）求 p_4，并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

22．（10 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\\ y=\dfrac{4t}{1+t^2}\end{cases}$（$t$ 为参数）．以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$．

（1）求 C 和 l 的直角坐标方程；

（2）求 C 上的点到 l 距离的最小值．

[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

23．已知 a，b，c 为正数，且满足 $abc=1$．证明：

（1）$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$；

（2）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 24$．

2019 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅰ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（5 分）已知集合 $M=\{x|-4<x<2\}$，$N=\{x|x^2-x-6<0\}$，则 $M\cap\mathbf{N}=$（　　）

A．$\{x|-4<x<3\}$　　B．$\{x|-4<x<-2\}$　　C．$\{x|-2<x<2\}$　　D．$\{x|2<x<3\}$

【分析】利用一元二次不等式的解法和交集的运算即可得出．

【解答】解：$\because M=\{x|-4<x<2\}$，$N=\{x|x^2-x-6<0\}=\{x|-2<x<3\}$，

$\therefore M\cap\mathbf{N}=\{x|-2<x<2\}$．

故选：C．

【点评】本题考查了一元二次不等式的解法和交集的运算，属基础题．

2．（5 分）设复数 z 满足$|z-i|=1$，z 在复平面内对应的点为（x，y），则（　　）

A．$(x+1)^2+y^2=1$　　B．$(x-1)^2+y^2=1$

C．$x^2+(y-1)^2=1$　　D．$x^2+(y+1)^2=1$

【分析】由 z 在复平面内对应的点为（x，y），可得 $z=x+yi$，然后根据$|z-i|=1$ 即可得解．

【解答】解：$\because z$ 在复平面内对应的点为（x，y），

$\therefore z=x+yi$，

$\therefore z-i=x+(y-1)i$，

$\therefore |z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=1$，

$\therefore x^2+(y-1)^2=1$，

故选：C．

【点评】本题考查复数的模、复数的几何意义，正确理解复数的几何意义是解题关键，属基础题．

3．（5 分）已知 $a=\log_2 0.2$，$b=2^{0.2}$，$c=0.2^{0.3}$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<a<b$　　D．$b<c<a$

【分析】由指数函数和对数函数的单调性易得 $\log_2 0.2<0$，$2^{0.2}>1$，$0<0.2^{0.3}<1$，从而得出 a，b，c 的大小关系．

【解答】解：$a=\log_2 0.2<\log_2 1=0$，

$b=2^{0.2}>2^{0}=1$，

$\because 0<0.2^{0.3}<0.2^{0}=1$，

$\therefore c=0.2^{0.3}\in(0，1)$，

$\therefore a<c<b$，

故选：B.

【点评】本题考查了指数函数和对数函数的单调性，增函数和减函数的定义，属基础题.

4.（5 分）古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$，称为黄金分割比例），著名的“断臂维纳斯”便是如此．此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为 105cm，头顶至脖子下端的长度为 26cm，则其身高可能是（　　）

A．165cm　　B．175cm　　C．185cm　　D．190cm

【分析】充分运用黄金分割比例，结合图形，计算可估计身高.

【解答】解：头顶至脖子下端的长度为 26cm，

说明头顶到咽喉的长度小于 26cm，

由头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$，

可得咽喉至肚脐的长度小于 $\frac{26}{0.618}\approx42cm$，

由头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

可得肚脐至足底的长度小于 $\frac{42+26}{0.618}=110$，

即有该人的身高小于 $110+68=178cm$，

又肚脐至足底的长度大于 105cm，

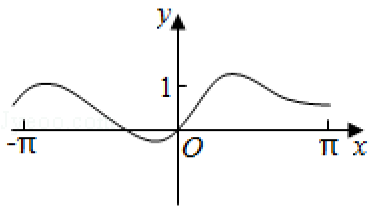
可得头顶至肚脐的长度大于 $105\times0.618\approx65cm$，

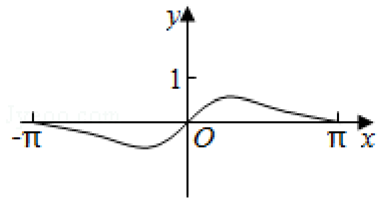
即该人的身高大于 65+105＝170cm，

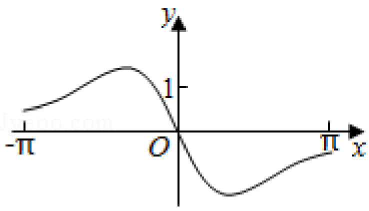
故选：B．

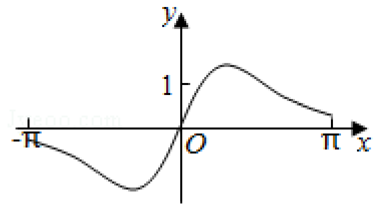
【点评】本题考查简单的推理和估算，考查运算能力和推理能力，属于中档题．

5．（5 分）函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在$[-\pi，\pi]$的图象大致为（　　）

A．


B．


C．


D．


【分析】由 $f(x)$ 的解析式知 $f(x)$ 为奇函数可排除 A，然后计算 $f(\pi)$，判断正负即可排除 B，C．

【解答】解：∵$f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$，$x\in[-\pi，\pi]$，

