

2009 年全国统一高考数学试卷（文科）（全国卷 II）

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. （5 分）已知全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $M=\{1, 3, 5, 7\}$, $N=\{5, 6, 7\}$, 则 $C_U(M \cup N) = (\quad)$
- A. $\{5, 7\}$ B. $\{2, 4\}$
C. $\{2, 4, 8\}$ D. $\{1, 3, 5, 6, 7\}$
2. （5 分）函数 $y=\sqrt{-x}$ ($x \leq 0$) 的反函数是 (\quad)
- A. $y=x^2$ ($x \geq 0$) B. $y=-x^2$ ($x \geq 0$) C. $y=x^2$ ($x \leq 0$) D. $y=-x^2$ ($x \leq 0$)
3. （5 分）函数 $y=\log_2 \frac{2-x}{2+x}$ 的图象 (\quad)
- A. 关于直线 $y=-x$ 对称 B. 关于原点对称
C. 关于 y 轴对称 D. 关于直线 $y=x$ 对称
4. （5 分）已知 $\triangle ABC$ 中, $\cot A = -\frac{12}{5}$, 则 $\cos A = (\quad)$
- A. $\frac{12}{13}$ B. $\frac{5}{13}$ C. $-\frac{5}{13}$ D. $-\frac{12}{13}$
5. （5 分）已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB$, E 为 AA_1 中点, 则异面直线 BE 与 CD_1 所形成角的余弦值为 (\quad)
- A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{3}{5}$
6. （5 分）已知向量 $\vec{a}=(2, 1)$, $\vec{a} \cdot \vec{b}=10$, $|\vec{a}+\vec{b}|=5\sqrt{2}$, 则 $|\vec{b}| = (\quad)$
- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{10}$ C. 5 D. 25
7. （5 分）设 $a=\lg e$, $b=(\lg e)^2$, $c=\lg \sqrt{e}$, 则 (\quad)
- A. $a>b>c$ B. $c>a>b$ C. $a>c>b$ D. $c>b>a$
8. （5 分）双曲线 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ 的渐近线与圆 $(x-3)^2+y^2=r^2$ ($r>0$) 相切, 则 $r = (\quad)$
- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 3 D. 6
9. （5 分）若将函数 $y=\tan(\omega x+\frac{\pi}{4})$ ($\omega>0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 与函数 $y=\tan(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 的图象重合, 则 ω 的最小值为 (\quad)

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

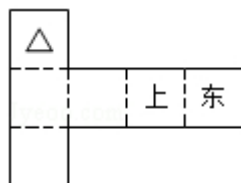
10. (5分) 甲、乙两人从4门课程中各选修2门，则甲、乙所选的课程中恰有1门相同的选法有 ()

- A. 6种 B. 12种 C. 24种 D. 30种

11. (5分) 已知直线 $y=k(x+2)$ ($k>0$) 与抛物线 $C: y^2=8x$ 相交于 A、B 两点，F 为 C 的焦点，若 $|FA|=2|FB|$ ，则 $k=$ ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

12. (5分) 纸制的正方体的六个面根据其方位分别标记为上、下、东、南、西、北. 现在沿该正方体的一些棱将正方体剪开、外面朝上展平，得到如图所示的平面图形，则标“△”的面的方位 ()



- A. 南 B. 北 C. 西 D. 下

二、填空题 (共4小题，每小题5分，满分20分)

13. (5分) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_1=1$, $S_6=4S_3$, 则 $a_4=$ _____.

14. (5分) $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为_____.

15. (5分) 已知圆 $O: x^2+y^2=5$ 和点 $A(1, 2)$, 则过 A 且与圆 O 相切的直线与两坐标轴围成的三角形的面积=_____.

16. (5分) 设 OA 是球 O 的半径, M 是 OA 的中点, 过 M 且与 OA 成 45° 角的平面截球 O 的表面得到圆 C. 若圆 C 的面积等于 $\frac{7\pi}{4}$, 则球 O 的表面积等于_____.

三、解答题 (共6小题，满分70分)

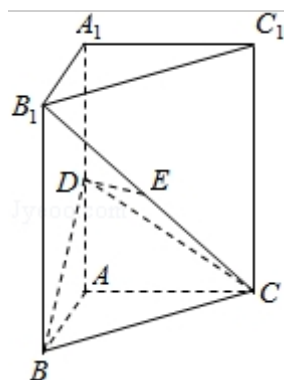
17. (10分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3a_7=-16$, $a_4+a_6=0$, 求 $\{a_n\}$ 前 n 项和 s_n .

18. (12 分) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c , $\cos(A - C) + \cos B = \frac{3}{2}$, $b^2 = ac$, 求 B .

