绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设$z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$，则$|z|=$

A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．1

2．已知集合$U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,3,4,5\}$，$B=\{2,3,6,7\}$，则$B\cap \complement_U A=$

A．$\{1,6\}$　　B．$\{1,7\}$　　C．$\{6,7\}$　　D．$\{1,6,7\}$

3．已知$a=\log_2 0.2, b=2^{0.2}, c=0.2^{0.3}$，则

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<a<b$　　D．$b<c<a$

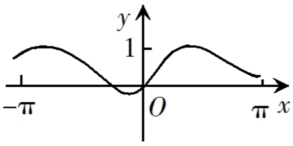
4．古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

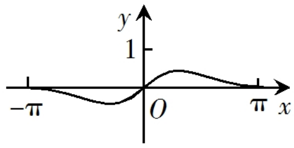
（$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，称为黄金分割比例)，著名的“断臂维纳斯”便是如此．此外，最美人体

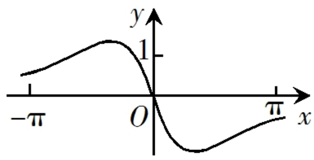
的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为 105cm，头顶至脖子下端的长度为 26cm，则其身高可能是

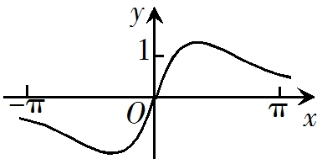
A．165 cm　　B．175 cm　　C．185 cm　　D．190cm

5．函数$f(x)=\frac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$在[—π，π]的图像大致为

A．

B．

C．

D．

6．某学校为了解 1 000 名新生的身体素质，将这些学生编号为 1，2，…，1 000，从这些新生中用系统抽样方法等距抽取 100 名学生进行体质测验.若 46 号学生被抽到，则下面 4 名学生中被抽到的是

A．8 号学生　　B．200 号学生　　C．616 号学生　　D．815 号学生

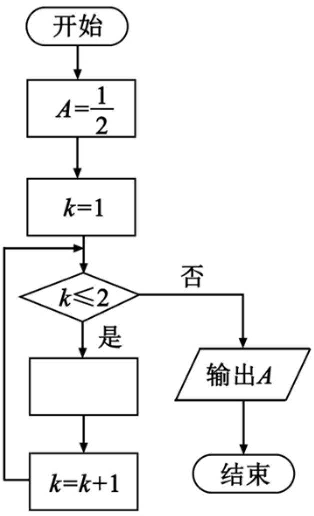
7．tan255°＝

A．$-2-\sqrt{3}$　　B．$-2+\sqrt{3}$　　C．$2-\sqrt{3}$　　D．$2+\sqrt{3}$

8．已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，且（$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$）⊥$\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

9．如图是求 $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$ 的程序框图，图中空白框中应填入



A．$A=\dfrac{1}{2+A}$　　B．$A=2+\dfrac{1}{A}$　　C．$A=\dfrac{1}{1+2A}$　　D．$A=1+\dfrac{1}{2A}$

10．双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 130°，则 C 的离心率为

A．2sin40°　　B．2cos40°　　C．$\dfrac{1}{\sin 50°}$　　D．$\dfrac{1}{\cos 50°}$

11．△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a\sin A-b\sin B=4c\sin C$，$\cos A=-\dfrac{1}{4}$，则 $\dfrac{b}{c}=$

A．6　　B．5　　C．4　　D．3

12．已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A，B 两点.若 $|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为

A．$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　　B．$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　C．$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　D．$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．曲线 $y=3(x^2+x)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为__________.

14．记 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和.若 $a_1=1$，$S_3=\dfrac{3}{4}$，则 S_4=__________.

15．函数 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{3\pi}{2})-3\cos x$ 的最小值为__________.

16．已知$\angle ACB=90°$，P 为平面 ABC 外一点，$PC=2$，点 P 到$\angle ACB$ 两边 AC，BC 的距离均为$\sqrt{3}$，那么 P 到平面 ABC 的距离为__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17．（12 分）

某商场为提高服务质量，随机调查了 50 名男顾客和 50 名女顾客，每位顾客对该商场的服务给出满意或不满意的评价，得到下面列联表：

	满意	不满意
男顾客	40	10
女顾客	30	20

（1）分别估计男、女顾客对该商场服务满意的概率；

（2）能否有 95%的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18．（12 分）

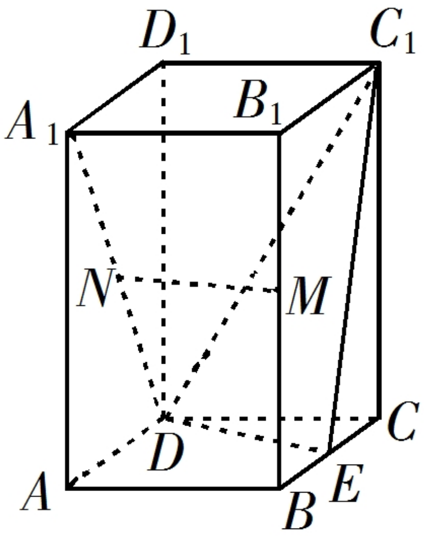
记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $S_9=-a_5$.