∴$f(-x)=\dfrac{-\sin x-x}{\cos(-x)+x^2}=-\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}=-f(x)$，

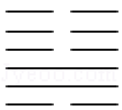
∴$f(x)$ 为$[-\pi，\pi]$上的奇函数，因此排除 A；

又 $f(\pi)=\dfrac{\sin\pi+\pi}{\cos\pi+\pi^2}=\dfrac{\pi}{-1+\pi^2}>0$，因此排除 B，C；

故选：D．

【点评】本题考查了函数的图象与性质，解题关键是奇偶性和特殊值，属基础题．

6．（5 分）我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化．每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”，如图就是一重卦．在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦恰有 3 个阳爻的概率是（　　）



A．$\dfrac{5}{16}$　　B．$\dfrac{11}{32}$　　C．$\dfrac{21}{32}$　　D．$\dfrac{11}{16}$

【分析】基本事件总数 $n=2^6=64$，该重卦恰有 3 个阳爻包含的基本个数 $m=C_6^3C_3^3=20$，由此能求出该重卦恰有 3 个阳爻的概率．

【解答】解：在所有重卦中随机取一重卦，

基本事件总数 $n=2^6=64$，

该重卦恰有 3 个阳爻包含的基本个数 $m=C_6^3C_3^3=20$，

则该重卦恰有 3 个阳爻的概率 $p=\frac{m}{n}=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$.

故选：A.

【点评】本题考查概率的求法，考查古典概型、排列组合等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

7.（5 分）已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2|\vec{b}|$，且（$\vec{a}-\vec{b}$）$\perp\vec{b}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

【分析】由（$\vec{a}-\vec{b}$）$\perp\vec{b}$，可得 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=0$，进一步得到 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>-\vec{b}^2=0$，然后求出夹角即可.

【解答】解：$\because$（$\vec{a}-\vec{b}$）$\perp\vec{b}$，

$\therefore(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2$

$=|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>-\vec{b}^2=0$，

$\therefore\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$=\frac{|\vec{b}|^2}{2|\vec{b}|^2}=\frac{1}{2}$，

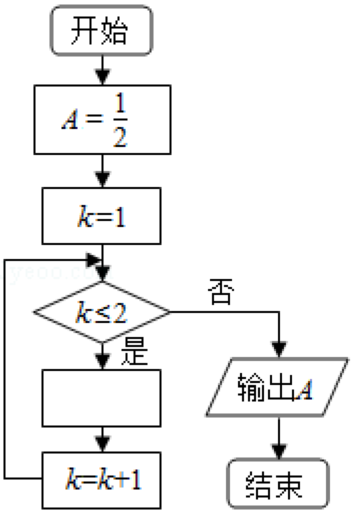
$\because<\vec{a},\vec{b}>\in[0,\pi]$，

$\therefore<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\pi}{3}$.

故选：B.

【点评】本题考查了平面向量的数量积和向量的夹角，属基础题.

8.（5 分）如图是求$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$的程序框图，图中空白框中应填入（　　）



A．$A=\frac{1}{2+A}$　　B．$A=2+\frac{1}{A}$　　C．$A=\frac{1}{1+2A}$　　D．$A=1+\frac{1}{2A}$

【分析】模拟程序的运行，由题意，依次写出每次得到的 A 的值，观察规律即可得解．

【解答】解：模拟程序的运行，可得：

$A=\frac{1}{2}$，$k=1$；

满足条件 $k\leqslant2$，执行循环体，$A=\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$，$k=2$；

满足条件 $k\leqslant2$，执行循环体，$A=\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$，$k=3$；

此时，不满足条件 $k\leqslant2$，退出循环，输出 A 的值为$\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$，

观察 A 的取值规律可知图中空白框中应填入 $A=\frac{1}{2+A}$．

故选：A．

【点评】本题考查了程序框图的应用问题，解题时应模拟程序框图的运行过程，以便得出正确的结论，是基础题．

9．（5 分）记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和．已知 $S_4=0$，$a_5=5$，则（　　）

A．$a_n=2n-5$　　B．$a_n=3n-10$　　C．$S_n=2n^2-8n$　　D．$S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$

【分析】根据题意，设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则有$\begin{cases}4a_1+6d=0\\a_1+4d=5\end{cases}$，求出首项和公差，

然后求出通项公式和前 n 项和即可．

【解答】解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

由 $S_4=0$，$a_5=5$，得

$\begin{cases}4a_1+6d=0\\a_1+4d=5\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a_1=-3\\d=2\end{cases}$，

$\therefore a_n=2n-5$，$S_n=n^2-4n$，

故选：A．

【点评】本题考查等差数列的通项公式以及前 n 项和公式，关键是求出等差数列的公差以及首项，属于基础题．

10．（5 分）已知椭圆 C 的焦点为 F_1（﹣1，0），F_2（1，0），过 F_2 的直线与 C 交于 A，B 两点．若$|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　　　B．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

C．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　　　D．$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

【分析】根据椭圆的定义以及余弦定理列方程可解得 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，可得椭圆的方程．