19. (12 分) 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC$, D, E 分别为 AA_1, B_1C 的中点, $DE \perp$ 平面 BCC_1 .

(I) 证明: $AB = AC$;

(II) 设二面角 $A - BD - C$ 为 60° , 求 B_1C 与平面 BCD 所成的角的大小.



20. (12 分) 某车间甲组有 10 名工人, 其中有 4 名女工人; 乙组有 10 名工人, 其中有 6 名女工人. 现采用分层抽样 (层内采用不放回简单随即抽样) 从甲、乙两组中共抽取 4 名工人进行技术考核.

- (1) 求从甲、乙两组各抽取的人数;
- (2) 求从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人的概率;
- (3) 求抽取的 4 名工人中恰有 2 名男工人的概率.

21. (12 分) 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (1+a)x^2 + 4ax + 24a$, 其中常数 $a > 1$,

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若当 $x \geq 0$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

22. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过右焦点 F 的

直线 l 与 C 相交于 A, B 两点, 当 l 的斜率为 1 时, 坐标原点 O 到 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

(I) 求 a, b 的值;

(II) C 上是否存在点 P , 使得当 l 绕 F 转到某一位置时, 有 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 成立? 若存在, 求出所有的 P 的坐标与 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

2009 年全国统一高考数学试卷（文科）（全国卷 II）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. （5 分）已知全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ， $M=\{1, 3, 5, 7\}$ ， $N=\{5, 6, 7\}$ ，则 $C_U(M \cup N) = (\quad)$
- A. $\{5, 7\}$ B. $\{2, 4\}$ C. $\{2, 4, 8\}$ D. $\{1, 3, 5, 6, 7\}$

【考点】1H：交、并、补集的混合运算.

【专题】11：计算题.

【分析】先求集合 $M \cup N$ ，后求它的补集即可，注意全集的范围.

【解答】解： $\because M=\{1, 3, 5, 7\}$ ， $N=\{5, 6, 7\}$ ，

$\therefore M \cup N=\{1, 3, 5, 6, 7\}$ ，

$\because U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，

$\therefore C_U(M \cup N)=\{2, 4, 8\}$

故选：C.

【点评】本题考查集合运算能力，本题是比较常规的集合题，属于基础题.

2. （5 分）函数 $y=\sqrt{-x}$ ($x \leq 0$) 的反函数是 ()

A. $y=x^2$ ($x \geq 0$) B. $y=-x^2$ ($x \geq 0$) C. $y=x^2$ ($x \leq 0$) D. $y=-x^2$ ($x \leq 0$)

【考点】4R：反函数.

【专题】11：计算题.

【分析】直接利用反函数的定义，求出函数的反函数，注意函数的定义域和函数的值域.

【解答】解：由原函数定义域 $x \leq 0$ 可知 A、C 错，

原函数的值域 $y \geq 0$ 可知 D 错，

故选：B.

【点评】本题考查反函数的求法，反函数概念，考查逻辑推理能力，是基础题.

3. (5 分) 函数 $y = \log_2 \frac{2-x}{2+x}$ 的图象 ()

- A. 关于直线 $y = -x$ 对称 B. 关于原点对称
C. 关于 y 轴对称 D. 关于直线 $y = x$ 对称

【考点】3K: 函数奇偶性的性质与判断; 3M: 奇偶函数图象的对称性.

【专题】31: 数形结合.

【分析】先看函数的定义域，再看 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系，判断出此函数是个奇函数，所以，图象关于原点对称.

【解答】解：由于定义域为 $(-2, 2)$ 关于原点对称，

又 $f(-x) = \log_2 \frac{2+x}{2-x} = -\log_2 \frac{2-x}{2+x} = -f(x)$ ，故函数为奇函数，

图象关于原点对称，

故选：B.

【点评】本题考查函数奇偶性的判断以及利用函数的奇偶性判断函数图象的对称性.

4. (5 分) 已知 $\triangle ABC$ 中， $\cot A = -\frac{12}{5}$ ，则 $\cos A =$ ()

- A. $\frac{12}{13}$ B. $\frac{5}{13}$ C. $-\frac{5}{13}$ D. $-\frac{12}{13}$

【考点】GG: 同角三角函数间的基本关系.

【专题】11: 计算题.

【分析】利用同角三角函数的基本关系 $\cos A$ 转化成正弦和余弦，求得 $\sin A$ 和 $\cos A$ 的关系式，进而与 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 联立方程求得 $\cos A$ 的值.

【解答】解：∵ $\cot A = -\frac{12}{5}$

∴ A 为钝角， $\cos A < 0$ 排除 A 和 B，

再由 $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = -\frac{12}{5}$ ，和 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 求得 $\cos A = -\frac{12}{13}$ ，

故选：D.

