

2022 年普通高等学校招生全国统一考试

(新高考全国 II 卷) 数学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{-1, 1, 2, 4\}$, $B = \{x \mid |x-1| \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{1, 4\}$ D. $\{-1, 4\}$

2. $(2+2i)(1-2i) =$ ()

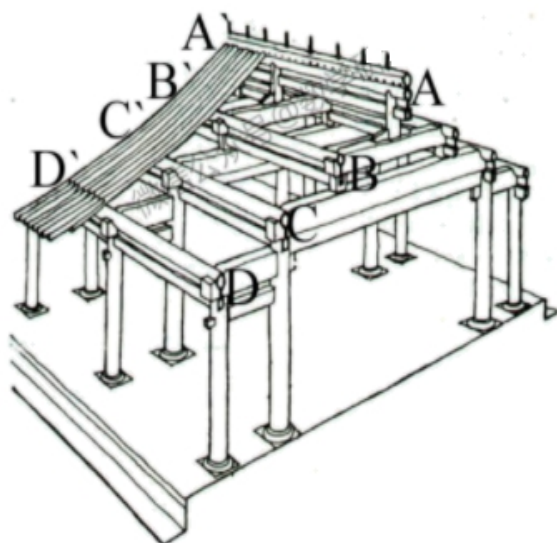
- A. $-2+4i$ B. $-2-4i$ C. $6+2i$ D. $6-2i$

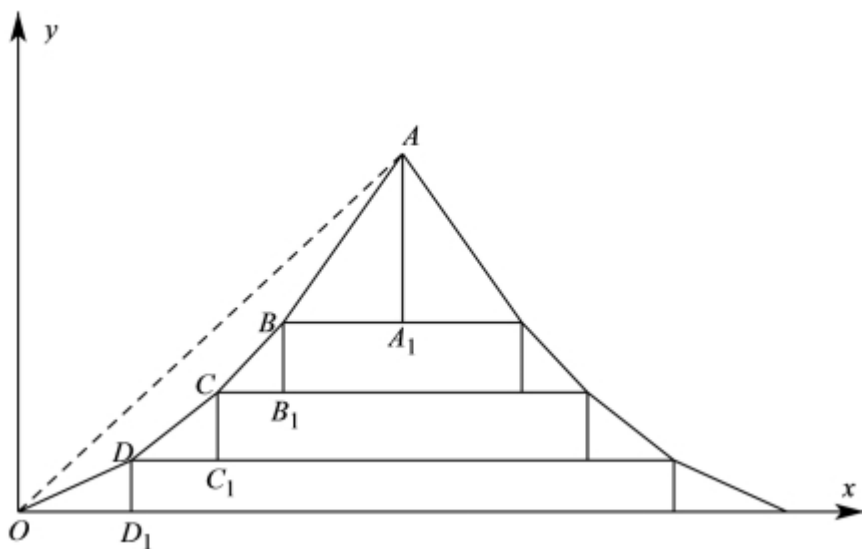
3. 中国的古建筑不仅是挡风遮雨的住处, 更是美学和哲学的体现. 如图是某古建筑物的剖面图,

DD_1, CC_1, BB_1, AA_1 是举, OD_1, DC_1, CB_1, BA_1 是相等的步, 相邻桁的举步之比分别为

$\frac{DD_1}{OD_1} = 0.5, \frac{CC_1}{DC_1} = k_1, \frac{BB_1}{CB_1} = k_2, \frac{AA_1}{BA_1} = k_3$, 若 k_1, k_2, k_3 是公差为 0.1 的等差数列, 且直线 OA 的斜率为 0.725,

则 $k_3 =$ ()





- A. 0.75 B. 0.8 C. 0.85 D. 0.9

4. 已知 $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (1, 0)$, $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$, 若 $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$, 则 $t =$ ()

- A. -6 B. -5 C. 5 D. 6

5. 有甲乙丙丁戊 5 名同学站成一排参加文艺汇演, 若甲不站在两端, 丙和丁相邻的不同排列方式有多少种 ()

- A. 12 种 B. 24 种 C. 36 种 D. 48 种

6. 角 α, β 满足 $\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \beta$, 则 ()

- A. $\tan(\alpha + \beta) = 1$ B. $\tan(\alpha + \beta) = -1$
C. $\tan(\alpha - \beta) = 1$ D. $\tan(\alpha - \beta) = -1$

7. 正三棱台高为 1, 上下底边长分别为 $3\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{3}$, 所有顶点在同一球面上, 则球的表面积是 ()

- A. 100π B. 128π C. 144π D. 192π

8. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$, $f(1) = 1$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) =$ ()

- A. -3 B. -2 C. 0 D. 1

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

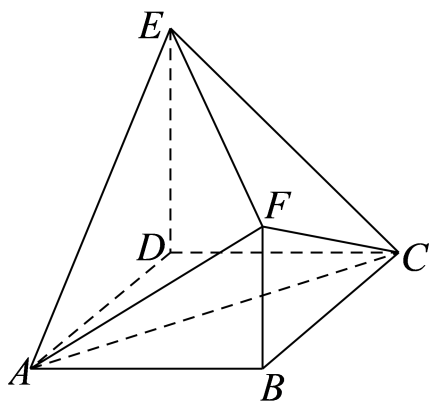
9. 函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象以 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 中心对称, 则 ()