【解答】解：$\because|AF_2|=2|BF_2|$，$\therefore|AB|=3|BF_2|$，

又$|AB|=|BF_1|$，$\therefore|BF_1|=3|BF_2|$，

又$|BF_1|+|BF_2|=2a$，$\therefore|BF_2|=\frac{a}{2}$，

$\therefore|AF_2|=a$，$|BF_1|=\frac{3}{2}a$，

$\because|AF_1|+|AF_2|=2a$，$\therefore|AF_1|=a$，

$\therefore|AF_1|=|AF_2|$，$\therefore A$ 在 y 轴上．

在 Rt△AF_2O 中，$\cos\angle AF_2O=\frac{1}{a}$，

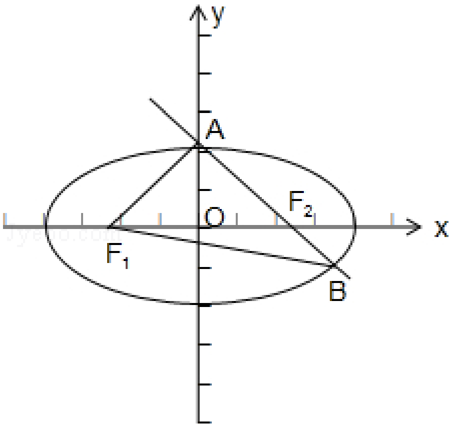
在△BF_1F_2 中，由余弦定理可得 $\cos\angle BF_2F_1=\frac{4+(\frac{a}{2})^2-(\frac{3}{2}a)^2}{2\times2\times\frac{a}{2}}$，

根据 $\cos\angle AF_2O+\cos\angle BF_2F_1=0$，可得$\frac{1}{a}+\frac{4-2a^2}{2a}=0$，解得 $a^2=3$，$\therefore a=\sqrt{3}$．

$b^2=a^2-c^2=3-1=2$.

所以椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

故选：B.



【点评】本题考查了椭圆的性质，属中档题.

11.（5 分）关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$有下述四个结论：

①$f(x)$ 是偶函数

②$f(x)$ 在区间（$\frac{\pi}{2}$，π）单调递增

③$f(x)$ 在[－π，π]有 4 个零点

④$f(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是（　　）

A．①②④　　　　B．②④　　　　C．①④　　　　D．①③

【分析】根据绝对值的应用，结合三角函数的图象和性质分别进行判断即可.

【解答】解：$f(-x)=\sin|-x|+|\sin(-x)|=\sin|x|+|\sin x|=f(x)$ 则函数 $f(x)$ 是偶函数，

故①正确，

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$\sin|x|=\sin x$，$|\sin x|=\sin x$，

则 $f(x)=\sin x+\sin x=2\sin x$ 为减函数，故②错误，

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$f(x)=\sin|x|+|\sin x|=\sin x+\sin x=2\sin x$，

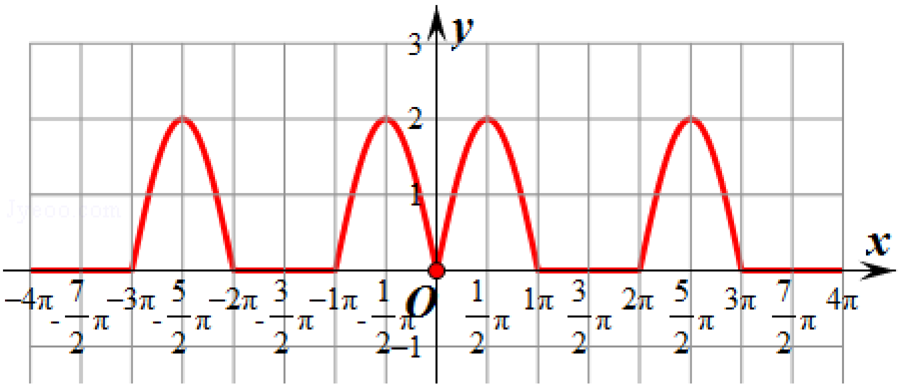
由 $f(x)=0$ 得 $2\sin x=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\pi$，

由 $f(x)$ 是偶函数，得在[－π，）上还有一个零点 $x=-\pi$，即函数 $f(x)$ 在[－π，π]有 3 个零点，故③错误，

当 $\sin|x|=1$，$|\sin x|=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 2，故④正确，

故正确是①④，

故选：C.



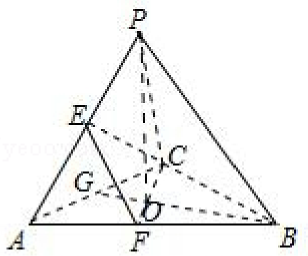
【点评】本题主要考查与三角函数有关的命题的真假判断，结合绝对值的应用以及利用三角函数的性质是解决本题的关键.

12.（5 分）已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，E，F 分别是 PA，AB 的中点，$\angle CEF=90^{\circ}$，则球 O 的体积为（　　）

A．$8\sqrt{6}\pi$　　　B．$4\sqrt{6}\pi$　　　C．$2\sqrt{6}\pi$　　　D．$\sqrt{6}\pi$

【分析】由题意画出图形，证明三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥，且三条侧棱两两互相垂直，再由补形法求外接球球 O 的体积.