【点评】本题考查同角三角函数基本关系的运用．主要是利用了同角三角函数中的平方关系和商数关系．

5. (5 分) 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1=2AB$ ，E 为 AA_1 中点，则异面直线 BE 与 CD_1 所形成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{3}{5}$

【考点】LM：异面直线及其所成的角．

【专题】11：计算题；31：数形结合；44：数形结合法；5G：空间角．

【分析】由 $BA_1 \parallel CD_1$ ，知 $\angle A_1BE$ 是异面直线 BE 与 CD_1 所形成角，由此能求出异面直线 BE 与 CD_1 所形成角的余弦值．

【解答】解：∵ 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1=2AB$ ，E 为 AA_1 中点，

∴ $BA_1 \parallel CD_1$ ，∴ $\angle A_1BE$ 是异面直线 BE 与 CD_1 所形成角，

设 $AA_1=2AB=2$ ，

则 $A_1E=1$ ， $BE=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ，

$A_1B=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ ，

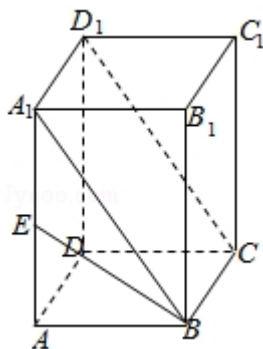
$$\therefore \cos \angle A_1BE = \frac{A_1B^2 + BE^2 - A_1E^2}{2 \cdot A_1B \cdot BE}$$

$$= \frac{5+2-1}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

∴ 异面直线 BE 与 CD_1 所形成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ．

故选：C.



【点评】本题考查异面直线所成角的余弦值的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意空间思维能力的培养.

6. (5 分) 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = 5\sqrt{2}$ ，则 $|\vec{b}| =$ ()
- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{10}$ C. 5 D. 25

【考点】91：向量的概念与向量的模；90：平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】5A：平面向量及应用.

【分析】根据所给的向量的数量积和模长，对 $|\vec{a} + \vec{b}| = 5\sqrt{2}$ 两边平方，变化为有模长和数量积的形式，代入所给的条件，等式变为关于要求向量的模长的方程，解方程即可.

【解答】解： $\because |\vec{a} + \vec{b}| = 5\sqrt{2}$ ， $|\vec{a}| = \sqrt{5}$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 50,$$

$$\text{得 } |\vec{b}| = 5$$

故选：C.

【点评】本题考查平面向量数量积运算和性质，根据所给的向量表示出要求模的向量，用求模长的公式写出关于变量的方程，解方程即可，解题过程中注意对于变量的应用.

7. (5 分) 设 $a = \lg e$ ， $b = (\lg e)^2$ ， $c = \lg \sqrt{e}$ ，则 ()
- A. $a > b > c$ B. $c > a > b$ C. $a > c > b$ D. $c > b > a$

【考点】4M：对数值大小的比较；4O：对数函数的单调性与特殊点.

【分析】因为 $10 > 1$ ，所以 $y = \lg x$ 单调递增，又因为 $1 < e < 10$ ，所以 $0 < \lg e < 1$ ，即可得到答案.

【解答】解：∵ $1 < e < 3 < \sqrt{10}$ ，

$$\therefore 0 < \lg e < 1, \therefore \lg e > \frac{1}{2} \lg e > (\lg e)^2.$$

$$\therefore a > c > b.$$

故选：C.

【点评】本题主要考查对数的单调性. 即底数大于 1 时单调递增，底数大于 0 小于 1 时单调递减.

8. (5 分) 双曲线 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的渐近线与圆 $(x-3)^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相切，则 $r =$

()

A. $\sqrt{3}$

B. 2

C. 3

D. 6

【考点】IT：点到直线的距离公式；KC：双曲线的性质.

【专题】11：计算题.

【分析】求出渐近线方程，再求出圆心到渐近线的距离，根据此距离和圆的半径相等，求出 r .

【解答】解：双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}x$ ，即 $x \pm \sqrt{2}y = 0$ ，

$$\text{圆心 } (3, 0) \text{ 到直线的距离 } d = \frac{|3|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1}} = \sqrt{3},$$

$$\therefore r = \sqrt{3}.$$

故选：A.

【点评】本题考查双曲线的性质、点到直线的距离公式.

9. (5 分) 若将函数 $y = \tan\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，与函数 $y = \tan\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象重合，则 ω 的最小值为 ()

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

【考点】HJ: 函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的图象变换.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据图象的平移求出平移后的函数解析式, 与函数 $y=\tan(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 的图象重合, 比较系数, 求出 $\omega=6k+\frac{1}{2}$ ($k\in\mathbb{Z}$), 然后求出 ω 的最小值.

