2020 年上海市春季高考数学试卷

2020.01

一. 填空题（本大题共 12 题，满分 54 分，第 1~6 题每题 4 分，第 7~12 题每题 5 分）

1. 集合 $A=\{1,3\}$，$B=\{1,2,a\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a=$________

2. 不等式 $\dfrac{1}{x}>3$ 的解集为________

3. 函数 $y=\tan 2x$ 的最小正周期为________

4. 已知复数 z 满足 $z+2\overline{z}=6+\mathrm{i}$，则 z 的实部为________

5. 已知 $3\sin 2x=2\sin x$，$x\in(0,\pi)$，则 $x=$________

6. 若函数 $y=a\cdot 3^x+\dfrac{1}{3^x}$ 为偶函数，则 $a=$________

7. 已知直线 $l_1: x+ay=1$，$l_2: ax+y=1$，若 $l_1 /\!/ l_2$，则 l_1 与 l_2 的距离为________

8. 已知二项式 $(2x+\sqrt{x})^5$，则展开式中 x^3 的系数为________

9. 三角形 ABC 中，D 是 BC 中点，$AB=2$，$BC=3$，$AC=4$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=$________

10. 已知 $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，a、$b\in A$，则 $|a|<|b|$ 的情况有________种

11. 已知 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 五个点，满足 $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\cdot\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}=0$（$n=1,2,3$），$|\overrightarrow{A_nA_{n+1}}|\cdot|\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}|=n+1$（$n=1,2,3$），则 $|\overrightarrow{A_1A_5}|$ 的最小值为________

12. 已知 $f(x)=\sqrt{x-1}$，其反函数为 $f^{-1}(x)$，若 $f^{-1}(x)-a=f(x+a)$ 有实数根，则 a 的取值范围为________

二. 选择题（本大题共 4 题，每题 5 分，共 20 分）

13. 计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+5^n}{3^{n-1}+5^{n-1}}=$（　　）

A. 3　　B. $\dfrac{5}{3}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. 5

14. “$\alpha=\beta$” 是 “$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$” 的（　　）

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

15. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，作垂直于 x 轴的垂线交椭圆于 A、B 两点，作垂直于 y 轴的垂线交椭圆于 C、D 两点，且 $AB=CD$，两垂线相交于点 P，则点 P 的轨迹是（　　）

A. 椭圆　　B. 双曲线　　C. 圆　　D. 抛物线

16. 数列$\{a_n\}$各项均为实数，对任意$n\in\mathbf{N}^*$满足$a_{n+3}=a_n$，且行列式$\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{vmatrix}=c$为定值，则下列选项中不可能的是（　　）

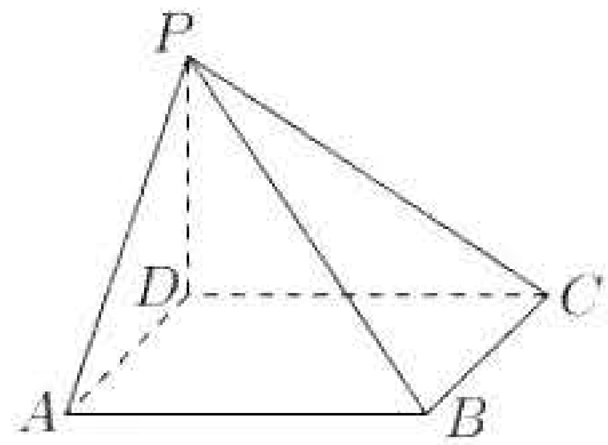
A. $a_1=1$，$c=1$　　B. $a_1=2$，$c=2$　　C. $a_1=-1$，$c=4$　　D. $a_1=2$，$c=0$

三. 解答题（本大题共 5 题，共 14+14+14+16+18=76 分）

17. 已知四棱锥$P-ABCD$，底面$ABCD$为正方形，边长为 3，$PD\perp$平面$ABCD$.

（1）若$PC=5$，求四棱锥$P-ABCD$的体积；

（2）若直线AD与BP的夹角为$60°$，求PD的长.



18. 已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$，其前n项和为S_n，$a_1=1$.

（1）若数列$\{a_n\}$为等差数列，$S_{10}=70$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_4=\dfrac{1}{8}$，求满足$S_n>100a_n$时n的最小值.

19. 有一条长为 120 米的步行道OA，A是垃圾投放点ω_1，若以O为原点，OA为x轴正半轴建立直角坐标系，设点$B(x,0)$，现要建设另一座垃圾投放点$\omega_2(t,0)$，函数$f_t(x)$表示与B点距离最近的垃圾投放点的距离.