【解答】解：如图，



由 $PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，可知三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥，

则顶点 P 在底面的射影 O 为底面三角形的中心，连接 BO 并延长，交 AC 于 G，

则 $AC\perp BG$，又 $PO\perp AC$，$PO\cap BG=O$，可得 $AC\perp$ 平面 PBG，则 $PB\perp AC$，

$\because E$，F 分别是 PA，AB 的中点，$\therefore EF/\!/PB$，

又 $\angle CEF=90^{\circ}$，即 $EF\perp CE$，$\therefore PB\perp CE$，得 $PB\perp$ 平面 PAC，

$\therefore$ 正三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱两两互相垂直，

把三棱锥补形为正方体，则正方体外接球即为三棱锥的外接球，

其直径为 $D=\sqrt{PA^2+PB^2+PC^2}=\sqrt{6}$.

半径为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，则球 O 的体积为$\frac{4}{3}\pi\times(\frac{\sqrt{6}}{2})^{3}=\sqrt{6}\pi$.

故选：D.

【点评】本题考查多面体外接球体积的求法，考查空间想象能力与思维能力，考查计算能力，是中档题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.（5 分）曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点（0，0）处的切线方程为 $\underline{\ y=3x\ }$.

【分析】对 $y=3(x^2+x)e^x$ 求导，可将 $x=0$ 代入导函数，求得斜率，即可得到切线方程.

【解答】解：$\because y=3(x^2+x)e^x$，

$\therefore y'=3e^x(x^2+3x+1)$，

$\therefore$ 当 $x=0$ 时，$y'=3$，

$\therefore y=3(x^2+x)e^x$ 在点（0，0）处的切线斜率 $k=3$，

$\therefore$ 切线方程为：$y=3x$.

故答案为：$y=3x$.

【点评】本题考查了利用导数研究函数上某点的切线方程，切点处的导数值为斜率是解题关键，属基础题.

14.（5 分）记 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和．若 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_4^2=a_6$，则 $S_5=$ $\underline{\ \frac{121}{3}\ }$.

【分析】根据等比数列的通项公式，建立方程求出 q 的值，结合等比数列的前 n 项和公式进行计算即可.

【解答】解：在等比数列中，由 $a_4^2=a_6$，得 $q^6a_1^2=q^5a_1>0$，

即 $q>0$，$q=3$，

则 $S_5=\frac{\frac{1}{3}(1-3^5)}{1-3}=\frac{121}{3}$，

故答案为：$\frac{121}{3}$

【点评】本题主要考查等比数列前 n 项和的计算，结合条件建立方程组求出 q 是解决本题的关键.

15.（5 分）甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）．根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”．设甲队主场取胜的概率为 0.6，客场取胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以 4：1 获胜的概率是 $\underline{\ 0.18\ }$.

【分析】甲队以4：1获胜包含的情况有：①前5场比赛中，第一场负，另外4场全胜，②前5场比赛中，第二场负，另外4场全胜，③前5场比赛中，第三场负，另外4场全胜，④前5场比赛中，第四场负，另外4场全胜，由此能求出甲队以4：1获胜的概率．

【解答】解：甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”．

设甲队主场取胜的概率为0.6，客场取胜的概率为0.5，且各场比赛结果相互独立，

甲队以4：1获胜包含的情况有：

①前5场比赛中，第一场负，另外4场全胜，其概率为：$p_1=0.4\times0.6\times0.5\times0.5\times0.6=0.036$，

②前5场比赛中，第二场负，另外4场全胜，其概率为：$p_2=0.6\times0.4\times0.5\times0.5\times0.6=0.036$，

③前5场比赛中，第三场负，另外4场全胜，其概率为：$p_3=0.6\times0.6\times0.5\times0.5\times0.6=0.054$，

④前5场比赛中，第四场负，另外4场全胜，其概率为：$p_3=0.6\times0.6\times0.5\times0.5\times0.6=0.054$，

则甲队以4：1获胜的概率为：

$p=p_1+p_2+p_3+p_4=0.036+0.036+0.054+0.054=0.18$．

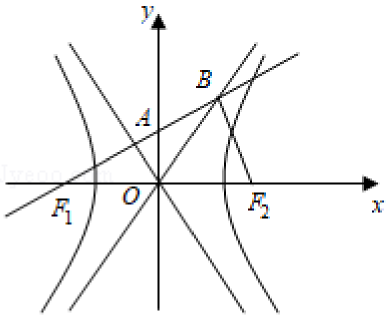
故答案为：0.18．

【点评】本题考查概率的求法，考查相互独立事件概率乘法公式等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

16．（5分）已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_1$的直线与$C$的两条渐近线分别交于$A$，$B$两点．若$\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则$C$的离心率为__2__．

【分析】由题意画出图形，结合已知可得$F_1B\perp OA$，写出F_1B的方程，与$y=\frac{b}{a}x$联立求得B点坐标，再由斜边的中线等于斜边的一半求解．

【解答】解：如图，



$\because \overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，且$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，$\therefore OA\perp F_1B$，

则 F_1B：$y=\frac{a}{b}(x+c)$，

联立$\begin{cases} y=\frac{a}{b}(x+c) \\ y=\frac{b}{a}x \end{cases}$，解得 $B\left(\frac{a^2c}{b^2-a^2},\ \frac{abc}{b^2-a^2}\right)$，

则$OB^2=\frac{a^4c^2}{(b^2-a^2)^2}+\frac{a^2b^2c^2}{(b^2-a^2)^2}=c^2$，

整理得：$b^2=3a^2$，$\therefore c^2-a^2=3a^2$，即 $4a^2=c^2$，

$\therefore \frac{c^2}{a^2}=4$，$e=\frac{c}{a}=2$.