【解答】解: $y=\tan(\omega x+\frac{\pi}{4})$, 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位可得: $y=\tan[\omega(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{4}]=\tan(\omega x+\frac{\pi}{6})$
 $\therefore \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\omega+k\pi=\frac{\pi}{6}$
 $\therefore \omega=k+\frac{1}{2}$ ($k\in\mathbb{Z}$),

又 $\because \omega > 0$

$$\therefore \omega_{\min} = \frac{1}{2}.$$

故选: D.

【点评】本题是基础题, 考查三角函数的图象的平移, 待定系数法的应用, 考查计算能力, 是常考题.

10. (5 分) 甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门, 则甲、乙所选的课程中恰有 1 门相同的选法有 ()

A. 6 种

B. 12 种

C. 24 种

D. 30 种

【考点】D5: 组合及组合数公式.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据题意, 分两步, ①先求所有两人各选修 2 门的种数, ②再求两人所选两门都相同与都不同的种数, 进而由事件间的相互关系, 分析可得答案.

【解答】解: 根据题意, 分两步,

①由题意可得, 所有两人各选修 2 门的种数 $C_4^2 C_4^2 = 36$,

②两人所选两门都相同的有为 $C_4^2 = 6$ 种, 都不同的种数为 $C_4^2 = 6$,

故选：C.

【点评】本题考查组合公式的运用，解题时注意事件之间的关系，选用直接法或间接法.

11. (5分) 已知直线 $y=k(x+2)$ ($k>0$) 与抛物线 $C: y^2=8x$ 相交于 A、B 两点，F 为 C 的焦点，若 $|FA|=2|FB|$ ，则 $k=$ ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【考点】K8：抛物线的性质.

【专题】11：计算题；16：压轴题.

【分析】根据直线方程可知直线恒过定点，如图过 A、B 分别作 $AM \perp l$ 于 M， $BN \perp l$ 于 N，根据 $|FA|=2|FB|$ ，推断出 $|AM|=2|BN|$ ，点 B 为 AP 的中点、连接 OB，进而可知 $|OB|=\frac{1}{2}|AF|$ ，进而推断出 $|OB|=|BF|$ ，进而求得点 B 的横坐标，则点 B 的坐标可得，最后利用直线上的两点求得直线的斜率.

【解答】解：设抛物线 $C: y^2=8x$ 的准线为 $l: x=-2$

直线 $y=k(x+2)$ ($k>0$) 恒过定点 $P(-2, 0)$

如图过 A、B 分别作 $AM \perp l$ 于 M， $BN \perp l$ 于 N，

由 $|FA|=2|FB|$ ，则 $|AM|=2|BN|$ ，

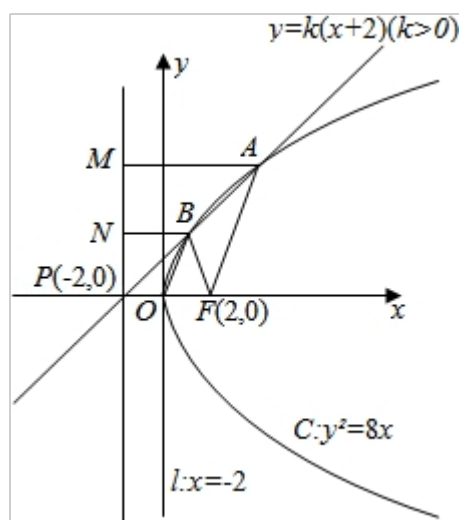
点 B 为 AP 的中点、连接 OB，

则 $|OB|=\frac{1}{2}|AF|$ ，

$\therefore |OB|=|BF|$ ，点 B 的横坐标为 1，

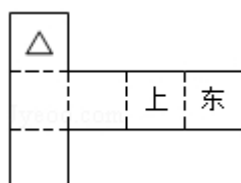
故点 B 的坐标为 $(1, 2\sqrt{2})$ $\therefore k=\frac{2\sqrt{2}-0}{1-(-2)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

故选：D.



【点评】本题主要考查了抛物线的简单性质．考查了对抛物线的基础知识的灵活运用．

12. (5 分) 纸制的正方体的六个面根据其方位分别标记为上、下、东、南、西、北．现在沿该正方体的一些棱将正方体剪开、外面朝上展平，得到如图所示的平面图形，则标“△”的面的方位是 ()



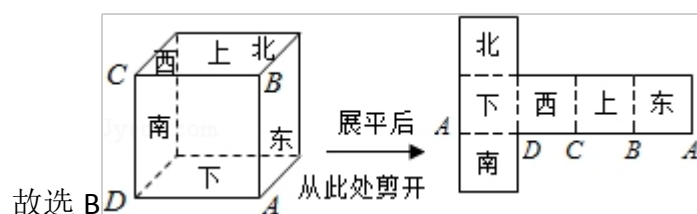
- A. 南 B. 北 C. 西 D. 下

【考点】LC：空间几何体的直观图．

【专题】16：压轴题．

【分析】本题考查多面体展开图；正方体的展开图有多种形式，结合题目，首先满足上和东所在正方体的方位，“△”的面就好确定．

【解答】解：如图所示．



【点评】 本题主要考查多面体的展开图的复原，属于基本知识基本能力的考查.

