

2022 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项：

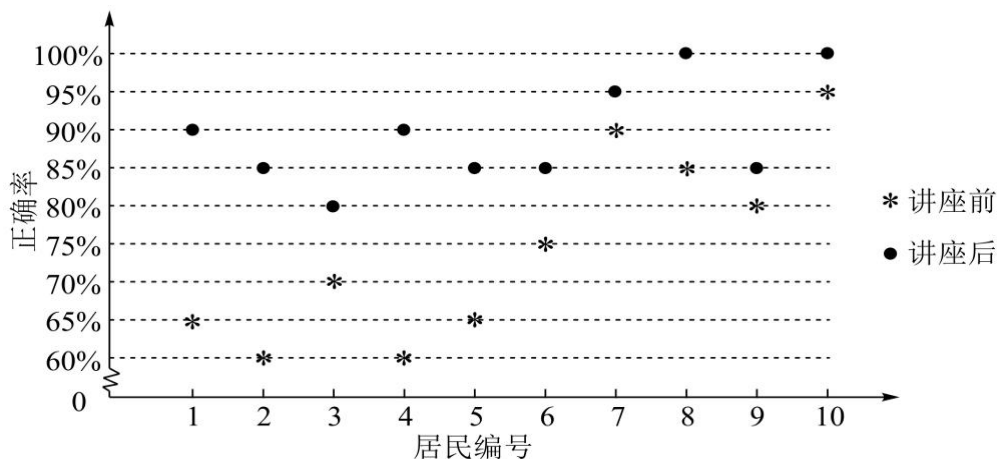
1. 答卷前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目，在规定的位置贴好条形码。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若 $z = -1 + \sqrt{3}i$ ，则 $\frac{z}{z\bar{z} - 1} = (\quad)$

- A. $-1 + \sqrt{3}i$ B. $-1 - \sqrt{3}i$ C. $-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$ D. $-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$

2. 某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识. 为了解讲座效果，随机抽取 10 位社区居民，让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷，这 10 位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图：



则 (\quad)

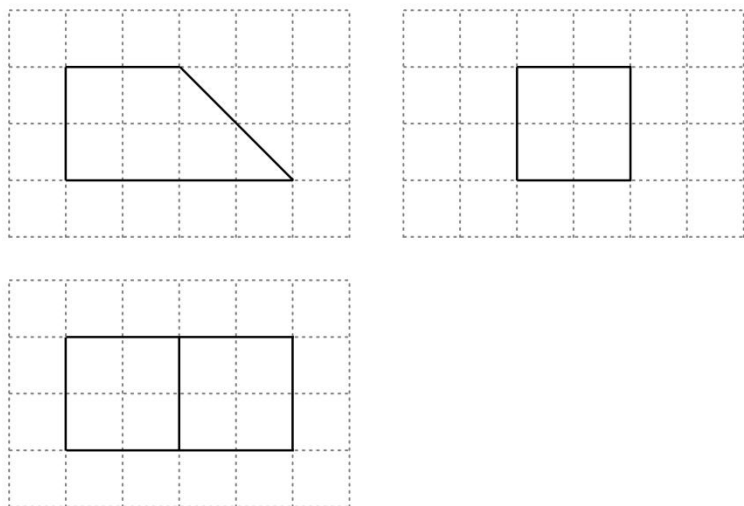
- A. 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于 70%
- B. 讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85%
- C. 讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

D. 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

3. 设全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{-1, 2\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$, 则 $\complement_U(A \cup B) =$ ()

