

2022 年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理科）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合 M 满足 $\complement_U M = \{1, 3\}$ ，则（ ）

- A. $2 \in M$ B. $3 \in M$ C. $4 \notin M$ D. $5 \notin M$

2. 已知 $z = 1 - 2i$ ，且 $z + a\bar{z} + b = 0$ ，其中 a, b 为实数，则（ ）

- A. $a = 1, b = -2$ B. $a = -1, b = 2$ C. $a = 1, b = 2$ D. $a = -1, b = -2$

3. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}, |\vec{a} - 2\vec{b}| = 3$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ （ ）

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

4. 嫦娥二号卫星在完成探月任务后，继续进行深空探测，成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星，为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值，用到数列 $\{b_n\}$ ： $b_1 = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$ ， $b_2 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}$ ，

$b_3 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3}}}$ ，...，依此类推，其中 $\alpha_k \in \mathbf{N}^* (k = 1, 2, \dots)$ 。则（ ）

A. $b_1 < b_5$ B. $b_3 < b_8$ C. $b_6 < b_2$ D. $b_4 < b_7$

5. 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点，点 A 在 C 上，点 $B(3, 0)$ ，若 $|AF| = |BF|$ ，则 $|AB| =$ （ ）

A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$

6. 执行下边的程序框图，输出的 $n =$ （ ）

12. 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 且 $f(x) + g(2-x) = 5, g(x) - f(x-4) = 7$. 若 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称, $g(2) = 4$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) =$ ()

- A. -21 B. -22 C. -23 D. -24

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作, 则甲、乙都入选的概率为_____.

14. 过四点 $(0,0), (4,0), (-1,1), (4,2)$ 中的三点的一个圆的方程为_____.

15. 记函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期为 T , 若 $f(T) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点, 则 ω 的最小值为_____.

16. 已知 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的极小值点和极大值点. 若 $x_1 < x_2$, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题: 共 0 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

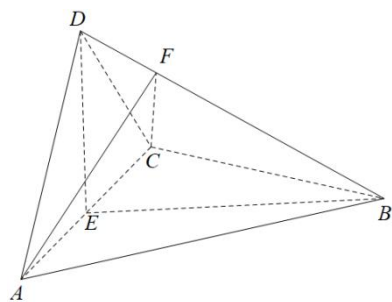
(一) 必考题: 共 60 分.

17. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C \sin(A-B) = \sin B \sin(C-A)$.

(1) 证明: $2a^2 = b^2 + c^2$;

(2) 若 $a = 5, \cos A = \frac{25}{31}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $AD \perp CD, AD = CD, \angle ADB = \angle BDC$, E 为 AC 的中点.



(1) 证明: 平面 $BED \perp$ 平面 ACD ;

(2) 设 $AB = BD = 2, \angle ACB = 60^\circ$, 点 F 在 BD 上, 当 $\triangle AFC$ 的面积最小时, 求 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值.

19. 某地经过多年的环境治理, 已将荒山改造成了绿水青山. 为估计一林区某种树木的总材积量, 随机选取了 10 棵这种树木, 测量每棵树的根部横截面积 (单位: m^2) 和材积量 (单位: m^3), 得到如下数据:

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158$, $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$.

- (1) 估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量;
- (2) 求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数 (精确到 0.01);
- (3) 现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积, 并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 186m^2 . 已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比. 利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值.

附: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \sqrt{1.896} \approx 1.377$.

20. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴、 y 轴, 且过 $A(0, -2)$, $B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ 两点.

- (1) 求 E 的方程;
- (2) 设过点 $P(1, -2)$ 的直线交 E 于 M , N 两点, 过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T , 点 H 满足 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$. 证明: 直线 HN 过定点.

21. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + axe^{-x}$

- (1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$ 各恰有一个零点, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题, 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修 4-4: 坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos 2t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$, (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴正

半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + m = 0$.

(1) 写出 l 的直角坐标方程；

(2) 若 l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围.

[选修 4-5：不等式选讲]

23. 已知 a, b, c 都是正数，且 $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} = 1$ ，证明：

(1) $abc \leq \frac{1}{9}$ ；

(2) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{abc}}$ ；