绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

本试卷共4页，23小题，满分150分，考试用时120分钟。

注意事项：1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡的相应位置上。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案。答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合$M=\{x|-4<x<2\}$，$N=\{x|x^2-x-6<0\}$，则$M\cap N=$

A．$\{x|-4<x<3\}$　　B．$\{x|-4<x<-2\}$　　C．$\{x|-2<x<2\}$　　D．$\{x|2<x<3\}$

2．设复数z满足$|z-\mathrm{i}|=1$，z在复平面内对应的点为$(x，y)$，则

A．$(x+1)^2+y^2=1$　　B．$(x-1)^2+y^2=1$　　C．$x^2+(y-1)^2=1$　　D．$x^2+(y+1)^2=1$

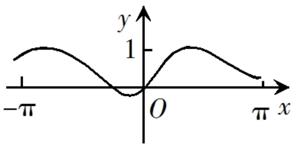
3．已知$a=\log_2 0.2$，$b=2^{0.2}$，$c=0.2^{0.3}$，则

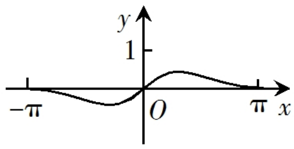
A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<a<b$　　D．$b<c<a$

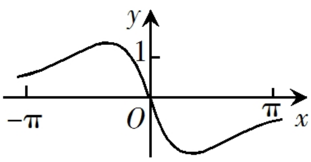
4．古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$（$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$≈0.618，称为黄金分割比例)，著名的“断臂维纳斯”便是如此．此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$．若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为105 cm，头顶至脖子下端的长度为26 cm，则其身高可能是

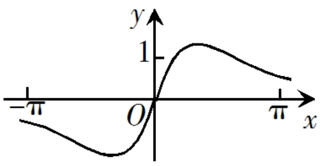
A．165 cm　　B．175 cm　　C．185 cm　　D．190 cm

5．函数$f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^{2}}$在$[-\pi,\pi]$的图像大致为

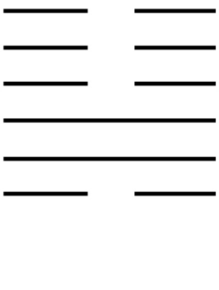
A．


B．


C．


D．


6．我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化．每一“重卦”由从下到上排列的6个爻组成，爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”，如图就是一重卦．在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦恰有3个阳爻的概率是

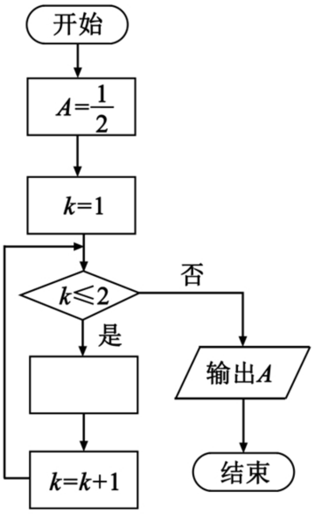


A．$\dfrac{5}{16}$　　B．$\dfrac{11}{32}$　　C．$\dfrac{21}{32}$　　D．$\dfrac{11}{16}$

7．已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

8．如图是求 $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$ 的程序框图，图中空白框中应填入



A．$A=\dfrac{1}{2+A}$　　B．$A=2+\dfrac{1}{A}$　　C．$A=\dfrac{1}{1+2A}$　　D．$A=1+\dfrac{1}{2A}$

9．记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．已知 $S_4=0$，$a_5=5$，则

A．$a_n=2n-5$　　B．$a_n=3n-10$　　C．$S_n=2n^2-8n$　　D．$S_n=\dfrac{1}{2}n^2-2n$

10．已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A，B 两点．若 $|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为

A．$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　　B．$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　C．$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　D．$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

11．关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论：

①$f(x)$是偶函数　　②$f(x)$在区间（$\frac{\pi}{2},\pi$）单调递增

③$f(x)$在$[-\pi,\pi]$有 4 个零点　　④$f(x)$的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

A．①②④　　B．②④　　C．①④　　D．①③

12．已知三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，△ABC 是边长为 2 的正三角形，E，F 分别是 PA，PB 的中点，$\angle CEF=90°$，则球 O 的体积为

A．$8\sqrt{6}\pi$　　B．$4\sqrt{6}\pi$　　C．$2\sqrt{6}\pi$　　D．$\sqrt{6}\pi$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．曲线 $y=3(x^2+x)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为____________.