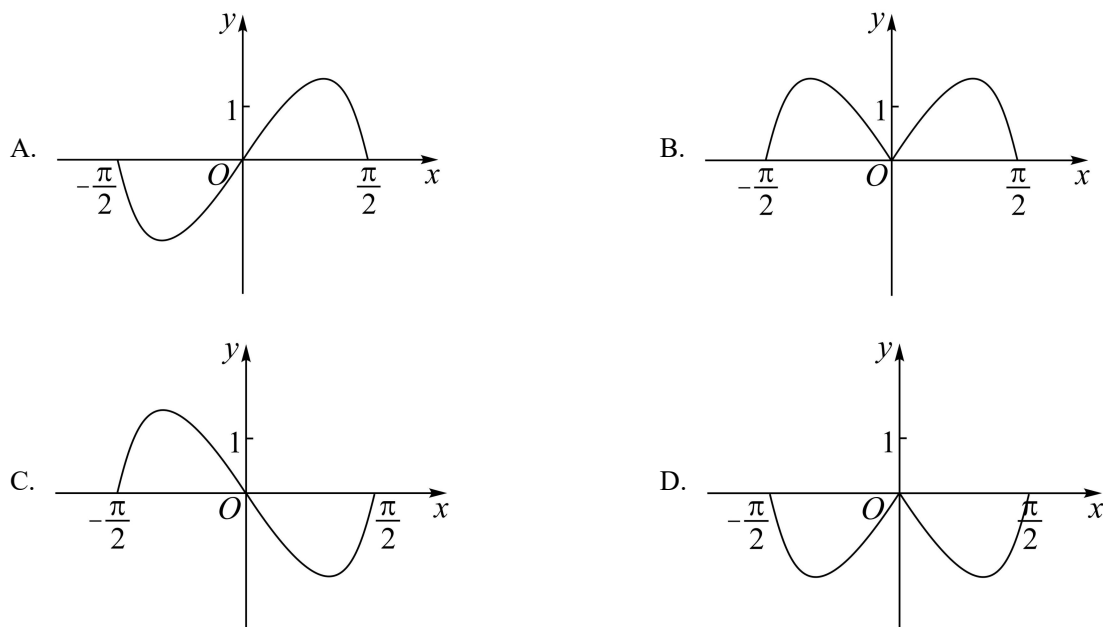
- A. $\{1, 3\}$ B. $\{0, 3\}$ C. $\{-2, 1\}$ D. $\{-2, 0\}$

4. 如图, 网格纸上绘制的是一个多面体的三视图, 网格小正方形的边长为 1, 则该多面体的体积为 ()



- A. 8 B. 12 C. 16 D. 20

5. 函数 $y = (3^x - 3^{-x}) \cos x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的图象大致为 ()



6. 当 $x = 1$ 时, 函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x}$ 取得最大值 -2 , 则 $f'(2) =$ ()

- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

7. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30° , 则 ()

A. $AB = 2AD$

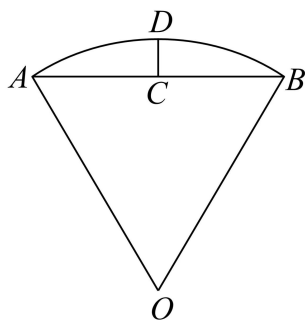
B. AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 30°

C. $AC = CB_1$

D. B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 45°

8. 沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作, 其中收录了计算圆弧长度的“会圆术”, 如图, \widehat{AB} 是以 O 为圆心, OA 为半径的圆弧, C 是 AB 中点, D 在 \widehat{AB} 上, $CD \perp AB$. “会圆术”给出 \widehat{AB} 的弧长

的近似值 s 的计算公式: $s = AB + \frac{CD^2}{OA}$. 当 $OA = 2, \angle AOB = 60^\circ$ 时, $s =$ ()



A. $\frac{11-3\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{11-4\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{9-4\sqrt{3}}{2}$

9. 甲、乙两个圆锥的母线长相等, 侧面展开图的圆心角之和为 2π , 侧面积分别为 $S_{\text{甲}}$ 和 $S_{\text{乙}}$, 体积分别为 $V_{\text{甲}}$

和 $V_{\text{乙}}$. 若 $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = 2$, 则 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} =$ ()

