绝密★启用前

2022年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目，在规定的位置贴好条形码.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

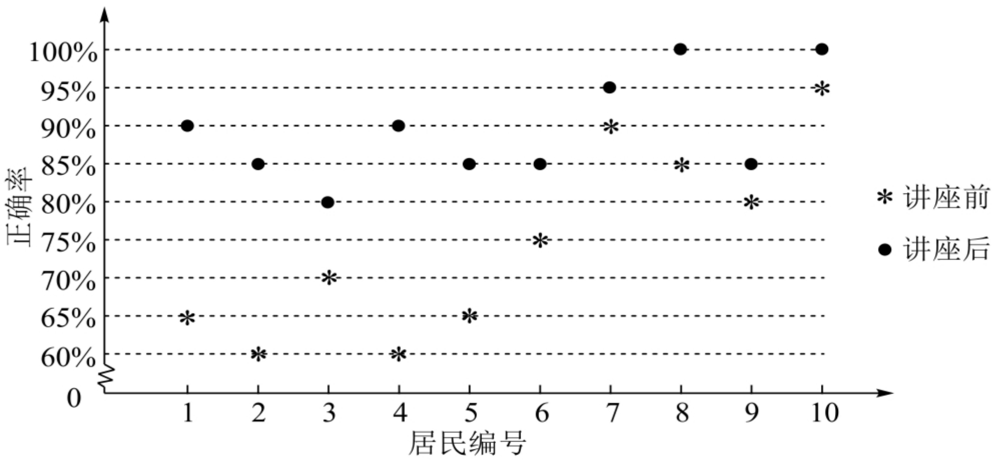
3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若$z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，则$\dfrac{z}{z\bar{z}-1}=$（　　）

A. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　B. $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　C. $-\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$　　D. $-\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$

2. 某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识．为了解讲座效果，随机抽取10位社区居民，让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷，这10位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图：



则（　　）

A. 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于70%

B. 讲座后问卷答题的正确率的平均数大于85%

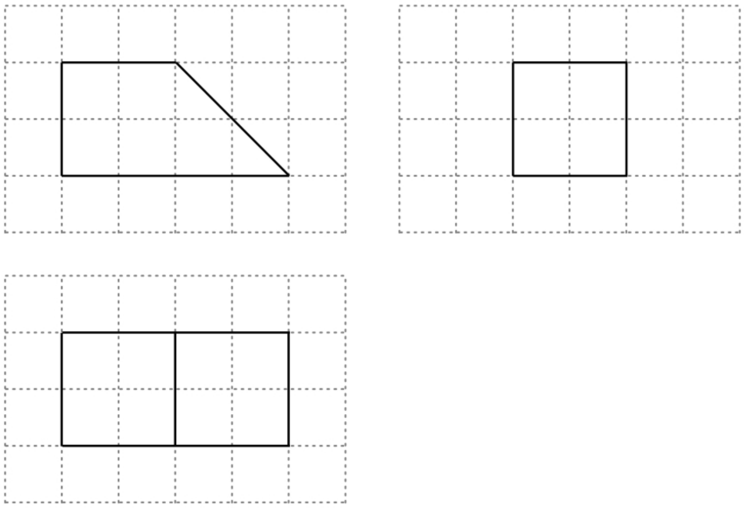
C. 讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

D. 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

3. 设全集$U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合$A=\{-1,2\},B=\left\{x\middle|\ x^2-4x+3=0\right\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$（　　）

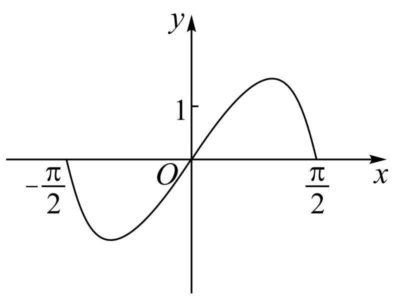
A. $\{1,3\}$　　B. $\{0,3\}$　　C. $\{-2,1\}$　　D. $\{-2,0\}$

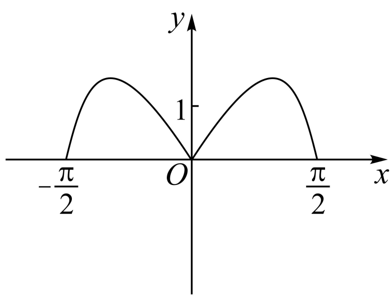
4. 如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为1，则该多面体的体积为（　　）

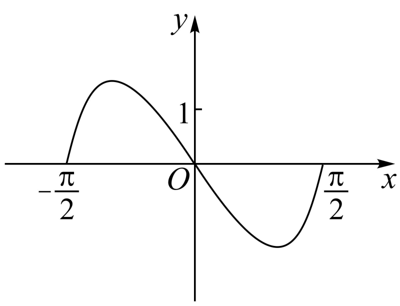


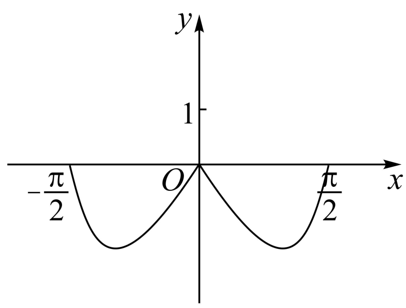
A. 8　　B. 12　　C. 16　　D. 20

5. 函数$y=\left(3^x-3^{-x}\right)\cos x$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