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分）

13. （5 分）设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_1=1$, $S_6=4S_3$, 则 $a_4=$ 3.

【考点】 87: 等比数列的性质; 89: 等比数列的前 n 项和.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 根据 $S_6=4S_3$ 可求得 q^3 , 进而根据等比数列的通项公式, 得到答案.

【解答】 解: 设等比数列的公比为 q , 则由 $S_6=4S_3$ 知 $q \neq 1$,

$$\therefore S_6 = \frac{1-q^6}{1-q} = \frac{4(1-q^3)}{1-q}.$$

$$\therefore q^3=3. \therefore a_1q^3=3.$$

故答案为: 3

【点评】 本题主要考查了等比数列的求和问题. 属基础题.

14. （5 分） $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为 6.

【考点】 DA: 二项式定理.

【分析】 先化简代数式, 再利用二项展开式的通项公式求出第 $r+1$ 项, 令 x, y 的指数都为 1 求出 x^3y^3 的系数

【解答】 解: $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^4 = x^2y^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$,

只需求 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$ 展开式中的含 xy 项的系数.

$$\because (\sqrt{x}-\sqrt{y})^4 \text{ 的展开式的通项为 } T_{r+1} = C_4^r (\sqrt{x})^{4-r} (-\sqrt{y})^r$$

$$\text{令 } \begin{cases} 4-r=2 \\ r=2 \end{cases} \text{ 得 } r=2$$

$$\therefore \text{展开式中 } x^3y^3 \text{ 的系数为 } C_4^2=6$$

故答案为 6.

【点评】 本题考查二项展开式的通项公式是解决二项展开式的特定项问题的工具.

15. (5分) 已知圆 $O: x^2+y^2=5$ 和点 $A(1, 2)$, 则过 A 且与圆 O 相切的直线与两坐标轴围成的三角形的面积 = $\frac{25}{4}$.

【考点】J7: 圆的切线方程.

【专题】11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】判断点 A 在圆上, 用点斜式写出切线方程, 求出切线在坐标轴上的截距, 从而求出直线与两坐标轴围成的三角形的面积.

【解答】解: 由题意知, 点 A 在圆上, 切线斜率为 $\frac{-1}{K_{OA}} = \frac{-1}{\frac{2}{1}} = -\frac{1}{2}$,

用点斜式可直接求出切线方程为: $y-2 = -\frac{1}{2}(x-1)$,

即 $x+2y-5=0$, 从而求出在两坐标轴上的截距分别是 5 和 $\frac{5}{2}$,

所以, 所求面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{4}$.

【点评】本题考查求圆的切线方程的方法, 以及求直线与坐标轴围成的三角形的面积.

16. (5分) 设 OA 是球 O 的半径, M 是 OA 的中点, 过 M 且与 OA 成 45° 角的平面截球 O 的表面得到圆 C . 若圆 C 的面积等于 $\frac{7\pi}{4}$, 则球 O 的表面积等于 8π .

【考点】LG: 球的体积和表面积.

【专题】11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】本题可以设出球和圆的半径, 利用题目的关系, 求解出具体的值, 即可得到答案.

【解答】解: 设球半径为 R , 圆 C 的半径为 r ,

由 $\pi r^2 = \frac{7\pi}{4}$, 得 $r^2 = \frac{7}{4}$.

因为 $OC = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} R$.

$$\text{由 } R^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}R\right)^2 + r^2 = \frac{1}{8}R^2 + \frac{7}{4} \text{ 得 } R^2 = 2$$

故球 O 的表面积等于 8π

故答案为: 8π ,

【点评】本题考查学生对空间想象能力, 以及球的面积体积公式的利用, 是基础题.

三、解答题 (共 6 小题, 满分 70 分)

17. (10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3a_7 = -16$, $a_4 + a_6 = 0$, 求 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n .

【考点】84: 等差数列的通项公式; 85: 等差数列的前 n 项和.

【专题】34: 方程思想.

【分析】利用等差数列的通项公式, 结合已知条件列出关于 a_1 , d 的方程组, 求出 a_1 、 d , 进而代入等差数列的前 n 项和公式求解即可.

