2012年上海市普通高中学业水平考试

数学试卷

一、填空题：（本答题满分36分）

1．已知集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,a\}$．若 $A\cup B=\{1,2,3\}$，则 $a=$________．

2．函数 $f\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为_______．

3．满足不等式 $\dfrac{x}{x+1}<0$ 的 x 的取值范围是_______．

4．若球的体积为 36π，则球的半径为_______．

5．若直线 $2x+my+2=0$ 与直线 $4x+6y-1=0$ 平行，则 $m=$_______．

6．若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60°，$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=1$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$_______．

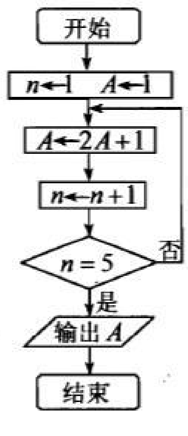
7．在△ABC 中，角 A、B、C 所对的边长分别为 a、b、c．若 $A=45^\circ$，$C=30^\circ$，$c=\sqrt{2}$，则 $a=$_______．

8．若无穷等比数列 $\{a_n\}\left(n\in N^*\right)$ 的首项为1、公比为 $\dfrac{1}{3}$，则该数列各项的和为_______．

9．在 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的二项展开式中，常数项的值为_______．

10．若 $1+\sqrt{2}i$（i 为虚数单位）是关于 x 的方程 $x^2+mx+3=0$ 的根，则实数 $m=$_______．

11．执行右图所示算法，输出的结果是_______．



12．已知圆 O_n：$x^2+y^2=\dfrac{1}{n^2}\left(n\in N^*\right)$ 与圆 C：$\left(x-1\right)^2+y^2=1$．设圆 O_n 与 y 轴正半轴的交点为 R_n，圆 O_n 与圆 C 在 x 轴上方的交点为 Q_n，直线 R_nQ_n 交 x 轴于点 P_n．当 n 趋向于无穷大时，点 P_n 无限趋近于定点 P，定点 P 的横坐标为_______．

二、选择题：（本大题满分 36 分）

13．若矩阵$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & b \end{pmatrix}$是线性方程组$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$，的系数矩阵，则（　　）．

A． $a=1$，$b=-1$； B． $a=1$，$b=1$； C． $a=-1$，$b=1$；
D． $a=-1$，$b=-1$．

14．函数 $f\left(x\right)=2^{x}+1$ 的反函数是（　　）．

A． $f^{-1}\left(x\right)=\log_2 x+1$； B． $f^{-1}\left(x\right)=\log_x 2+1$； C． $f^{-1}\left(x\right)=\log_2\left(x-1\right)$；

D． $f^{-1}\left(x\right)=\log_2 x-1$．

15．抛物线 $y^2=4x$ 的焦点到其准线的距离是（　　）．

A．1； B．2； C．4； D．8．

16．某校高一、高二、高三分别有学生 400 名、300 名、300 名．为了解他们课外活动情况，用分层抽样的方法从中抽取 50 名学生进行调查，应抽取高二学生人数为（　　）．

A． 50； B． 30； C． 20；
D． 15．

17．函数 $f\left(x\right)=x^3+2x$（　　）．

A．是奇函数且为增函数； B．是偶函数且为增函数；
C．是奇函数且为减函数； D．是偶函数且为减函数．

18．已知扇形的圆心角为$\dfrac{\pi}{3}$，半径为 3，该扇形的面积为（　　）．

A． 3π； B． $\dfrac{3\pi}{2}$； C． π；

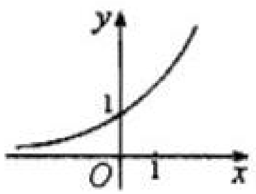
D． $\dfrac{\pi}{2}$．

19．函数 $f\left(x\right)=\sin x+\sqrt{3}\cos x+1$ 的最大值是（　　）．

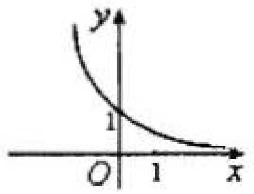
A． -1； B． 2； C． 3；

D． $2+\sqrt{3}$．

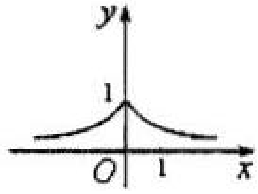
20．函数 $y=\dfrac{1}{2^{|x|}}$ 的大致图象是（　　　）．



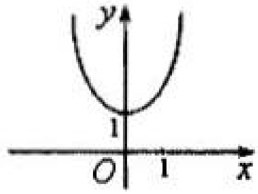
A．



B．



C．



D．

21．若椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 与 x 轴正半轴、y 轴正半轴的交点分别为 A、B，则直线 AB 的方程为（　　　）．

A． $x+2y-4=0$ ；　　B． $x-2y-4=0$ ；　　C． $x-2y+4=0$ ；

D． $x+2y+4=0$．

22．设 l_1、l_2 是空间两条直线．“l_1、l_2 没有公共点”是“l_1、l_2 为异面直线”的（　　　）．

A．充分但非必要条件；B．必要但非充分条件；C．充分必要条件；　　D．既非充分又非必要条件．

23．从 17 名男同学和 21 名女同学中随机抽取 3 名，组成环保志愿者小组，这个小组中必有男同学的概率（精确到 0.001）为（　　　）．

A． 0.141；　　B． 0.335；　　C． 0.423；　　D．0.842．

24．实数 a、b 满足 $ab>0$ 且 $a\neq b$，由 a、b、$\dfrac{a+b}{2}$、$\sqrt{ab}$ 按一定顺序构成的数列（　　　）．

A．可能是等差数列，也可能是等比数列；　　B．可能是等差数列，但不可能是等比数列；

C．不可能是筹差数列，但可能是等比数列；　　D．不可能是等差数列，也不可能是等比数列．

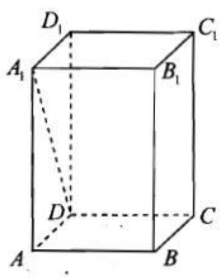
三、解答题：（本大题满分 48 分）．

25．（本题满分 7 分）

已知 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，化简并求值：$\left(1+\tan^2 2\alpha\right)\left[\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$．

26．（本题满分 7 分）

如图所示，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 2，表面积为 32，求异面直



线 DA_1 与 B_1C_1 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）.

27.（本题满分 7 分）

已知等比数列 $\{a_n\}\left(n\in N^*\right)$ 满足 $a_1=2$， $a_4=54$，等差数列 $\{b_n\}$ $\left(n\in N^*\right)$ 满足 $b_1=a_1$， $b_3=a_2$．求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

28.（本题满分 13 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 5 分，第 2 小题满分 8 分．

已知双曲线 C 的两个焦点分别为 $F_1\left(-\sqrt{3},0\right)$、$F_2\left(\sqrt{3},0\right)$，渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$．

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）若过点 $F_1\left(-\sqrt{3},0\right)$ 的直线 l 与双曲线 C 的左支有两个交点，且点 $M\left(0,1\right)$ 到 l 的距离小于 1，求直线 l 的倾斜角的范围．

29.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 5 分，第 2 小题满分 9 分．

设函数 $f\left(x\right)$、$g\left(x\right)$ 有相同的定义域 D．对任意 $x\in D$，过点 $\left(x,0\right)$ 并垂直于 x 轴的直线与 $f\left(x\right)$、$g\left(x\right)$ 的图像分别交于点 A、B，向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 满足 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$（$O$ 为坐标原点）．

（1）若 $f\left(x\right)=-x+1$，$x\in\left(1,\ \infty\right)$，求 $g\left(x\right)$ 的解析式，并作出其大致图像；

（2）若 $f\left(x\right)=\begin{cases}\log_2 x-6，x\in\left[2,4\right],\\ -x^2+6x+3，x\in\left(4,6\right],\end{cases}$ 求 $g\left(x\right)$ 的最大值和最小值．

简易版答案：

一、填空题

1. 3；　2. $[-1,1]$；　3. $(-1,0)$；　4. 3；　5. 3；　6. 1；

7. 2；　8. $\frac{3}{2}$；　9. 20；　10. -2；　11. 31；　12. 4；

二、选择题

13. A；　14. C；　15. B；　16. D；　17. A；　18. B；

19. C；　20. C；　21. A；　22. B；　23. D；　24. D；

三、解答题

25. -3；

26. $\arctan\frac{3}{2}$；

27. $n\cdot(n+1)$；

28. （1）$x^2-\frac{y^2}{2}=1$；

（2）$(\arctan\sqrt{2},\arctan\sqrt{3})$；

29. （1）$g(x)=\frac{x^2}{x-1},(x>1)$，图略（NIKE 函数，最低点是$(2,4)$，分别以直线$x=1$和直线$y=x+1$为渐近线）；

（2）$g(x)_{\max}=4$，$g(x)_{\min}=-12$

2013年上海市普通高等学校春季招生考试

数　学　试　卷

一. 填空题（本大题满分36分）本大题共有12题，要求直接填写结果，每题填对得3分，否则一律得0分

1．函数 $y=\log_2(x+2)$ 的定义域是________

2．方程 $2^x=8$ 的解是________

3．抛物线 $y^2=8x$ 的准线方程是________

4．函数 $y=2\sin\ x$ 的最小正周期是________

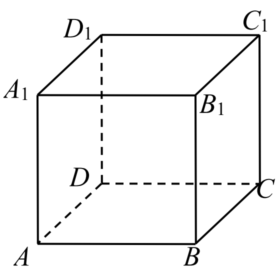
5．已知向量 $\vec{a}=(1,k)$，$\vec{b}=(9,k-6)$。若 $\vec{a}//\vec{b}$，则实数 $k=$ ________

6．函数 $y=4\sin x+3\cos x$ 的最大值是________

7．复数 $2+3i$（i 是虚数单位）的模是________

8．在 ΔABC 中，角 A、B、C 所对边长分别为 a、b、c，若 $a=5, b=8, B=60^\circ$，则b= ___

9．在如图所示的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的大小为_____



10．从4名男同学和6名女同学中随机选取3人参加某社团活动，选出的3人中男女同学都有的概率为________（结果用数值表示）。

11．若等差数列的前6项和为23，前9项和为57，则数列的前 n 项和 $S_n=$ ________。

12．36的所有正约数之和可按如下方法得到：因为 $36=2^2\times3^2$，所以36的所有正约数之和为 $(1+3+3^2)+(2+2\times3+2\times3^2)+(2^2+2^2\times3+2^2\times3^2)=(1+2+2^2)(1+3+3^2)=91$ 参照上述方法，可求得2000的所有正约数之和为________________

二．选择题（本大题满分36分）本大题共有12题，每题都给出四个结论，其中有且只有一个结论是正确的。考生必须把真确结论的代码写在题后的括号内，选对得3分，否则一律得0分

13．展开式为ad-bc的行列式是（　　）

（A）$\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix}$　　（B）$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$　　（C）$\begin{vmatrix} a & d \\ b & c \end{vmatrix}$　　（D）$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

14．设 $f^{-1}(x)$ 为函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的反函数，下列结论正确的是（　）

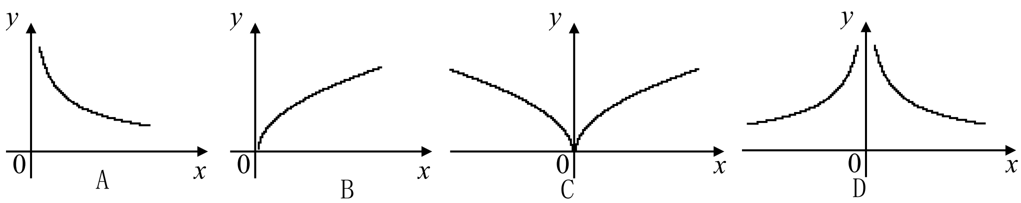
（A）$f^{-1}(2)=2$　　　　（B）$f^{-1}(2)=4$

（C）$f^{-1}(4)=2$　　　　（D）$f^{-1}(4)=4$

15．直线 $2x-3y+1=0$ 的一个方向向量是（　　）

（A）$(2，-3)$　　（B）$(2，3)$　　（C）$(-3，2)$　　（D）$(3，2)$

16．函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 的大致图像是（　）



17．如果 $a<b<0$，那么下列不等式成立的是（　）

（A）$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　（B）$ab<b^2$　　（C）$-ab<-a^2$　　（D）$-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$

18．若复数 z_1、z_2 满足 $z_1=\overline{z}_2$，则 z_1、z_2 在复数平面上对应的点 Z_1、Z_2（　　）

（A）　关于 x 轴对称　　　　（B）关于 y 轴对称

（C）　关于原点对称　　　　（D）关于直线 $y=x$ 对称

19．　$(1+x)^{10}$ 的二项展开式中的一项是（　）

（A）$45x$　　（B）$90x^2$　　（C）$120x^3$　　（D）$252x^4$

20．既是偶函数又在区间 $(0，\pi)$ 上单调递减的函数是（　）

（A）$y=\sin\ x$　（B）$y=\cos\ x$　（C）$y=\sin\ 2x$　（D）$y=\cos\ 2x$

21．若两个球的表面积之比为 $1:4$，则这两个球的体积之比为（　）

（A）$1:2$　　（B）$1:4$　　（C）$1:8$　　（D）$1:16$

22．设全集 $U=R$，下列集合运算结果为 R 的是（　　）

（A）$Z\bigcup \complement_u N$　（B）$N\bigcap \complement_u N$　（C）$\complement_u(\complement_u\varnothing)$　（D）$\complement_u\{0\}$

23．已知a、b、$c\in R$，“$b^2-4ac<0$”是“函数$f(x)=ax^2+bx+c$的图像恒在x轴上方”的（　）

（A）充分非必要条件　　　　　　（B）必要非充分条件

（C）充要条件　　　　　　　　（D）既非充分又非必要条件

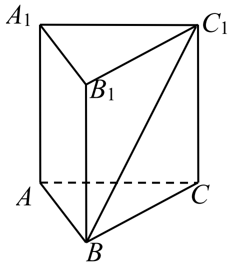
24．已知A、B为平面内两定点，过该平面内动点M作直线AB的垂线，垂足为N．若$\overrightarrow{MN}^2=\lambda\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{NB}$，其中$\lambda$为常数，则动点$M$的轨迹不可能是（　）

（A）圆　　　　（B） 椭圆　　　　（C） 抛物线　　　　（D）双曲线

三、解答题（本大题满分78分）本大题共有7题，解答下列各题必须写出必要的步骤

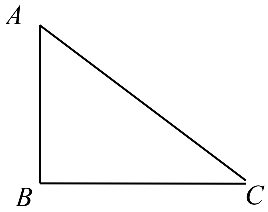
25．（本题满分7分）

如图，在正三棱锥$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1=6$，异面直线BC_1与AA_1所成角的大小为$\frac{\pi}{6}$，求该三棱柱的体积。



26．（本题满分 7 分）

如图，某校有一块形如直角三角形 ABC 的空地，其中 $\angle B$ 为直角，AB 长 40 米，BC 长 50 米，现欲在此空地上建造一间健身房，其占地形状为矩形，且 B 为矩形的一个顶点，求该健身房的最大占地面积。



27．（本题满分 8 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=-n^2+n$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=2^{a_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)$。

28.（本题满分 13 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 9 分

已知椭圆C的两个焦点分别为$F_1(-1,0)$、$F_2(1,0)$，短轴的两个端点分别为B_1、B_2

（1）若$\Delta F_1B_1B_2$为等边三角形，求椭圆C的方程;

（2）若椭圆C的短轴长为2，过点F_2的直线l与椭圆C相交于P、Q两点，且$\overrightarrow{F_1P}\perp\overrightarrow{F_1Q}$，求直线$l$的方程。

