2022年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数学

姓名________　　　　　　准考证号_________________

本试题卷分选择题和非选择题两部分.全卷共4页，选择题部分1至3页；非选择题部分3至4页．满分150分，考试时间120分钟.

考生注意：

1．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的位置上.

2．答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范作答，在本试题卷上的作答一律无效.

参考公式：

如果事件 A，B 互斥，则

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A，B 相互独立，则

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

若事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，则 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$

台体的体积公式

$V=\frac{1}{3}\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)h$

其中 S_1,S_2 表示台体的上、下底面积，h 表示台体的高

柱体的体积公式

$V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高

锥体的体积公式

$V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

选择题部分（共40分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{1,2\},B=\{2,4,6\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $\{2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{2,4,6\}$　　D. $\{1,2,4,6\}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用并集的定义可得正确的选项.

【详解】$A \cup B=\{1,2,4,6\}$，

故选：D.

2. 已知$a,b\in \mathbf{R},a+3\mathrm{i}=(b+\mathrm{i})\mathrm{i}$（i 为虚数单位），则（　　）

A. $a=1,b=-3$　　B. $a=-1,b=3$　　C. $a=-1,b=-3$　　D. $a=1,b=3$

【答案】B

【解析】

【分析】利用复数相等的条件可求a,b.

【详解】$a+3\mathrm{i}=-1+b\mathrm{i}$，而$a,b$为实数，故$a=-1,b=3$，

故选：B.

3. 若实数 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-2\geq 0,\\2x+y-7\leq 0,\\x-y-2\leq 0,\end{cases}$则$z=3x+4y$的最大值是（　　）

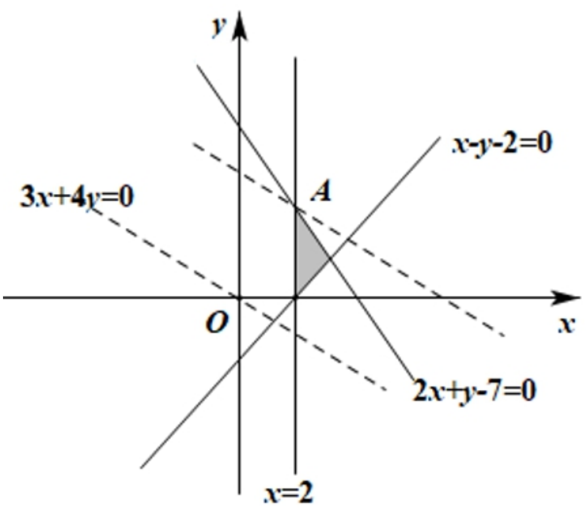
A. 20　　B. 18　　C. 13　　D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】在平面直角坐标系中画出可行域，平移动直线$z=3x+4y$后可求最大值.

【详解】不等式组对应的可行域如图所示：



当动直线$3x+4y-z=0$过 A 时 z 有最大值.

由$\begin{cases}x=2\\2x+y-7=0\end{cases}$可得$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$，故$A(2,3)$，

故$z_{\max}=3\times 2+4\times 3=18$，

故选：B.

4. 设 $x\in\mathbf{R}$，则“$\sin x=1$”是“$\cos x=0$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】由三角函数的性质结合充分条件、必要条件的定义即可得解.

【详解】因为 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 可得：

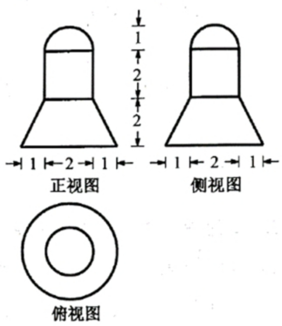
当 $\sin x=1$ 时，$\cos x=0$，充分性成立；

当 $\cos x=0$ 时，$\sin x=\pm 1$，必要性不成立；

所以当 $x\in\mathbf{R}$，$\sin x=1$ 是 $\cos x=0$ 的充分不必要条件.

故选：A.

5. 某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积（单位：cm^3）是（　　）



A. 22π　　B. 8π　　C. $\dfrac{22}{3}\pi$　　D. $\dfrac{16}{3}\pi$

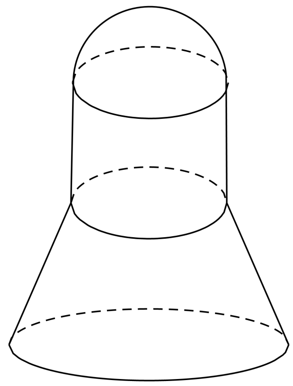
【答案】C

【解析】

【分析】根据三视图还原几何体可知，原几何体是一个半球，一个圆柱，一个圆台组合成的几何体，即可根据球，圆柱，圆台的体积公式求出.

【详解】由三视图可知，该几何体是一个半球，一个圆柱，一个圆台组合成的几何体，球的半径，圆柱的底面半径，圆台的上底面半径都为 $1\ \mathrm{cm}$，圆台的下底面半径为 $2\ \mathrm{cm}$，所以该几何体的体积

$V=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times 1^3+\pi\times 1^2\times 2+\frac{1}{3}\times 2\times\left(\pi\times 2^2+\pi\times 1^2+\sqrt{\pi\times 2^2\times\pi\times 1^2}\right)=\frac{22\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$.



故选：C．

6. 为了得到函数 $y=2\sin 3x$ 的图象，只要把函数 $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)$ 图象上所有的点（　　）

A. 向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{15}$ 个单位长度　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{15}$ 个单位长度

【答案】D

【解析】

【分析】根据三角函数图象的变换法则即可求出．

【详解】因为 $y=2\sin 3x=2\sin\left[3\left(x-\frac{\pi}{15}\right)+\frac{\pi}{5}\right]$，所以把函数 $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)$ 图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{15}$ 个单位长度即可得到函数 $y=2\sin 3x$ 的图象．

故选：D.