（1）若$t=60$，求$f_{60}(10)$、$f_{60}(80)$、$f_{60}(95)$的值，并写出$f_{60}(x)$的函数解析式；

（2）若可以通过$f_t(x)$与坐标轴围成的面积来测算扔垃圾的便利程度，面积越小越便利.

问：垃圾投放点ω_2建在何处才能比建在中点时更加便利？

20. 已知抛物线 $y^2=x$ 上的动点 $M(x_0,y_0)$，过 M 分别作两条直线交抛物线于 P、Q 两点，交直线 $x=t$ 于 A、B 两点.

（1）若点 M 纵坐标为 $\sqrt{2}$，求 M 与焦点的距离；

（2）若 $t=-1$，$P(1,1)$，$Q(1,-1)$，求证：$y_A\cdot y_B$ 为常数；

（3）是否存在 t，使得 $y_A\cdot y_B=1$ 且 $y_P\cdot y_Q$ 为常数？若存在，求出 t 的所有可能值，若不存在，请说明理由.

21. 已知非空集合 $A\subseteq\mathbf{R}$，函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若对任意 $t\in A$ 且 $x\in D$，不等式 $f(x)\le f(x+t)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 具有 A 性质.

（1）当 $A=\{-1\}$，判断 $f(x)=-x$、$g(x)=2x$ 是否具有 A 性质；

（2）当 $A=(0,1)$，$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，$x\in[a,+\infty)$，若 $f(x)$ 具有 A 性质，求 a 的取值范围；

（3）当 $A=\{-2,m\}$，$m\in\mathbf{Z}$，若 D 为整数集且具有 A 性质的函数均为常值函数，求所有符合条件的 m 的值.

参考答案

一. 填空题

1. 3，$\because 3\in A$，且 $A\subseteq B$，$\therefore 3\in B$，$\therefore a=3$

2. $(0,\frac{1}{3})$，$\because \frac{1}{x}>3$，$\therefore x>0$，$\therefore 3x<1$，即 $0<x<\frac{1}{3}$

3. $\frac{\pi}{2}$，$T=\frac{\pi}{|\omega|}=\frac{\pi}{2}$

4. 2，设 $z=a+bi$，$\therefore z+2\overline{z}=a+bi+2(a-bi)=3a-bi=6+i$，$\therefore a=2$

5. $\arccos\frac{1}{3}$，$6\sin x\cos x=2\sin x\Rightarrow\cos x=\frac{1}{3}$ 或 $\sin x=0$，$\because x\in(0,\pi)$，$\therefore x=\arccos\frac{1}{3}$

6. 1，$f(x)=a\cdot 3^x+3^{-x}=f(-x)=a\cdot 3^{-x}+3^x$，$\therefore a=1$

7. $\sqrt{2}$，$\because l_1 /\!/ l_2$，$\therefore a=-1$，$\therefore l_1:x-y=1$，$l_2:x-y=-1$，$d=\sqrt{2}$

8. 10，$C_5^4(2x)^1(\sqrt{x})^4=10x^3$，$\therefore$展开式中 x^3 的系数为 10

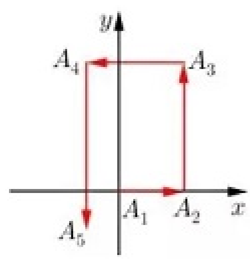
9. $\frac{19}{4}$，$\cos A=\frac{2^2+4^2-3^2}{2\times2\times4}=\frac{11}{16}$，$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times4\times\frac{11}{16}=\frac{11}{2}$，$\because \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(4+\frac{11}{2})=\frac{19}{4}$

10. 18，分类枚举，当 $a=-3$，0 种；$a=-2$，2 种；$a=-1$，4 种；$a=0$，6 种；

$a=1$，4 种；$a=2$，2 种；$a=3$，0 种；$\therefore$共 $2+4+6+4+2=18$ 种

11. $\frac{\sqrt{6}}{3}$，设 $|\overrightarrow{A_1A_2}|=x$，$\therefore |\overrightarrow{A_2A_3}|=\frac{2}{x}$，$|\overrightarrow{A_3A_4}|=\frac{3x}{2}$，

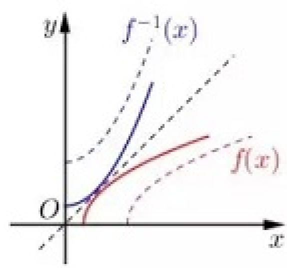


$|\overrightarrow{A_4A_5}|=\frac{8}{3x}$，设 $A_1(0,0)$，$\because$求 $|\overrightarrow{A_1A_5}|$ 的最小值，

$\therefore A_2(x,0)$，$A_3(x,\frac{2}{x})$，$A_4(-\frac{x}{2},\frac{2}{x})$，$A_5(-\frac{x}{2},-\frac{2}{3x})$，