故答案为：2．

【点评】本题考查双曲线的简单性质，考查数形结合的解题思想方法，考查计算能力，是中档题．

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．设$(\sin B-\sin C)^2=\sin^2A-\sin B\sin C$．

（1）求 A；

（2）若$\sqrt{2}a+b=2c$，求 $\sin C$．

【分析】（1）由正弦定理得：$b^2+c^2-a^2=bc$，再由余弦定理能求出 A．

（2）由已知及正弦定理可得：$\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，可解得 C 的值，由两角和的正弦函数公式即可得解．

【解答】解：（1）$\because$△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．

设（$\sin B-\sin C$）$^2=\sin^2A-\sin B\sin C$.

则 $\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\sin C=\sin^2A-\sin B\sin C$，

∴由正弦定理得：$b^2+c^2-a^2=bc$，

∴$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，

∵$0<A<\pi$，∴$A=\frac{\pi}{3}$.

（2）∵$\sqrt{2}a+b=2c$，$A=\frac{\pi}{3}$，

∴由正弦定理得$\sqrt{2}\sin A+\sin B=2\sin C$，

∴$\frac{\sqrt{6}}{2}+\sin(\frac{2\pi}{3}-C)=2\sin C$

解得 $\sin(C-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴$C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$，$C=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$，

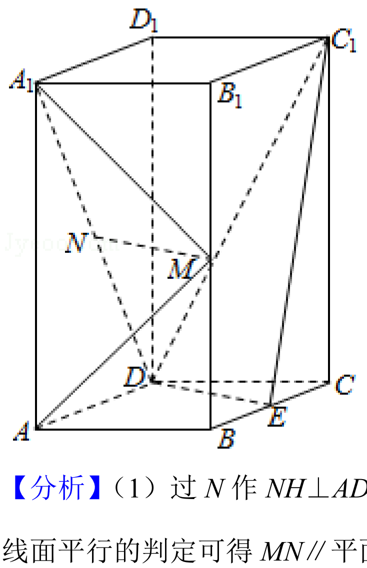
∴$\sin C=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

【点评】本题考查了正弦定理、余弦定理、三角函数性质，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

18.（12 分）如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，E，M，N 分别是 BC，BB_1，A_1D 的中点.

（1）证明：MN∥平面 C_1DE；

（2）求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.



【分析】（1）过 N 作 $NH\perp AD$，证明 NM∥BH，再证明 BH∥DE，可得 NM∥DE，再由线面平行的判定可得 MN∥平面 C_1DE；

（2）以 D 为坐标原点，以垂直于 DC 得直线为 x 轴，以 DC 所在直线为 y 轴，以 DD_1 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系，分别求出平面 A_1MN 与平面 MAA_1 的一个法向量，

由两法向量所成角的余弦值可得二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.

【解答】（1）证明：如图，过 N 作 $NH\perp AD$，则 $NH/\!/AA_1$，且 $NH=\frac{1}{2}AA_1$，

又 $MB/\!/AA_1$，$MB=\frac{1}{2}AA_1$，∴四边形 $NMBH$ 为平行四边形，则 $NM/\!/BH$，

由 $NH/\!/AA_1$，N 为 A_1D 中点，得 H 为 AD 中点，而 E 为 BC 中点，

∴$BE/\!/DH$，$BE=DH$，则四边形 $BEDH$ 为平行四边形，则 $BH/\!/DE$，

∴$NM/\!/DE$，

∵$NM\not\subset$平面 C_1DE，$DE\subset$平面 C_1DE，

∴$MN/\!/$平面 C_1DE；

（2）解：以 D 为坐标原点，以垂直于 DC 得直线为 x 轴，以 DC 所在直线为 y 轴，以 DD_1 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系，

则 $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},2\right)$，$M(\sqrt{3},1,2)$，$A_1(\sqrt{3},-1,4)$，

$\overrightarrow{NM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$，$\overrightarrow{NA_1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},2\right)$，

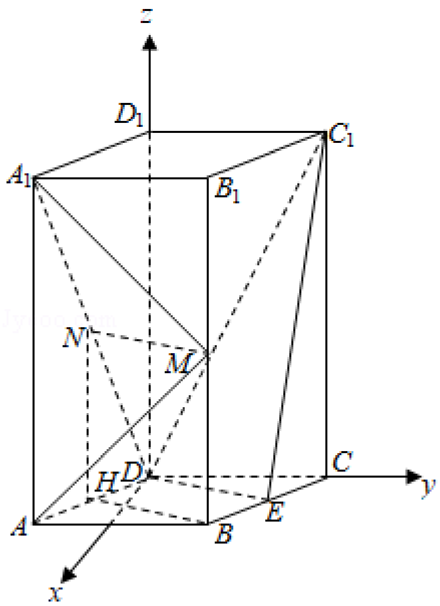
设平面 A_1MN 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{NM}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{NA_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+2z=0\end{cases}$，取 $x=\sqrt{3}$，得 $\overrightarrow{m}=(\sqrt{3},-1,-1)$，

又平面 MAA_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{n}=(1,0,0)$，

∴$\cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>=\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

∴二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.



