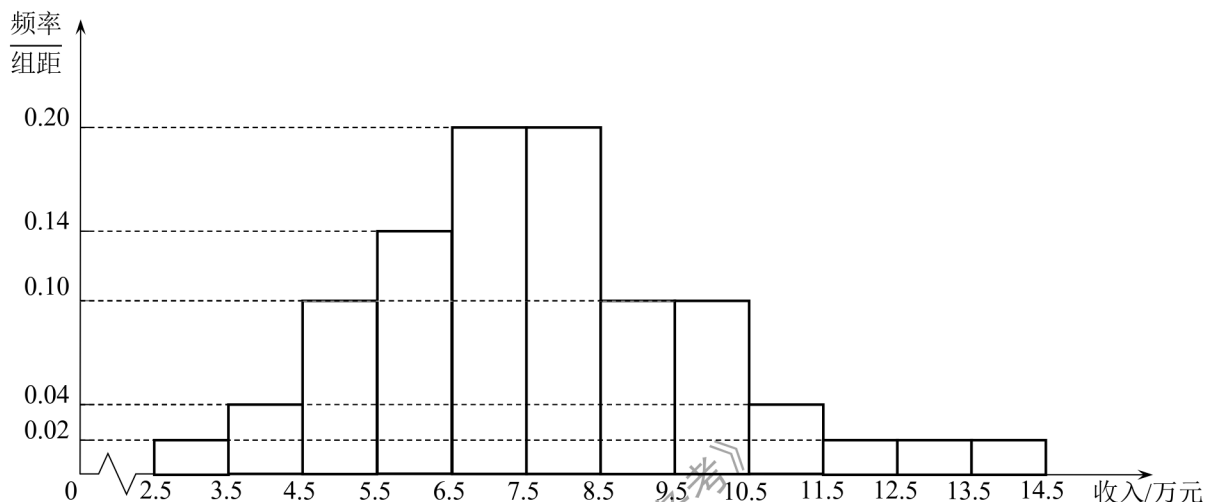


2021 年普通高等学校招生全国统一考试数学试题(甲卷·理科)

1. 设集合 $M = \{x | 0 < x < 4\}$, $N = \{x | \frac{1}{3} \leq x \leq 5\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$

- A. $\{x | 0 < x \leq \frac{1}{3}\}$ B. $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 4\}$ C. $\{x | 4 \leq x < 5\}$ D. $\{x | 0 < x \leq 5\}$

2. 为了解某地农村经济情况, 对该地农户家庭年收入进行抽样调查, 将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图:



根据此频率分布直方图, 下面结论中不正确的是()

- A. 该地农户家庭年收入低于4.5万元的农户比率估计为6%
 B. 该地农户家庭年收入不低于10.5万元的农户比率估计为10%
 C. 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过6.5万元
 D. 估计该地有一半以上的农户, 其家庭年收入介于4.5万元至8.5万元之间

3. 已知 $(1-i)^2 z = 3+2i$, 则 $z = (\quad)$

- A. $-1 - \frac{3}{2}i$ B. $-1 + \frac{3}{2}i$ C. $-\frac{3}{2} + i$ D. $-\frac{3}{2} - i$

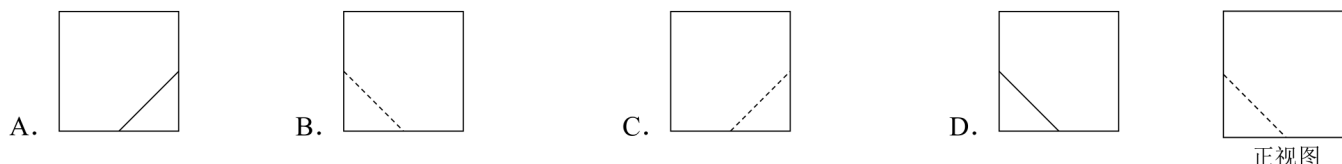
4. 青少年视力是社会普遍关注的问题, 视力情况可借助视力表测量. 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据, 五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L = 5 + \lg V$. 已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9, 则其视力的小数记录法的数据约为($\sqrt[10]{10} \approx 1.259$)()

- A. 1.5 B. 1.2 C. 0.8 D. 0.6

5. 已知 F_1, F_2 是双曲线 C 的两个焦点, P 为 C 上一点, 且 $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$, $|P F_1| = 3|P F_2|$, 则 C 的离心率为()

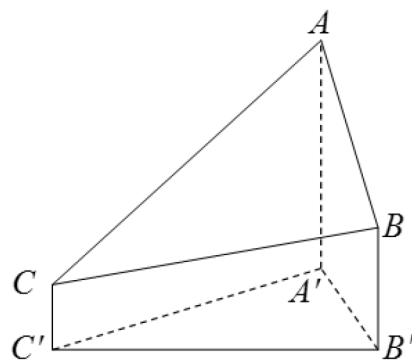
- A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ C. $\sqrt{7}$ D. $\sqrt{13}$