7. 已知 $2^a=5,\log_8 3=b$，则 $4^{a-3b}=$（　　）

A. 25　　B. 5　　C. $\frac{25}{9}$　　D. $\frac{5}{3}$

【答案】C

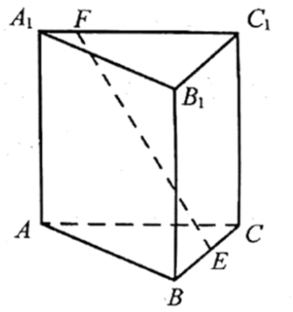
【解析】

【分析】根据指数式与对数式的互化，幂的运算性质以及对数的运算性质即可解出．

【详解】因为 $2^a=5$，$b=\log_8 3=\frac{1}{3}\log_2 3$，即 $2^{3b}=3$，所以 $4^{a-3b}=\frac{4^a}{4^{3b}}=\frac{\left(2^a\right)^2}{\left(2^{3b}\right)^2}=\frac{5^2}{3^2}=\frac{25}{9}$．

故选：C.

8. 如图，已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1, AC=AA_1$，E，F 分别是棱 BC, A_1C_1 上的点．记 EF 与 AA_1 所成的角为 α，EF 与平面 ABC 所成的角为 β，二面角 $F-BC-A$ 的平面角为 γ，则（　　）



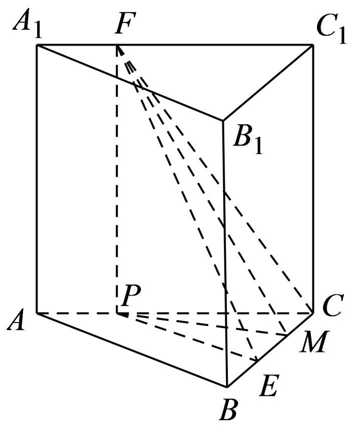
A. $\alpha \le \beta \le \gamma$　　B. $\beta \le \alpha \le \gamma$　　C. $\beta \le \gamma \le \alpha$　　D. $\alpha \le \gamma \le \beta$

【答案】A

【解析】

【分析】先用几何法表示出 α，β，γ，再根据边长关系即可比较大小．

【详解】如图所示，过点 F 作 $FP \perp AC$ 于 P，过 P 作 $PM \perp BC$ 于 M，连接 PE，



则 $\alpha = \angle EFP$，$\beta = \angle FEP$，$\gamma = FMP$，

$\tan\alpha = \dfrac{PE}{FP} = \dfrac{PE}{AB} \le 1$，$\tan\beta = \dfrac{FP}{PE} = \dfrac{AB}{PE} \ge 1$，$\tan\gamma = \dfrac{FP}{PM} \ge \dfrac{FP}{PE} = \tan\beta$，

所以 $\alpha \le \beta \le \gamma$，

故选：A．

9. 已知 $a,b \in \mathbf{R}$，若对任意 $x \in \mathbf{R}, a|x-b|+|x-4|-|2x-5| \ge 0$，则（　　）

A. $a \le 1, b \ge 3$　　B. $a \le 1, b \le 3$　　C. $a \ge 1, b \ge 3$　　D. $a \ge 1, b \le 3$

【答案】D

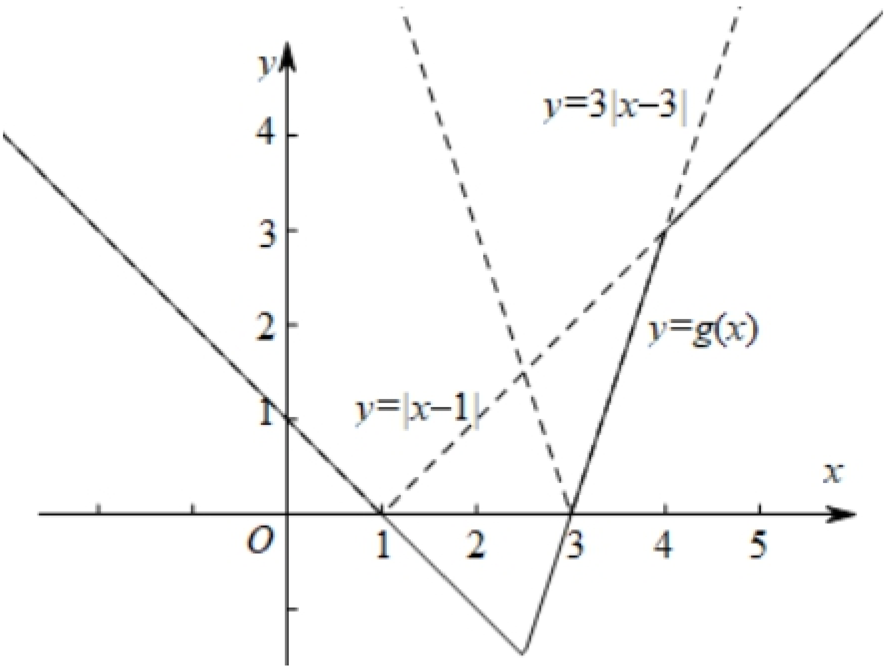
【解析】

【分析】将问题转换为$a|x-b|\geq|2x-5|-|x-4|$，再结合画图求解.

【详解】由题意有：对任意的$x\in\mathbf{R}$，有$a|x-b|\geq|2x-5|-|x-4|$恒成立.

设$f(x)=a|x-b|$，$g(x)=\left|2x-5\right|-\left|x-4\right|=\begin{cases}1-x,x\leq\dfrac{5}{2}\\3x-9,\dfrac{5}{2}<x<4\\x-1,x\geq4\end{cases}$，

即$f(x)$的图象恒在$g(x)$的上方（可重合），如下图所示：



由图可知，$a\geq3$，$1\leq b\leq3$，或$1\leq a<3$，$1\leq b\leq4-\dfrac{3}{a}\leq3$，

故选：D.

10. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{3}a_n^2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则（　　）

A. $2<100a_{100}<\dfrac{5}{2}$　　B. $\dfrac{5}{2}<100a_{100}<3$　　C. $3<100a_{100}<\dfrac{7}{2}$　　D. $\dfrac{7}{2}<100a_{100}<4$

【答案】B

【解析】

【分析】先通过递推关系式确定$\{a_n\}$除去a_1，其他项都在$(0,1)$范围内，再利用递推公式变形得到

$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3-a_n}>\frac{1}{3}$，累加可求出$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{3}(n+2)$，得出$100a_{100}<3$，再利用

$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3-a_n}<\frac{1}{3-\frac{3}{n+2}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$，累加可求出$\frac{1}{a_n}-1<\frac{1}{3}(n-1)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$，再次

放缩可得出$100a_{100}>\frac{5}{2}$.

【详解】$\because a_1=1$，易得$a_2=\frac{2}{3}\in(0,1)$，依次类推可得$a_n\in(0,1)$

由题意，$a_{n+1}=a_n\left(1-\frac{1}{3}a_n\right)$，即$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n(3-a_n)}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{3-a_n}$，

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3-a_n}>\frac{1}{3}$，

即$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}>\frac{1}{3}$，$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}>\frac{1}{3}$，$\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}>\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}>\frac{1}{3},(n\geq 2)$，

累加可得$\frac{1}{a_n}-1>\frac{1}{3}(n-1)$，即$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{3}(n+2),(n\geq 2)$，

$\therefore a_n<\frac{3}{n+2},(n\geq 2)$，即$a_{100}<\frac{1}{34}$，$100a_{100}<\frac{100}{34}<3$，

又$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3-a_n}<\frac{1}{3-\frac{3}{n+2}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n+1}\right),(n\geq 2)$，

$\therefore \frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)$，$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}<\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)$，$\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}<\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{4}\right)$，…，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}<\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right),(n\geq 3)$，

累加可得$\frac{1}{a_n}-1<\frac{1}{3}(n-1)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right),(n\geq 3)$，

$\therefore \frac{1}{a_{100}}-1<33+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{99}\right)<33+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{6}\times 94\right)<39$，

即$\frac{1}{a_{100}}<40$，$\therefore a_{100}>\frac{1}{40}$，即$100a_{100}>\frac{5}{2}$；

综上：$\frac{5}{2}<100a_{100}<3$.

故选：B.

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是利用递推关系进行合理变形放缩.

非选择题部分（共 110 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，单空题每题 4 分，多空题每空 3 分，共 36 分．

11. 我国南宋著名数学家秦九韶，发现了从三角形三边求面积的公式，他把这种方法称为“三斜求积”，它填补了我国传统数学的一个空白．如果把这个方法写成公式，就是 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$，其中 a，b，c 是三角形的三边，S 是三角形的面积．设某三角形的三边 $a=\sqrt{2},b=\sqrt{3},c=2$，则该三角形的面积 $S=$__________．

【答案】$\frac{\sqrt{23}}{4}$．

【解析】

【分析】根据题中所给的公式代值解出．

【详解】因为 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$，所以 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[4\times 2-\left(\frac{4+2-3}{2}\right)^2\right]}=\frac{\sqrt{23}}{4}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{23}}{4}$．

12. 已知多项式 $(x+2)(x-1)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_2=$__________，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=$__________．

【答案】　①. 8　②. -2

【解析】

【分析】第一空利用二项式定理直接求解即可，第二空赋值去求，令 $x=0$ 求出 a_0，再令 $x=1$ 即可得出答案．

【详解】含 x^2 的项为：$x\cdot C_4^3\cdot x\cdot(-1)^3+2\cdot C_4^2\cdot x^2\cdot(-1)^2=-4x^2+12x^2=8x^2$，故 $a_2=8$；

令 $x=0$，即 $2=a_0$，

令 $x=1$，即 $0=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$，

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-2$，

故答案为：8；-2．

13. 若 $3\sin\alpha-\sin\beta=\sqrt{10},\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\sin\alpha=$__________，$\cos 2\beta=$_________.

【答案】 ①. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ ②. $\dfrac{4}{5}$

【解析】

【分析】先通过诱导公式变形，得到 α 的同角等式关系，再利用辅助角公式化简成正弦型函数方程，可求出 α，接下来再求 β.

【详解】$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \sin\beta=\cos\alpha$，即 $3\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{10}$，

即 $\sqrt{10}\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\sin\alpha-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\cos\alpha\right)=\sqrt{10}$，令 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

则 $\sqrt{10}\sin(\alpha-\theta)=\sqrt{10}$，$\therefore \alpha-\theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$，即 $\alpha=\theta+\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，

$\therefore \sin\alpha=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

则 $\cos 2\beta=2\cos^2\beta-1=2\sin^2\alpha-1=\dfrac{4}{5}$.

故答案为：$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$；$\dfrac{4}{5}$.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2, & x\le 1,\\ x+\dfrac{1}{x}-1, & x>1,\end{cases}$ 则 $f\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=$________；若当 $x\in[a,b]$ 时，$1\le f(x)\le 3$，则 $b-a$ 的最大值是_________.

【答案】 ①. $\dfrac{37}{28}$ ②. $3+\sqrt{3}$ ## $\sqrt{3}+3$

【解析】

【分析】结合分段函数的解析式求函数值，由条件求出 a 的最小值, b 的最大值即可.

【详解】由已知 $f(\dfrac{1}{2})=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2=\dfrac{7}{4}$，$f(\dfrac{7}{4})=\dfrac{7}{4}+\dfrac{4}{7}-1=\dfrac{37}{28}$，

所以 $f\left[f(\dfrac{1}{2})\right]=\dfrac{37}{28}$，

当 $x\le 1$ 时，由 $1\le f(x)\le 3$ 可得 $1\le -x^2+2\le 3$，所以 $-1\le x\le 1$，

当$x>1$时，由$1\le f(x)\le 3$可得$1\le x+\dfrac{1}{x}-1\le 3$，所以$1<x\le 2+\sqrt{3}$，

$1\le f(x)\le 3$等价于$-1\le x\le 2+\sqrt{3}$，所以$[a,b]\subseteq[-1,2+\sqrt{3}]$，

所以$b-a$的最大值为$3+\sqrt{3}$.