14．记 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和．若 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_4^2=a_6$，则 S_5=____________.

15．甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）．根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”．设甲队主场取胜的概率为 0.6，客场取胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以 4∶1 获胜的概率是____________.

16．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A，B 两点．若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则 C 的离心率为____________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．(12 分)

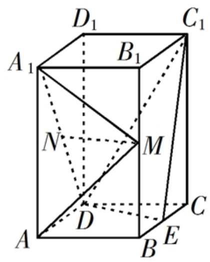
△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.

（1）求 A；

（2）若 $\sqrt{2}a+b=2c$，求 $\sin C$.

18.（12 分）

如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，E，M，N 分别是 BC，BB_1，A_1D 的中点．



（1）证明：$MN//$ 平面 C_1DE；

（2）求二面角 $A\text{-}MA_1\text{-}N$ 的正弦值．

19.（12 分）

已知抛物线 C：$y^2=3x$ 的焦点为 F，斜率为 $\dfrac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A，B，与 x 轴的交点为 P．

（1）若 $|AF|+|BF|=4$，求 l 的方程；

（2）若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求 $|AB|$．

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数．证明：

（1）$f'(x)$ 在区间 $(-1,\dfrac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点；

（2）$f(x)$ 有且仅有 2 个零点．

21.（12 分）

为了治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验．试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验．对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药．一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验．当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多4只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效．为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得1分，乙药得-1分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得1分，甲药得-1分；若都治愈或都未治愈则两种药均得0分．甲、乙两种药的治愈率分别记为α和β，一轮试验中甲药的得分记为X.

（1）求X的分布列；

（2）若甲药、乙药在试验开始时都赋予4分，$p_i(i=0,1,\cdots,8)$表示“甲药的累计得分为i时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则$p_0=0$，$p_8=1$，$p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,7)$，其中$a=P(X=-1)$，$b=P(X=0)$，$c=P(X=1)$．假设$\alpha=0.5$，$\beta=0.8$.

(i)证明：$\{p_{i+1}-p_i\}$ $(i=0,1,2,\cdots,7)$为等比数列；

(ii)求p_4，并根据p_4的值解释这种试验方案的合理性.

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修4—4：坐标系与参数方程]（10分）

在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$（$t$为参数）．以坐标原点$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线$l$的极坐标方程为$2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$.

（1）求C和l的直角坐标方程；

（2）求C上的点到l距离的最小值.

23．[选修4—5：不等式选讲]（10分）

已知a，b，c为正数，且满足$abc=1$．证明：

（1）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le a^2+b^2+c^2$；

（2）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\ge 24$．

2019年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学•参考答案

一、选择题

1．C　2．C　3．B　4．B　5．D　6．A　7．B　8．A　9．A　10．B　11．C　12．D

二、填空题

13．$y=3x$　　14．$\frac{121}{3}$　　15．0.18　　16．2

三、解答题

17．解：（1）由已知得$\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=\sin B\sin C$，故由正弦定理得$b^2+c^2-a^2=bc$．

由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$．

因为$0^\circ<A<180^\circ$，所以$A=60^\circ$．

（2）由（1）知$B=120^\circ-C$，由题设及正弦定理得$\sqrt{2}\sin A+\sin\left(120^\circ-C\right)=2\sin C$，

即$\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C=2\sin C$，可得$\cos\left(C+60^\circ\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$．

由于$0^\circ<C<120^\circ$，所以$\sin\left(C+60^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故

$\sin C=\sin\left(C+60^\circ-60^\circ\right)$

$=\sin\left(C+60^{\circ}\right)\cos 60^{\circ}-\cos\left(C+60^{\circ}\right)\sin 60^{\circ}$

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

18．解：（1）连结B_1C，ME.