$\therefore |\overrightarrow{A_1A_5}|^2=(-\frac{x}{2})^2+(-\frac{2}{3x})^2=\frac{x^2}{4}+\frac{4}{9x^2}\geq\frac{2}{3}$，即 $|\overrightarrow{A_1A_5}|_{\min}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

12. $[\frac{3}{4},+\infty)$，$\because y=f^{-1}(x)-a$ 与 $y=f(x+a)$ 互为反函数，



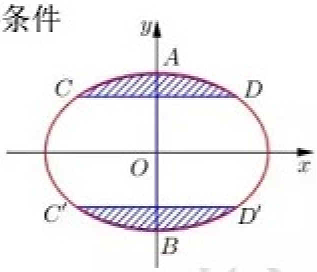
$\therefore$即 $y=f(x+a)$ 与 $y=x$ 有交点，$\therefore \sqrt{x+a-1}=x$，即

$a=x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$

二. 选择题

13. D，分子分母同除5^{n-1}， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+5^n}{3^{n-1}+5^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3(\frac{3}{5})^{n-1}+5}{(\frac{3}{5})^{n-1}+1}=5$

14. A， $\alpha=\beta\Rightarrow\sin^2\alpha+\cos^2\beta=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，充分性成立； $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1\Rightarrow$ $\sin^2\alpha=\sin^2\beta$，推不出$\alpha=\beta$，必要性不成立，即充分非必要条件



15. B，∵ $AB\le 2$，∴ $CD\le 2$，可判断轨迹为上下两支，即选双曲线. 或根据题意，设$A(m,t)$， $D(t,n)$，∴ $P(m,n)$，∵ $\dfrac{m^2}{2}+t^2=1$， $\dfrac{t^2}{2}+n^2=1$，消t得： $2n^2-\dfrac{m^2}{2}=1$，选 B

16. B，由$a_na_{n+3}-a_{n+1}a_{n+2}=c$，∴ $a_n^2-a_{n+1}a_{n+2}=c$， $a_{n+1}^2-a_{n+2}a_{n+3}=c$，作差整理得： $a_{n+1}=a_n$（常数列，$c=0$）或$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=0$，由$a_{n+1}+a_{n+2}=-a_n$及$a_{n+1}a_{n+2}=a_n^2-c$，∴方程$x^2+a_nx+a_n^2-c=0$有两根a_{n+1}、a_{n+2}，∴ $\Delta=a_n^2-4(a_n^2-c)=4c-3a_n^2>0$，选 B

三. 解答题

17.（1）∵$PD\perp$平面$ABCD$，∴$PD\perp DC$，∵ $CD=3$， $PC=5$，∴ $PD=4$，

∴ $V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times 3^2\times 4=12$，即四棱锥$P-ABCD$的体积为 12

（2）∵ $AD\,//\,BC$，∴直线AD与BP的夹角即$\angle PBC=60^\circ$，∵ $BC\perp CD$， $BC\perp PD$，∴ $BC\perp$平面PCD，∴ $BC\perp PC$，∴ $\mathrm{Rt}\triangle PCB$中， $BC=3$， $PC=3\sqrt{3}$，又$\mathrm{Rt}\triangle PCD$中， $PD=\sqrt{PC^2-CD^2}=3\sqrt{2}$，∴$PD$的长为$3\sqrt{2}$

18.（1）∵数列$\{a_n\}$为等差数列，∴设公差为d，∴ $S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times 9}{2}d=70$，∵ $a_1=1$，∴ $d=\dfrac{4}{3}$，∴ $a_n=a_1+(n-1)d=\dfrac{4}{3}n-\dfrac{1}{3}$，即数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\dfrac{4}{3}n-\dfrac{1}{3}$， $n\in\mathbf{N}^*$

（2）∵数列$\{a_n\}$为等比数列， $a_1=1$， $a_4=\dfrac{1}{8}$，∴ $q=\dfrac{1}{2}$， $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，

即 $S_n=\dfrac{1-q^n}{1-q}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$，∴ $2-\dfrac{1}{2^{n-1}}>\dfrac{100}{2^{n-1}}$，即 $2^n>101$，∴ $n\ge 7$，即n的最小值为 7

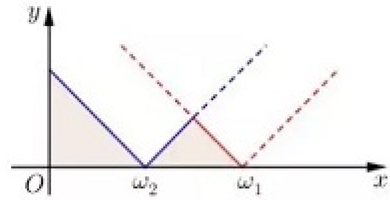
19.（1）投放点$\omega_1(120,0)$， $\omega_2(60,0)$， $f_{60}(10)$表示与$B(10,0)$距离最近的投放点（即ω_2）的距离，∴ $f_{60}(10)=|60-10|=50$，同理分析， $f_{60}(80)=|60-80|=20$， $f_{60}(95)=|120-95|=25$. 由题意， $f_{60}(x)=\{|60-x|,|120-x|\}_{\min}$，∴分类讨论，