故答案为：$\dfrac{37}{28}$，$3+\sqrt{3}$.

15. 现有 7 张卡片，分别写上数字 1，2，2，3，4，5，6．从这 7 张卡片中随机抽取 3 张，记所抽取卡片上数字的最小值为ξ，则$P(\xi=2)=$__________，$E(\xi)=$_________.

【答案】 ①. $\dfrac{16}{35}$， ②. $\dfrac{12}{7}$##$1\dfrac{5}{7}$

【解析】

【分析】利用古典概型概率公式求$P(\xi=2)$，由条件求ξ分布列，再由期望公式求其期望.

【详解】从写有数字 1,2,2,3,4,5,6 的 7 张卡片中任取 3 张共有C_7^3种取法，其中所抽取的卡片上的数字的最小值为 2 的取法有$C_4^1+C_2^1C_4^2$种，所以$P(\xi=2)=\dfrac{C_4^1+C_2^1C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{16}{35}$，

由已知可得ξ的取值有 1，2，3，4，

$P(\xi=1)=\dfrac{C_6^2}{C_7^3}=\dfrac{15}{35}$，$P(\xi=2)=\dfrac{16}{35}$，

，$P\left(\xi=3\right)=\dfrac{C_3^2}{C_7^3}=\dfrac{3}{35}$，$P\left(\xi=4\right)=\dfrac{1}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$

所以$E(\xi)=1\times\dfrac{15}{35}+2\times\dfrac{16}{35}+3\times\dfrac{3}{35}+4\times\dfrac{1}{35}=\dfrac{12}{7}$，

故答案为：$\dfrac{16}{35}$，$\dfrac{12}{7}$.

16. 已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点为$F$，过$F$且斜率为$\dfrac{b}{4a}$的直线交双曲线于点$A\left(x_1,y_1\right)$，交双曲线的渐近线于点$B\left(x_2,y_2\right)$且$x_1<0<x_2$．若$|FB|=3|FA|$，则双曲线的离心率是_________.

【答案】$\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$

【解析】

【分析】联立直线AB和渐近线$l_2:y=\dfrac{b}{a}x$方程，可求出点B，再根据$|FB|=3|FA|$可求得点 A，最后根

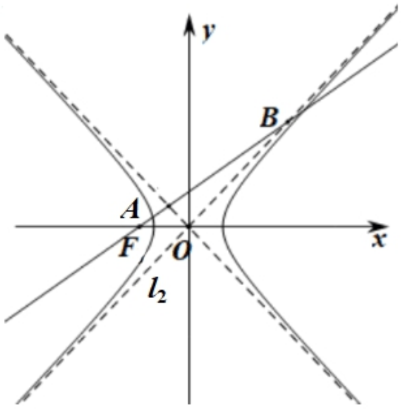
据点A在双曲线上，即可解出离心率．

【详解】过 F 且斜率为 $\frac{b}{4a}$ 的直线 $AB: y=\frac{b}{4a}(x+c)$，渐近线 $l_2: y=\frac{b}{a}x$，

联立 $\begin{cases} y=\frac{b}{4a}(x+c) \\ y=\frac{b}{a}x \end{cases}$，得 $B\left(\frac{c}{3},\frac{bc}{3a}\right)$，由 $|FB|=3|FA|$，得 $A\left(-\frac{5c}{9},\frac{bc}{9a}\right)$，

而点A在双曲线上，于是 $\frac{25c^2}{81a^2}-\frac{b^2c^2}{81a^2b^2}=1$，解得：$\frac{c^2}{a^2}=\frac{81}{24}$，所以离心率 $e=\frac{3\sqrt{6}}{4}$．

故答案为：$\frac{3\sqrt{6}}{4}$．



17. 设点 P 在单位圆的内接正八边形 $A_1A_2\cdots A_8$ 的边 A_1A_2 上，则 $\overrightarrow{PA_1}^2+\overrightarrow{PA_2}^2+\cdots+\overrightarrow{PA_8}^2$ 的取值范围是

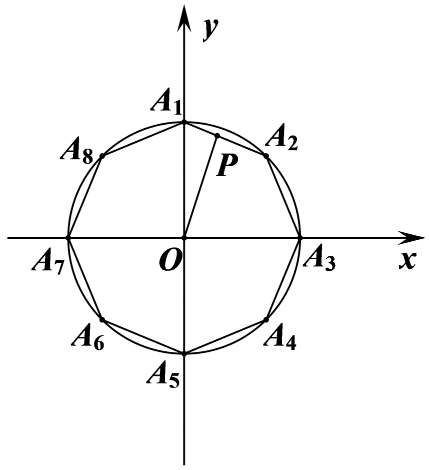
________.

【答案】$[12+2\sqrt{2},16]$

【解析】

【分析】根据正八边形的结构特征，分别以圆心为原点，A_7A_3 所在直线为 x 轴，A_5A_1 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，即可求出各顶点的坐标，设 $P(x,y)$，再根据平面向量模的坐标计算公式即可得到 $\overrightarrow{PA_1}^2+\overrightarrow{PA_2}^2+\cdots+\overrightarrow{PA_8}^2=8\left(x^2+y^2\right)+8$，然后利用 $\cos 22.5^\circ\le|OP|\le 1$ 即可解出．

【详解】以圆心为原点，A_7A_3 所在直线为 x 轴，A_5A_1 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，如图所示：



则

$A_1(0,1), A_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), A_3(1,0), A_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), A_5(0,-1), A_6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), A_7(-1,0), A_8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

设 $P(x,y)$,于是 $\overrightarrow{PA_1}^2+\overrightarrow{PA_2}^2+\cdots+\overrightarrow{PA_8}^2=8\left(x^2+y^2\right)+8$，

因为 $\cos 22.5^\circ \le |OP| \le 1$，所以 $\frac{1+\cos 45^\circ}{2} \le x^2+y^2 \le 1$，故 $\overrightarrow{PA_1}^2+\overrightarrow{PA_2}^2+\cdots+\overrightarrow{PA_8}^2$ 的取值范围是

$[12+2\sqrt{2},16]$.