（1）若 $a_3=4$，求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若 $a_1>0$，求使得 $S_n \geq a_n$ 的 n 的取值范围．

19．（12 分）

如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60^{\circ}$，E，M，N 分别是 BC，BB_1，A_1D 的中点．



（1）证明：$MN\,//$ 平面 C_1DE；

（2）求点 C 到平面 C_1DE 的距离．

20．（12 分）

已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数．

（1）证明：$f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一零点；

（2）若 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)\geq ax$，求 a 的取值范围．

21.（12 分）

已知点 A，B 关于坐标原点 O 对称，$|AB|=4$，$\odot M$ 过点 A，B 且与直线 $x+2=0$ 相切．

（1）若 A 在直线 $x+y=0$ 上，求 $\odot M$ 的半径；

（2）是否存在定点 P，使得当 A 运动时，$|MA|-|MP|$ 为定值？并说明理由．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第

一题计分。

22．[选修 4−4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$．

（1）求 C 和 l 的直角坐标方程；

（2）求 C 上的点到 l 距离的最小值．

23．[选修 4−5：不等式选讲]（10 分）

已知 a，b，c 为正数，且满足 abc=1．证明：

（1）$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\le a^2+b^2+c^2$；

（2）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\ge 24$．

2019年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学•参考答案

一、选择题

1．C　　2．C　　3．B　　4．B　　5．D　　6．C

7．D　　8．B　　9．A　　10．D　　11．A　　12．B

二、填空题

13．y=3x14．$\frac{5}{8}$　　15．-4　　16．$\sqrt{2}$

三、解答题

17．解：

（1）由调查数据，男顾客中对该商场服务满意的比率为$\frac{40}{50}=0.8$，因此男顾客对该商场服务满意的概率的估计值为0.8．

女顾客中对该商场服务满意的比率为$\frac{30}{50}=0.6$，因此女顾客对该商场服务满意的概率的估计值为0.6．

（2）$K^2=\frac{100\times(40\times20-30\times10)^2}{50\times50\times70\times30}\approx4.762$.

由于$4.762>3.841$，故有95%的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异.

18．解：

（1）设$\left\{a_n\right\}$的公差为d.

由$S_9=-a_5$得$a_1+4d=0$.

由$a_3=4$得$a_1+2d=4$.

于是$a_1=8, d=-2$.

因此$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=10-2n$.

（2）由（1）得$a_1=-4d$，故$a_n=(n-5)d, S_n=\dfrac{n(n-9)d}{2}$.

由$a_1>0$知$d<0$，故$S_n \geq a_n$等价于$n^2-11n+10 \leq 0$，解得$1 \leq n \leq 10$.

所以n的取值范围是$\{n \mid 1 \leq n \leq 10, n \in \mathbf{N}\}$.

19．解：

（1）连结B_1C, ME.因为M，E分别为BB_1, BC的中点，所以$ME \parallel B_1C$，且$ME=\dfrac{1}{2}B_1C$.又因为N为A_1D的中点，所以$ND=\dfrac{1}{2}A_1D$.

由题设知$A_1B_1 \overset{\parallel}{=} DC$，可得$B_1C \overset{\parallel}{=} A_1D$，故$ME \overset{\parallel}{=} ND$，因此四边形$MNDE$为平行四边形，$MN \parallel ED$.又$MN \not\subset$平面$C_1DE$，所以$MN \parallel$平面$C_1DE$.

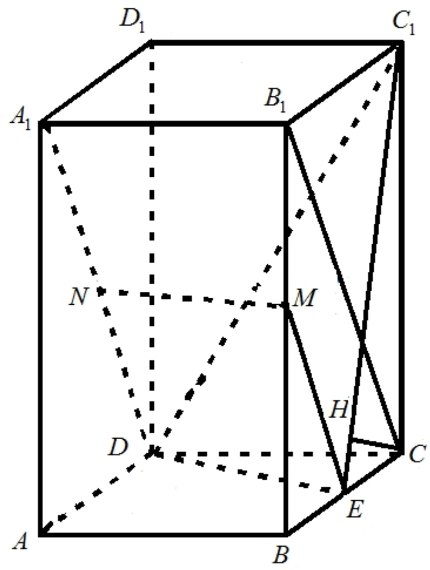
（2）过C作C_1E的垂线，垂足为H.