当$|60-x|\le|120-x|$，即$x\le 90$时， $f_{60}(x)=|60-x|$；当$|60-x|>|120-x|$，

即$x>90$时， $f_{60}(x)=|120-x|$；综上， $f_{60}(x)=\begin{cases}|60-x| & x\le 90\\ |120-x| & x>90\end{cases}$

（2）由题意，$f_t(x)=\{|t-x|,|120-x|\}_{\min}$，$\therefore f_t(x)=\begin{cases}|t-x| & x\le 0.5(120+t)\\ |120-x| & x>0.5(120+t)\end{cases}$，

$f_t(x)$ 与坐标轴围成的面积如阴影部分所示，



$\therefore S=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{4}(120-t)^2=\dfrac{3}{4}t^2-60t+3600$，

由题意，$S<S(60)$，即 $\dfrac{3}{4}t^2-60t+3600<2700$，

解得 $20<t<60$，即垃圾投放点 ω_2 建在 $(20,0)$ 与 $(60,0)$ 之间时，比建在中点时更加便利

20.（1）$y_M=\sqrt{2}$，$\therefore x_M=2$，$\because y^2=x$，$\therefore p=\dfrac{1}{2}$，$\therefore MF=x_M+\dfrac{p}{2}=\dfrac{9}{4}$

（2）$M(y_0^2,y_0)$，直线 $PM:y-1=\dfrac{y_0-1}{y_0^2-1}(x-1)$，$x=-1$ 时，$y_A=\dfrac{y_0-1}{y_0+1}$，

直线 $QM:y+1=\dfrac{y_0+1}{y_0^2-1}(x-1)$，$x=-1$ 时，$y_B=\dfrac{-y_0-1}{y_0-1}$，$\therefore y_A\cdot y_B=-1$

（3）$M(y_0^2,y_0)$，$A(t,y_A)$，直线 $MA:y-y_0=\dfrac{y_0-y_A}{y_0^2-t}(x-y_0^2)$，联立 $y^2=x$ 得：

$y^2-\dfrac{y_0^2-t}{y_0-y_A}y+\dfrac{y_0^2-t}{y_0-y_A}y_0-y_0^2=0$，$\therefore y_0+y_P=\dfrac{y_0^2-t}{y_0-y_A}$，即 $y_P=\dfrac{y_0y_A-t}{y_0-y_A}$，

同理可得 $y_Q=\dfrac{y_0y_B-t}{y_0-y_B}$，$\because y_A\cdot y_B=1$，$\therefore y_Py_Q=\dfrac{y_0^2-ty_0(y_A+y_B)+t^2}{y_0^2-y_0(y_A+y_B)+1}$，

要使 $y_P\cdot y_Q$ 为常数，即 $t=1$，此时 $y_P\cdot y_Q=1$，$\therefore$存在 $t=1$ 符合题意

21.（1）$\because f(x)=-x$ 为减函数，$\therefore f(x)<f(x-1)$，$\therefore f(x)=-x$ 具有 A 性质；

$\because g(x)=2x$ 为增函数，$\therefore g(x)>g(x-1)$，$\therefore g(x)=2x$ 不具有 A 性质

（2）$A=(0,1)$，$\because$对任意 $0<t<1$，$f(x)\le f(x+t)$ 恒成立，$\therefore f(x)=x+\dfrac{1}{x}\ (x\ge a)$

为增函数（不可能为常值函数），结合图像可得 $a\ge 1$，当 $a\ge 1$ 时，函数单调递增，满足对任意 $0<t<1$，$f(x)\le f(x+t)$ 恒成立，综上，$a\in[1,+\infty)$

（3）$\because D$ 为整数集，具有 A 性质的函数均为常值函数，

$\therefore$当 $t=-2$，$f(x)=f(x-2)$ 恒成立，即 $f(2k)=p\ (k\in\mathbf{Z})$，

$f(2n-1)=q\ (n\in\mathbf{Z})$，由题意，$p=q$，$\therefore f(2k)=f(2n-1)$，

当 $x=2k$，$f(x)=f(x+2n-2k-1)$，$\therefore m=2n-2k-1\ (n,k\in\mathbf{Z})$，

当 $x=2n-1$，$f(x)=f(x+2k-2n+1)$，$\therefore m=2k-2n+1\ (n,k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore$综上，m 为奇数