因为M，E分别为BB_1，BC的中点，

所以$ME \parallel B_1C$，且$ME=\dfrac{1}{2}B_1C$.

又因为N为A_1D的中点，所以$ND=\dfrac{1}{2}A_1D$.

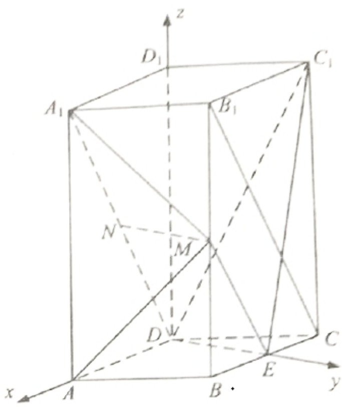
由题设知$A_1B_1 \underline{\parallel} DC$，可得$B_1C \underline{\parallel} A_1D$，故$ME \underline{\parallel} ND$，

因此四边形$MNDE$为平行四边形，$MN \parallel ED$.

又$MN \not\subset$平面EDC_1，所以$MN \parallel$平面C_1DE.

（2）由已知可得$DE \perp DA$.

以D为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$的方向为x轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系D-xyz，则



$A(2,0,0)$，$A_1(2,0,4)$，$M(1,\sqrt{3},2)$，$N(1,0,2)$，$\overrightarrow{A_1A}=(0,0,-4)$，$\overrightarrow{A_1M}=(-1,\sqrt{3},-2)$，

$\overrightarrow{A_1N}=(-1,0,-2)$，$\overrightarrow{MN}=(0,-\sqrt{3},0)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面A_1MA的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1A}=0\end{cases}$，

所以$\begin{cases}-x+\sqrt{3}y-2z=0,\\ -4z=0.\end{cases}$可取 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,0)$．

设 $\boldsymbol{n}=(p,q,r)$ 为平面A_1MN的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1N}=0.\end{cases}$

所以$\begin{cases}-\sqrt{3}q=0,\\ -p-2r=0.\end{cases}$可取 $\boldsymbol{n}=(2,0,-1)$．

于是$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

所以二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$．

19．解：设直线$l:y=\dfrac{3}{2}x+t,A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$．

（1）由题设得$F\left(\dfrac{3}{4},0\right)$，故$|AF|+|BF|=x_1+x_2+\dfrac{3}{2}$，由题设可得$x_1+x_2=\dfrac{5}{2}$．

由$\begin{cases}y=\dfrac{3}{2}x+t\\ y^2=3x\end{cases}$，可得$9x^2+12(t-1)x+4t^2=0$，则$x_1+x_2=-\dfrac{12(t-1)}{9}$．

从而$-\dfrac{12(t-1)}{9}=\dfrac{5}{2}$，得$t=-\dfrac{7}{8}$．

所以l的方程为$y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{7}{8}$．

（2）由$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$可得$y_1=-3y_2$．

由$\begin{cases} y=\dfrac{3}{2}x+t \\ y^2=3x \end{cases}$，可得 $y^2-2y+2t=0$.

所以 $y_1+y_2=2$. 从而 $-3y_2+y_2=2$，故 $y_2=-1, y_1=3$.

代入 C 的方程得 $x_1=3, x_2=\dfrac{1}{3}$.

故 $|AB|=\dfrac{4\sqrt{13}}{3}$.

20．解：（1）设 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}$，$g'(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

当 $x\in\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)$ 单调递减，而 $g'(0)>0, g'(\dfrac{\pi}{2})<0$，可得 $g'(x)$ 在$\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$有唯一零点，

设为α.

则当 $x\in(-1,\alpha)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-1,\alpha)$ 单调递增，在$\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$单调递减，故 $g(x)$ 在$\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$存在唯一极大值点，

即 $f'(x)$ 在$\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$存在唯一极大值点.