【解答】解: 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则
$$\begin{cases} (a_1 + 2d)(a_1 + 6d) = -16 \\ a_1 + 3d + a_1 + 5d = 0 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} a_1^2 + 8da_1 + 12d^2 = -16 \\ a_1 = -4d \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = -8 \\ d = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1 = 8 \\ d = -2 \end{cases},$$

因此 $S_n = -8n + n(n-1) = n(n-9)$, 或 $S_n = 8n - n(n-1) = -n(n-9)$.

【点评】本题考查等差数列的通项公式及求和公式运用能力, 利用方程的思想可求解.

18. (12 分) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边长分别为 a 、 b 、 c , $\cos(A-C) + \cos B = \frac{3}{2}$, $b^2 = ac$, 求 B .

【考点】GG: 同角三角函数间的基本关系; HP: 正弦定理.

【专题】11: 计算题.

【分析】本题考查三角函数化简及解三角形的能力，关键是注意角的范围对角的三角函数值的制约，并利用正弦定理得到 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ （负值舍掉），从而求出答案.

【解答】解：由 $\cos(A-C) + \cos B = \frac{3}{2}$ 及 $B = \pi - (A+C)$ 得

$$\cos(A-C) - \cos(A+C) = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \cos A \cos C + \sin A \sin C - (\cos A \cos C - \sin A \sin C) = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \sin A \sin C = \frac{3}{4}.$$

又由 $b^2 = ac$ 及正弦定理得 $\sin^2 B = \sin A \sin C$,

$$\text{故 } \sin^2 B = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } \sin B = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (舍去)},$$

$$\text{于是 } B = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } B = \frac{2\pi}{3}.$$

又由 $b^2 = ac$

知 $b \leq a$ 或 $b \leq c$

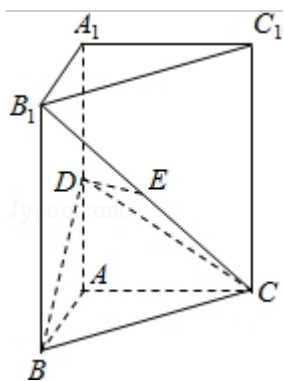
$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{3}.$$

【点评】三角函数给值求值问题的关键就是分析已知角与未知角的关系，然后通过角的关系，选择恰当的公式，即：如果角与角相等，则使用同角三角函数关系；如果角与角之间的和或差是直角的整数倍，则使用诱导公式；如果角与角之间存在和差关系，则我们用和差角公式；如果角与角存在倍数关系，则使用倍角公式.

19. (12分) 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB \perp AC$ ，D、E 分别为 AA_1 、 B_1C 的中点， $DE \perp$ 平面 BCC_1 .

(I) 证明： $AB=AC$;

(II) 设二面角 $A-BD-C$ 为 60° ，求 B_1C 与平面 BCD 所成的角的大小.



【考点】LQ: 平面与平面之间的位置关系.

【专题】11: 计算题; 14: 证明题.

【分析】(1) 连接 BE , 可根据射影相等的两条斜线段相等证得 $BD=DC$, 再根据相等的斜线段的射影相等得到 $AB=AC$;

(2) 求 B_1C 与平面 BCD 所成的线面角, 只需求点 B_1 到面 BDC 的距离即可, 作 $AG \perp BD$ 于 G , 连 GC , $\angle AGC$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角, 在三角形 AGC 中求出 GC 即可.

【解答】解: 如图

(I) 连接 BE , $\because ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱,

$$\therefore \angle B_1BC = 90^\circ,$$

$$\because E \text{ 为 } B_1C \text{ 的中点}, \therefore BE = EC.$$

又 $DE \perp$ 平面 BCC_1 ,

$$\therefore BD = DC \text{ (射影相等的两条斜线段相等) 而 } DA \perp \text{ 平面 } ABC,$$

$$\therefore AB = AC \text{ (相等的斜线段的射影相等)}.$$

(II) 求 B_1C 与平面 BCD 所成的线面角,

只需求点 B_1 到面 BDC 的距离即可.

作 $AG \perp BD$ 于 G , 连 GC ,

$$\because AB \perp AC, \therefore GC \perp BD,$$

$$\angle AGC \text{ 为二面角 } A-BD-C \text{ 的平面角, } \angle AGC = 60^\circ$$

$$\text{不妨设 } AC = 2\sqrt{3}, \text{ 则 } AG = 2, GC = 4$$

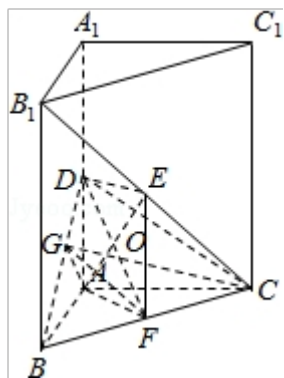
$$\text{在 } RT\triangle ABD \text{ 中, 由 } AD \cdot AB = BD \cdot AG, \text{ 易得 } AD = \sqrt{6}$$

设点 B_1 到面 BDC 的距离为 h , B_1C 与平面 BCD 所成的角为 α .

$$\text{利用 } \frac{1}{3} S_{\triangle B_1BC} \cdot DE = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot h,$$

$$\text{可求得 } h = 2\sqrt{3}, \text{ 又可求得 } B_1C = 4\sqrt{3} \sin \alpha = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}, \therefore \alpha = 30^\circ.$$

即 B_1C 与平面 BCD 所成的角为 30° .



