

2022 年普通高等学校招生全国统一考试

数学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分.考试用时 120 分钟.

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.用 2B 铅笔将试卷类型(A)填涂在答题卡相应位置上.将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.
3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.
4. 考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $M = \{x | \sqrt{x} < 4\}$ ， $N = \{x | 3x \geq 1\}$ ，则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | 0 \leq x < 2\}$ B. $\left\{x \left| \frac{1}{3} \leq x < 2 \right.\right\}$ C. $\{x | 3 \leq x < 16\}$ D. $\left\{x \left| \frac{1}{3} \leq x < 16 \right.\right\}$

2. 若 $i(1-z)=1$ ，则 $z+\bar{z} =$ ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

3. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上， $BD=2DA$. 记 $\overrightarrow{CA}=\vec{m}, \overrightarrow{CD}=\vec{n}$ ，则 $\overrightarrow{CB} =$ ()

- A. $3\vec{m}-2\vec{n}$ B. $-2\vec{m}+3\vec{n}$ C. $3\vec{m}+2\vec{n}$ D. $2\vec{m}+3\vec{n}$

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔 148.5m 时，相应水面的面积为 140.0km^2 ；水位为海拔 157.5m 时，相应水面的面积为 180.0km^2 ，将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔 148.5m 上升到 157.5m 时，增加的水量约为 $(\sqrt{7} \approx 2.65)$ ()

- A. $1.0 \times 10^9 \text{m}^3$ B. $1.2 \times 10^9 \text{m}^3$ C. $1.4 \times 10^9 \text{m}^3$ D. $1.6 \times 10^9 \text{m}^3$

5. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，则这 2 个数互质的概率为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

6. 记函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) + b (\omega > 0)$ 的最小正周期为 T . 若 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$, 且 $y = f(x)$ 的图象关于点

$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ 中心对称, 则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ ()

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3

7. 设 $a = 0.1e^{0.1}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = -\ln 0.9$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l , 其各顶点都在同一球面上. 若该球的体积为 36π , 且 $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$, 则该正四棱锥体积的取值范围是 ()

- A. $\left[18, \frac{81}{4}\right]$ B. $\left[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}\right]$ C. $\left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}\right]$ D. $[18, 27]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 则 ()

- A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 90° B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 90°
C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 45° D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°

10. 已知函数 $f(x) = x^3 - x + 1$, 则 ()

- A. $f(x)$ 有两个极值点 B. $f(x)$ 有三个零点
C. 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心 D. 直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

11. 已知 O 为坐标原点, 点 $A(1, 1)$ 在抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 上, 过点 $B(0, -1)$ 的直线交 C 于 P, Q 两点, 则 ()

- A. C 的准线为 $y = -1$ B. 直线 AB 与 C 相切
C. $|OP| \cdot |OQ| > |OA|^2$ D. $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 记 $g(x) = f'(x)$, 若 $f\left(\frac{3}{2} - 2x\right)$, $g(2+x)$ 均为偶函数, 则 ()

- A. $f(0)=0$ B. $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ C. $f(-1)=f(4)$ D. $g(-1)=g(2)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为_____ (用数字作答).

14. 写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 都相切的一条直线的方程_____.

15. 若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是_____.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, C 的上顶点为 A , 两个焦点为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$. 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D, E 两点, $|DE|=6$, 则 $\triangle ADE$ 的周长是_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1=1, \left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

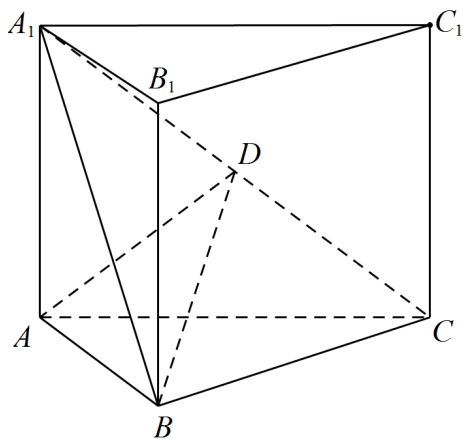
(2) 证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2$.

18. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\cos A}{1+\sin A} = \frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

(1) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$, 求 B ;

(2) 求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

19. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4, $\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.



(1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离;

(2) 设 D 为 A_1C 的中点, $AA_1 = AB$, 平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.

20. 一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯 (卫生习惯分为良好和不够良好两类) 的关系, 在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例 (称为病例组), 同时从未患该疾病的人群中随机调查了 100 人 (称为对照组), 得到如下数据:

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2) 从该地的人群中任选一人, A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”, B 表示事件“选到的人患有该疾病”.

$\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$ 与 $\frac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标, 记该指标为 R .

(i) 证明: $R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$;

(ii) 利用该调查数据, 给出 $P(A|B), P(A|\bar{B})$ 的估计值, 并利用 (i) 的结果给出 R 的估计值.

$$\text{附 } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

21. 已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-1} = 1 (a > 1)$ 上, 直线 l 交 C 于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 的斜率之和为 0.

(1) 求 l 的斜率;

(2) 若 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 求 $\triangle PAQ$ 的面积.

22. 已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值.

(1) 求 a ;

(2) 证明: 存在直线 $y = b$, 其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