A. $\sqrt{5}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{10}$

D. $\frac{5\sqrt{10}}{4}$

10. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A , 点 P, Q 均在 C 上, 且关于 y 轴对称. 若直线 AP, AQ 的

斜率之积为 $\frac{1}{4}$, 则 C 的离心率为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

11. 设函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $(0, \pi)$ 恰有三个极值点、两个零点, 则 ω 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{5}{3}, \frac{13}{6}\right)$ B. $\left[\frac{5}{3}, \frac{19}{6}\right)$ C. $\left(\frac{13}{6}, \frac{8}{3}\right]$ D. $\left(\frac{13}{6}, \frac{19}{6}\right]$

12. 已知 $a = \frac{31}{32}$, $b = \cos \frac{1}{4}$, $c = 4 \sin \frac{1}{4}$, 则 ()

- A. $c > b > a$ B. $b > a > c$ C. $a > b > c$ D. $a > c > b$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设向量 \vec{a} , \vec{b} 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 且 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, 则 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} =$ _____.

14. 若双曲线 $y^2 - \frac{x^2}{m^2} = 1 (m > 0)$ 的渐近线与圆 $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ 相切, 则 $m =$ _____.

15. 从正方体的 8 个顶点中任选 4 个, 则这 4 个点在同一个平面的概率为 _____.

16. 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $\angle ADB = 120^\circ$, $AD = 2$, $CD = 2BD$. 当 $\frac{AC}{AB}$ 取得最小值时, $BD =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

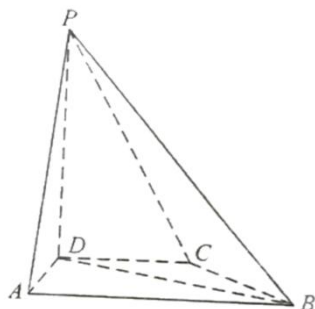
(一) 必考题：共 60 分。

17. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。已知 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$.

(1) 证明： $\{a_n\}$ 是等差数列；

(2) 若 a_4, a_7, a_9 成等比数列，求 S_n 的最小值。

18. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $CD \parallel AB$, $AD = DC = CB = 1$, $AB = 2$, $DP = \sqrt{3}$.



(1) 证明： $BD \perp PA$ ；

(2) 求 PD 与平面 PAB 所成的角的正弦值。

19. 甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得 10 分，负方得 0 分，没有平局。三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军。已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为 0.5, 0.4, 0.8, 各项目的比赛结果相互独立。

- (1) 求甲学校获得冠军的概率；
- (2) 用 X 表示乙学校的总得分，求 X 的分布列与期望.

20. 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，点 $D(p, 0)$ ，过 F 的直线交 C 于 M, N 两点. 当直线 MD 垂直于 x 轴时， $|MF| = 3$.

- (1) 求 C 的方程；
- (2) 设直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B ，记直线 MN, AB 的倾斜角分别为 α, β . 当 $\alpha - \beta$ 取得最大值时，求直线 AB 的方程.

21. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x + x - a$.

- (1) 若 $f(x) \geq 0$ ，求 a 的取值范围；
- (2) 证明：若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 ，则 $x_1 x_2 < 1$.

(二) 选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{2+t}{6} \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$ (t 为参数)，曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = -\frac{2+s}{6} \\ y = -\sqrt{s} \end{cases}$ (s 为参数).

- (1) 写出 C_1 的普通方程；
- (2) 以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_3 的极坐标方程为 $2\cos\theta - \sin\theta = 0$ ，求 C_3 与 C_1 交点的直角坐标，及 C_3 与 C_2 交点的直角坐标.

[选修 4-5：不等式选讲]

23. 已知 a, b, c 均为正数，且 $a^2 + b^2 + 4c^2 = 3$ ，证明：

- (1) $a + b + 2c \leq 3$ ；
- (2) 若 $b = 2c$ ，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 3$.