【点评】 本题主要考查了平面与平面之间的位置关系，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，属于基础题.

20. (12 分) 某车间甲组有 10 名工人，其中有 4 名女工人；乙组有 10 名工人，其中有 6 名女工人. 现采用分层抽样（层内采用不放回简单随即抽样）从甲、乙两组中共抽取 4 名工人进行技术考核.

- (1) 求从甲、乙两组各抽取的人数；
- (2) 求从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人的概率；
- (3) 求抽取的 4 名工人中恰有 2 名男工人的概率.

【考点】 B3: 分层抽样方法; C6: 等可能事件和等可能事件的概率.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 (1) 根据分层抽样原理，要从甲、乙两组各 10 人中共抽取 4 名工人，则从每组各抽取 2 名工人.

(2) 从甲组抽取 2 人的结果有 C_{10}^2 种，恰有 1 名女工人的结果有 $C_4^1 C_6^1$ 种，代入等可能事件的概率公式即可

(3) 从甲乙各 10 人中各抽 2 人的结果有 $C_{10}^2 C_{10}^2$ 种，而 4 名工人中恰有 2 名男工人的情况分①两名男工都来自甲，有 $C_6^2 C_6^2$ ②甲乙各抽 1 名男工 $C_6^1 C_4^1 C_4^1 C_6^1$ ③两名男工都来自乙有 $C_4^2 C_6^2$ 种结果

【解答】解：（1）由于甲、乙两组各有 10 名工人，根据分层抽样原理，要从甲、乙两组中共抽取 4 名工人进行技术考核，则从每组各抽取 2 名工人.

（2）记 A 表示事件：从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人，则 $P(A) = \frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$

（3） A_i 表示事件：从甲组抽取的 2 名工人中恰有 i 名男工人， $i=0, 1, 2$

B_j 表示事件：从乙组抽取的 2 名工人中恰有 j 名男工人， $j=0, 1, 2$

B 表示事件：抽取的 4 名工人中恰有 2 名男工人.

A_i 与 B_j 独立， $i, j=0, 1, 2$ ，且 $B=A_0 \bullet B_2 + A_1 \bullet B_1 + A_2 \bullet B_0$

故 $P(B) = P(A_0 \bullet B_2 + A_1 \bullet B_1 + A_2 \bullet B_0) = P(A_0) \bullet P(B_2) + P(A_1) \bullet P(B_1) + P(A_2) \bullet P(B_0)$

$$= \frac{C_6^2 C_4^2 + C_6^1 C_4^1 C_6^1 C_4^1 + C_6^2 C_4^2}{C_{10}^2 C_{10}^2} = \frac{31}{75}$$

【点评】本题考查概率统计知识，要求有正确理解分层抽样的方法及利用分类原理处理事件概率的能力，第一问直接利用分层统计原理即可得人数，第二问注意要用组合公式得出概率，第三问关键是理解清楚题意以及恰有 2 名男工人的具体含义，从而正确分类求概率.

21. （12 分）设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (1+a)x^2 + 4ax + 24a$ ，其中常数 $a > 1$ ，

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（II）若当 $x \geq 0$ 时， $f(x) > 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【考点】3R：函数恒成立问题；6B：利用导数研究函数的单调性.

【专题】15：综合题；16：压轴题.

【分析】（1）先对函数进行求导，根据导函数大于 0 时原函数单调递增，导函数小于 0 时原函数单调递减可确定函数的单调性.

（2）先将问题转化为求函数在 $x \geq 0$ 时的最小值问题，再结合（1）中的单调性可确定 $f(x)$ 在 $x=2a$ 或 $x=0$ 处取得最小值，求出最小值，即可得到 a 的范围.

【解答】解：（1） $f'(x) = x^2 - 2(1+a)x + 4a = (x-2)(x-2a)$

由 $a > 1$ 知, 当 $x < 2$ 时, $f'(x) > 0$,

故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2)$ 是增函数;

当 $2 < x < 2a$ 时, $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在区间 $(2, 2a)$ 是减函数;

当 $x > 2a$ 时, $f'(x) > 0$,

故 $f(x)$ 在区间 $(2a, +\infty)$ 是增函数.