- A. $y = f(x)$ 在 $\left(0, \frac{5\pi}{12}\right)$ 单调递减
- B. $y = f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$ 有 2 个极值点
- C. 直线 $x = \frac{7\pi}{6}$ 是一条对称轴
- D. 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$ 是一条切线

10. 已知 O 为坐标原点, 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 的直线与 C 交于 A, B 两点, 点 A 在第一象限, 点 $M(p, 0)$, 若 $|AF| = |AM|$, 则 ()

- A. 直线 AB 的斜率为 $2\sqrt{6}$
- B. $|OB| = |OF|$
- C. $|AB| > 4|OF|$
- D. $\angle OAM + \angle OBM < 180^\circ$

11. 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $FB \parallel ED$, $AB = ED = 2FB$, 记三棱锥 $E-ACD$, $F-ABC$, $F-ACE$ 的体积分别为 V_1, V_2, V_3 , 则 ()



- A. $V_3 = 2V_2$
- B. $V_3 = 2V_1$
- C. $V_3 = V_1 + V_2$
- D. $2V_3 = 3V_1$

12. 对任意 x, y , $x^2 + y^2 - xy = 1$, 则 ()

- A. $x + y \leq 1$
- B. $x + y \geq -2$
- C. $x^2 + y^2 \leq 2$
- D. $x^2 + y^2 \geq 1$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$, 且 $P(2 < X \leq 2.5) = 0.36$, 则 $P(X > 2.5) =$ _____.

14. 写出曲线 $y = \ln|x|$ 过坐标原点的切线方程: _____, _____.

15. 已知点 $A(-2, 3), B(0, a)$, 若直线 AB 关于 $y = a$ 的对称直线与圆 $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 1$ 存在公共点, 则实数 a 的取值范围为_____.

16. 已知椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, 直线 l 与椭圆在第一象限交于 A, B 两点, 与 x 轴, y 轴分别交于 M, N 两点, 且 $|MA| = |NB|, |MN| = 2\sqrt{3}$, 则直线 l 的方程为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 且 $a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = b_4 - a_4$.

(1) 证明: $a_1 = b_1$;

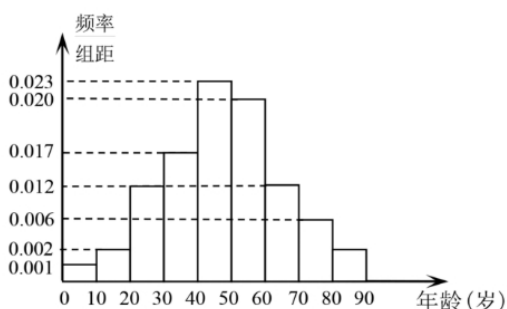
(2) 求集合 $\{k | b_k = a_m + a_1, 1 \leq m \leq 500\}$ 中元素个数.

18. 记 $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 A, B, C , 其对边分别为 a, b, c , 分别以 a, b, c 为边长的三个正三角形的面积依次为 S_1, S_2, S_3 , 已知 $S_1 - S_2 + S_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin B = \frac{1}{3}$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $\sin A \sin C = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 求 b .

19. 在某地区进行流行病调查, 随机调查了 100 名某种疾病患者的年龄, 得到如下的样本数据频率分布直方图.



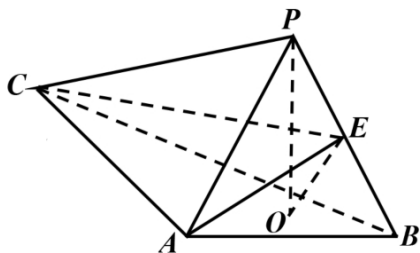
(1) 估计该地区这种疾病患者的平均年龄 (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

(2) 估计该地区一人患这种疾病年龄在区间 $[20, 70)$ 的概率;

(3) 已知该地区这种疾病的患病率为 0.1%, 该地区年龄位于区间 $[40, 50)$ 的人口占该地区总人口的 16%, 从该地区任选一人, 若此人年龄位于区间 $[40, 50)$, 求此人患该种疾病的概率. (样本数据中的患者年龄位

于各区间的频率作为患者年龄位于该区间的概率，精确到 0.0001)

20. 如图， PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高， $PA=PB$ ， $AB \perp AC$ ， E 是 PB 的中点.



(1) 求证： $OE \parallel$ 平面 PAC ；

(2) 若 $\angle ABO = \angle CBO = 30^\circ$ ， $PO = 3$ ， $PA = 5$ ，求二面角 $C-AE-B$ 的正弦值.

21. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(2, 0)$ ，渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{3}x$.

(1) 求 C 的方程；

(2) 过 F 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点，点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 在 C 上，且

$x_1 > x_2 > 0, y_1 > 0$. 过 P 且斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线与过 Q 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交于点 M ，请从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个条件成立：

① M 在 AB 上；② $PQ \parallel AB$ ；③ $|MA| = |MB|$.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

22. 已知函数 $f(x) = xe^{ax} - e^x$.

(1) 当 $a = 1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $x > 0$ 时， $f(x) < -1$ ，求 a 的取值范围；

(3) 设 $n \in \mathbf{N}^*$ ，证明：
$$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1).$$

