

2021 年普通高等学校招生全国统一考试

上海 数学试卷

(考试时间 120 分钟, 满分 150 分)

2021 . 6

一、填空题(本大题共有 12 题, 第 1~6 题每题 4 分, 第 7~12 题每题 5 分, 满分 54 分)

1、已知 $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 3i$, 求 $z_1 + z_2 =$ _____.

2、已知 $A = \{x | 2x \leq 1\}, B = \{-1, 0, 1\}$, 求 $A \cap B =$ _____.

3、若 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$, 求圆心坐标为 _____.

4、如图正方形 $ABCD$, 求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.

5、已知 $f(x) = \frac{3}{x} + 2$, 则 $f^{-1}(1) =$ _____.

6、若 $(x+a)^5$, 则 x^2 的系数为 80, 求 $a =$ _____.

7、已知 $\begin{cases} x \leq 3 \\ 2x - y - 2 \geq 0 \\ 3x + y - 8 \geq 0 \end{cases}$, $z = x - y$, 则 z 的最大值 _____.

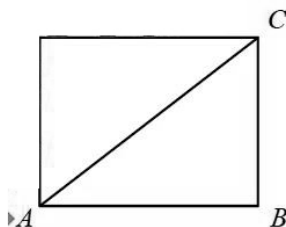
8、已知数列 $a_1 = 3, b_n = a_{2n}, a_{2n}$ 的各项和为 9, 则数列 $\{b_n\}$ 的各项和为 _____.

9、在圆柱中, 底面圆半径为 1, 高为 2, 上顶面圆的直径为 AB , C 是底面圆弧上的一个动点, 绕着底面圆周转, 则 ABC 的面积的范围 _____.

10、有四个不同的馆, 甲乙 2 个人每人选 2 个去参观, 求恰有一个馆相同的概率为 _____.

11、已知抛物线: $y^2 = 2px (p > 0)$, 若第一象限的 A, B 在抛物线上, 焦点为 F , $|AF| = 2, |BF| = 4, |AB| = 3$, 求直线 AB 的斜率为 _____.

12、已知 $a_i \in \mathbb{N}^* (i = 1, 2, \dots, 9)$ 对 $a_k = a_{k-1} + 1$ 或 $a_k = a_{k+1} - 1 (2 \leq k \leq 8)$ 中有且仅有一个成立, $a_1 = 6, a_9 = 9$, 求 $a_1 + \dots + a_9$ 的最小值 _____.



二、选择题（本大题共有 4 题，每题 5 分，满分 20 分）

13、以下哪个函数既是奇函数，又是减函数（ ）

- A. $-3x$ B. x^3 C. $y = \log_3 x$ D. 3^x

14、已知参数方程 $\begin{cases} x = 3t - 4t^3 \\ y = 2t + \sqrt{1-t^2} \end{cases}, t \in [-1, 1]$ ，以下哪个图符合该方程（ ）

15、已知 $f(x) = 3\sin x + 2$ ，存在任意的 $x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，都存在 $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，使得

$f(x) = 2f(x + \theta) + 2$ 成立，则下列选项可行 θ 的是（ ）

- A. $\frac{3\pi}{5}$ B. $\frac{4\pi}{5}$ C. $\frac{6\pi}{5}$ D. $\frac{7\pi}{5}$

16、已知 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ ， $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3$ ， $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$ ，

$x_1 y_1 + x_1 + y_1 = 2x_2 y_2$ ，以下哪个选项恒成立（ ）

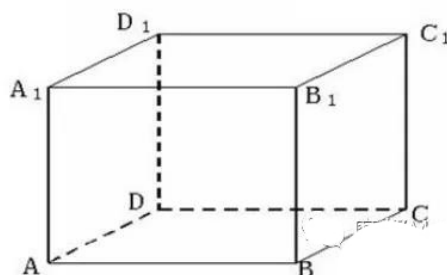
- A. $2x_2 < x_1 + x_3$ B. $2x_2 > x_1 + x_3$ C. $x_2^2 < x_1 x_3$ D. $x_2^2 > x_1 x_3$

三、解答题

17、如图，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，

(1) 若 P 是 A_1D_1 的动点，求三棱锥 V_{P-ADC}

(2) 求 AB_1 与平面 ACC_1A_1 的夹角大小



18、在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=3, b=2c$

(1) 若 $A = \frac{2\pi}{3}$ ，求 $S_{\triangle ABC}$

(2) 若 $2\sin B - \sin C = 1$ ，求 $C_{\triangle ABC}$

19、已知一企业一年营业额1.1亿元，每年增加0.05亿元，利润0.16亿元，母年增长4%

(1) 求营业额前20季度的和

(2) 请问哪年哪季度营业额是利润的18%？

公众号《真题备考》

20、已知 $\Gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, F_1, F_2 是其左右焦点 , $P(m, 0) (m < -\sqrt{2})$, 直线 l 过点 P 交 Γ 于

A, B 两点 , 且 A 在线段 BP 上 ,

(1) 若 B 是上顶点 , $|\overrightarrow{BF_1}| = |\overrightarrow{PF_1}|$, 求 m ;

(2) 若 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_2A} = \frac{1}{3}$, 且原点 O 到直线 l 的距离为 , 求直线 l ;

(3) 证明 : 对于任意 $m < -\sqrt{2}$, 使得 $\overrightarrow{F_1A} \parallel \overrightarrow{F_2B} = \frac{1}{3}$ 的直线有且仅有一条.

21、已知 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 若对任意的 $x_2 - x_1 \in S$, $f(x_2) - f(x_1) \in S$, 则有定义 : $f(x)$ 是在 S 关联的.

(1) 判断和证明 $f(x) = 2x - 1$ 是否在 $[0, +\infty)$ 关联 ? 是否有 $[0, 1]$ 关联 ?

(2) 若 $f(x)$ 是在 $\{3\}$ 关联的 , $f(x)$ 在 $x \in [0, 3)$ 时 , $f(x) = x^2 - 2x$, 求解不等式 :

$$2 \leq f(x) \leq 3$$

(3) 证明 : $f(x)$ 是在 $\{1\}$ 关联的 , 且是在 $[0, +\infty)$ 关联的 , 当且仅当 “ $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 是关联的”

21. 如果对任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 使得 $x_1 - x_2 \in S$ 都有 $f(x_1) - f(x_2) \in S$, 则称 $f(x)$ 是 S 关联的.

(1) 判断和证明 $f(x) = 2x - 1$ 是 \mathbb{Z}^+ 关联的吗?
是 $[0, 1]$ 关联的吗?

(2) $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联的, 在 $[0, 3)$ 上有
 $f(x) = x^2 - 2x$, 解不等式 $2 \leq f(x) \leq 3$.

(3) “ $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联的, 且是 $[0, +\infty)$ 关联”当且仅当“ $f(x)$ 是 $[1, 2]$ 关联的”.

公众号《真题备考》