【点评】本题考查直线与平面平行的判定，考查空间想象能力与思维能力，训练了利用空间向量求解空间角，是中档题．

19．（12 分）已知抛物线 C：$y^2=3x$ 的焦点为 F，斜率为$\frac{3}{2}$的直线 l 与 C 的交点为 A，B，与 x 轴的交点为 P．

（1）若$|AF|+|BF|=4$，求 l 的方程；

（2）若$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求$|AB|$．

【分析】（1）根据韦达定理以及抛物线的定义可得．

（2）若$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，则 $y_1=-3y_2$，$\Rightarrow x_1=-3x_2+4t$，再结合韦达定理可解得 $t=1$，$x_1=3$，$x_2=\frac{1}{3}$，再用弦长公式可得．

【解答】解：(1)设直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{2}(x-t)$，将其代入抛物线 $y^2=3x$ 得：$\frac{9}{4}x^2-(\frac{9}{2}t+3)x+\frac{9}{4}t^2=0$，

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

则 $x_1+x_2=\dfrac{\frac{9}{2}t+3}{\frac{9}{4}}=2t+\frac{4}{3}$，①，$x_1x_2=t^2$②，

由抛物线的定义可得：$|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=2t+\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=4$，解得 $t=\frac{7}{12}$，

直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}$．

（2）若$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，则$y_1=-3y_2$，$\therefore\frac{3}{2}(x_1-t)=-3\times\frac{3}{2}(x_2-t)$，化简得$x_1=-3x_2+4t$，③

由①②③解得$t=1$，$x_1=3$，$x_2=\frac{1}{3}$，

$\therefore|AB|=\sqrt{1+\frac{9}{4}}\sqrt{(3+\frac{1}{3})^2-4}=\frac{4\sqrt{13}}{3}$.

【点评】本题考查了抛物线的性质，属中档题．

20．（12分）已知函数$f(x)=\sin x-ln(1+x)$，$f'(x)$为$f(x)$的导数．证明：

（1）$f'(x)$在区间$(-1,\frac{\pi}{2})$存在唯一极大值点；

（2）$f(x)$有且仅有2个零点．

【分析】（1）$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$，求出原函数的导函数，进一步求导，得到$f''(x)$在$(-1,\frac{\pi}{2})$上为减函数，结合$f''(0)=1$，$f''(\frac{\pi}{2})=-1+\frac{1}{(1+\frac{\pi}{2})^2}<-1+1=0$，由零点存在定理可知，函数$f''(x)$在$(-1,\frac{\pi}{2})$上存在唯一得零点$x_0$，结合单调性可得，$f'(x)$在$(-1,x_0)$上单调递增，在$(x_0,\frac{\pi}{2})$上单调递减，可得$f'(x)$在区间$(-1,\frac{\pi}{2})$存在唯一极大值点；

（2）由（1）知，当$x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in(0,x_0)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；由于$f'(x)$在$(x_0,\frac{\pi}{2})$上单调递减，且$f'(x_0)>0$，$f'(\frac{\pi}{2})<0$，可得函数$f'(x)$在$(x_0,\frac{\pi}{2})$上存在唯一零点x_1，结合单调性可知，当$x\in(x_0,x_1)$时，$f(x)$单调递增；当$x\in(x_1,\frac{\pi}{2})$时，$f(x)$单调递减．当$x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，$f(x)$单调递减，再由$f(\frac{\pi}{2})>0$，$f(\pi)<0$．然后列x，$f'(x)$与$f(x)$的变化情况表得答案．

【解答】证明：（1）$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$，

$f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$，$f''(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$，

令$g(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$，则$g'(x)=-\cos x-\frac{2}{(1+x)^3}<0$在$(-1,\frac{\pi}{2})$恒成立，

$\therefore f''(x)$在$(-1,\frac{\pi}{2})$上为减函数，

又∵$f''(0)=1$，$f''(\frac{\pi}{2})=-1+\frac{1}{(1+\frac{\pi}{2})^2}<-1+1=0$，由零点存在定理可知，

函数$f''(x)$在$(-1,\frac{\pi}{2})$上存在唯一的零点x_0，结合单调性可得，$f'(x)$在$(-1,x_0)$上单调递增，

在$(x_0,\frac{\pi}{2})$上单调递减，可得$f'(x)$在区间$(-1,\frac{\pi}{2})$存在唯一极大值点；

（2）由（1）知，当$x\in(-1,0)$时，$f'(x)$单调递增，$f'(x)<f'(0)=0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(0,x_0)$时，$f'(x)$单调递增，$f'(x)>f'(0)=0$，$f(x)$单调递增；

由于$f'(x)$在$(x_0,\frac{\pi}{2})$上单调递减，且$f'(x_0)>0$，$f'(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{1+\frac{\pi}{2}}<0$，

由零点存在定理可知，函数$f'(x)$在$(x_0,\frac{\pi}{2})$上存在唯一零点x_1，结合单调性可知，

当$x\in(x_0,x_1)$时，$f'(x)$单调递减，$f'(x)>f'(x_1)=0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in(x_1,\frac{\pi}{2})$时，$f'(x)$单调递减，$f'(x)<f'(x_1)=0$，$f(x)$单调递减.