29.（本题满分 12 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 6 分

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F 。

（1）点 A、P 满足 $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{FA}$ 。当点 A 在抛物线 C 上运动时，求动点 P 的轨迹方程；

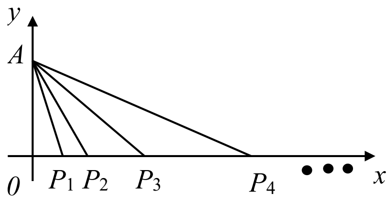
（2）在 x 轴上是否存在点 Q，使得点 Q 关于直线 $y = 2x$ 的对称点在抛物线 C 上？如果存在，求所有满足条件的点 Q 的坐标；如果不存在，请说明理由。

30.（本题满分 13 分）本题共有 2 个小题，第一小题满分 4 分，第二小题满分 9 分

在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在 y 轴正半轴上，点 P_n 在 x 轴上，其横坐标为 x_n，且 $\{x_n\}$ 是首项为 1、公比为 2 的等比数列，记 $\angle P_nAP_{n+1}=\theta_n$， $n\in N^*$。

（1）若 $\theta_3=\arctan\frac{1}{3}$，求点 A 的坐标；

（2）若点 A 的坐标为 $(0,8\sqrt{2})$，求 θ_n 的最大值及相应 n 的值。



31.（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 5 分，第 2 小题满分 7 分，第 3 小题满分 6 分

已知真命题："函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $P(a、b)$ 成中心对称图形" 的充要条件为"函数 $y=f(x+a)-b$ 是奇函数"。

（1）将函数 $g(x)=x^3-3x^2$ 的图像向左平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位，求此时图像对应的函数解析式，并利用题设中的真命题求函数 $g(x)$ 图像对称中心的坐标；

（2）求函数 $h(x)=\log_2 \dfrac{2x}{4-x}$ 图像对称中心的坐标；

（3）已知命题："函数 $y=f(x)$ 的图像关于某直线成轴对称图像" 的充要条件为"存在实数 a 和 b，使得函数 $y=f(x+a)-b$ 是偶函数"。判断该命题的真假。如果是真命题，请给予证明；如果是假命题，请说明理由，并类比题设的真命题对它进行修改，使之成为真命题（不必证明）。

2013年上海市普通高等学校春季招生考试

数 学 试 卷

参考答案

一．（第1至12题）每一题正确的给3分，否则一律得0分

1．$(-2,+\infty)$　　2．3　　3．$x=-2$　　4．2π　　5．$-\dfrac{3}{4}$　　6．5

7．$\sqrt{13}$　　8．7　　9．$\dfrac{\pi}{3}$　　10．$\dfrac{4}{5}$　　11．$\dfrac{5}{6}n^2-\dfrac{7}{6}n$　　12．4836

二．（第13至24题）每一题正确的给3分，否则一律得0分

13．B　14．B　15．D　16．A　17．D　18．A　19．C 20．B　21．C　22．A　23．D　24.C

三．（第25至31题）

25．[解]因为$CC_1 \quad AA_1$.

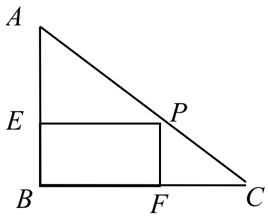
所以$\angle BC_1C$为异面直线BC_1与AA_1.所成的角，即$\angle BC_1C=\dfrac{\pi}{6}$。

在RtΔBC_1C中，$BC=CC_1\cdot\tan\angle BC_1C=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$，

从而$S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}BC^2=3\sqrt{3}$，

因此该三棱柱的体积为$V=S_{\Delta ABC}\cdot AA_1=3\sqrt{3}\cdot 6=18\sqrt{3}$.

26．[解]如图，设矩形为$EBFP$，FP长为x米，其中$0<x<40$，



健身房占地面积为y平方米。因为$\Delta CFP\backsim\Delta CBA$，

以$\dfrac{FP}{BA}=\dfrac{CF}{CB}$，$\dfrac{x}{40}=\dfrac{50-BF}{50}$，求得$BF=50-\dfrac{5}{4}x$，

从而$y=BF\cdot FP=(50-\dfrac{5}{4}x)x=-\dfrac{5}{4}x^2+50x=-\dfrac{5}{4}(x-20)^2+500\le 500$，

当且仅当$x=20$时，等号成立。

答：该健身房的最大占地面积为500平方米。

27．[解]当$n\ge 2$时，$a_n=s_n-s_{n-1}=-n^2+n+(n-1)^2-(n-1)=-2n+2$。

且$a_1=s_1=0$，所以$a_n=-2n+2$。

因为$b_n=2^{-2n+2}=(\frac{1}{4})^{n-1}$，所以数列$\{b_n\}$是首项为 1、公比为$\frac{1}{4}$的无穷等比数列。

故$\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$。

28．[解]（1）设椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$。

根据题意知$\begin{cases}a=2b\\a^2-b^2=1\end{cases}$， 解得$a^2=\dfrac{4}{3}$，$b^2=\dfrac{1}{3}$

故椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{\frac{4}{3}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$。

（2）容易求得椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$。

当直线l的斜率不存在时，其方程为$x=1$，不符合题意；

当直线l的斜率存在时，设直线l的方程为$y=k(x-1)$。

由$\begin{cases}y=k(x-1)\\\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$ 得$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2(k^2-1)=0$。

设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则

$$x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{2(k^2-1)}{2k^2+1},\overrightarrow{F_1P}=(x_1+1,y_1),\overrightarrow{F_1Q}=(x_2+1,y_2)$$

因为$\overrightarrow{F_1P}\perp\overrightarrow{F_1Q}$，所以$\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1Q}=0$, 即

$$\begin{aligned}(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2&=x_1x_2+(x_1+x_2)+1+k^2(x_1-1)(x_2-1)\\&=(k^2+1)x_1x_2-(k^2-1)(x_1+x_2)+k^2+1\\&=\frac{7k^2-1}{2k^2+1}=0,\end{aligned}$$

解得$k^2=\dfrac{1}{7}$，即$k=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{7}$。

故直线l的方程为$x+\sqrt{7}y-1=0$或$x-\sqrt{7}y-1=0$。

29．（1）设动点 P 的坐标为 (x, y)，点 A 的坐标为 (x_A, y_A)，则 $\overrightarrow{AP}=(x-x_A, y-y_A)$，

因为 F 的坐标为 $(1, 0)$，所以 $\overrightarrow{FA}=(x_A-1, y_A)$，

由 $\overrightarrow{AP}=-2\overrightarrow{FA}$ 得 $(x-x_A, y-y_A)=-2(x_A-1, y_A)$。

即 $\begin{cases} x-x_A=-2(x_A-1) \\ y-y_A=-2y_A \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_A=2-x \\ y_A=-y \end{cases}$

代入 $y^2=4x$，得到动点 P 的轨迹方程为 $y^2=8-4x$。

（2）设点 Q 的坐标为 $(t, 0)$. 点 Q 关于直线 $y=2x$ 的对称点为 $Q'(x, y)$，

则 $\begin{cases} \dfrac{y}{x-t}=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y}{2}=x+t \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{5}t \\ y=\dfrac{4}{5}t \end{cases}$

若 Q' 在 C 上，将 Q' 的坐标代入 $y^2=4x$，得 $4t^2+15t=0$，即 $t=0$ 或 $t=-\dfrac{15}{4}$。

所以存在满足题意的点 Q，其坐标为 $(0, 0)$ 和 $(-\dfrac{15}{4}, 0)$。

30．[解]（1）设 $A(0, t)$，根据题意，$x_n=2^{n-1}$。由 $\theta_3=\arctan\dfrac{1}{3}$，知 $\tan\theta_3=\dfrac{1}{3}$，

而 $\tan\theta_3=\tan(\angle OAP_4-\angle OAP_3)=\dfrac{\dfrac{x_4}{t}-\dfrac{x_3}{t}}{1+\dfrac{x_4}{t}\cdot\dfrac{x_3}{t}}=\dfrac{t(x_4-x_3)}{t^2+x_4\cdot x_3}=\dfrac{4t}{t^2+32}$，

所以 $\dfrac{4t}{t^2+32}=\dfrac{1}{3}$，解得 $t=4$ 或 $t=8$。

故点 A 的坐标为 $(0, 4)$ 或 $(0, 8)$。

（2）由题意，点 P_n 的坐标为 $(2^{n-1}, 0)$，$\tan\angle OAP_n=\dfrac{2^{n-1}}{8\sqrt{2}}$。

$$\tan\theta_n=\tan(\angle OAP_{n+1}-\angle OAP_n)=\frac{\dfrac{2^n}{8\sqrt{2}}-\dfrac{2^{n-1}}{8\sqrt{2}}}{1+\dfrac{2^n}{8\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2^{n-1}}{8\sqrt{2}}}=\frac{2^{n-1}}{8\sqrt{2}+\dfrac{2^{2n-1}}{8\sqrt{2}}}=\frac{1}{\dfrac{16\sqrt{2}}{2^n}+\dfrac{2^n}{8\sqrt{2}}}。$$

因为 $\dfrac{16\sqrt{2}}{2^n}+\dfrac{2^n}{8\sqrt{2}}\geq 2\sqrt{2}$，所以 $\tan\theta_n\leq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

当且仅当$\frac{16\sqrt{2}}{2^n}=\frac{2^n}{8\sqrt{2}}$，即$n=4$时等号成立。

易知$0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$, $y=\tan x$在$(0,\frac{\pi}{2})$上为增函数，

因此，当$n=4$时，θ_n最大，其最大值为$\arctan\frac{\sqrt{2}}{4}$。

3.1.（1）平移后图像对应的函数解析式为$y=(x+1)^3-3(x+1)^2+2$，

整理得$y=x^3-3x$，

由于函数$y=x^3-3x$是奇函数，

由题设真命题知，函数$g(x)$图像对称中心的坐标是$(1，-2)$。

（2）设$h(x)=\log_2\frac{2x}{4-x}$的对称中心为$P(a,b)$，由题设知函数$h(x+a)-b$是奇函数。

设$f(x)=h(x+a)-b,$ 则$f(x)=\log_2\frac{2(x+a)}{4-(x+a)}-b$，即$f(x)=\log_2\frac{2x+2a}{4-a-x}-b$。

由不等式$\frac{2x+2a}{4-a-x}>0$的解集关于原点对称，得$a=2$。

此时$f(x)=\log_2\frac{2(x+2)}{2-x}-b, x\in(-2，2)$。

任取$x\in(-2,2)$，由$f(-x)+f(x)=0$，得$b=1$，

所以函数$h(x)=\log_2\frac{2x}{4-x}$图像对称中心的坐标是$(2，1)$。

（3）此命题是假命题。

举反例说明：函数$f(x)=x$的图像关于直线$y=-x$成轴对称图像，但是对任意实数a和b，

函数$y=f(x+a)-b$，即$y=x+a-b$总不是偶函数。

修改后的真命题：

“函数$y=f(x)$的图像关于直线$x=a$成轴对称图像”的充要条件是“函数$y=f(x+a)$是偶函数”。

2014年上海市普通高等学校春季招生统一考试

（暨上海市普通高中学业水平考试）

数学试卷

考生注意：

1．本试卷两考合一，春季高考=学业水平考+附加题；

春季高考，共32道试题，满分150分．考试时间120分钟

（学业水平考，共29道试题，满分120分．考试时间90分钟；

其中第30-32题为附加题，满分30分．考试时间30分钟）.

2．本试卷分设试卷和答题纸．试卷包括试题与答题要求．作答必须涂（选择题）或写（非选择题）

在答题纸上，在试卷上作答一律不得分．

3．答卷前，务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚的填写姓名、准考证号，并将核对后的条形码

贴在指定位置上，在答题纸反面清楚地填写姓名．

一、填空题（本大题共有12题，满分36分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格

填对得3分，否则一律得零分．

1．若$4^x=16$，则$x=$_______________．

2．计算：$i(1+i)=$_______________（i为虚数单位）.

3．1、1、2、2、5这五个数的中位数是_______________．

4．若函数$f(x)=x^3+a$为奇函数，则实数$a=$_______________．

5．点$O(0,0)$到直线$x+y-4=0$的距离是_______________．

6．函数$y=\dfrac{1}{x+1}$的反函数为_______________．

7．已知等差数列$\{a_n\}$的首项为1，公差为2，则该数列的前n项和$S_n=$________________．

8．已知$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，则$\cos 2\alpha=$________________．

9．已知a、$b\in R^{+}$。若$a+b=1$，则ab的最大值是________________．

10．在10件产品中，有3件次品，从中随机取出5件，则恰含1件次品的概率是______（结果用数值表示）.

11．某货船在O处看灯塔M在北偏东$30°$方向，它以每小时18海里的速度向正北方向航行，经过40分

钟到达B处，看到灯塔M在北偏东$75°$方向，此时货船到灯塔M的距离为________海里．

12．已知函数$f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$与$g(x)=mx+1-m$的图像相交于A、B两点.若动点P满足$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|=2$，

则P的轨迹方程为________________．

二、选择题（本大题共有 12 题，满分 36 分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸相应编号上，

将代表答案的小方格涂黑，选对得 3 分，否则一律得零分．

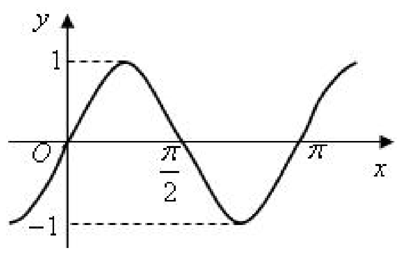
13．两条异面直线所成的角的范围是（　　）

$(A)\ (0,\dfrac{\pi}{2})$；　$(B)\ (0,\dfrac{\pi}{2}]$；　$(C)\ [0,\dfrac{\pi}{2})$；　$(D)\ [0,\dfrac{\pi}{2}]$

14．复数$2+i$（i为虚数单位）的共轭复数为（　　）

$(A)\ 2-i$；　$(B)\ -2+i$；　$(C)\ -2-i$；　$(D)\ 1+2i$

15．右图是下列函数中某个函数的部分图像，则该函数是（　　）



$(A)\ y=\sin x$；$(B)\ y=\sin 2x$；$(C)\ y=\cos x$；$(D)\ y=\cos 2x$

16．在$(x+1)^4$的二项展开式中，x^2项的系数为（　　）

(A) 6 ；　　(B) 4 ；　　(C) 2 ；　　(D) 1

17．下列函数中，在 R 上为增函数的是（　　）

(A) $y=x^2$ ；　(B) $y=|x|$ ；　(C) $y=\sin x$ ；　(D) $y=x^3$

18．$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=$（　　）

(A) $\cos 2\theta$ ；　(B) $\sin 2\theta$ ；　(C) 1 ；　(D) -1

19．设 x_0 为函数 $f(x)=2^x+x-2$ 的零点，则 $x_0\in$（　　）

(A) $(-2,-1)$ ；　(B) $(-1,0)$ ；　(C) $(0,1)$ ；　(D) $(1,2)$

20．若 $a>b$ ，$c\in R$ ，则下列不等式中恒成立的是（　　）

(A) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ ；　(B) $a^2>b^2$ ；　(C) $a|c|>b|c|$ ；　(D) $\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$

21．若两个球的体积之比为 $8:27$ ，则它们的表面积之比为（　　）

(A) $2:3$　　(B) $4:9$　　(C) $8:27$　　(D) $2\sqrt{2}:3\sqrt{3}$

22．已知数列 $\{a_n\}$ 是以 q 为公比的等比数列．若 $b_n=-2a_n$ ，则数列 $\{b_n\}$ 是（　　）

(A) 以 q 为公比的等比数列；　　(B) 以 $-q$ 为公比的等比数列；

(C) 以 $2q$ 为公比的等比数列；　　(D) 以 $-2q$ 为公比的等比数列

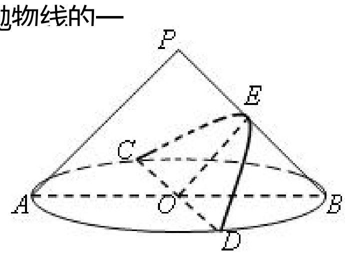
23．若点 P 的坐标为 (a,b) ，曲线 C 的方程为 $F(x,y)=0$ ，则“$F(a,b)=0$”是“点 P 在曲线 C 上”的(　　)

(A) 充分非必要条件；(B) 必要非充分条件；　(C) 充分必要条件；　(D) 既非充分又非必要条件

24．如图，在底面半径和高均为1的圆锥中，AB、CD是底面圆O的两条互相垂直的直径，E是

母线PB的中点．已知过CD与E的平面与圆锥侧面的交线是以E为顶点的抛物线的一部分，

则该抛物线的焦点到圆锥顶点P的距离为（　　）



$(A)\ 1$　　$(B)\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$(C)\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　$(D)\ \dfrac{\sqrt{10}}{4}$

三、解答题（本大题共有 8 题，满分 78 分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤．

25．（本题满分 7 分）

已知不等式$\dfrac{x-2}{x+1}<0$的解集为A，函数$y=\lg(x-1)$的定义域为集合B，求$A\bigcap B$．

26．（本题满分 7 分）

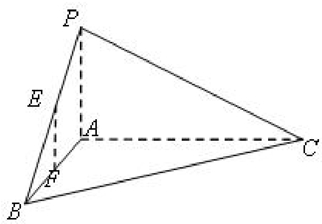
已知函数 $f(x)=x^2-4x+a,x\in[-3,3]$．若 $f(1)=2$ ，求 $y=f(x)$ 的最大值和最小值.