故答案为：$[12+2\sqrt{2},16]$.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

18. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．已知 $4a=\sqrt{5}c,\cos C=\frac{3}{5}$.

（1）求 $\sin A$ 的值；

（2）若 $b=11$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】（1）$\frac{\sqrt{5}}{5}$；

（2）22.

【解析】

【分析】（1）先由平方关系求出 $\sin C$，再根据正弦定理即可解出；

（2）根据余弦定理的推论 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 以及 $4a=\sqrt{5}c$ 可解出 a，即可由三角形面积公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 求出面积.

【小问 1 详解】

由于 $\cos C=\frac{3}{5}$， $0<C<\pi$，则 $\sin C=\frac{4}{5}$．因为 $4a=\sqrt{5}c$，

由正弦定理知 $4\sin A=\sqrt{5}\sin C$，则 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{4}\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

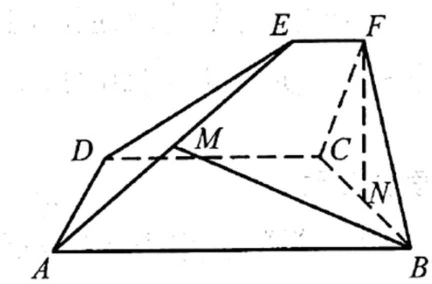
【小问 2 详解】

因为 $4a=\sqrt{5}c$，由余弦定理，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+121-\frac{16}{5}a^2}{22a}=\frac{11-\frac{a^2}{5}}{2a}=\frac{3}{5}$，

即 $a^2+6a-55=0$，解得 $a=5$，而 $\sin C=\frac{4}{5}$， $b=11$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times5\times11\times\frac{4}{5}=22$．

19. 如图，已知 $ABCD$ 和 $CDEF$ 都是直角梯形， $AB//DC$， $DC//EF$， $AB=5$， $DC=3$， $EF=1$， $\angle BAD=\angle CDE=60°$，二面角 $F-DC-B$ 的平面角为 $60°$．设 M，N 分别为 AE,BC 的中点．



（1）证明： $FN\perp AD$；

（2）求直线 BM 与平面 ADE 所成角的正弦值．

【答案】（1）证明见解析；

（2） $\frac{5\sqrt{7}}{14}$．

【解析】

【分析】（1）过点 E、D 分别做直线 DC、AB 的垂线 EG、DH 并分别交于点 G、H，由平面知识易得 $FC=BC$，再根据二面角的定义可知，$\angle BCF=60^\circ$，由此可知，$FN\perp BC$，$FN\perp CD$，从而可证得 $FN\perp$平面 $ABCD$，即得 $FN\perp AD$；

（2）由（1）可知 $FN\perp$平面 $ABCD$，过点 N 做 AB 平行线 NK，所以可以以点 N 为原点，NK，NB、NF 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系 $N-xyz$，求出平面 ADE 的一个法向量，以及 $\overline{BM}$，即可利用线面角的向量公式解出．

【小问 1 详解】

过点E、D分别做直线DC、AB的垂线EG、DH并分别交于点交于点G、H.

∵四边形$ABCD$和$EFCD$都是直角梯形，$AB//DC, CD//EF, AB=5, DC=3, EF=1$，

$\angle BAD=\angle CDE=60^\circ$，由平面几何知识易知，

$DG=AH=2, \angle EFC=\angle DCF=\angle DCB=\angle ABC=90^\circ$，则四边形$EFCG$和四边形$DCBH$是矩形，

∴在$\mathrm{Rt}\triangle EGD$和$\mathrm{Rt}\triangle DHA$，$EG=DH=2\sqrt{3}$，

∵$DC\perp CF, DC\perp CB$，且$CF\cap CB=C$，

∴$DC\perp$平面BCF，$\angle BCF$是二面角$F-DC-B$的平面角，则$\angle BCF=60^\circ$，

∴$\triangle BCF$是正三角形，由$DC\subset$平面$ABCD$，得平面$ABCD\perp$平面BCF，

∵N是BC的中点，∴$FN\perp BC$，又$DC\perp$平面BCF，$FN\subset$平面BCF，可得$FN\perp CD$，而$BC\cap CD=C$，∴$FN\perp$平面$ABCD$，而$AD\subset$平面$ABCD$ ∴$FN\perp AD$.

【小问2详解】

因为$FN\perp$平面$ABCD$，过点N做AB平行线NK，所以以点N为原点，NK，NB、NF所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系$N-xyz$，

设$A(5,\sqrt{3},0), B(0,\sqrt{3},0), D(3,-\sqrt{3},0), E(1,0,3)$，则$M\left(3,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，

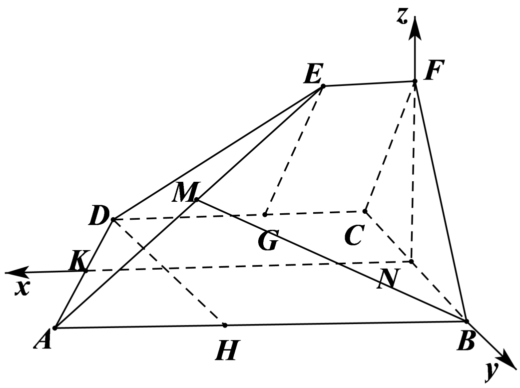
$\therefore \overrightarrow{BM}=\left(3,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right), \overrightarrow{AD}=(-2,-2\sqrt{3},0), \overrightarrow{DE}=(-2,\sqrt{3},3)$

设平面ADE的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-2x-2\sqrt{3}y=0\\ -2x+\sqrt{3}y+3z=0\end{cases}$，取$\vec{n}=(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$，

设直线BM与平面ADE所成角为θ，

$$\therefore \sin\theta=\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{BM}\rangle\right|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}|}{|\vec{n}|\cdot\overrightarrow{BM}|}=\frac{\left|3\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{3+1+3}\cdot\sqrt{9+\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}.$$



20. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=-1$，公差$d>1$．记$\{a_n\}$的前 n 项和为$S_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

（1）若$S_4-2a_2a_3+6=0$，求S_n；

（2）若对于每个$n\in\mathbf{N}^*$，存在实数c_n，使$a_n+c_n,a_{n+1}+4c_n,a_{n+2}+15c_n$成等比数列，求 d的取值范围.