（2）$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$.

（i）当 $x\in(-1,0]$ 时，由（1）知，$f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增，而 $f'(0)=0$，所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减，又 $f(0)=0$，从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 的唯一零点.

（ii）当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，由（1）知，$f'(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 单调递增，在 $\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，而 $f'(0)=0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，所以存在 $\beta\in\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\beta)=0$，且当 $x\in(0,\beta)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$.故 $f(x)$ 在 $(0,\beta)$ 单调递增，在 $\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减.

又 $f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)>0$，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)>0$.从而，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 没有零点.

（iii）当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减.而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$f(\pi)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 有唯一零点.

（iv）当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，$\ln(x+1)>1$，所以 $f(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $(\pi,+\infty)$ 没有零点.

综上，$f(x)$ 有且仅有2个零点.

21．解：X 的所有可能取值为 $-1,0,1$.

$$P(X=-1)=(1-\alpha)\beta,$$
$$P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta),$$
$$P(X=1)=\alpha(1-\beta),$$

所以 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$(1-\alpha)\beta$	$\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$	$\alpha(1-\beta)$

（2）（i）由（1）得 $a=0.4,\quad b=0.5,\quad c=0.1$.

因此 $p_i=0.4p_{i-1}+0.5\,p_i+0.1p_{i+1}$，故 $0.1\left(p_{i+1}-p_i\right)=0.4\left(p_i-p_{i-1}\right)$，即

$p_{i+1}-p_i=4\left(p_i-p_{i-1}\right)$.

又因为 $p_1-p_0=p_1\neq 0$，所以 $\left\{p_{i+1}-p_i\right\}(i=0,1,2,\cdots,7)$ 为公比为 4，首项为 p_1 的等比数列.

（ii）由（i）可得

$$p_8=p_8-p_7+p_7-p_6+\cdots+p_1-p_0+p_0=\left(p_8-p_7\right)+\left(p_7-p_6\right)+\cdots+\left(p_1-p_0\right)=\frac{4^8-1}{3}p_1\ .$$

由于 $p_8=1$，故 $p_1=\dfrac{3}{4^8-1}$，所以

$$p_4=\left(p_4-p_3\right)+\left(p_3-p_2\right)+\left(p_2-p_1\right)+\left(p_1-p_0\right)=\frac{4^4-1}{3}p_1=\frac{1}{257}.$$

p_4 表示最终认为甲药更有效的概率，由计算结果可以看出，在甲药治愈率为 0.5，乙药治愈率为 0.8 时，认为甲药更有效的概率为 $p_4=\dfrac{1}{257}\approx 0.0039$，此时得出错误结论的概率非常小，说明这种试验方案合理.

22．解：（1）因为 $-1<\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\leq 1$，且 $x^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\dfrac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}=1$，所以 C 的直角坐标方程为

$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1(x\neq -1)$.

l 的直角坐标方程为 $2x+\sqrt{3}y+11=0$.

（2）由（1）可设 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$-\pi<\alpha<\pi$）.

C上的点到l的距离为$\frac{|2\cos\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha+11|}{\sqrt{7}}=\frac{4\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+11}{\sqrt{7}}$.

当$\alpha=-\frac{2\pi}{3}$时，$4\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+11$取得最小值7，故$C$上的点到$l$距离的最小值为$\sqrt{7}$.

23．解：（1）因为$a^2+b^2\geq 2ab,b^2+c^2\geq 2bc,c^2+a^2\geq 2ac$，又$abc=1$，故有

$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq a^2+b^2+c^2$.

（2）因为a, b, c为正数且$abc=1$，故有

$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geq 3\sqrt[3]{(a+b)^3(b+c)^3(a+c)^3}$

$=3(a+b)(b+c)(a+c)$

$\geq 3\times(2\sqrt{ab})\times(2\sqrt{bc})\times(2\sqrt{ac})$

$=24$.

所以$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geq 24$.