27．（本题满分 8 分）

如图，在体积为 $\dfrac{1}{3}$ 的三棱锥 $P-ABC$ 中，PA 与平面 ABC 垂直，$AP=AB=1$ ，

$\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$ ，

E 、 F 分别是 PB 、 AB 的中点.求异面直线 EF 与 PC 所成的角的大小（结果用反三角函数值表示）.



28．（本题满分 13 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 9 分．

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的左焦点为$F$，上顶点为$B$．

（1）若直线FB的一个方向向量为$(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，求实数a的值；

（2）若$a=\sqrt{2}$，直线$l:y=kx-2$与椭圆C相交于M、N两点，且$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=3$，求实数$k$的值．

29．（本题满分 13 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 5 分，第 2 小题满分 8 分.

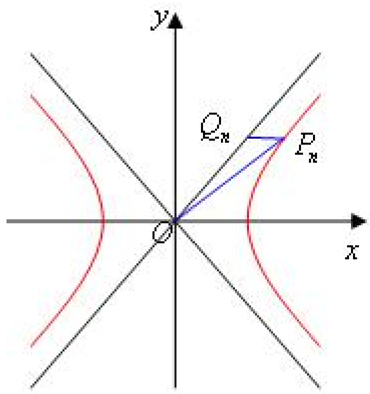
已知数列$\{a_n\}$满足$a_n>0$，双曲线$C_n:\dfrac{x^2}{a_n}-\dfrac{y^2}{a_{n+1}}=1(n\in N^*)$．

（1）若$a_1=1,a_2=2$，双曲线C_n的焦距为$2c_n$，$c_n=\sqrt{4n-1}$，求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）如图，在双曲线C_n的右支上取点$P_n(x_{P_n},n)$，过P_n作y轴的垂线，在第一象限内交C_n的

渐近线于点Q_n，联结OP_n，记ΔOP_nQ_n的面积为S_n.若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$，求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$．

（关于数列极限的运算，还可参考如下性质：若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A(u_n\ge 0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{u_n}=\sqrt{A}$）

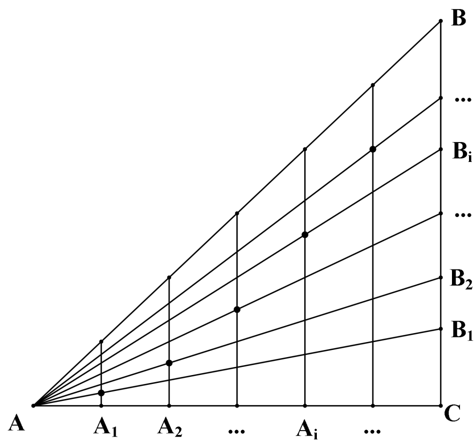


30．（本题满分 8 分）

已知直角三角形 ABC 的两直角边 AC 、BC 的边长分别为 b,a ，如图，过 AC 边的 n 等分点 A_i

作 AC 边的垂线 d_i ，过 BC 边的 n 等分点 B_i 和顶点 A 作直线 l_i ，记 d_i 与 l_i 的交点为 $P_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ ．

是否存在一条圆锥曲线，对任意的正整数 $n\geq 2$ ，点 $P_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 都在这条曲线上？说明理由．



31．（本题满分 8 分）

某人造卫星在地球赤道平面绕地球飞行，甲、乙两个监测点分别位于赤道上东经 131° 和 147°，在某时刻测得甲监测点到卫星的距离为 1537.45 千米，乙监测点到卫星的距离为 887.64 千米。假设地球赤道是一个半径为 6378 千米的圆，求此时卫星所在位置的高度（结果精确到 0.01 千米）和经度（结果精确到 0.01°）.

32．（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 10 分.

如果存在非零常数c ,对于函数$y=f(x)$定义域R上的任意x ,都有$f(x+c)>f(x)$

成立，

那么称函数为“Z函数”.

（1）求证：若$y=f(x)(x\in R)$是单调函数，则它是“Z函数”;

（2）若函数$g(x)=ax^3+bx^2$时“Z函数”，求实数a,b满足的条件．

参考答案

一、填空题（第 1 题至第 12 题）

1、2　　2、$-1+i$　　3、2　　4、0　　5、$2\sqrt{2}$　　6、$y=\frac{1}{x}-1$

7、n^2　　8、$-\frac{7}{9}$　　9、$\frac{1}{4}$　　10、$\frac{5}{12}$　　11、$6\sqrt{2}$　　12、$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

二、选择题（第 13 题至第 24 题）

13、B　　14、A　　15、B　　16、A　　17、D　　18、C

19、C　　20、D　　21、B　　22、A　　23、C　　24、D

三、解答题（第 25 题至第 29 题）

25、解：$\frac{x-2}{x+1}<0$ 的解集是 $A=(-1,2)$；由 $x-1>0,得x>1$，即 $B=(1,+\infty)$；因此，$A\bigcap B=(1,2)$．

26、解：由 $f(1)=1-4+a=2$，得 $a=5$，$f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$，

因为当 $x\in[-3,2]$ 时，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)$ 单调递增；

由于 $f(-3)=26,f(2)=1,f(3)=2$，所以当 $x\in[-3,3]$ 时，$f(x)_{\max}=26$，$f(x)_{\min}=1$．

27、解：由 $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.|PA|=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times|AC|\times1=\frac{1}{3},$ 得 $|\mathrm{AC}|=2$，

因为 $EF\,//\,PA$，所以异面直线 EF 与 PC 所成的角为 $\angle APC$，

由直角三角形 PAC，则 $\tan\angle APC=2$，异面直线 EF 与 PC 所成角为 $\arctan 2$．

28、解：（1）易知 $B(0,1),F(-\sqrt{a^2-1},0)$，所以 $\overrightarrow{FB}=(\sqrt{a^2-1},1)$

又因为 $(1,\frac{\sqrt{3}}{3})$ 是直线 FB 的一个方向向量，所以 $\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{a^2-1}=1$，因为 $a>1$，所以 $a=2$．

（2）由$a=\sqrt{2}$，知$F(-1,0)$，联立$\begin{cases} y=kx-2 \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$得$(1+2k^2)x^2-8kx+6=0$．

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{FM}=(x_1+1,y_1),\overrightarrow{FN}=(x_2+1,y_2)$，$x_1+x_2=\dfrac{8k}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{6}{1+2k^2}$

$$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=(x_1+1)(x_2+1)+(kx_1-2)(kx_2-2)$$

$$=(1+k^2)x_1x_2+(1-2k)(x_1+x_2)+5=\frac{8k+11}{1+2k^2}=3$$

解得$k=2$或$k=-\dfrac{2}{3}$，又因为$\Delta>0$，故$k=2$．

29、（1）由题意，$a_n+a_{n+1}=4n-1$　则$a_{n+1}+a_{n+2}=4n+3$；两式相减得：$a_{n+2}-a_n=4$

所以$\{a_{2k-1}\}$是以 1 为首项，4 为公差的等差数列，得$a_{2k-1}=1+4(k-1)=4k-3$；

$\{a_{2k}\}$是以 2 为首项，4 为公差的等差数列，得$a_{2k}=2+4(k-1)=4k-2$；

所以$a_n=\begin{cases} 2n-1,n=2k-1 \\ 2n-2,n=2k \end{cases}(k\in N^*).$

（2）由题意，则$\dfrac{x_{p_n}^2}{a_n}-\dfrac{n^2}{a_{n+1}}=1$，所以$x_{p_n}=\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}n^2+a_n}$

双曲线的渐近线$l_{OQ_n}:y=\sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}x$，所以$x_{Q_n}=\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}}n$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\sqrt{\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}+\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}}}=\frac{1}{2}，$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}n^2+a_n}-\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}}n)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{na_n}{\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}n^2+a_n}+\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}}n}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_n}{n^2}}+\sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}}}=\frac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\sqrt{\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}+\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}}}=\frac{1}{2}\text{；}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$.

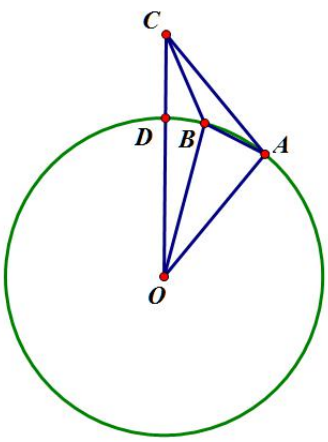
30、解：以 A 为坐标原点，AC 方向为 x 轴，过 A 作 AC 的垂线为 y 轴建立直角坐标系；

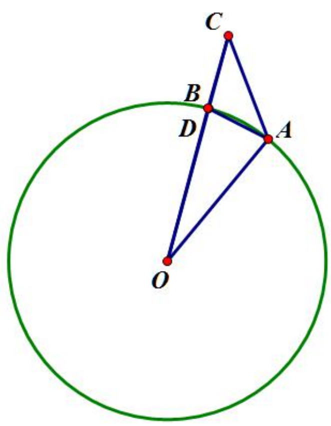
则 $A_i(\frac{i}{n}b,0)$，$B_i(b,\frac{i}{n}a)$，$1\le i\le n-1$ $(i\in N^*)$；$\therefore l_i$：$y=\frac{ai}{bn}x$，d_i：$x=\frac{i}{n}b$；

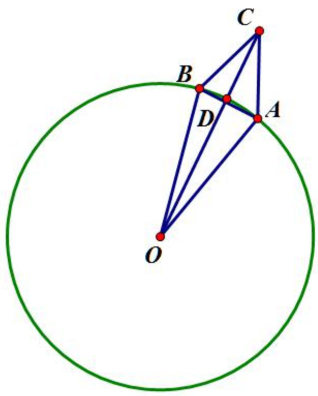
$\therefore\begin{cases}y=\frac{ai}{bn}x\\x=\frac{i}{n}b\end{cases}\Rightarrow P_i(\frac{i}{n}b,\frac{i^2}{n^2}a)\Rightarrow y=\frac{a}{b^2}x^2$ $\therefore$ 存在满足条件的圆锥曲线（抛物线 $y=\frac{a}{b^2}x$ ）.

31、解：如图，建立赤道截面平面图，其中 O 为球心，A、B 分别为甲、乙监测点，C 为卫星所在位置，

D 为卫星在地赤道上的投影（由于题目中未说明 C 的位置，且 $AC>BC$，故有以下三种情况）.







易得$|OA|=|OB|=|OD|=6378$，$\angle AOB=16^0$，$|AC|=1537.45$，$|BC|=887.64$

∵ 在 ΔAOB 中 ，

$|AB|=\sqrt{|OA|^2+|OB|^2-2|OA||OB|\cdot\cos\angle AOB}\approx 1775.292>|AC|>|BC|$；

$\therefore$在ΔABC中，$\angle ACB$最大，即$\angle BAC$、$\angle BAC=30^0$都是锐角，所以选择第三张图；

$$\therefore \cos\angle BAC=\frac{|AB|^2+|AC|^2-|BC|^2}{2|AB||AC|}\approx\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\angle BAC\approx 30.000^\circ\Rightarrow\angle OAC\approx 112.000^\circ$$；

$\therefore$在ΔAOC中，$|OC|=\sqrt{|AC|^2+|AO|^2-2|AC||AO|\cdot\cos\angle OAC}\approx 7098.543$；

$\therefore h=|OC|-|OD|\approx 720.543$，即卫星高度为$720.54km$；

又∵在ΔBOC中，$\cos\angle BOC=\dfrac{|OB|^2+|OC|^2-|BC|^2}{2|OB||OC|}\approx 0.997\Rightarrow\angle BOC\approx 4.415^\circ$；

$\therefore 147^\circ-4.415^\circ\approx 142.58^\circ$ $\therefore$即卫星位于赤道上东经142.58°．

32、解：

（1）[证明]

① 当函数$y=f(x)$是单调递增函数时，则$f(x+1)>f(x)$对任意x恒成立；

$\therefore$存在非零常数$c=1$，使得对任意x都有$f(x+c)>f(x)$成立；

$\therefore y=f(x)$是“Z函数”；

② 当函数 $y=f(x)$ 是单调递减函数时，则 $f(x-1)>f(x)$ 对任意 x 恒成立；

$\therefore$ 存在非零常数 $c=-1$ ，使得对任意 x 都有 $f(x+c)>f(x)$ 成立；

$\therefore$ $y=f(x)$ 是"Z 函数"；

（2）由题意，若函数 $g(x)=ax^3+bx^2$ 是"Z 函数"，则存在非零常数 c ，对于定义域 R 上的任意 x ，

都有 $g(x+c)>g(x)$ 恒成立，即 $a(x+c)^3+b(x+c)^2>ax^3+bx^2$ ；

化简后，得 $3acx^2+(3ac^2+2bc)x+(ac^3+bc^2)>0$ 恒成立；

则 $\begin{cases} 3ac>0 \\ \Delta=(3ac^2+2bc)^2-4\cdot 3ac(ac^3+bc^2)<0 \end{cases}$

化简后，得 $\begin{cases} a>0 \\ c>\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{|b|}{a}\geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a<0 \\ c<-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{|b|}{a}\leq 0 \end{cases}$

$\therefore$ 只需满足条件 $\begin{cases} a\neq 0 \\ b\in R \end{cases}$.