【答案】（1）$S_n=\dfrac{3n^2-5n}{2}(n\in\mathrm{N}^*)$

（2）$1<d\le 2$

【解析】

【分析】（1）利用等差数列通项公式及前n项和公式化简条件，求出d，再求S_n；

(2)由等比数列定义列方程，结合一元二次方程有解的条件求d的范围.

【小问 1 详解】

因为$S_4-2a_2a_3+6=0$，$a_1=-1$，

所以$-4+6d-2(-1+d)(-1+2d)+6=0$，

所以$d^2-3d=0$，又$d>1$，

所以$d=3$，

所以$a_n=3n-4$，

所以$S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=\dfrac{3n^2-5n}{2}$，

【小问 2 详解】

因为a_n+c_n，$a_{n+1}+4c_n$，$a_{n+2}+15c_n$成等比数列，

所以$\left(a_{n+1}+4c_n\right)^2=\left(a_n+c_n\right)\left(a_{n+2}+15c_n\right)$，

$\left(nd-1+4c_n\right)^2=\left(-1+nd-d+c_n\right)\left(-1+nd+d+15c_n\right)$，

$c_n^2+(14d-8nd+8)c_n+d^2=0$，

由已知方程 $c_n^2+(14d-8nd+8)c_n+d^2=0$ 的判别式大于等于 0，

所以 $\Delta=\left(14d-8nd+8\right)^2-4d^2\geq 0$，

所以 $\left(16d-8nd+8\right)\left(12d-8nd+8\right)\geq 0$ 对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，

所以 $\left[\left(n-2\right)d-1\right]\left[\left(2n-3\right)d-2\right]\geq 0$ 对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，

当 $n=1$ 时，$\left[\left(n-2\right)d-1\right]\left[\left(2n-3\right)d-2\right]=\left(d+1\right)\left(d+2\right)\geq 0$，

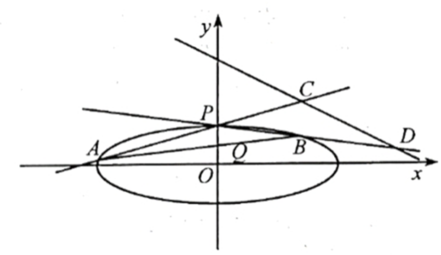
当 $n=2$ 时，由 $\left(2d-2d-1\right)\left(4d-3d-2\right)\geq 0$，可得 $d\leq 2$

当 $n\geq 3$ 时，$\left[\left(n-2\right)d-1\right]\left[\left(2n-3\right)d-2\right]>(n-3)(2n-5)\geq 0$，

又 $d>1$

所以 $1<d\leq 2$

21. 如图，已知椭圆 $\dfrac{x^2}{12}+y^2=1$．设 A，B 是椭圆上异于 $P(0,1)$ 的两点，且点 $Q\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 在线段 AB 上，直线 PA,PB 分别交直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$ 于 C，D 两点．



（1）求点 P 到椭圆上点的距离的最大值；

（2）求 $|CD|$ 的最小值．

【答案】（1）$\dfrac{12\sqrt{11}}{11}$；

（2）$\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$．

【解析】

【分析】（1）设 $Q(2\sqrt{3}\cos\theta,\sin\theta)$ 是椭圆上任意一点，再根据两点间的距离公式求出 $|PQ|^2$，再根据二次

函数的性质即可求出；

（2）设直线AB：$y=kx+\frac{1}{2}$与椭圆方程联立可得x_1x_2,x_1+x_2，再将直线$y=-\frac{1}{2}x+3$方程与PA、PB的方程分别联立，可解得点C,D的坐标，再根据两点间的距离公式求出$|CD|$，最后代入化简可得$|CD|=\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{16k^2+1}}{|3k+1|}$，由柯西不等式即可求出最小值．

【小问1详解】

设$Q(2\sqrt{3}\cos\theta,\sin\theta)$是椭圆上任意一点，$P(0,1)$，则

$$|PQ|^2=12\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2=13-11\sin^2\theta-2\sin\theta=-11\left(\sin\theta+\frac{1}{11}\right)^2+\frac{144}{11}\leq\frac{144}{11}$$，当且仅当

$\sin\theta=-\frac{1}{11}$时取等号，故$|PQ|$的最大值是$\frac{12\sqrt{11}}{11}$.

【小问2详解】

设直线AB：$y=kx+\frac{1}{2}$，直线AB方程与椭圆$\frac{x^2}{12}+y^2=1$联立，可得$\left(k^2+\frac{1}{12}\right)x^2+kx-\frac{3}{4}=0$，设

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，所以$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{k}{k^2+\frac{1}{12}}\\ x_1x_2=-\dfrac{3}{4\left(k^2+\frac{1}{12}\right)}\end{cases}$，

因为直线$PA:y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1$与直线$y=-\frac{1}{2}x+3$交于$C$，

则$x_C=\frac{4x_1}{x_1+2y_1-2}=\frac{4x_1}{(2k+1)x_1-1}$，同理可得，$x_D=\frac{4x_2}{x_2+2y_2-2}=\frac{4x_2}{(2k+1)x_2-1}$．则

$$|CD|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}|x_C-x_D|=\frac{\sqrt{5}}{2}\left|\frac{4x_1}{(2k+1)x_1-1}-\frac{4x_2}{(2k+1)x_2-1}\right|$$

$$=2\sqrt{5}\left|\frac{x_1-x_2}{[(2k+1)x_1-1][(2k+1)x_2-1]}\right|=2\sqrt{5}\left|\frac{x_1-x_2}{(2k+1)^2x_1x_2-(2k+1)(x_1+x_2)+1}\right|$$

$$=\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{16k^2+1}}{|3k+1|}=\frac{6\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{16k^2+1}\sqrt{\frac{9}{16}+1}}{|3k+1|}\geq\frac{6\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{\left(4k\times\frac{3}{4}+1\times1\right)^2}}{|3k+1|}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$，

当且仅当$k=\dfrac{3}{16}$时取等号，故$|CD|$的最小值为$\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】本题主要考查最值的计算，第一问利用椭圆的参数方程以及二次函数的性质较好解决，第二问思路简单，运算量较大，求最值的过程中还使用到柯西不等式求最值，对学生的综合能力要求较高，属于较难题.