6. 当$x=1$时，函数$f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$取得最大值-2，则$f'(2)=$（　　）

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

7. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 $30°$，则（　　）

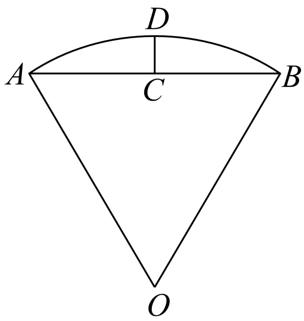
A. $AB=2AD$

B. AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 $30°$

C. $AC=CB_1$

D. B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $45°$

8. 沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作，其中收录了计算圆弧长度的“会圆术”，如图，$\overset{\frown}{AB}$ 是以 O 为圆心，OA 为半径的圆弧，C 是的 AB 中点，D 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，$CD\perp AB$．“会圆术”给出 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长的近似值 s 的计算公式：$s=AB+\dfrac{CD^2}{OA}$．当 $OA=2,\angle AOB=60°$ 时，$s=$（　　）



A. $\dfrac{11-3\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{11-4\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{9-3\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{9-4\sqrt{3}}{2}$

9. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为 2π，侧面积分别为 $S_{甲}$ 和 $S_{乙}$，体积分别为 $V_{甲}$ 和 $V_{乙}$．若 $\dfrac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则 $\dfrac{V_{甲}}{V_{乙}}=$（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $\dfrac{5\sqrt{10}}{4}$

10. 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，点 P，Q 均在 C 上，且关于 y 轴对称．若直线 AP,AQ 的斜率之积为 $\dfrac{1}{4}$，则 C 的离心率为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

11. 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $(0,\pi)$ 恰有三个极值点、两个零点，则 ω 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{5}{3},\frac{13}{6}\right)$　　B. $\left[\frac{5}{3},\frac{19}{6}\right)$　　C. $\left(\frac{13}{6},\frac{8}{3}\right]$　　D. $\left(\frac{13}{6},\frac{19}{6}\right]$

12. 已知$a=\frac{31}{32},b=\cos\frac{1}{4},c=4\sin\frac{1}{4}$，则（　　）

A. $c>b>a$　　B. $b>a>c$　　C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角的余弦值为$\frac{1}{3}$，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，则$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=$________.

14. 若双曲线$y^2-\frac{x^2}{m^2}=1(m>0)$的渐近线与圆$x^2+y^2-4y+3=0$相切，则$m=$________.

15. 从正方体的8个顶点中任选4个，则这4个点在同一个平面的概率为________.

16. 已知$\triangle ABC$中，点D在边BC上，$\angle ADB=120°,AD=2,CD=2BD$．当$\frac{AC}{AB}$取得最小值时，

$BD=$________.

三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

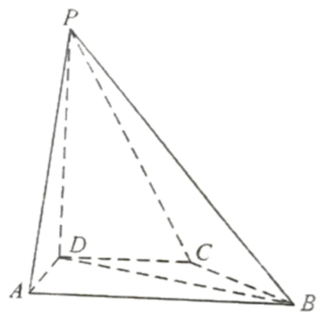
（一）必考题：共60分.

17. 记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和．已知$\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$.

（1）证明：$\{a_n\}$是等差数列；

（2）若a_4,a_7,a_9成等比数列，求S_n的最小值.

18. 在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$底面$ABCD,CD\parallel AB,AD=DC=CB=1,AB=2,DP=\sqrt{3}$.



（1）证明：$BD\perp PA$；

（2）求PD与平面PAB所成的角的正弦值.

19. 甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得10分，负方得0分，没有平局．三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军．已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为0.5，0.4，0.8，各项目的比赛结果相互独立.

（1）求甲学校获得冠军的概率；

（2）用 X 表示乙学校的总得分，求 X 的分布列与期望.

20. 设抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $D\left(p,0\right)$，过 F 的直线交 C 于 M，N 两点．当直线 MD 垂直于 x 轴时，$\left|MF\right|=3$.

（1）求 C 的方程；

（2）设直线 MD,ND 与 C的另一个交点分别为 A，B，记直线 MN,AB 的倾斜角分别为 α,β．当 $\alpha-\beta$ 取得最大值时，求直线 AB 的方程.

21. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x}-\ln x+x-a$.

（1）若 $f\left(x\right)\geq 0$，求 a 的取值范围；

（2）证明：若 $f\left(x\right)$有两个零点 x_1,x_2，则环 $x_1x_2<1$.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{2+t}{6} \\ y=\sqrt{t} \end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x=-\dfrac{2+s}{6} \\ y=-\sqrt{s} \end{cases}$（$s$ 为参数）.

（1）写出 C_1 的普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_3 的极坐标方程为 $2\cos\theta-\sin\theta=0$，求 C_3 与 C_1 交点的直角坐标，及 C_3 与 C_2 交点的直角坐标.

[选修 4-5：不等式选讲]

23. 已知 a，b，c 均为正数，且 $a^2+b^2+4c^2=3$，证明：

（1）$a+b+2c\leq 3$；

（2）若 $b=2c$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\geq 3$.