2015 年上海市春季高考数学试卷（学业水平考试）

2015.1

一. 填空题（本大题共 12 题，每题 3 分，共 36 分）

1. 设全集为 $U=\{1,2,3\}$， $A=\{1,2\}$，若集合则 $C_U A=$________；

2. 计算：$\dfrac{1+i}{i}=$________；（其中 i 为虚数单位）

3. 函数 $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$ 的最小正周期为________；

4. 计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3}{2n^2+n}=$________；

5. 以 $(2,6)$ 为圆心，1 为半径的圆的标准方程为________；

6. 已知向量 $\vec{a}=(1,3)$， $\vec{b}=(m,-1)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $m=$________；

7. 函数 $y=x^2-2x+4$， $x\in[0,2]$ 的值域为________；

8. 若线性方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$，解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$，则 $a+b=$________；

9. 方程 $\lg(2x+1)+\lg x=1$ 的解集为________；

10. 在 $(x+\dfrac{1}{x^2})^9$ 的二项展开式中，常数项的值为________；

11. 用数字组成无重复数字的三位数，其中奇数的个数为________；（结果用数值表示）

12. 已知点 $A(1,0)$，直线 $l:x=-1$，两个动圆均过点 A 且与 l 相切，其圆心分别为 C_1、C_2，若动点 M 满足 $2\overrightarrow{C_2M}=\overrightarrow{C_2C_1}+\overrightarrow{C_2A}$，则 M 的轨迹方程为________；

二. 选择题（本大题共 12 题，每题 3 分，共 36 分）

13. 若 $a<0<b$，则下列不等式恒成立的是（　　）

A. $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　B. $-a>b$　　C. $a^2>b^2$　　D. $a^3<b^3$；

14. 函数 $y=x^2(x\ge 1)$ 的反函数为（　　）

A. $y=\sqrt{x}\ (x\ge 1)$　　B. $y=\sqrt{-x}\ (x\le -1)$

C. $y=\sqrt{x}\ (x\ge 0)$　　D. $y=\sqrt{-x}\ (x\le 0)$

15. 不等式$\dfrac{2-3x}{x-1}>0$的解集为（　　）

A. $(-\infty,\dfrac{3}{4})$　　B. $(-\infty,\dfrac{2}{3})$　　C. $(-\infty,\dfrac{2}{3})\cup(1,+\infty)$　　D. $(\dfrac{2}{3},1)$

16. 下列函数中，是奇函数且在$(0,+\infty)$上单调递增的为（　　）

A. $y=x^2$　　B. $y=x^{\frac{1}{3}}$　　C. $y=x^{-1}$　　D. $y=x^{-\frac{1}{2}}$

17. 直线$3x-4y-5=0$的倾斜角为（　　）

A. $\arctan\dfrac{3}{4}$　　B. $\pi-\arctan\dfrac{3}{4}$　　C. $\arctan\dfrac{4}{3}$　　D. $\pi-\arctan\dfrac{4}{3}$

18. 底面半径为1，母线长为2的圆锥的体积为（　　）

A. 2π　　B. $\sqrt{3}\pi$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}$

19. 以$(-3,0)$和$(3,0)$为焦点，长轴长为8的椭圆方程为（　　）

A. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{16}=1$

20. 在复平面上，满足$|z-1|=|z+i|$（i为虚数单位）的复数z对应的点的轨迹为（　　）

A. 椭圆　　B. 圆　　C. 线段　　D. 直线

21. 若无穷等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1>0$，公差$d<0$，$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则（　　）

A. S_n单调递减　　B. S_n单调递增

C. S_n有最大值　　D. S_n有最小值

22. 已知$a>0$，$b>0$，若$a+b=4$，则（　　）

A. a^2+b^2有最小值　　B. $\sqrt{ab}$有最小值

C. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$有最大值　　D. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$有最大值

23. 组合数$C_n^m+2C_n^{m-1}+C_n^{m-2}$ $(n\ge m\ge 2,m,n\in N^*)$恒等于（　　）

A. C_{n+2}^{m}　　B. C_{n+2}^{m+1}　　C. C_{n+1}^{m}　　D. C_{n+1}^{m+1}

24. 设集合$P_1=\{x\,|\,x^2+ax+1>0\}$，$P_2=\{x\,|\,x^2+ax+2>0\}$，$Q_1=\{x\,|\,x^2+x+b>0\}$，$Q_2=\{x\,|\,x^2+2x+b>0\}$，其中$a,b\in R$，下列说法正确的是（　　）

A.对任意a，P_1是P_2的子集；对任意的b，Q_1不是Q_2的子集

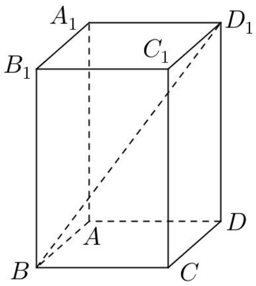
B. 对任意a，P_1是P_2的子集；存在b，使得Q_1是Q_2的子集

C. 存在a，使得P_1不是P_2的子集；对任意的b，Q_1不是Q_2的子集

D. 存在a，使得P_1不是P_2的子集；存在b，使得Q_1是Q_2的子集

三. 解答题（本大题共 5 题，共 8+8+8+12+12=48 分）

25. 如图，在正四棱柱中$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=1$，D_1B和平面$ABCD$所成的角的大小为$\arctan\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，求该四棱柱的表面积；



26. 已知a为实数，函数$f(x)=\dfrac{x^2+ax+4}{x}$是奇函数，求$f(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值及取到最小值时所对应的x的值；

27. 某船在海平面A处测得灯塔B在北偏东30°方向，与A相距6.0海里，船由A向正北方向航行8.1海里到达C处，这时灯塔B与船相距多少海里（精确到0.1海里）？B在船的什么方向（精确到1°）？

28. 已知点F_1、F_2依次为双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$的左右焦点，$\left|F_1F_2\right|=6$，$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$；

（1）若$a=\sqrt{5}$，以$\vec{d}=(3,-4)$为方向向量的直线l经过B_1，求F_2到l的距离；

（2）若双曲线C上存在点P，使得$\overrightarrow{PB_1}\cdot\overrightarrow{PB_2}=-2$，求实数$b$的取值范围；

29. 已知函数 $f(x)=|2^{x-2}-2|\ (x\in \mathrm{R})$；

（1）解不等式 $f(x)<2$；

（2）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(n)\ (n\in \mathrm{N}^*)$，$S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，对任意的 $n\geq 4$，不等式 $S_n+\dfrac{1}{2}\geq ka_n$ 恒成立，求实数 k 的取值范围；

附加题

一. 选择题（本大题共 3 题，每题 3 分，共 9 分）

1. 对于集合 A、B，“$A\neq B$”是“$A\bigcap B\subsetneqq A\bigcup B$”的（　　）

A. 充分非必要条件　　　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既非充分也非必要条件

2. 对于任意实数 a、b，$(a-b)^2\geq kab$ 均成立，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $\{-4,0\}$　　B. $[-4,0]$　　C. $(-\infty,0]$　　D. $(-\infty,-4]\bigcup[0,+\infty)$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n+a_{n+4}=a_{n+1}+a_{n+3}\ (n\in N^*)$，那么（　　）

A. $\{a_n\}$ 是等差数列　　　　B. $\{a_{2n-1}\}$ 是等差数列

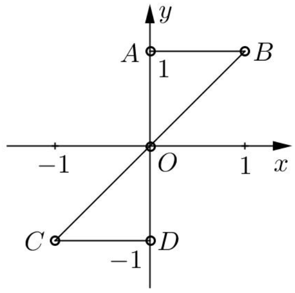
C. $\{a_{2n}\}$ 是等差数列　　　　D. $\{a_{3n}\}$ 是等差数列

二. 填空题（本大题共 3 题，每题 3 分，共 9 分）

4. 关于 x 的实系数一元二次方程 $x^2+px+2=0$ 的两个虚数根为 z_1、z_2，若 z_1、z_2 在复平面上对应的点是经过原点的椭圆的两个焦点，则该椭圆的长轴长为________；

5. 已知圆心为 O，半径为 1 的圆上有三点 A、B、C，若 $7\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 $|\overrightarrow{BC}|=$________；

6. 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像拼成如图所示的“Z”字形折线段 $ABOCD$，不含 $A(0,1)$，$B(1,1)$，$O(0,0)$，$C(-1,-1)$，$D(0,-1)$ 五个点，若 $f(x)$ 的图像关于原点对称的图形即为 $g(x)$ 的图像，则其中一个函数的解析式可以为________；



三. 解答题（本大题 12 分）

7. 对于函数 $f(x)$、$g(x)$，若存在函数 $h(x)$，使得 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的“$h(x)$ 关联函数”

（1）已知 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，是否存在定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $h(x)$，使得 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的“$h(x)$ 关联函数”？若存在，写出 $h(x)$ 的解析式；若不存在，说明理由；

（2）已知函数 $f(x)$、$g(x)$ 的定义域为 $[1,+\infty)$，当 $x\in[n,n+1)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 时，$f(x)=2^{n-1}\sin\dfrac{x}{n}-1$，若存在函数 $h_1(x)$ 及 $h_2(x)$，使得 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的“$h_1(x)$ 关联函数”，且 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的“$h_2(x)$ 关联函数”，求方程 $g(x)=0$ 的解；

参考答案

一. 填空题

1. $\{3\}$； 2. $1-i$； 3. π； 4. 0.5；

5. $(x-2)^2+(y-6)^2=1$； 6. 3； 7. $[3,4]$； 8. 2；

9. $\{2\}$； 10. 84； 11. 320； 12. $y^2=2x-1$；

二. 选择题

13. D； 14. A； 15. D； 16. B； 17. A； 18. D；

19. B； 20. D； 21. C； 22. A； 23. A； 24. A；

三. 解答题

25. 8；

26. $a=0$， $x=2$， $f_{\min}(x)=4$；

27. $BC\approx 4.2$海里，南偏东46°；

28.（1）$d=3.6$；（2）$b\geq\dfrac{\sqrt{22}}{2}$；

29.（1）$x<4$；（2）$k\leq\dfrac{25}{14}$；

附加题

1. C； 2. B； 3. D；

4. $2\sqrt{2}$； 5. $\sqrt{3}$； 6. $f(x)=\begin{cases}x, & -1<x<0\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$；

7.（1）不存在，定义域不为R；（2）$x=\dfrac{\pi}{2}$；

2016 年上海市春季高考数学试卷

一.填空题（本大题共 12 题，每题 3 分，共 36 分）

1．复数 3+4i（i 为虚数单位）的实部是____________.

2．若 $\log_2$（x+1）=3，则 x=____________.

3．直线 y=x﹣1 与直线 y=2 的夹角为____________.

4．函数 $y=\sqrt{x-2}$ 的定义域为____________.

5．三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 中，元素 5 的代数余子式的值为____________.

6．函数 $f(x)=\frac{1}{x}+a$ 的反函数的图象经过点（2，1），则实数 a=____________.

7．在△ABC 中，若 A=30°，B=45°，$BC=\sqrt{6}$，则 AC=____________.

8．4 个人排成一排照相，不同排列方式的种数为____________（结果用数值表示）.

9．无穷等比数列$\{a_n\}$的首项为 2，公比为$\frac{1}{3}$，则$\{a_n\}$的各项的和为____________.

10．若 2+i（i 为虚数单位）是关于 x 的实系数一元二次方程 $x^2+ax+5=0$ 的一个虚根，则 a=____________.

11．函数 $y=x^2-2x+1$ 在区间[0，m]上的最小值为 0，最大值为 1，则实数 m 的取值范围是____________.

12．在平面直角坐标系 xOy 中，点 A，B 是圆 $x^2+y^2-6x+5=0$ 上的两个动点，且满足 $|AB|=2\sqrt{3}$，则 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$ 的最小值为____________.

二.选择题（本大题共 12 题，每题 3 分，共 36 分）

13．若 sinα＞0，且 tanα＜0，则角α的终边位于（　　）

A．第一象限 B．第二象限 C．第三象限 D．第四象限

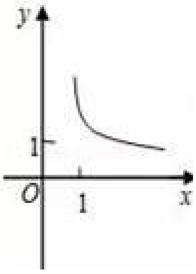
14．半径为 1 的球的表面积为（　　）

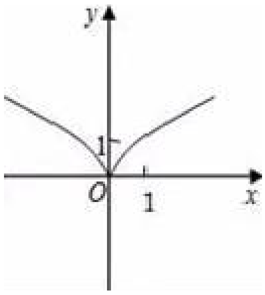
A．π　B．$\frac{4}{3}\pi$ C．2π　D．4π

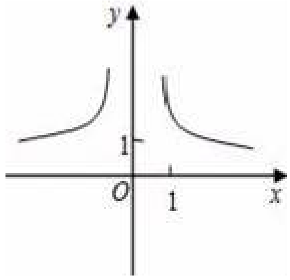
15．在（1+x）^{6} 的二项展开式中，x^2 项的系数为（　　）

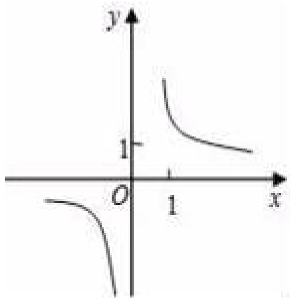
A．2　B．6　C．15　D．20

16．幂函数 $y=x^{-2}$ 的大致图象是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

17．已知向量$\vec{a}=(1,\ 0)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$，则向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$方向上的投影为（　　）

A．1　 B．2　 C．（1，0）　D．（0，2）

18．设直线 l 与平面α平行，直线 m 在平面α上，那么（　　）

A．直线 l 平行于直线 m　 B．直线 l 与直线 m 异面

C．直线 l 与直线 m 没有公共点 D．直线 l 与直线 m 不垂直

19．在用数学归纳法证明等式 $1+2+3+\ldots+2n=2n^2+n$（$n\in N^*$）的第（ii）步中，假设 n=k 时原等式成立，那么在 n=k+1 时需要证明的等式为（　　）

A．$1+2+3+\ldots+2k+2(k+1)=2k^2+k+2(k+1)^2+(k+1)$

B．$1+2+3+\ldots+2k+2(k+1)=2(k+1)^2+(k+1)$

C．$1+2+3+\ldots+2k+2k+1+2(k+1)=2k^2+k+2(k+1)^2+(k+1)$

D．$1+2+3+\ldots+2k+2k+1+2(k+1)=2(k+1)^2+(k+1)$

20．关于双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$与$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$的焦距和渐近线，下列说法正确的是（　　）

A．焦距相等，渐近线相同 B．焦距相等，渐近线不相同

C．焦距不相等，渐近线相同　 D．焦距不相等，渐近线不相同

21．设函数 y=f（x）的定义域为 R，则“f（0）=0”是“函数 f（x）为奇函数”的（　　）

A．充分而不必要条件 B．必要而不充分条件

C．充分必要条件 D．既不充分也不必要条件

22．下列关于实数 a，b 的不等式中，不恒成立的是（　　）

A．$a^2+b^2\geq 2ab$ B．$a^2+b^2\geq -2ab$　C．$(\frac{a+b}{2})^2\geqslant ab$　 D．$(\frac{a+b}{2})^2\geqslant -ab$

23．设单位向量$\overrightarrow{e_1}$与$\overrightarrow{e_2}$既不平行也不垂直，对非零向量$\vec{a}=x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}$、$\vec{b}=x_2\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2}$

有结论：

①若 $x_1y_2-x_2y_1=0$，则$\vec{a}\parallel\vec{b}$；

②若 $x_1x_2+y_1y_2=0$，则$\vec{a}\perp\vec{b}$.

