绝密★本科目考试启用前

2022年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共5页，150分．考试时长120分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知全集$U=\{x|-3<x<3\}$，集合$A=\{x|-2<x\le 1\}$，则$\complement_U A=$（　　）

A. $(-2,1]$　　B. $(-3,-2)\cup[1,3)$　　C. $[-2,1)$　　D. $(-3,-2]\cup(1,3)$

2. 若复数z满足$\mathrm{i}\cdot z=3-4\mathrm{i}$，则$|z|=$（　　）

A. 1　　B. 5　　C. 7　　D. 25

3. 若直线$2x+y-1=0$是圆$(x-a)^2+y^2=1$的一条对称轴，则$a=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. -1

4. 已知函数$f(x)=\frac{1}{1+2^x}$，则对任意实数x，有（　　）

A. $f(-x)+f(x)=0$　　B. $f(-x)-f(x)=0$

C. $f(-x)+f(x)=1$　　D. $f(-x)-f(x)=\frac{1}{3}$

5. 已知函数$f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$，则（　　）

A. $f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)$上单调递减　　B. $f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right)$上单调递增

C. $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$上单调递减　　D. $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right)$上单调递增

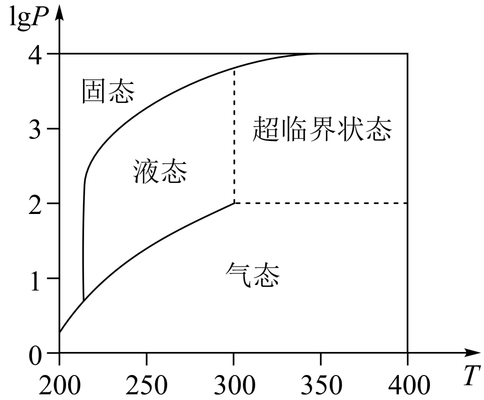
6. 设$\{a_n\}$是公差不为0的无穷等差数列，则“$\{a_n\}$为递增数列”是“存在正整数N_0，当$n>N_0$时，$a_n>0$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 在北京冬奥会上，国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术，为实现绿色冬奥

作出了贡献．如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 $\lg P$ 的关系，其中 T 表示温度，单位是 K；P 表示压强，单位是 bar．下列结论中正确的是（　　）



A. 当 $T=220$，$P=1026$ 时，二氧化碳处于液态

B. 当 $T=270$，$P=128$ 时，二氧化碳处于气态

C. 当 $T=300$，$P=9987$ 时，二氧化碳处于超临界状态

D. 当 $T=360$，$P=729$ 时，二氧化碳处于超临界状态

8. 若 $(2x-1)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $a_0+a_2+a_4=$（　　）

A. 40　　B. 41　　C. -40　　D. -41

9. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6，S 是 $\triangle ABC$ 及其内部的点构成的集合．设集合 $T=\{Q\in S\,|\,PQ\le 5\}$，则 T 表示的区域的面积为（　　）

A. $\dfrac{3\pi}{4}$　　B. π　　C. 2π　　D. 3π

10. 在 $\triangle ABC$ 中，$AC=3, BC=4, \angle C=90°$．P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点，且 $PC=1$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是（　　）

A. $[-5,3]$　　B. $[-3,5]$　　C. $[-6,4]$　　D. $[-4,6]$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x}$ 的定义域是________．

12. 已知双曲线 $y^2+\dfrac{x^2}{m}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，则 $m=$_________．

13. 若函数 $f(x)=A\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的一个零点为 $\dfrac{\pi}{3}$，则 $A=$________；$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=$________.

14. 设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}-ax+1, & x<a,\\ \left(x-2\right)^2, & x\geq a.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为________；a 的最大值为__________.

15. 已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 各项均为正数，其前 n 项和 S_n 满足 $a_n\cdot S_n=9(n=1,2,\cdots)$．给出下列四个结论：

①$\left\{a_n\right\}$ 的第 2 项小于 3；　　②$\left\{a_n\right\}$ 为等比数列；

③$\left\{a_n\right\}$ 为递减数列；　　　④$\left\{a_n\right\}$ 中存在小于 $\dfrac{1}{100}$ 的项.

其中所有正确结论的序号是_________.

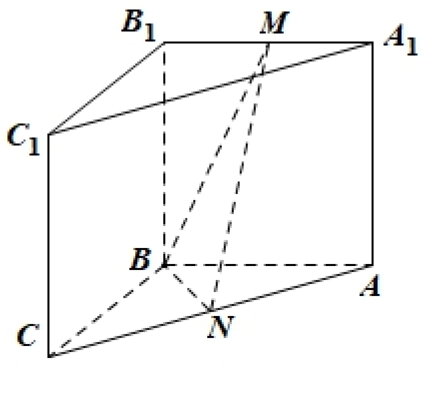
三、解答题共 6 小愿，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin 2C=\sqrt{3}\sin C$．

（1）求 $\angle C$；

（2）若 $b=6$，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

17. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BCC_1B_1 为正方形，平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，$AB=BC=2$，M，N 分别为 A_1B_1，AC 的中点.



（1）求证：MN // 平面 BCC_1B_1；

（2）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值.

条件①：$AB\perp MN$；

条件②：$BM=MN$．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

18. 在校运动会上，只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛，比赛成绩达到 $9.50\mathrm{m}$ 以上（含 $9.50\mathrm{m}$）的同学将获得优秀奖．为预测获得优秀奖的人数及冠军得主，收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩，并整理得到

如下数据（单位：m）：

甲：9.80，9.70，9.55，9.54，9.48，9.42，9.40，935，9.30，9.25；

乙：9.78，9.56，9.51，9.36，9.32，9.23；

丙：9.85，9.65，9.20，9.16．

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立．

（1）估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率；

（2）设 X 是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数，估计 X 的数学期望 E（X）；

（3）在校运动会铅球比赛中，甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大？（结论不要求证明）

19. 已知椭圆：$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$，焦距为 $2\sqrt{3}$．

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）过点 $P(-2,1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B，C，直线 AB，AC 分别与 x 轴交于点 M，N，当 $|MN|=2$ 时，求 k 的值．

20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\ln(1+x)$．

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）设 $g(x)=f'(x)$，讨论函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性；

（3）证明：对任意的 $s,t\in(0,+\infty)$，有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$．

21. 已知 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为有穷整数数列．给定正整数 m，若对任意的 $n\in\{1,2,\cdots,m\}$，在 Q 中存在 $a_i,a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+j}(j\geq 0)$，使得 $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+j}=n$，则称 Q 为 $m-$ 连续可表数列．

（1）判断 $Q:2,1,4$ 是否为 $5-$ 连续可表数列？是否为 $6-$ 连续可表数列？说明理由；

（2）若 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为 $8-$ 连续可表数列，求证：k 的最小值为 4；

（3）若 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为 $20-$ 连续可表数列，且 $a_1+a_2+\cdots+a_k<20$，求证：$k\geq 7$．