6. 在一个正方体中, 过顶点 A 的三条棱的中点分别为 E, F, G . 该正方体截去三棱锥 $A-EFG$ 后, 所得多面体的三视图中, 正视图如右图所示, 则相应的侧视图是()



7. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和为 S_n 设甲: $q > 0$, 乙: $\{S_n\}$ 是递增数列, 则()
- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
C. 甲是乙的充要条件
D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 2020年12月8日, 中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为8848.86(单位: m), 三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一. 右图是三角高程测量法的一个示意图, 现有 A, B, C 三点, 且 A, B, C 在同一水平面上的投影 A', B', C' 满足 $\angle A'C'B' = 45^\circ$, $\angle A'B'C' = 60^\circ$. 由 C 点测得 B 点的仰角为 15° , BB' 与 CC' 的差为100; 由 B 点测得 A 点的仰角为 45° , 则 A, C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA' - CC'$ 约为 $(\sqrt{3} \approx 1.732)$ ()

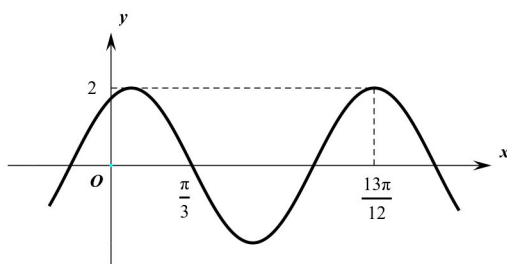


- A. 346
B. 373
C. 446
D. 473
9. 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$, 则 $\tan \alpha =$ ()
- A. $\frac{\sqrt{15}}{15}$
B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$
D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$
10. 将4个1和2个0随机排成一行, 则2个0不相邻的概率为()
- A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{2}{5}$
C. $\frac{2}{3}$
D. $\frac{4}{5}$
11. 已知 A, B, C 是半径为1的球 O 的球面上的三个点, 且 $AC \perp BC$, $AC = BC = 1$, 则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为()
- A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$
B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$
12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R , $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$. 若 $f(0) + f(3) = 6$, 则 $f(\frac{9}{2}) =$ ()
- A. $-\frac{9}{4}$
B. $-\frac{3}{2}$
C. $\frac{7}{4}$
D. $\frac{5}{2}$

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. 曲线 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1, -3)$ 处的切线方程为_____.
14. 已知向量 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (1, 0)$, $\vec{c} = \vec{a} + k\vec{b}$. 若 $\vec{a} \perp \vec{c}$, 则 $k =$ _____.
15. 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 两个焦点, P, Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点, 且 $|PQ| = |F_1F_2|$, 则四边形 PF_1QF_2 的面积为_____.

16. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示, 则满足条件 $(f(x) - f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x) - f(\frac{4\pi}{3})) > 0$ 的最小正整数 x 为_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17. 甲、乙两台机床生产同种产品，产品按质量分为一级品和二级品，为了比较两台机床产品的质量，分别用两台机床各生产了 200 件产品，产品的质量情况统计如下表：

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

- (1)甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少？
 (2)能否有99%的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异？

附： $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

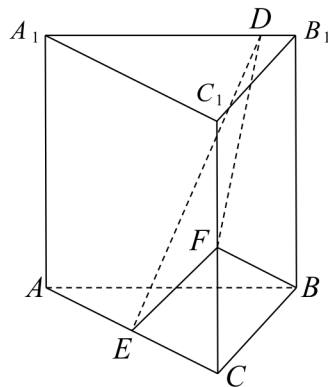
18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立. ①数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；②数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列；③ $a_2 = 3a_1$.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

19. 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，侧面 AA_1B_1B 为正方形. $AB = BC = 2$, E, F 分别为 AC 和 CC_1 的中点, D 为棱 A_1B_1 上的点, $BF \perp A_1B_1$.

(1) 证明: $BF \perp DE$;

(2) 当 B_1D 为何值时, 面 BB_1C_1C 与面 DFE 所成的二面角的正弦值最小?



20. 抛物线 C 的顶点为坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 直线 $l: x=1$ 交 C 于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$. 已知点 $M(2, 0)$, 且 $\odot M$ 与 l 相切.

(1) 求 $C, \odot M$ 的方程;

(2) 设 A_1, A_2, A_3 是 C 上的三个点, 直线 A_1A_2, A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切. 判断直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系, 并说明理由.

21. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点, 求 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{2}\cos\theta$ 。

(1) 将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程；

(2) 设点 A 的直角坐标为 $(1, 0)$ ， M 为 C 上的动点，点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM}$ ，写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程，并判断 C 与 C_1 是否有公共点。

23. [选修 4-5：不等式选讲]

已知函数 $f(x) = |x - 2|$ ， $g(x) = |2x + 3| - |2x - 1|$ 。

(1) 画出 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图象；

(2) 若 $f(x + a) \geq g(x)$ ，求 a 的取值范围。