关于以上两个结论，正确的判断是（　　）

A．①成立，②不成立　　B．①不成立，②成立

C．①成立，②成立　D．①不成立，②不成立

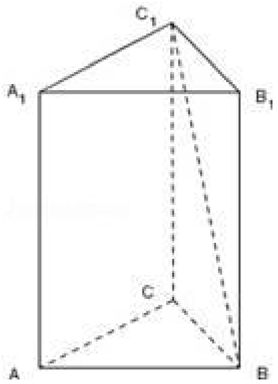
24．对于椭圆$C_{(a,\ b)}$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,\ b>0,\ a\neq b)$．若点$(x_0, y_0)$满足$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$．则称该点在椭圆$C_{(a,\ b)}$内，在平面直角坐标系中，若点A在过点（2，1）的任意椭圆$C_{(a,\ b)}$内或椭圆$C_{(a,\ b)}$上，则满足条件的点A构成的图形为（　　）

A．三角形及其内部　B．矩形及其内部

C．圆及其内部　D．椭圆及其内部

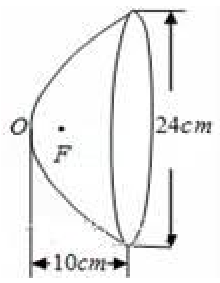
三.解答题（本大题共5题，共8+8+8+12+12=48分）

25．如图，已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为$9\sqrt{3}$，底面边长为3，求异面直线BC_1与AC所成的角的大小．



26．已知函数$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，求f（x）的最小正周期及最大值，并指出f（x）取得最大值时x的值．

27．如图，汽车前灯反射镜与轴截面的交线是抛物线的一部分，灯口所在的圆面与反射镜的轴垂直，灯泡位于抛物线的焦点F处．已知灯口直径是24cm，灯深10cm，求灯泡与反射镜的顶点O的距离．



28．已知数列$\{a_n\}$是公差为2的等差数列．

（1）a_1，a_3，a_4成等比数列，求a_1的值；

（2）设$a_1=-19$，数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，$b_{n+1}-b_n=(\frac{1}{2})^n$，记$c_n=S_n+2^{n-1}\cdot b_r$（$n\in N^*$），求数列$\{c_n\}$的最小项$c_{n_0}$（即$c_{n_0}\leqslant c_r$对任意$n\in N^*$成立）．

29．对于函数f（x），g（x），记集合$D_{f>g}=\{x|f(x)>g(x)\}$．

（1）设f（x）=2|x|，g（x）=x+3，求$D_{f>g}$；

（2）设 f_1（x）=x﹣1，$f_2(x)=(\frac{1}{3})^x+a\cdot 3^x+1$，h（x）=0，如果$D_{f_1>h}\cup D_{f_2>h}=R$．求实数 a 的取值范围．

二卷一.选择题：

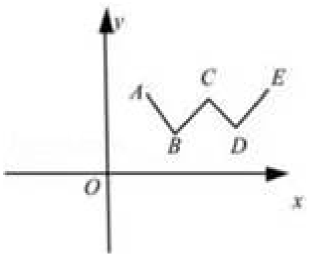
30．若函数 f（x）=sin（x+ϕ）是偶函数，则φ的一个值是（　　）

A．0　 B．$\frac{\pi}{2}$　C．π　 D．2π

31．在复平面上，满足|z﹣1|=4 的复数 z 的所对应的轨迹是（　　）

A．两个点　B．一条线段 C．两条直线 D．一个圆

32．已知函数 y=f（x）的图象是折线 ABCDE，如图，其中 A（1，2），B（2，1），C（3，2），D（4，1），E（5，2），若直线 y=kx+b 与 y=f（x）的图象恰有四个不同的公共点，则 k 的取值范围是（　　）



A．（﹣1，0）∪（0，1）　B．$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ C．（0，1]　 D．$[0,\frac{1}{3}]$

二.填空题：

33．椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的长半轴的长为____________．

34．已知圆锥的母线长为 10，母线与轴的夹角为 30°，则该圆锥的侧面积为____________．

35．小明用数列{a_n}记录某地区 2015 年 12 月份 31 天中每天是否下过雨，方法为：当第 k 天下过雨时，记 $a_k=1$，当第 k 天没下过雨时，记 $a_k=-1$（1≤k≤31），他用数列{b_n}记录该地区该月每天气象台预报是否有雨，方法为：当预报第 k 天有雨时，记 $b_n=1$，当预报第 k 天没有雨时，记 $b_n=-1$ 记录完毕后，小明计算出 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_{31}b_{31}=25$，那么该月气象台预报准确的总天数为____________．

三.解答题：

36．对于数列{a_n}与{b_n}，若对数列{c_n}的每一项 c_n，均有 $c_k=a_k$ 或 $c_k=b_k$，则称数列{c_n}是{a_n}与{b_n}的一个"并数列"．

（1）设数列{a_n}与{b_n}的前三项分别为 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=5$，$b_1=1$，$b_2=2$，$b_3=3$，若{c_n}是{a_n}与{b_n}一个"并数列"求所有可能的有序数组（c_1，c_2，c_3）；

（2）已知数列{a_n}，{c_n}均为等差数列，{a_n}的公差为 1，首项为正整数 t；{c_n}的前 10 项和为﹣30，前 20 项的和为﹣260，若存在唯一的数列{b_n}，使得{c_n}是{a_n}与{b_n}的一个"并数列"，求 t 的值所构成的集合．

2016 年上海市春季高考数学试卷

参考答案与试题解析

一.填空题（本大题共 12 题，每题 3 分，共 36 分）

1．复数 3+4i（i 为虚数单位）的实部是__3__．

【考点】复数的基本概念．

【分析】根据复数的定义判断即可．

【解答】解：复数 3+4i（i 为虚数单位）的实部是 3，

故答案为：3．

2．若 $\log_2(x+1)=3$，则 x=__7__．

【考点】对数的运算性质；函数的零点．

【分析】直接利用对数运算法则化简求解即可．

【解答】解：$\log_2(x+1)=3$，可得 x+1=8，解得 x=7．

故答案为：7．

3．直线 y=x﹣1 与直线 y=2 的夹角为__$\frac{\pi}{4}$__．

【考点】两直线的夹角与到角问题．

【分析】由题意可得直线的斜率，可得倾斜角，进而可得直线的夹角．

【解答】解：∵直线 y=x﹣1 的斜率为 1，故倾斜角为$\frac{\pi}{4}$，

又∵直线 y=2 的倾斜角为 0，

故直线 y=x﹣1 与直线 y=2 的夹角为$\frac{\pi}{4}$，

故答案为：$\frac{\pi}{4}$．

4．函数 $y=\sqrt{x-2}$的定义域为__[2，+∞）__．

【考点】函数的定义域及其求法．

【分析】直接由根式内部的代数式大于等于 0 求解即可．

【解答】解：由 x﹣2≥0 得，x≥2．

∴原函数的定义域为[2，+∞）．

故答案为[2，+∞）．

5．三阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$中，元素 5 的代数余子式的值为__8__．

【考点】高阶矩阵．

【分析】根据余子式的定义可知，在行列式中划去第 1 行第 3 列后所余下的 2 阶行列式带上符号（﹣1）$^{i+j}$，求出其表达式的值即可．

【解答】解：元素 5 的代数余子式为：$(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=(4\times2+1\times0)=8$.

∴元素 5 的代数余子式的值为 8.

故答案为：8.

6．函数$f(x)=\frac{1}{x}+a$的反函数的图象经过点（2，1），则实数 a=__1__.

【考点】反函数.

【分析】由于函数$f(x)=\frac{1}{x}+a$的反函数的图象经过点（2，1），可得函数$f(x)=\frac{1}{x}+a$的图象经过点（1，2），即可得出.

【解答】解：∵函数$f(x)=\frac{1}{x}+a$的反函数的图象经过点（2，1），

∴函数$f(x)=\frac{1}{x}+a$的图象经过点（1，2），

∴$2=\frac{1}{1}+a$，解得 a=1.

故答案为：1.

7．在△ABC 中，若 A=30°，B=45°，$BC=\sqrt{6}$，则 AC=__$2\sqrt{3}$__.

【考点】余弦定理；正弦定理.

【分析】利用正弦定理即可计算求解.

【解答】解：∵A=30°，B=45°，$BC=\sqrt{6}$，

∴由正弦定理$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，可得：$AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$.

故答案为：$2\sqrt{3}$.

8．4 个人排成一排照相，不同排列方式的种数为__24__（结果用数值表示）.

【考点】计数原理的应用.

【分析】根据题意，由排列数公式直接计算即可.

【解答】解：4 个人排成一排照相，不同排列方式的种数为 $A_4^4=24$ 种，

故答案为：24.

9．无穷等比数列$\{a_n\}$的首项为 2，公比为$\frac{1}{3}$，则$\{a_n\}$的各项的和为__3__.

【考点】等比数列的前 n 项和.

【分析】$\{a_n\}$的各项的和$=\frac{a_1}{1-q}$，即可得出.

【解答】解：$\{a_n\}$的各项的和为：$\frac{a_1}{1-q}=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$.

故答案为：3．

10．若2+i（i为虚数单位）是关于x的实系数一元二次方程$x^2+ax+5=0$的一个虚根，则a=__-4__．

【考点】复数代数形式的混合运算．

【分析】2+i（i为虚数单位）是关于x的实系数一元二次方程$x^2+ax+5=0$的一个虚根，则2-i（i为虚数单位）也是关于x的实系数一元二次方程$x^2+ax+5=0$的一个虚根，再利用根与系数的关系即可得出．

【解答】解：∵2+i（i为虚数单位）是关于x的实系数一元二次方程$x^2+ax+5=0$的一个虚根，

∴2-i（i为虚数单位）也是关于x的实系数一元二次方程$x^2+ax+5=0$的一个虚根，

∴2+i+（2-i）=-a，

解得a=-4．

则a=-4．

故答案为：-4．

11．函数$y=x^2-2x+1$在区间[0，m]上的最小值为0，最大值为1，则实数m的取值范围是__[1，2]__．

【考点】二次函数在闭区间上的最值．

【分析】根据二次函数的性质得出$\begin{cases}m\geqslant 1\\ f(m)=m^2-2m+1\leqslant 1\end{cases}$，求解即可．

【解答】解：∵$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$，

∴对称轴x=1，

∴f（1）=0，

f（2）=1，f（0）=1，

∵$f(x)=x^2-2x+2$在区间[0，m]上的最大值为1，最小值为0，

∴$\begin{cases}m\geqslant 1\\ f(m)=(m-1)^2\leqslant 1\end{cases}$，

∴1≤m≤2，

故答案为：1≤m≤2．

12．在平面直角坐标系xOy中，点A，B是圆$x^2+y^2-6x+5=0$上的两个动点，且满足$|AB|=2\sqrt{3}$，则$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$的最小值为__4__．

【考点】直线与圆的位置关系；向量的三角形法则．

【分析】本题可利用AB中点M去研究，先通过坐标关系，将$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$转化为$\overrightarrow{OM}$，用根据$AB=2\sqrt{3}$，得到M点的轨迹，由图形的几何特征，求出$\overrightarrow{OM}$模的最小值，得到本题答案．

【解答】解：设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），AB中点M（x′，y′）．

∵$x'=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y'=\dfrac{y_1+y_2}{2}$，

∴$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2, y_1+y_2)=2\overrightarrow{OM}$，

∵圆C：$x^2+y^2-6x+5=0$，

∴$(x-3)^2+y^2=4$，圆心C（3，0），半径CA=2．

∵点 A，B 在圆 C 上，AB=$2\sqrt{3}$,

∴$CA^2 - CM^2=\left(\frac{1}{2}AB\right)^2$,

即 CM=1.

点 M 在以 C 为圆心，半径 r=1 的圆上.

∴OM≥OC﹣r=3﹣1=2.

∴$|\overrightarrow{OM}|\geq 2$，∴ $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\geq 4$,

∴ $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$的最小值为 4.

故答案为：4.

二.选择题（本大题共 12 题，每题 3 分，共 36 分）

13．若 sinα＞0，且 tanα＜0，则角α的终边位于（　　）

A．第一象限 B．第二象限 C．第三象限 D．第四象限

【考点】象限角、轴线角.

【分析】由 sinα＞0，则角α的终边位于一二象限，由 tanα＜0，则角α的终边位于二四象限，两者结合即可解决问题.

【解答】解：∵sinα＞0，则角α的终边位于一二象限，

∵由 tanα＜0，

∴角α的终边位于二四象限，

∴角α的终边位于第二象限.

故选择 B.

14．半径为 1 的球的表面积为（　　）

A．π　 B．$\frac{4}{3}\pi$ C．2π　 D．4π

【考点】球的体积和表面积.

【分析】利用球的表面积公式 $S=4\pi R^2$ 解答即可求得答案.

【解答】解：半径为 1 的球的表面积为 $4\pi\times 1^2=4\pi$,

故选：D.

15．在（1+x）^{6}的二项展开式中，x^2 项的系数为（　　）

A．2　 B．6　 C．15　 D．20

【考点】二项式系数的性质.

【分析】根据二项展开式的通项公式求出展开式的特定项即可.

【解答】解：（1+x）^{6}的二项展开式中，通项公式为：

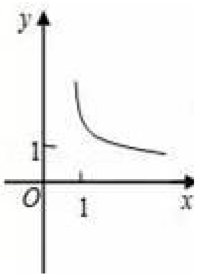
$T_{r+1}=C_6^r\bullet 1^{6-r}\bullet x^r$,

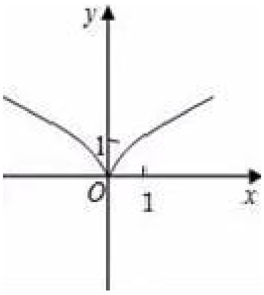
令 r=2，得展开式中 x^2 的系数为：

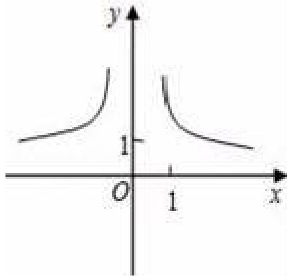
$C_6^2=15$.

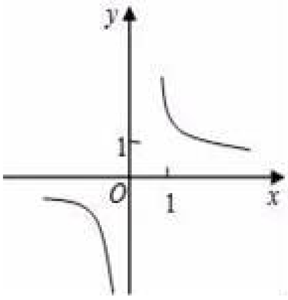
故选：C.

16．幂函数 $y=x^{-2}$ 的大致图象是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【考点】函数的图象.

【分析】利用负指数幂的定义转换函数，根据函数定义域，利用排除法得出选项.

【解答】解：幂函数 $y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$，定义域为（﹣∞，0）∪（0，+∞），

可排除 A，B；

值域为（0，+∞）可排除 D，

故选：C.

17．已知向量 $\vec{a}=(1,\ 0)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$，则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 方向上的投影为（　　）

A．1　　B．2　　C．（1，0）　D．（0，2）

【考点】平面向量数量积的运算.

【分析】求出 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，代入向量的投影公式计算.

【解答】解：$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{5}$，

∴向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 方向上的投影 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=1$.

故选：A.

18．设直线 l 与平面α平行，直线 m 在平面α上，那么（　　）

A．直线 l 平行于直线 m　　B．直线 l 与直线 m 异面

C．直线 l 与直线 m 没有公共点 D．直线 l 与直线 m 不垂直

【考点】空间中直线与直线之间的位置关系.

【分析】由已知中直线 l 与平面α平行，直线 m 在平面α上，可得直线 l 与直线 m 异面或平行，进而得到答案.

【解答】解：∵直线 l 与平面α平行，直线 m 在平面α上，

∴直线 l 与直线 m 异面或平行，

即直线 l 与直线 m 没有公共点，

故选：C.