由已知可得$DE \perp BC$，$DE \perp C_1C$，所以$DE \perp$平面C_1CE，故$DE \perp CH$.

从而$CH \perp$平面C_1DE，故CH的长即为C到平面C_1DE的距离，

由已知可得$CE=1$，$C_1C=4$，所以$C_1E=\sqrt{17}$，故$CH=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

从而点C到平面C_1DE的距离为$\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.



20．解：

（1）设$g(x)=f'(x)$，则$g(x)=\cos x+x\sin x-1, g'(x)=x\cos x$.

当$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$时，$g'(x)>0$；当$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$单调递增，

在$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$单调递减.

又$g(0)=0, g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0, g(\pi)=-2$，故$g(x)$在$(0,\pi)$存在唯一零点.

所以$f'(x)$在$(0,\pi)$存在唯一零点.

（2）由题设知$f(\pi)\ldots a\pi, f(\pi)=0$，可得$a$≤0.

由（1）知，$f'(x)$在$(0,\pi)$只有一个零点，设为x_0，且当$x\in\left(0,x_0\right)$时，$f'(x)>0$；当$x\in\left(x_0,\pi\right)$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$\left(0,x_0\right)$单调递增，在$\left(x_0,\pi\right)$单调递减.

又$f(0)=0, f(\pi)=0$，所以，当$x\in[0,\pi]$时，$f(x)\ldots 0$.

又当 $a \leqslant 0, x \in [0, \pi]$ 时，$ax \leq 0$，故 $f(x) \geqslant ax$.

因此，a的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

21. 解：（1）因为 $\odot M$ 过点 A, B，所以圆心 M 在 AB 的垂直平分线上.由已知 A 在直线 $x+y=0$ 上，且 A, B 关于坐标原点 O 对称，所以 M 在直线 $y=x$ 上，故可设 $M(a, a)$.

因为 $\odot M$ 与直线$x+2=0$相切，所以 $\odot M$ 的半径为 $r=|a+2|$.

由已知得 $|AO|=2$，又 $\overrightarrow{MO} \perp \overrightarrow{AO}$，故可得 $2a^2+4=(a+2)^2$，解得 $a=0$ 或 $a=4$.

故 $\odot M$ 的半径 $r=2$ 或 $r=6$.

（2）存在定点 $P(1,0)$，使得 $|MA|-|MP|$ 为定值.

理由如下：

设 $M(x, y)$，由已知得 $\odot M$ 的半径为 $r=|x+2|, |AO|=2$.

由于 $\overrightarrow{MO} \perp \overrightarrow{AO}$，故可得 $x^2+y^2+4=(x+2)^2$，化简得M的轨迹方程为 $y^2=4x$.

因为曲线 $C: y^2=4x$ 是以点 $P(1,0)$ 为焦点，以直线 $x=-1$ 为准线的抛物线，所以 $|MP|=x+1$.

因为 $|MA|-|MP|=r-|MP|=x+2-(x+1)=1$，所以存在满足条件的定点$P$.

22．解：（1）因为 $-1<\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \leq 1$，且 $x^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\dfrac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}=1$，所以$C$的直角坐标方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1(x \neq -1)$.

l 的直角坐标方程为 $2x+\sqrt{3}y+11=0$.

（2）由（1）可设C的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数，$-\pi<\alpha<\pi$）.

C上的点到l的距离为$\dfrac{|2\cos\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha+11|}{\sqrt{7}}=\dfrac{4\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+11}{\sqrt{7}}$.

当$\alpha=-\dfrac{2\pi}{3}$时，$4\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+11$取得最小值7，故$C$上的点到$l$距离的最小值为$\sqrt{7}$.

23．解：（1）因为$a^2+b^2\geq 2ab,b^2+c^2\geq 2bc,c^2+a^2\geq 2ac$，又$abc=1$，故有

$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca=\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

所以$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leq a^2+b^2+c^2$.

（2）因为a, b, c为正数且$abc=1$，故有

$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geq 3\sqrt[3]{(a+b)^3(b+c)^3(a+c)^3}$

$=3(a+b)(b+c)(a+c)$

$\geq 3\times(2\sqrt{ab})\times(2\sqrt{bc})\times(2\sqrt{ac})$

$=24$.

所以$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geq 24$.