当$x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，$\cos x<0$，$-\frac{1}{1+x}<0$，于是$f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}<0$，$f(x)$单调递减，

其中$f(\frac{\pi}{2})=1-ln(1+\frac{\pi}{2})>1-ln(1+\frac{3.2}{2})=1-ln2.6>1-lne=0$，

$f(\pi)=-ln(1+\pi)<-ln3<0$.

于是可得下表：

x	$(-1,0)$	0	$(0,x_1)$	x_1	$(x_1,\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\pi)$	π
$f'(x)$	-	0	+	0	-	-	-	-
$f(x)$	单调递减	0	单调递增	大于0	单调递减	大于0	单调递减	小于0

结合单调性可知，函数$f(x)$在$(-1,\frac{\pi}{2}]$上有且只有一个零点0，

由函数零点存在性定理可知，$f(x)$在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上有且只有一个零点x_2，

当$x\in[\pi,+\infty)$时，$f(x)=\sin x-ln(1+x)<1-ln(1+\pi)<1-ln3<0$，因此函数$f(x)$在$[\pi,+\infty)$上无零点.

综上，$f(x)$ 有且仅有 2 个零点．

【点评】本题考查利用导数求函数的极值，考查函数零点的判定，考查数学转化思想方法，考查函数与方程思想，考查逻辑思维能力与推理运算能力，难度较大．

21．（12 分）为治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验．试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验．对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药．一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验．当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效．为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分，乙药得 -1 分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分，甲药得 -1 分；若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分．甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β，一轮试验中甲药的得分记为 X．

（1）求 X 的分布列；

（2）若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分，p_i（$i=0$，1，…，8）表示“甲药的累计得分为 i 时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则 $p_0=0$，$p_8=1$，$p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}$（$i=1$，2，…，7），其中 $a=P(X=-1)$，$b=P(X=0)$，$c=P(X=1)$．假设 $\alpha=0.5$，$\beta=0.8$．

（i）证明：$\{p_{i+1}-p_i\}$（$i=0$，1，2，…，7）为等比数列；

（ii）求 p_4，并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性．

【分析】（1）由题意可得 X 的所有可能取值为 -1，0，1，再由相互独立试验的概率求 $P(X=-1)$，$P(X=0)$，$P(X=1)$ 的值，则 X 的分布列可求；

（2）（i）由 $\alpha=0.5$，$\beta=0.8$ 结合（1）求得 a，b，c 的值，代入 $p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}$，得到 $(p_{i+1}-p_i)=4(p_i-p_{i-1})$，由 $p_1-p_0=p_1\neq 0$，可得 $\{p_{i+1}-p_i\}$（$i=0$，1，2，…，7）为公比为 4，首项为 p_1 的等比数列；

（ii）由（i）可得，$p_8=(p_8-p_7)+(p_7-p_6)+\cdots+(p_1-p_0)+p_0$，利用等比数列的前 n 项和与 $p_8=1$，得 $p_1=\frac{3}{4^8-1}$，进一步求得 $p_4=\frac{1}{257}$．P_4 表示最终认为甲药更有效的概率，结合 $\alpha=0.5$，$\beta=0.8$，可得在甲药治愈率为 0.5，乙药治愈率为 0.8 时，认为甲药更有效的概率为 $P_4=\frac{1}{257}\approx 0.0039$，此时得出错误结论的概率非常小，说明这种试验方案合理．

【解答】（1）解：X 的所有可能取值为 -1，0，1．

$P(X=-1)=(1-\alpha)\beta$，$P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$，$P(X=1)=\alpha(1-\beta)$，

∴X的分布列为：

X	-1	0	1
P	$(1-\alpha)\beta$	$\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$	$\alpha(1-\beta)$

（2）（i）证明：∵$\alpha=0.5$，$\beta=0.8$，

∴由（1）得，$a=0.4$，$b=0.5$，$c=0.1$.

因此$p_i=0.4p_{i-1}+0.5p_i+0.1p_{i+1}$（$i=1$，2，…，7），

故$0.1(p_{i+1}-p_i)=0.4(p_i-p_{i-1})$，即$(p_{i+1}-p_i)=4(p_i-p_{i-1})$，

又∵$p_1-p_0=p_1\neq0$，∴$\{p_{i+1}-p_i\}$（$i=0$，1，2，…，7）为公比为4，首项为p_1的等比数列；

（ii）解：由（i）可得，

$p_8=(p_8-p_7)+(p_7-p_6)+\cdots+(p_1-p_0)+p_0=\frac{p_1(1-4^8)}{1-4}=\frac{4^8-1}{3}p_1$，

∵$p_8=1$，∴$p_1=\frac{3}{4^8-1}$，

∴$P_4=(p_4-p_3)+(p_3-p_2)+(p_2-p_1)+(p_1-p_0)+p_0=\frac{4^4-1}{3}p_1=\frac{1}{257}$.

P_4表示最终认为甲药更有效的概率.

由计算结果可以看出，在甲药治愈率为0.5，乙药治愈率为0.8时，认为甲药更有效的概率为$P_4=\frac{1}{257}\approx0.0039$，此时得出错误结论的概率非常小，说明这种试验方案合理.