19．在用数学归纳法证明等式 $1+2+3+\ldots+2n=2n^2+n$（$n\in N^*$）的第（ii）步中，假设 n=k 时原等式成立，那么在 n=k+1 时需要证明的等式为（　　）

A．$1+2+3+\ldots+2k+2(k+1)=2k^2+k+2(k+1)^2+(k+1)$

B．$1+2+3+\ldots+2k+2(k+1)=2(k+1)^2+(k+1)$

C．$1+2+3+\ldots+2k+2k+1+2(k+1)=2k^2+k+2(k+1)^2+(k+1)$

D．$1+2+3+\ldots+2k+2k+1+2(k+1)=2(k+1)^2+(k+1)$

【考点】数学归纳法．

【分析】由数学归纳法可知 n=k 时，$1+2+3+\ldots+2k=2k^2+k$，到 n=k+1 时，左端为 $1+2+3+\ldots+2k+2k+1+2(k+1)$，从而可得答案．

【解答】解：∵用数学归纳法证明等式 $1+2+3+\ldots+2n=2n^2+n$ 时，

当 n=1 左边所得的项是 1+2；

假设 n=k 时，命题成立，$1+2+3+\ldots+2k=2k^2+k$，

则当 n=k+1 时，左端为 $1+2+3+\ldots+2k+2k+1+2(k+1)$，

∴从"k→k+1"需增添的项是 $2k+1+2(k+1)$，

∴$1+2+3+\ldots+2k+2k+1+2(k+1)=2(k+1)^2+(k+1)$．

故选：D．

20．关于双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 与 $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$ 的焦距和渐近线，下列说法正确的是（　　）

A．焦距相等，渐近线相同 B．焦距相等，渐近线不相同

C．焦距不相等，渐近线相同　 D．焦距不相等，渐近线不相同

【考点】双曲线的简单性质．

【分析】分别求得双曲线的焦点的位置，求得焦点坐标和渐近线方程，即可判断它们焦距相等，但渐近线不同．

【解答】解：双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点在 x 轴上，

可得焦点为（$\pm\sqrt{16+4}$，0），即为（$\pm2\sqrt{5}$，0），

渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$；

$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$ 的焦点在 y 轴上，

可得焦点为（0，$\pm2\sqrt{5}$），渐近线方程为 $y=\pm2x$．

可得两双曲线具有相等的焦距，但渐近线不同．

故选：B．

21．设函数 y=f（x）的定义域为 R，则"f（0）=0"是"函数 f（x）为奇函数"的（　　）

A．充分而不必要条件 B．必要而不充分条件

C．充分必要条件 D．既不充分也不必要条件

【考点】必要条件、充分条件与充要条件的判断．

【分析】函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R，若函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(0)=0$，反之不成立，例如 $f(x)=x^2$. 即可判断出结论.

【解答】解：函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R，若函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(0)=0$，反之不成立，例如 $f(x)=x^2$.

∴"$f(0)=0$"是"函数 $f(x)$ 为奇函数"的必要不充分条件.

故选：B.

22．下列关于实数 a，b 的不等式中，不恒成立的是（　　）

A．$a^2+b^2\geq 2ab$　B．$a^2+b^2\geq -2ab$　C．$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$　D．$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant -ab$

【考点】不等式的基本性质.

【分析】根据级别不等式的性质分别判断即可.

【解答】解：对于 A：$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geq 0$，故 A 恒成立；

对于 B：$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2\geq 0$，故 B 恒成立；

对于 C：$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\geq 0$，故 C 恒成立；D 不恒成立；

故选：D.

23．设单位向量 $\overrightarrow{e_1}$ 与 $\overrightarrow{e_2}$ 既不平行也不垂直，对非零向量 $\overrightarrow{a}=x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}$、$\overrightarrow{b}=x_2\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2}$ 有结论：

①若 $x_1y_2-x_2y_1=0$，则 $\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$；

②若 $x_1x_2+y_1y_2=0$，则 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$.

关于以上两个结论，正确的判断是（　　）

A．①成立，②不成立　B．①不成立，②成立

C．①成立，②成立　D．①不成立，②不成立

【考点】向量的线性运算性质及几何意义.

【分析】①假设存在实数λ使得 $\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{b}$，则 $x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}=\lambda(x_2\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2})$，由于向量 $\overrightarrow{e_1}$ 与 $\overrightarrow{e_2}$ 既不平行也不垂直，可得 $x_1=\lambda x_2$，$y_1=\lambda y_2$，即可判断出结论.

②若 $x_1x_2+y_1y_2=0$，则 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2})\cdot(x_2\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2})=x_1x_2+y_1y_2+(x_2y_1+x_1y_2)\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=(x_2y_1+x_1y_2)\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}$，无法得到 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$，因此 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ 不一定正确.

【解答】解：①假设存在实数λ使得 $\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{b}$，则 $x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}=\lambda(x_2\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2})$，∵向量 $\overrightarrow{e_1}$ 与 $\overrightarrow{e_2}$ 既不平行也不垂直，∴$x_1=\lambda x_2$，$y_1=\lambda y_2$，

满足 $x_1y_2-x_2y_1=0$，因此 $\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$.

②若 $x_1x_2+y_1y_2=0$，

则$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1\vec{e_1}+y_1\vec{e_2})\bullet(x_2\vec{e_1}+y_2\vec{e_2})=x_1x_2+y_1y_2+(x_2y_1+x_1y_2)\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=(x_2y_1+x_1y_2)$

$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}$，无法得到$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，因此$\vec{a}\perp\vec{b}$不一定正确．

故选：A．

24. 对于椭圆$C_{(a,\ b)}$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,\ b>0,\ a\neq b)$. 若点$(x_0,y_0)$满足$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$. 则称该点在椭圆$C_{(a,\ b)}$内，在平面直角坐标系中，若点A在过点（2，1）的任意椭圆$C_{(a,\ b)}$内或椭圆$C_{(a,\ b)}$上，则满足条件的点A构成的图形为（　　）

A．三角形及其内部　B．矩形及其内部

C．圆及其内部　D．椭圆及其内部

【考点】椭圆的简单性质．

【分析】点A(x_0,y_0)在过点P（2，1）的任意椭圆$C_{(a,b)}$内或椭圆$C_{(a,b)}$上，可得$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\le1$．由椭圆的对称性可知：点B（﹣2，1），点C（﹣2，﹣1），点D（2，﹣1），都在任意椭圆上，即可得出．

【解答】解：设点A（x_0，y_0）在过点P（2，1）的任意椭圆$C_{(a,\ b)}$内或椭圆$C_{(a,\ b)}$上，

则$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\le1$．

$\therefore\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\le\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，

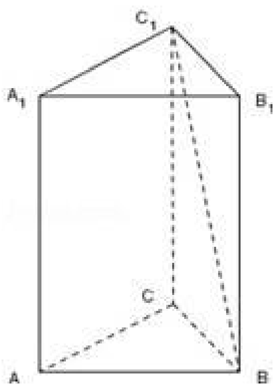
由椭圆的对称性可知：点B（﹣2，1），点C（﹣2，﹣1），点D（2，﹣1），都在任意椭圆上，

可知：满足条件的点A构成的图形为矩形PBCD及其内部．

故选：B．

三.解答题（本大题共5题，共8+8+8+12+12=48分）

25．如图，已知正三棱柱ABC﹣$A_1B_1C_1$的体积为$9\sqrt{3}$，底面边长为3，求异面直线BC_1与AC所成的角的大小．



【考点】异面直线及其所成的角．
【分析】由正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积求出高，由 A_1C_1 与 AC 平行，得$\angle BC_1A_1$ 是异面直线 BC_1 与 AC 所成的角，由此利用余弦定理能求出异面直线 BC_1 与 AC 所成的角的大小．
【解答】解：∵正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $9\sqrt{3}$，底面边长为 3，

∴$V=sh=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2\times h=9\sqrt{3}$，解得 h=4，

∵A_1C_1 与 AC 平行，∴$\angle BC_1A_1$ 是异面直线 BC_1 与 AC 所成的角，
在$\triangle A_1BC_1$ 中，$A_1C_1=3$，$BC_1=BA_1=5$，

∴$\cos\angle BC_1A_1=\frac{BC_1^2+A_1C_1^2-BA_1^2}{2BC_1\cdot A_1C_1}=\frac{3}{10}$．

∴$\angle BC_1A_1=\arccos\frac{3}{10}$．

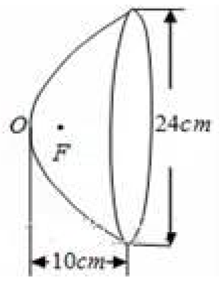
∴异面直线 BC_1 与 AC 所成的角的大小为 $\arccos\frac{3}{10}$．

26．已知函数$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，求 f（x）的最小正周期及最大值，并指出 f（x）取得最大值时 x 的值．
【考点】两角和与差的正弦函数；正弦函数的图象．
【分析】由条件利用两角和的正弦公式化简 f（x）的解析式，再利用正弦函数的周期性和最大值，得出结论．

【解答】解：∵$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，∴函数的周期为 $T=2\pi$，

函数的最大值为 2，且函数取得最大值时，$x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$．

27．如图，汽车前灯反射镜与轴截面的交线是抛物线的一部分，灯口所在的圆面与反射镜的轴垂直，灯泡位于抛物线的焦点 F 处．已知灯口直径是 24cm，灯深 10cm，求灯泡与反射镜的顶点 O 的距离．



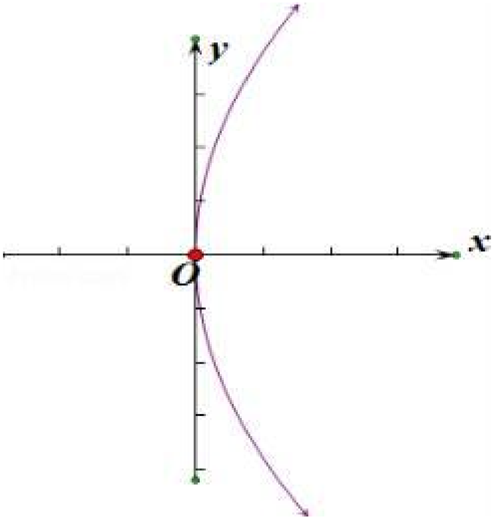
【考点】抛物线的简单性质．
【分析】先设出抛物线的标准方程 $y^2=2px$（p＞0），点（10，12）代入抛物线方程求得 p，

进而求得$\frac{p}{2}$，即灯泡与反光镜的顶点的距离．

【解答】解：建立平面直角坐标系，以 O 为坐标原点，水平方向为 x 轴，竖直方向为 y 轴，如图所示：
则：设抛物线方程为 $y^2=2px$（p＞0），点（10，12）在抛物线 $y^2=2px$ 上，
∴$144=2p\times 10$．

$\therefore \frac{p}{2}=3.6$.

∴灯泡与反射镜的顶点 O 的距离 3.6cm.



28．已知数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列.

（1）a_1，a_3，a_4成等比数列，求a_1的值；

（2）设$a_1=-19$，数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n.数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，$b_{n+1}-b_n=(\frac{1}{2})^n$，记$c_n=S_n+2^{n-1}\cdot b_n$（$n\in N^*$），求数列$\{c_n\}$的最小项$c_{n_0}$（即$c_{n_0}\leqslant c_n$对任意$n\in N^*$成立）.

【考点】等差数列的前 n 项和；等比数列的通项公式.

【分析】（1）利用等差数列通项公式和等比数列性质能求出首项a_1的值.

（2）由已知利用累加法能求出$b_n=2-(\frac{1}{2})^{n-1}$.从而能求出$c_n-c_{n-1}=2n-19+2^n$，由此能求出数列$\{c_n\}$的最小项.

【解答】解：（1）∵数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列．a_1，a_3，a_4成等比数列，

$\therefore (a_1+2d)^2=a_1(a_1+3d)$.

解得 d=2，$a_1=-8$

（2）$b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\ldots+(b_n-b_{n-1})$

$=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-1}$

$=\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}$

$=2-(\frac{1}{2})^{n-1}$.

$S_n=-19n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2=n^2-20n$，

$c_n=S_n+2^{n-1}\cdot b_n=n^2-20n+2^{n-1}\cdot(2-(\frac{1}{2})^{n-1})=n^2-20n+2^n-1$,

$c_{n+1}-c_n=(n+1)^2-20(n+1)+2^{n+1}-1-(n^2-20n+2^n-1)$

$=2n-19+2^n$

由题意 $n\geq9$，上式大于零，即 $c_9<c_{10}<\ldots<c_n$，

进一步，$2n+2^n$ 是关于 n 的增函数，

$\because 2\times4+2^4=24>19$，$2\times3+2^3=14<19$，

$\therefore c_1>c_2>c_3>c_4<c_5<\ldots<c_9<c_{10}<\ldots<c_n$，

$\therefore (c)_{max}=c_{n_0}=c_4=-49$.

29．对于函数 f（x），g（x），记集合 $D_{f>g}=\{x|f(x)>g(x)\}$.

（1）设 $f(x)=2|x|$，$g(x)=x+3$，求 $D_{f>g}$；

（2）设 $f_1(x)=x-1$，$f_2(x)=(\frac{1}{3})^x+a\cdot3^x+1$，h（x）=0，如果 $D_{f_1>h}\cup D_{f_2>h}=R$. 求实数 a 的取值范围．

【考点】其他不等式的解法；集合的表示法．

【分析】（1）直接根据新定义解不等式即可，

（2）方法一：由题意可得则 $(\frac{1}{3})^x+a\cdot3^x+1>0$在 R 上恒成立，分类讨论，即可求出 a 的取值范围，

方法二：够造函数，求出函数的最值，即可求出 a 的取值范围．

【解答】解：（1）由 $2|x|>x+3$，得 $D_{f>g}=\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$；

（2）方法一：$D_{f_1>h}=\{x|x-1>0\}=\{x|x>1\}$，$D_{f_2>h}=\{x|(\frac{1}{3})^x+a\cdot3^x+1>0\}$，

由$D_{f_1>h}\cup D_{f_2>h}=R$ $D_{f_2>h}=R$，或$D_{f_2>h}=(-\infty, m)$，(其中$m>1$) $D_{f_2>h}=R$，

则 $(\frac{1}{3})^x+a\cdot3^x+1>0$在 R 上恒成立，

令 $(\frac{1}{3})^x=t\in(0,+\infty)$，$a>-t^2-t$，$y_1=-t^2-t=-(t+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}<0$，

$\therefore a\geq0$ 时成立．

对于$D_{f_2>h}=(-\infty, m)$，(其中$m>1$)

以下只讨论 $a<0$ 的情况

对于 $(\frac{1}{3})^x+a\cdot3^x+1>0$，

$(\frac{1}{3})^x=t>0$，$t^2+t+a>0$，解得 $t<\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$或 $t>\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$，（$a<0$）

又 $t>0$，所以$t>\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$即$(\frac{1}{3})^x>\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}\Rightarrow x<\log_{\frac{1}{3}}\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$，

$\therefore m=\log_{\frac{1}{3}}\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}>1=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}\Rightarrow a>-\frac{4}{9}$

综上所述：$a>-\frac{4}{9}$

方法二（2）$D_{f_1>h}=\{x|x-1>0\}=\{x|x>1\}$，$D_{f_2>h}=\{x|(\frac{1}{3})^x+a\cdot 3^x+1>0\}$，

由$D_{f_1>h}\cup D_{f_2>h}=R D_{f_2>h}=R$，或$D_{f_2>h}=(-\infty,m)$，（其中$m>1$）$a\geq0$．显然

$(\frac{1}{3})^x+a\cdot 3^x+1>0$恒成立，

即 $x\in R$ $a<0$ 时，$(\frac{1}{3})^x+a\cdot 3^x+1>0$，在 $x\leq1$ 上恒成立

令$(\frac{1}{3})^x=t$，$(t\geq\frac{1}{3})$，$a>-t^2-t$，$y_1=-t^2-t=-(t+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$，

所以$(y_1)_{max}=-\frac{4}{9}$，$0>a>-\frac{4}{9}$

综上所述：$a>-\frac{4}{9}$．

二卷一.选择题：

30．若函数 f（x）=sin（x+ϕ）是偶函数，则φ的一个值是（　　）

A．0　　B．$\frac{\pi}{2}$　C．π　　D．2π

【考点】正弦函数的图象．

【分析】由函数的奇偶性可得ϕ的取值范围，结合选项验证可得．

【解答】解：∵函数 f（x）=sin（x+ϕ）是偶函数，

∴f（﹣x）=f（x），即 sin（﹣x+ϕ）=sin（x+ϕ），

∴（﹣x+ϕ）=x+ϕ+2kπ或﹣x+ϕ+x+ϕ=π+2kπ，k∈Z，

当（﹣x+ϕ）=x+ϕ+2kπ时，可得 x=﹣kπ，不满足函数定义；

当﹣x+ϕ+x+ϕ=π+2kπ时，$\phi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，k∈Z，

结合选项可得 B 为正确答案．

故选：B．

31．在复平面上，满足|z﹣1|=4 的复数 z 的所对应的轨迹是（　　）

A．两个点　 B．一条线段 C．两条直线 D．一个圆

【考点】复数的代数表示法及其几何意义．

【分析】设 z=x+yi，得到$|x+yi-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4$，从而求出其运动轨迹．