综上, 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2)$ 和 $(2a, +\infty)$ 是增函数,

在区间 $(2, 2a)$ 是减函数.

(2) 由 (1) 知, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $x=2a$ 或 $x=0$ 处取得最小值.

$$f(2a) = \frac{1}{3}(2a)^3 - (1+a)(2a)^2 + 4a \cdot 2a + 24a = -\frac{4}{3}a^3 + 4a^2 + 24a, \quad f(0) = 24a$$

$$\text{由假设知} \begin{cases} a > 1 \\ f(2a) > 0 \\ f(0) > 0 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} a > 1 \\ -\frac{4}{3}a(a+3)(a-6) > 0 \\ 24a > 0 \end{cases} \text{解得 } 1 < a < 6$$

故 a 的取值范围是 $(1, 6)$

【点评】本题考查导数与函数的综合运用能力, 涉及利用导数讨论函数的单调性

22. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过右焦点 F 的

直线 l 与 C 相交于 A, B 两点, 当 l 的斜率为 1 时, 坐标原点 O 到 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

(I) 求 a, b 的值;

(II) C 上是否存在点 P , 使得当 l 绕 F 转到某一位置时, 有 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 成立? 若存在, 求出所有的 P 的坐标与 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

【考点】K4：椭圆的性质.

【专题】15：综合题；16：压轴题.

【分析】(I) 设 $F(c, 0)$ ，则直线 l 的方程为 $x - y - c = 0$ ，由坐标原点 O 到 l 的

距离求得 c ，进而根据离心率求得 a 和 b 。

(II) 由 (I) 可得椭圆的方程，设 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ， $l: x = my + 1$ 代入椭圆

的方程中整理得方程 $\Delta > 0$ 。由韦达定理可求得 $y_1 + y_2$ 和 $y_1 y_2$ 的表达式，假

设存在点 P ，使 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 成立，则其充要条件为：点 P 的坐标为 $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

，代入椭圆方程；把 A, B 两点代入椭圆方程，最后联立方程求得 c ，进而

求得 P 点坐标，求出 m 的值得出直线 l 的方程。

【解答】解：(I) 设 $F(c, 0)$ ，直线 $l: x - y - c = 0$ ，

由坐标原点 O 到 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

则 $\frac{|0 - 0 - c|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，解得 $c = 1$

又 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $\therefore a = \sqrt{3}$ ， $b = \sqrt{2}$

(II) 由 (I) 知椭圆的方程为 $C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

设 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$

由题意知 l 的斜率为一定不为 0，故不妨设 $l: x = my + 1$

代入椭圆的方程中整理得 $(2m^2 + 3)y^2 + 4my - 4 = 0$ ，显然 $\Delta > 0$ 。

由韦达定理有： $y_1 + y_2 = -\frac{4m}{2m^2 + 3}$ ， $y_1 y_2 = -\frac{4}{2m^2 + 3}$ ，①

假设存在点 P ，使 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 成立，则其充要条件为：

点 P 的坐标为 $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ，

点 P 在椭圆上，即 $\frac{(x_1 + x_2)^2}{3} + \frac{(y_1 + y_2)^2}{2} = 1$ 。

整理得 $2x_1^2 + 3y_1^2 + 2x_2^2 + 3y_2^2 + 4x_1x_2 + 6y_1y_2 = 6$ 。

又 A, B 在椭圆上，即 $2x_1^2 + 3y_1^2 = 6$ ， $2x_2^2 + 3y_2^2 = 6$ 、

故 $2x_1x_2 + 3y_1y_2 + 3 = 0$ ②

将 $x_1x_2 = (my_1+1)(my_2+1) = m^2y_1y_2 + m(y_1+y_2) + 1$ 及①代入②解得 $m^2 = \frac{1}{2}$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{4m^2}{2m^2+3} + 2 = \frac{3}{2}, \text{ 即 } P\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{当 } m = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), l: x = \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1;$$

$$\text{当 } m = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } P\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), l: x = -\frac{\sqrt{2}}{2}y + 1$$

【点评】 本题主要考查了椭圆的性质. 处理解析几何题, 学生主要是在“算”上的功夫不够. 所谓“算”, 主要讲的是算理和算法. 算法是解决问题采用的计算的方法, 而算理是采用这种算法的依据和原因, 一个是表, 一个是里, 一个是现象, 一个是本质. 有时候算理和算法并不是截然区分的. 例如: 三角形的面积是用底乘高的一半还是用两边与夹角的正弦的一半, 还是分割成几部分来算? 在具体处理的时候, 要根据具体问题及题意边做边调整, 寻找合适的突破口和切入点.