22. 设函数$f(x)=\dfrac{e}{2x}+\ln x(x>0)$.

（1）求$f(x)$的单调区间；

（2）已知$a,b\in\mathbf{R}$，曲线$y=f(x)$上不同的三点$\left(x_1,f\left(x_1\right)\right),\left(x_2,f\left(x_2\right)\right),\left(x_3,f\left(x_3\right)\right)$处的切线都经过点$(a,b)$．证明：

（i）若$a>e$，则$0<b-f(a)<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{e}-1\right)$；

（ii）若$0<a<e,x_1<x_2<x_3$，则$\dfrac{2}{e}+\dfrac{e-a}{6e^2}<\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_3}<\dfrac{2}{a}-\dfrac{e-a}{6e^2}$.

（注：$e=2.71828\cdots$是自然对数的底数）

【答案】（1）$f\left(x\right)$的减区间为$\left(0,\dfrac{e}{2}\right)$，增区间为$\left(\dfrac{e}{2},+\infty\right)$.

（2）（ⅰ）见解析；（ⅱ）见解析.

【解析】

【分析】（1）求出函数的导数，讨论其符号后可得函数的单调性.

（2）（ⅰ）由题设构造关于切点横坐标的方程，根据方程有3个不同的解可证明不等式成立，（ⅱ）$k=\dfrac{x_3}{x_1}$，$m=\dfrac{a}{e}<1$，则题设不等式可转化为$t_1+t_3-2-\dfrac{2}{m}<\dfrac{(m-13)\left(m^2-m+12\right)}{36m\left(t_1+t_3\right)}$，结合零点满足的方程进一步转化为$\ln m+\dfrac{(m-1)(m-13)\left(m^2-m+12\right)}{72(m+1)}<0$，利用导数可证该不等式成立.

【小问1详解】

$f'\left(x\right)=-\dfrac{e}{2x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x-e}{2x^2}$，

当$0<x<\dfrac{e}{2}$，$f'\left(x\right)<0$；当$x>\dfrac{e}{2}$，$f'\left(x\right)>0$，

故 $f\left(x\right)$ 的减区间为 $\left(0,\frac{\mathrm{e}}{2}\right)$，$f\left(x\right)$ 的增区间为 $\left(\frac{\mathrm{e}}{2},+\infty\right)$.

【小问 2 详解】

（i）因为过 $\left(a,b\right)$ 有三条不同的切线，设切点为 $\left(x_i,f\left(x_i\right)\right),i=1,2,3$，

故 $f\left(x_i\right)-b=f'\left(x_i\right)\left(x_i-a\right)$，

故方程 $f\left(x\right)-b=f'\left(x\right)\left(x-a\right)$ 有 3 个不同的根，

该方程可整理为 $\left(\frac{1}{x}-\frac{\mathrm{e}}{2x^2}\right)\left(x-a\right)-\frac{\mathrm{e}}{2x}-\ln x+b=0$，

设 $g\left(x\right)=\left(\frac{1}{x}-\frac{\mathrm{e}}{2x^2}\right)\left(x-a\right)-\frac{\mathrm{e}}{2x}-\ln x+b$，

则 $g'\left(x\right)=\frac{1}{x}-\frac{\mathrm{e}}{2x^2}+\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{\mathrm{e}}{x^3}\right)\left(x-a\right)-\frac{1}{x}+\frac{\mathrm{e}}{2x^2}$

$=-\frac{1}{x^3}\left(x-\mathrm{e}\right)\left(x-a\right)$，

当 $0<x<\mathrm{e}$ 或 $x>a$ 时，$g'\left(x\right)<0$；当 $\mathrm{e}<x<a$ 时，$g'\left(x\right)>0$，

故 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\mathrm{e}\right),\left(a,+\infty\right)$ 上为减函数，在 $\left(\mathrm{e},a\right)$ 上为增函数，

因为 $g\left(x\right)$ 有 3 个不同的零点，故 $g\left(\mathrm{e}\right)<0$ 且 $g\left(a\right)>0$，

故 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{\mathrm{e}}{2\mathrm{e}^2}\right)\left(\mathrm{e}-a\right)-\frac{\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}-\ln\mathrm{e}+b<0$ 且 $\left(\frac{1}{a}-\frac{\mathrm{e}}{2a^2}\right)\left(a-a\right)-\frac{\mathrm{e}}{2a}-\ln a+b>0$，

整理得到：$b<\frac{a}{2\mathrm{e}}+1$ 且 $b>\frac{\mathrm{e}}{2a}+\ln a=f\left(a\right)$，

此时 $b-f\left(a\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\mathrm{e}}-1\right)<\frac{a}{2\mathrm{e}}+1-\left(\frac{\mathrm{e}}{2a}+\ln a\right)-\frac{a}{2\mathrm{e}}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{\mathrm{e}}{2a}-\ln a$，

设 $u\left(a\right)=\frac{3}{2}-\frac{\mathrm{e}}{2a}-\ln a$，则 $u'\left(a\right)=\frac{\mathrm{e}\text{-}2a}{2a^2}<0$，

故 $u\left(a\right)$ 为 $\left(\mathrm{e},+\infty\right)$ 上的减函数，故 $u\left(a\right)<\frac{3}{2}-\frac{\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}-\ln\mathrm{e}=0$，

故 $0<b-f\left(a\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\mathrm{e}}-1\right)$.