【解答】解：设 z=x+yi，

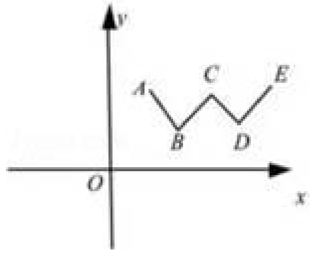
则$|x+yi-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4$，

∴$(x-1)^2+y^2=16$，

∴运动轨迹是圆，

故选：D．

32．已知函数 y=f（x）的图象是折线 ABCDE，如图，其中 A（1，2），B（2，1），C（3，2），D（4，1），E（5，2），若直线 y=kx+b 与 y=f（x）的图象恰有四个不同的公共点，则 k 的取值范围是（　　）



A．（﹣1，0）∪（0，1）　B．$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ C．（0，1]　D．$[0,\frac{1}{3}]$

【考点】函数的图象．

【分析】根据图象使用特殊值验证，使用排除法得出答案．

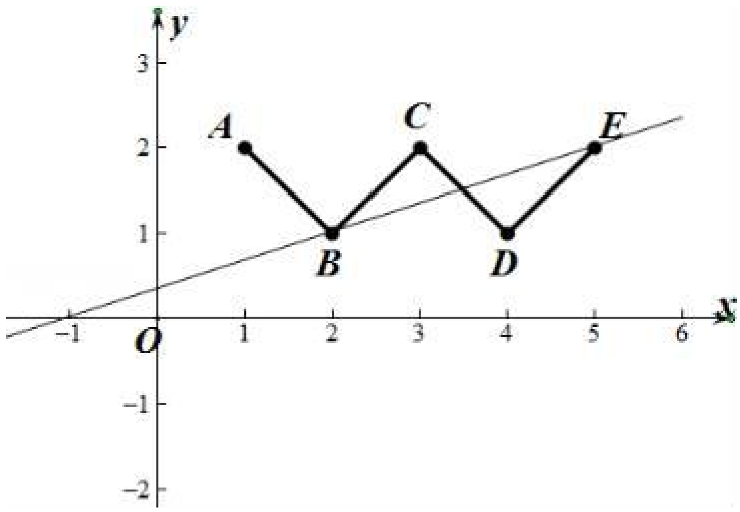
【解答】解；当 k=0，1＜b＜2 时，显然直线 y=b 与 f（x）图象交于四点，故 k 可以取 0，排除 A，C；

作直线 BE，则 $k_{BE}=\frac{2-1}{5-2}=\frac{1}{3}$，直线 BE 与 f（x）图象交于三点，

平行移动直线 BD 可发现直线与 f（x）图象最多交于三点，

即直线 $y=\frac{1}{3}x+b$ 与 f（x）图象最多交于三点，∴$k\neq\frac{1}{3}$．排除 D．

故选 B．



二.填空题：

33．椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的长半轴的长为__5__．

【考点】椭圆的简单性质．

【分析】利用椭圆性质求解.

【解答】解：椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$中，

$a=5$，
∴椭圆的长半轴长 $a=5$.
故答案为：5.

34．已知圆锥的母线长为 10，母线与轴的夹角为 30°，则该圆锥的侧面积为__50π__.
【考点】旋转体（圆柱、圆锥、圆台）.
【分析】根据勾股定理得出圆锥的底面半径，代入侧面积公式计算.
【解答】解：∵圆锥的母线长为 10，母线与轴的夹角为 30°，
∴圆锥的底面半径为 5，
∴圆锥的侧面积为$\pi\times5\times10=50\pi$.
故答案为：50π.

35．小明用数列$\{a_n\}$记录某地区 2015 年 12 月份 31 天中每天是否下过雨，方法为：当第 k 天下过雨时，记 $a_k=1$，当第 k 天没下过雨时，记 $a_k=-1$（$1\le k\le31$），他用数列$\{b_n\}$记录该地区该月每天气象台预报是否有雨，方法为：当预报第 k 天有雨时，记 $b_n=1$，当预报第 k 天没有雨时，记 $b_n=-1$ 记录完毕后，小明计算出 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_{31}b_{31}=25$，那么该月气象台预报准确的总天数为__28__.
【考点】数列的应用.
【分析】由题意，气象台预报准确时 $a_kb_k=1$，不准确时 $a_kb_k=-1$，根据 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_{31}b_{31}=25=28-3$，即可得出结论.
【解答】解：由题意，气象台预报准确时 $a_kb_k=1$，不准确时 $a_kb_k=-1$，
∵$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_{31}b_{31}=25=28-3$，
∴该月气象台预报准确的总天数为 28.
故答案为：28.

三.解答题：
36. 对于数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$，若对数列$\{c_n\}$的每一项 c_n，均有 $c_k=a_k$ 或 $c_k=b_k$，则称数列$\{c_n\}$是$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的一个“并数列”.
（1）设数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的前三项分别为 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=5$，$b_1=1$，$b_2=2$，$b_3=3$，若$\{c_n\}$是$\{a_n\}$与$\{b_n\}$一个“并数列”求所有可能的有序数组（c_1，c_2，c_3）；
（2）已知数列$\{a_n\}$，$\{c_n\}$均为等差数列，$\{a_n\}$的公差为 1，首项为正整数 t；$\{c_n\}$的前 10 项和为 -30，前 20 项的和为 -260，若存在唯一的数列$\{b_n\}$，使得$\{c_n\}$是$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的一个“并数列”，求 t 的值所构成的集合.
【考点】数列的求和；数列的应用.
【分析】（1）利用“并数列”的定义即可得出.
（2）利用等差数列的通项公式及其前 n 项和公式可得 a_n，公差 d，c_n，通过分类讨论即可得出.
【解答】解：（1）（1，2，3），（1，2，5），（1，3，3），（1，3，5）；
（2）$a_n=t+n-1$，

设$\{c_n\}$的前 10 项和为T_n，$T_{10}=-30$，$T_{20}=-260$，得 $d=-2$，$c_1=6$，所以 $c_n=8-2n$；$c_k=a_k$或 $c_k=b_k$．当$c_k=a_k$时，$8-2k=t+k-1$，$t=9-3k\in N^*$，$k\in N^*$，

$\therefore k=1$，$t=6$；或 $k=2$，$t=3$，

所以 $k\geq 3$．$k\in N^*$时，$c_k=b_k$，

$\because$数列$\{b_n\}$唯一，所以只要 b_1，b_2 唯一确定即可．

显然，$t=6$，或 $t=3$ 时，b_1，b_2 不唯一，

$t\in N^*$且$t\neq 3$，$t\neq 6$，

即$\{t|t\in N^*$且$t\neq 3$，$t\neq 6\}$．

2017年上海市春季高考数学试卷

一.填空题（本大题共12题，满分48分，第1～6题每题4分，第7～12题每题5分）

1．设集合A={1，2，3}，集合B={3，4}，则A∪B=____.

2．不等式|x－1|<3的解集为____.

3．若复数z满足$2\overline{z}-1=3+6i$（i是虚数单位），则z=____.

4．若$\cos\alpha=\frac{1}{3}$，则$\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})$=____.

5．若关于x、y的方程组$\begin{cases}x+2y=4\\3x+ay=6\end{cases}$无解，则实数a=____.

6．若等差数列$\{a_n\}$的前5项的和为25，则a_1+a_5=____.

7．若P、Q是圆$x^2+y^2-2x+4y+4=0$上的动点，则|PQ|的最大值为____.

8．已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3^r$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_n}$=____.

9．若$(x+\frac{2}{x})^n$的二项展开式的各项系数之和为729，则该展开式中常数项的值为____.

10．设椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的左、右焦点分别为F_1、F_2，点P在该椭圆上，则使得$\triangle F_1F_2P$是等腰三角形的点P的个数是____.

11．设a_1、a_2、…、a_6为1、2、3、4、5、6的一个排列，则满足$|a_1-a_2|+|a_3-a_4|+|a_5-a_6|=3$的不同排列的个数为____.

12．设a、b∈R，若函数$f(x)=x+\frac{a}{x}+b$在区间（1，2）上有两个不同的零点，则f（1）的取值范围为____.

二.选择题（本大题共4题，每题5分，共20分）

13．函数f（x）=（x－1）^{2}的单调递增区间是（　　）

A．[0，+∞）　B．[1，+∞）　C．（－∞，0]　D．（－∞，1]

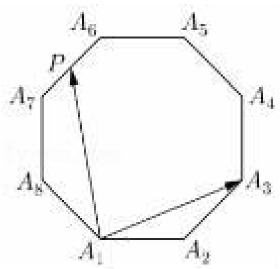
14．设a∈R，“a>0”是“$\frac{1}{a}>0$”的（　　）条件.

A．充分非必要　B．必要非充分　C．充要　D．既非充分也非必要

15．过正方体中心的平面截正方体所得的截面中，不可能的图形是（　　）

A．三角形 B．长方形 C．对角线不相等的菱形 D．六边形

16．如图所示，正八边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 的边长为 2，若 P 为该正八边形边上的动点，则$\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1P}$的取值范围为（　　）



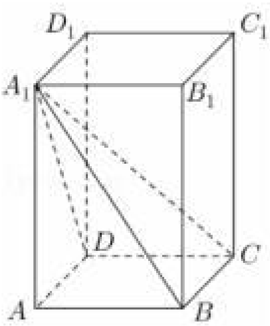
A．$[0，8+6\sqrt{2}]$　　B．$[-2\sqrt{2}，8+6\sqrt{2}]$

C$[-8-6\sqrt{2}，2\sqrt{2}]$　D．$[-8-6\sqrt{2}，8+6\sqrt{2}]$

三.解答题（本大题共 5 题，共 14+14+14+16+18=76 分）

17．（12 分）如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AB=BC=2，$AA_1=3$；

（1）求四棱锥 A_1-ABCD 的体积；（2）求异面直线 A_1C 与 DD_1 所成角的大小．

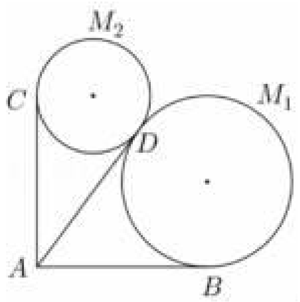


18．（12 分）设 a∈R，函数$f(x)=\frac{2^x+a}{2^x+1}$；（1）求 a 的值，使得 f（x）为奇函数；（2）若$f(x)<\frac{a+2}{2}$对任意 x∈R 成立，求 a 的取值范围．

19．（12 分）某景区欲建造两条圆形观景步道 M_1、M_2（宽度忽略不计），如图所示，已知 AB⊥AC，AB=AC=AD=60（单位：米），要求圆 M_1 与 AB、AD 分别相切于点 B、D，圆 M_2 与 AC、AD 分别相切于点 C、D；

（1）若∠BAD=60°，求圆 M_1、M_2 的半径（结果精确到 0.1 米）

（2）若观景步道 M_1 与 M_2 的造价分别为每米 0.8 千元与每米 0.9 千元，如何设计圆 M_1、M_2 的大小，使总造价最低？最低总造价是多少？（结果精确到 0.1 千元）



20. （12 分）已知双曲线Γ：$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$（b＞0），直线 l：y=kx+m（km≠0），l 与Γ交于 P、Q 两点，P'为 P 关于 y 轴的对称点，直线 P'Q 与 y 轴交于点 N（0，n）；（1）若点（2，0）是Γ的一个焦点，求Γ的渐近线方程；

（2）若 b=1，点 P 的坐标为（﹣1，0），且$\overrightarrow{NP'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{P'Q}$，求 k 的值；

（3）若 m=2，求 n 关于 b 的表达式．

21. （12 分）已知函数 f（x）=$\log_2\frac{1+x}{1-x}$；（1）解方程 f（x）=1；

（2）设 x∈（﹣1，1），a∈（1，+∞），证明：$\frac{ax-1}{a-x}$∈（﹣1，1），且 f（$\frac{ax-1}{a-x}$）﹣f（x）=﹣f（$\frac{1}{a}$）；（3）设数列{x_n}中，x_1∈（﹣1，1），x_{n+1}=（﹣1）$^{n+1}\frac{3x_n-1}{3-x_n}$，n∈$N^*$，求 x_1 的取值范围，使得 x_3≥x_n 对任意 n∈N^*成立．

2017年上海市春季高考数学试卷

参考答案与试题解析

一.填空题（本大题共12题，满分48分，第1～6题每题4分，第7～12题每题5分）

1．设集合A={1，2，3}，集合B={3，4}，则A∪B=__{1，2，3，4}__．

2．不等式|x﹣1|＜3的解集为__（﹣2，4）__．

3．若复数z满足$2\overline{z}-1=3+6i$（i是虚数单位），则z=__2﹣3i__．

4．若$\cos\alpha=\frac{1}{3}$，则$\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})=$__$-\frac{1}{3}$__．

5．若关于x、y的方程组$\begin{cases}x+2y=4\\3x+ay=6\end{cases}$无解，则实数a=__6__．

6．若等差数列{a_n}的前5项的和为25，则a_1+a_5=__10__．

7．若P、Q是圆$x^2+y^2-2x+4y+4=0$上的动点，则|PQ|的最大值为__2__．

8．已知数列{a_n}的通项公式为$a_n=3^r$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_n}=$__$\frac{3}{2}$__．

9．若$(x+\frac{2}{x})^n$的二项展开式的各项系数之和为729，则该展开式中常数项的值为__160__．

10．设椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的左、右焦点分别为F_1、F_2，点P在该椭圆上，则使得△F_1F_2P是等腰三角形的点P的个数是__6__．

11．设a_1、a_2、…、a_6为1、2、3、4、5、6的一个排列，则满足$|a_1-a_2|+|a_3-a_4|+|a_5-a_6|=3$的不同排列的个数为__48__．

12．设a、b∈R，若函数$f(x)=x+\frac{a}{x}+b$在区间（1，2）上有两个不同的零点，则f（1）的取值范围为__（0，1）__．

解：函数$f(x)=x+\frac{a}{x}+b$在区间（1，2）上有两个不同的零点，

即方程$x^2+bx+a=0$在区间（1，2）上两个不相等的实根，

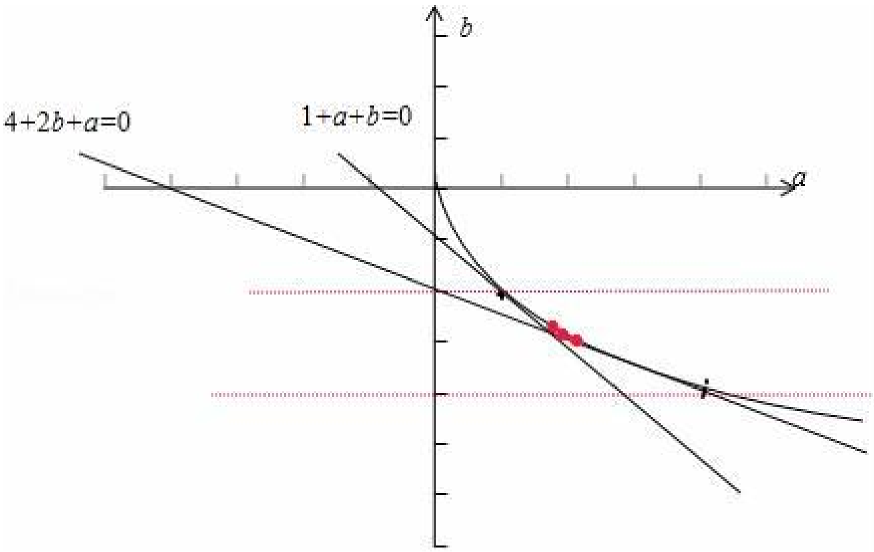
$\Rightarrow\begin{cases}1<-\frac{b}{2}<2\\b^2-4a>0\\1+a+b>0\\4+2b+a>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4<b<-2\\b^2>4a\\1+a+b>0\\4+2b+a>0\end{cases}$，