【点评】本题是函数与数列的综合题，主要考查数列和函数的应用，考查离散型随机变量的分布列，根据条件推出数列的递推关系是解决本题的关键．综合性较强，有一定的难度.

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

[选修4-4：坐标系与参数方程]（10分）

22.（10分）在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\\ y=\frac{4t}{1+t^2}\end{cases}$（$t$为参数）．以坐标原点$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线$l$的极坐标方程为

$2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$.

（1）求 C 和 l 的直角坐标方程；

（2）求 C 上的点到 l 距离的最小值.

【分析】（1）把曲线 C 的参数方程变形，平方相加可得普通方程，把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$，可得直线 l 的直角坐标方程；

（2）法一、设出椭圆上动点的坐标（参数形式），再由点到直线的距离公式写出距离，利用三角函数求最值；

法二、写出与直线 l 平行的直线方程为 $2x+\sqrt{3}y+m=0$，与曲线 C 联立，化为关于 x 的一元二次方程，利用判别式大于 0 求得 m，转化为两平行线间的距离求 C 上的点到 l 距离的最小值.

【解答】解：（1）由 $\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\\ y=\dfrac{4t}{1+t^2}\end{cases}$（$t$ 为参数），得 $\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ \dfrac{y}{2}=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$，

两式平方相加，得 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$（$x\neq-1$），

$\therefore C$ 的直角坐标方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$（$x\neq-1$），

由 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$，得 $2x+\sqrt{3}y+11=0$.

即直线 l 的直角坐标方程为得 $2x+\sqrt{3}y+11=0$；

（2）法一、设 C 上的点 P（$\cos\theta$，$2\sin\theta$）（$\theta\neq\pi$），

则 P 到直线得 $2x+\sqrt{3}y+11=0$ 的距离为：

$d=\dfrac{|2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta+11|}{\sqrt{7}}=\dfrac{|4\sin(\theta+\varphi)+11|}{\sqrt{7}}$.

$\therefore$ 当 $\sin(\theta+\varphi)=-1$ 时，d 有最小值为 $\sqrt{7}$.

法二、设与直线 $2x+\sqrt{3}y+11=0$ 平行的直线方程为 $2x+\sqrt{3}y+m=0$，

联立 $\begin{cases}2x+\sqrt{3}y+m=0\\ 4x^2+y^2-4=0\end{cases}$，得 $16x^2+4mx+m^2-12=0$.

由 $\triangle=16m^2-64(m^2-12)=0$，得 $m=\pm4$.

$\therefore$ 当 $m=4$ 时，直线 $2x+\sqrt{3}y+4=0$ 与曲线 C 的切点到直线 $2x+\sqrt{3}y+11=0$ 的距离最小，

为$\frac{|11-4|}{\sqrt{2^2+3}}=\sqrt{7}$.

【点评】本题考查间单曲线的极坐标方程，考查参数方程化普通方程，考查直线与椭圆位置关系的应用，训练了两平行线间的距离公式的应用，是中档题．

[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

23．已知 a，b，c 为正数，且满足 $abc=1$．证明：

（1）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$；

（2）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 24$．

【分析】（1）利用基本不等式和 1 的运用可证，（2）分析法和综合法的证明方法可证．

【解答】证明：（1）分析法：已知 a，b，c 为正数，且满足 $abc=1$．

要证（1）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$；因为 $abc=1$．

就要证：$\frac{abc}{a}+\frac{abc}{b}+\frac{abc}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$；

即证：$bc+ac+ab\leqslant a^2+b^2+c^2$；

即：$2bc+2ac+2ab\leqslant 2a^2+2b^2+2c^2$；

$2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ac-2ab\geqslant 0$

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geqslant 0$；

∵a，b，c 为正数，且满足 $abc=1$．

∴$(a-b)^2\geqslant 0$；$(a-c)^2\geqslant 0$；$(b-c)^2\geqslant 0$ 恒成立；当且仅当：$a=b=c=1$ 时取等号．

即 $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geqslant 0$ 得证．

故$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$ 得证．

（2）证 $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 24$ 成立；

即：已知 a，b，c 为正数，且满足 $abc=1$．

$(a+b)$ 为正数；$(b+c)$ 为正数；$(c+a)$ 为正数；

$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 3(a+b)\bullet(b+c)\bullet(c+a)$；

当且仅当 $(a+b)=(b+c)=(c+a)$ 时取等号；即：$a=b=c=1$ 时取等号；

∵a，b，c 为正数，且满足 $abc=1$．

$(a+b)\geqslant 2\sqrt{ab}$；$(b+c)\geqslant 2\sqrt{bc}$；$(c+a)\geqslant 2\sqrt{ac}$；

当且仅当 $a=b$，$b=c$；$c=a$ 时取等号；即：$a=b=c=1$ 时取等号；

∴（$a+b$）^{3}+（$b+c$）^{3}+（$c+a$）^{3}≥3（$a+b$）•（$b+c$）•（$c+a$）≥3×8$\sqrt{ab}$•$\sqrt{bc}$•$\sqrt{ac}$＝24abc＝24；

当且仅当 a＝b＝c＝1 时取等号；

故（$a+b$）^{3}+（$b+c$）^{3}+（$c+a$）^{3}≥24．得证．

故得证．

【点评】本题考查重要不等式和基本不等式的运用，分析法和综合法的证明方法．