（ii）当 $0<a<\mathrm{e}$ 时，同（i）中讨论可得：

故 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,a\right),\left(\mathrm{e},+\infty\right)$ 上为减函数，在 $\left(a,\mathrm{e}\right)$ 上为增函数，

不妨设$x_1<x_2<x_3$，则$0<x_1<a<x_2<\mathrm{e}<x_3$，

因为$g(x)$有3个不同的零点，故$g(a)<0$且$g(\mathrm{e})>0$，

故$\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{\mathrm{e}}{2\mathrm{e}^2}\right)(\mathrm{e}-a)-\frac{\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}-\ln\mathrm{e}+b>0$且$\left(\frac{1}{a}-\frac{\mathrm{e}}{2a^2}\right)(a-a)-\frac{\mathrm{e}}{2a}-\ln a+b<0$，

整理得到：$\frac{a}{2\mathrm{e}}+1<b<\frac{a}{2\mathrm{e}}+\ln a$，

因为$x_1<x_2<x_3$，故$0<x_1<a<x_2<\mathrm{e}<x_3$，

又$g(x)=1-\frac{a+\mathrm{e}}{x}+\frac{\mathrm{e}a}{2x^2}-\ln x+b$，

设$t=\frac{\mathrm{e}}{x}$，$\frac{a}{\mathrm{e}}=m\in(0,1)$，则方程$1-\frac{a+\mathrm{e}}{x}+\frac{\mathrm{e}a}{2x^2}-\ln x+b=0$即为：

$-\frac{a+\mathrm{e}}{\mathrm{e}}t+\frac{a}{2\mathrm{e}}t^2+\ln t+b=0$即为$-(m+1)t+\frac{m}{2}t^2+\ln t+b=0$，

记$t_1=\frac{\mathrm{e}}{x_1},t_2=\frac{\mathrm{e}}{x_2},t_3=\frac{\mathrm{e}}{x_3}$,

则t_1,t_1,t_3为$-(m+1)t+\frac{m}{2}t^2+\ln t+b=0$有三个不同的根，

设$k=\frac{t_1}{t_3}=\frac{x_3}{x_1}>\frac{\mathrm{e}}{a}>1$，$m=\frac{a}{\mathrm{e}}<1$，

要证：$\frac{2}{\mathrm{e}}+\frac{\mathrm{e}-a}{6\mathrm{e}^2}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<\frac{2}{a}-\frac{\mathrm{e}-a}{6\mathrm{e}^2}$，即证$2+\frac{\mathrm{e}-a}{6\mathrm{e}}<t_1+t_3<\frac{2\mathrm{e}}{a}-\frac{\mathrm{e}-a}{6\mathrm{e}}$，

即证：$\frac{13-m}{6}<t_1+t_3<\frac{2}{m}-\frac{1-m}{6}$，

即证：$\left(t_1+t_3-\frac{13-m}{6}\right)\left(t_1+t_3-\frac{2}{m}+\frac{1-m}{6}\right)<0$，

即证：$t_1+t_3-2-\frac{2}{m}<\frac{(m-13)(m^2-m+12)}{36m(t_1+t_3)}$，

而$-(m+1)t_1+\frac{m}{2}t_1^2+\ln t_1+b=0$且$-(m+1)t_3+\frac{m}{2}t_3^2+\ln t_3+b=0$，

故$\ln t_1-\ln t_3+\frac{m}{2}(t_1^2-t_3^2)-(m+1)(t_1-t_3)=0$，

故$t_1+t_3-2-\frac{2}{m}=-\frac{2}{m}\times\frac{\ln t_1-\ln t_3}{t_1-t_3}$，

故即证：$-\frac{2}{m}\times\frac{\ln t_1-\ln t_3}{t_1-t_3}<\frac{(m-13)(m^2-m+12)}{36m(t_1+t_3)}$，

即证：$\dfrac{(t_1+t_3)\ln\dfrac{t_1}{t_3}}{t_1-t_3}+\dfrac{(m-13)(m^2-m+12)}{72}>0$

即证：$\dfrac{(k+1)\ln k}{k-1}+\dfrac{(m-13)(m^2-m+12)}{72}>0$，

记$\varphi(k)=\dfrac{(k+1)\ln k}{k-1},k>1$，则$\varphi'(k)=\dfrac{1}{(k-1)^2}\left(k-\dfrac{1}{k}-2\ln k\right)>0$，

设$u(k)=k-\dfrac{1}{k}-2\ln k$，则$u'(k)=1+\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{2}{k}>\dfrac{2}{k}-\dfrac{2}{k}=0$即$\varphi'(k)>0$，

故$\varphi(k)$在$(1,+\infty)$上为增函数，故$\varphi(k)>\varphi(m)$，

所以$\dfrac{(k+1)\ln k}{k-1}+\dfrac{(m-13)(m^2-m+12)}{72}>\dfrac{(m+1)\ln m}{m-1}+\dfrac{(m-13)(m^2-m+12)}{72}$，

记$\omega(m)=\ln m+\dfrac{(m-1)(m-13)(m^2-m+12)}{72(m+1)},0<m<1$，

则$\omega'(m)=\dfrac{(m-1)^2(3m^3-20m^2-49m+72)}{72m(m+1)^2}>\dfrac{(m-1)^2(3m^3+3)}{72m(m+1)^2}>0$，

所以$\omega(m)$在$(0,1)$为增函数，故$\omega(m)<\omega(1)=0$，

故$\ln m+\dfrac{(m-1)(m-13)(m^2-m+12)}{72(m+1)}<0$即$\dfrac{(m+1)\ln m}{m-1}+\dfrac{(m-13)(m^2-m+12)}{72}>0$，

故原不等式得证：

【点睛】思路点睛：导数背景下的切线条数问题，一般转化为关于切点方程的解的个数问题，而复杂方程的零点性质的讨论，应该根据零点的性质合理转化需求证的不等式，常用的方法有比值代换等.