如图画出数对（a，b）所表示的区域，目标函数 z=f（1）═a+b+1

∴z 的最小值为 z=a+b+1 过点（1，－2）时，z 的最大值为 z=a+b+1

过点（4，－4）时∴f（1）的取值范围为（0，1）

故答案为：（0，1）



二.选择题（本大题共 4 题，每题 5 分，共 20 分）

13．函数 f（x）=（x－1）^{2}的单调递增区间是（　B　）

A．[0，+∞）　B．[1，+∞）　C．（－∞，0] D．（－∞，1]

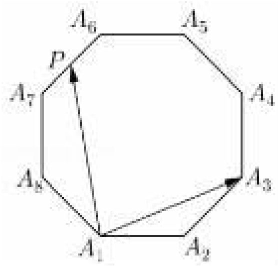
14．设 a∈R，“a＞0”是“$\frac{1}{a}>0$”的（　C　）条件．

A．充分非必要 B．必要非充分 C．充要 D．既非充分也非必要

15．过正方体中心的平面截正方体所得的截面中，不可能的图形是（　A　）

A．三角形　B．长方形 C．对角线不相等的菱形 D．六边形

16．如图所示，正八边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 的边长为 2，若 P 为该正八边形边上的动点，则$\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1P}$的取值范围为（　B　）



A. $[0,\ 8+6\sqrt{2}]$ B. $[-2\sqrt{2},\ 8+6\sqrt{2}]$

C. $[-8-6\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}]$ D. $[-8-6\sqrt{2},\ 8+6\sqrt{2}]$

解：由题意，正八边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 的每一个内角为 135°，

且 $|\overrightarrow{A_1A_2}|=|\overrightarrow{A_1A_8}|=2$，$|\overrightarrow{A_1A_3}|=|\overrightarrow{A_1A_7}|=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$|\overrightarrow{A_1A_4}|=|\overrightarrow{A_1A_6}|=2+\sqrt{2}$，

$|\overrightarrow{A_1A_5}|=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

再由正弦函数的单调性及值域可得，当 P 与 A_8 重合时，$\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1P}$ 最小为

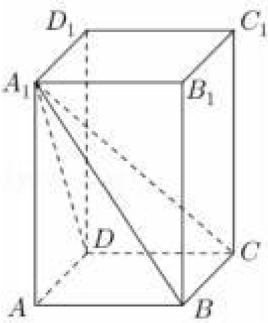
$2\times2\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\cos112.5°=2\times2\sqrt{2+\sqrt{2}}\times(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})=-2\sqrt{2}$.

结合选项可得 $\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1P}$ 的取值范围为 $[-2\sqrt{2},\ 8+6\sqrt{2}]$.

三.解答题（本大题共 5 题，共 14+14+14+16+18=76 分）

17. （12 分）长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，$AA_1=3$；

（1）求四棱锥 A_1-ABCD 的体积；（2）求异面直线 A_1C 与 DD_1 所成角的大小.



解：（1）∵长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，$AA_1=3$，

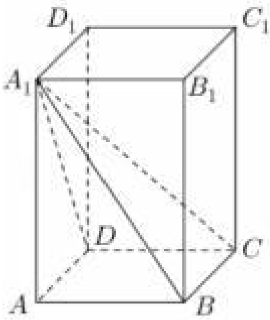
∴四棱锥 A_1-ABCD 的体积：

$V_{A_1-ABCD}=\frac{1}{3}S_{矩形ABCD}\times AA_1=\frac{1}{3}\times AB\times AD\times AA_1=\frac{1}{3}\times2\times2\times3=4$.

（2）∵$DD_1\parallel CC_1$，∴$\angle A_1CC_1$ 是异面直线 A_1C 与 DD_1 所成角（或所成角的补角），

∵$\tan\angle A_1CC_1=\frac{A_1C_1}{CC_1}=\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

∴$\angle A_1CC_1=\arctan\frac{2\sqrt{2}}{3}$．∴异面直线 A_1C 与 DD_1 所成角的大小为 $\arctan\frac{2\sqrt{2}}{3}$；



18．（12 分）设 a∈R，函数 $f(x)=\frac{2^x+a}{2^x+1}$；（1）求 a 的值，使得 f（x）为奇函数；（2）若 $f(x)<\frac{a+2}{2}$ 对任意 x∈R 成立，求 a 的取值范围．

解：（1）由 f（x）的定义域为 R，且 f（x）为奇函数，可得 f（0）=0，

即有 $\frac{1+a}{2}=0$，解得 a=－1．

则 f（x）=$\frac{2^x-1}{2^x+1}$，f（－x）=$\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}$=－f（x），则 a=－1 满足题意；

（2）$f(x)<\frac{a+2}{2}$ 对任意 x∈R 成立，

即为 $\frac{2^x+a}{2^x+1}<\frac{a+2}{2}$ 恒成立，等价为 $\frac{a-1}{2^x+1}<\frac{a}{2}$，

即有 2（a－1）＜a（2^x+1），

当 a=0 时，－1＜0 恒成立；

当 a＞0 时，$\frac{2(a-1)}{a}<2^x+1$，

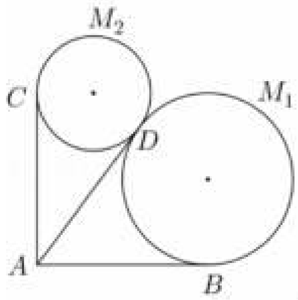
由 2^x+1＞1，可得 $\frac{2(a-1)}{a}\leq 1$，解得 0＜a≤2；

当 a＜0 时，$\frac{2(a-1)}{a}>2^x+1$ 不恒成立．综上可得，a 的取值范围是[0，2]．

19．（12 分）某景区欲建造两条圆形观景步道 M_1、M_2（宽度忽略不计），如图所示，已知 AB⊥AC，AB=AC=AD=60（单位：米），要求圆 M_1 与 AB、AD 分别相切于点 B、D，圆 M_2 与 AC、AD 分别相切于点 C、D；

（1）若∠BAD=60°，求圆 M_1、M_2 的半径（结果精确到 0.1 米）

（2）若观景步道 M_1 与 M_2 的造价分别为每米 0.8 千元与每米 0.9 千元，如何设计圆 M_1、M_2 的大小，使总造价最低？最低总造价是多少？（结果精确到 0.1 千元）



解：（1）M_1半径=60tan30°≈34.6，M_2半径=60tan15°≈16.1；

（2）设∠BAD=2α，则总造价 y=0.8•2π•60tanα+0.9•2π•60tan（45°﹣α），

设 1+tanα=x，则 $y=12\pi\cdot(8x+\frac{18}{x}-17)\geqslant 84\pi$，

当且仅当 $x=\frac{3}{2}$，$\tan\alpha=\frac{1}{2}$时，取等号，

∴M_1半径 30，M_2半径 20，造价 42.0 千元．

20．（12 分）已知双曲线Γ：$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$（b＞0），直线 l：y=kx+m（km≠0），l 与Γ交于 P、Q 两点，P'为 P 关于 y 轴的对称点，直线 P'Q 与 y 轴交于点 N（0，n）；（1）若点（2，0）是Γ的一个焦点，求Γ的渐近线方程；

（2）若 b=1，点 P 的坐标为（﹣1，0），且$\overrightarrow{NP'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{P'Q}$，求 k 的值；

（3）若 m=2，求 n 关于 b 的表达式．

解：（1）∵双曲线Γ：$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$（b＞0），点（2，0）是Γ的一个焦点，

∴c=2，a=1，∴$b^2=c^2-a^2=4-1=3$，

∴Γ的标准方程为：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，Γ的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$．

（2）∵b=1，∴双曲线Γ为：$x^2-y^2=1$，P（﹣1，0），P′（1，0），

∵$\overrightarrow{NP'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{P'Q}$，设 Q（$x_2$，$y_2$），则有定比分点坐标公式，得：

$$\begin{cases}1=\dfrac{0+\frac{3}{2}x_2}{1+\frac{3}{2}}\\[2ex]0=\dfrac{n+\frac{3}{2}y_2}{1+\frac{3}{2}}\end{cases}$$，解得$x_2=\frac{5}{3}$，∵$x_2^2-y_2^2=1$，∴$y_2=\pm\frac{4}{3}$，

$\therefore k=\frac{y_2-0}{x_2+1}=\pm\frac{1}{2}$.

（3）设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），$k_{PQ}=k_0$，

则 P'（$-x_1$，y_1），$l_{PQ}=k_0x+n$，

由$\begin{cases}y=kx+2\\x^2-\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，得（$b^2-k^2$）$x^2-4kx-4-b^2=0$，

$x_1+x_2=\frac{4k}{b^2-k^2}$，$x_1x_2=\frac{-4-b^2}{b^2-k^2}$，

由$\begin{cases}y=k_0x+n\\x^2\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，得（$b^2-k_0^2$）$x^2-2k_0nx-n^2-b^2=0$，

$-x_1+x_2=\frac{2k_0n}{b^2-k_0^2}$，$-x_1x_2=\frac{-n^2-b^2}{b^2-k_0^2}$，

$\therefore x_1x_2=\frac{-4-b^2}{b^2-k^2}=\frac{n^2+b^2}{b^2-k_0^2}$，即$\frac{b^2-k_0^2}{b^2-k^2}$，即$\frac{b^2-k_0^2}{b^2-k^2}=\frac{n^2+b^2}{-4-b^2}$，

$\frac{k}{k_0}=\frac{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{\frac{y_2-y_1}{x_2+x_1}}=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}=\frac{2k}{k_0n}\cdot\frac{b^2-k_0^2}{b^2-k^2}=\frac{2k}{k_0n}\cdot\frac{n^2+b^2}{-4-b^2}$，

化简，得 $2n^2+n(4+b^2)+2b^2=0$，$\therefore n=-2$ 或 $n=\frac{b^2}{-2}$，

当 $n=-2$，由$\frac{b^2-k_0^2}{b^2-k^2}=\frac{n^2+b^2}{-4-b^2}$，得 $2b^2=k^2+k_0^2$，

由$\begin{cases}y=k_0x-2\\y=kx+2\end{cases}$，得$\begin{cases}x=\frac{4}{k_0-k}\\y=\frac{2k+2k_0}{k_0-k}\end{cases}$，

即 Q（$\frac{4}{k_0-k}$，$\frac{2k+2k_0}{k_0-k}$），代入 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$，化简，得：

$b^2-(4+kk_0)b^2+4kk_0=0$，解得 $b^2=4$ 或 $b^2=kk_0$，

当 $b^2=4$ 时，满足 $n=\frac{b^2}{-2}$，

当 $b^2=kk_0$ 时，由 $2b^2=k^2+k_0^2$，得 $k=k_0$（舍去），综上，得 $n=\frac{b^2}{-2}$.

21．（12 分）已知函数 $f(x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}$；

（1）解方程 $f(x)=1$；

（2）设 $x\in(-1,1)$，$a\in(1,+\infty)$，证明：$\frac{ax-1}{a-x}\in(-1,1)$，且 $f(\frac{ax-1}{a-x})-f(x)=-f(\frac{1}{a})$；

（3）设数列$\{x_n\}$中，$x_1\in(-1,1)$，$x_{n+1}=(-1)^{n+1}\frac{3x_n-1}{3-x_n}$，$n\in N^*$，求 x_1 的取值范围，使得 $x_3\geqslant x_n$ 对任意 $n\in N^*$成立.

解：（1）∵$f(x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}=1$，∴$\frac{1+x}{1-x}=2$，解得 $x=\frac{1}{3}$；

（2）令 $g(x)=\frac{ax-1}{a-x}$，

$$g(x)=-a+\frac{1-a^2}{x-a}$$

∵$a\in(1,+\infty)$，∴$g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数，

又 $g(-1)=\frac{-a-1}{a+1}=-1$，$g(1)=\frac{a-1}{a-1}=1$，

∴$-1<g(x)<1$，即$\frac{ax-1}{a-x}\in(-1,1)$.

∵$f(x)-f(\frac{1}{a})=\log_2\frac{1+x}{1-x}-\log_2\frac{1+\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}=\log_2\frac{1+x}{1-x}-\log_2\frac{a+1}{a-1}$

$=\log_2(\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{a-1}{a+1})=\log_2\frac{ax+a-x-1}{a-x-ax+1}$，

$f(\frac{ax-1}{a-x})=\log_2\frac{1+\frac{ax-1}{a-x}}{1-\frac{ax-1}{a-x}}=\log_2\frac{a-x+ax-1}{a-x-ax+1}$.

∴$f(\frac{ax-1}{a-x})=f(x)-f(\frac{1}{a})$，∴$f(\frac{ax-1}{a-x})-f(x)=-f(\frac{1}{a})$.

（3）∵$f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，

$f(-x)=\log_2\frac{1-x}{1+x}=-\log_2\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$，∴f（x）是奇函数.

∵$x_{n+1}=(-1)^{n+1}\frac{3x_n-1}{3-x_n}$，∴$x_{n+1}=\begin{cases}\frac{3x_n-1}{3-x_n}，n为奇数\\-\frac{3x_n-1}{3-x_n}，n为偶数\end{cases}$.

①当 n 为奇数时，$f(x_{n+1})=f(\frac{3x_n-1}{3-x_n})=f(x_n)-f(\frac{1}{3})=f(x_n)-1$，

∴$f(x_{n+1})=f(x_n)-1$；

②当 n 为偶数时，$f(x_{n+1})=f(-\frac{3x_n-1}{3-x_n})=-f(\frac{3x_n-1}{3-x_n})=1-f(x_n)$，

∴$f(x_{n+1})=1-f(x_n)$.

∴$f(x_2)=f(x_1)-1$，$f(x_3)=1-f(x_2)=2-f(x_1)$，

$f(x_4)=f(x_3)-1=1-f(x_1)$，$f(x_5)=1-f(x_4)=f(x_1)$，

$f(x_6)=f(x_5)-1=f(x_1)-1$，…∴$f(x_n)=f(x_{n+4})$，$n\in N^+$.

设 $h(x)=\frac{1+x}{1-x}=-1-\frac{2}{x-1}$

∴h（x）在（﹣1，1）上是增函数，

∴$f(x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}=\log_2h(x)$在（﹣1，1）上是增函数.

∵$x_3\geqslant x_n$对任意$n\in N^*$成立，∴$f(x_3)\geqslant f(x_n)$恒成立，

∴$\begin{cases}f(x_3)\geqslant f(x_1)\\f(x_3)\geqslant f(x_2)\\f(x_3)\geqslant f(x_4)\end{cases}$，即$\begin{cases}2-f(x_1)\geqslant f(x_1)\\2-f(x_1)\geqslant f(x_1)-1\\2-f(x_1)\geqslant 1-f(x_1)\end{cases}$，

解得：$f(x_1)\leqslant 1$，即$\log_2\frac{1+x_1}{1-x_1}\leqslant 1$，∴$0<\frac{1+x_1}{1-x_1}\leqslant 2$，解得：$-1<x_1\leqslant\frac{1}{3}$.