2020 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（5 分）若 $z=1+i$，则$|z^2-2z|=$（　　）

A．0　　　　B．1　　　　C．$\sqrt{2}$　　　　D．2

2．（5 分）设集合 $A=\{x|x^2-4\leqslant 0\}$，$B=\{x|2x+a\leqslant 0\}$，且 $A\cap B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$，则 $a=$（　　）

A．-4　　　　B．-2　　　　C．2　　　　D．4

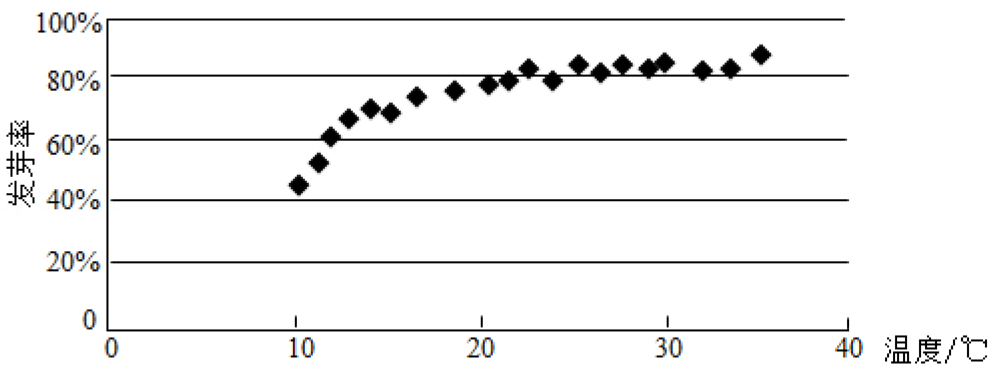
3．（5 分）埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥．以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　　　B．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　　　C．$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　　　　D．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

4．（5 分）已知 A 为抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）上一点，点 A 到 C 的焦点的距离为 12，到 y 轴的距离为 9，则 $p=$（　　）

A．2　　　　B．3　　　　C．6　　　　D．9

5．（5 分）某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x（单位：℃）的关系，在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验，由实验数据（x_i，y_i）（$i=1$，2，…，20）得到下面的散点图：



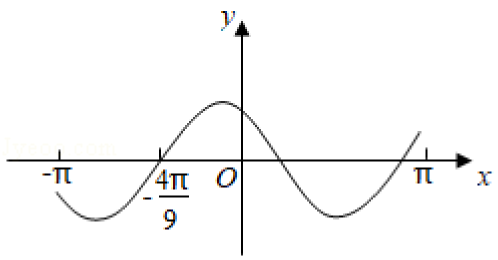
由此散点图，在10℃至40℃之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率y和温度x的回归方程类型的是（　　）

A．$y=a+bx$　　B．$y=a+bx^2$　　C．$y=a+be^x$　　D．$y=a+b\ln x$

6．（5分）函数$f(x)=x^4-2x^3$的图象在点$(1, f(1))$处的切线方程为（　　）

A．$y=-2x-1$　　B．$y=-2x+1$　　C．$y=2x-3$　　D．$y=2x+1$

7．（5分）设函数$f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})$在$[-\pi, \pi]$的图象大致如图，则$f(x)$的最小正周期为（　　）



A．$\frac{10\pi}{9}$　　B．$\frac{7\pi}{6}$　　C．$\frac{4\pi}{3}$　　D．$\frac{3\pi}{2}$

8．（5分）$(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5$的展开式中x^3y^3的系数为（　　）

A．5　　B．10　　C．15　　D．20

9．（5分）已知$\alpha\in(0, \pi)$，且$3\cos2\alpha-8\cos\alpha=5$，则$\sin\alpha=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{9}$

10．（5分）已知A，B，C为球O的球面上的三个点，$\odot O_1$为$\triangle ABC$的外接圆．若$\odot O_1$的面积为4π，$AB=BC=AC=OO_1$，则球O的表面积为（　　）

A．64π　　B．48π　　C．36π　　D．32π

11．（5分）已知$\odot M$：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线l：$2x+y+2=0$，P为l上的动点．过点P作$\odot M$的切线PA，PB，切点为A，B，当$|PM|\cdot|AB|$最小时，直线AB的方程为（　　）

A．$2x-y-1=0$　　B．$2x+y-1=0$　　C．$2x-y+1=0$　　D．$2x+y+1=0$

12．（5分）若$2^a+\log_2a=4^b+2\log_4b$，则（　　）

A．$a>2b$　　B．$a<2b$　　C．$a>b^2$　　D．$a<b^2$

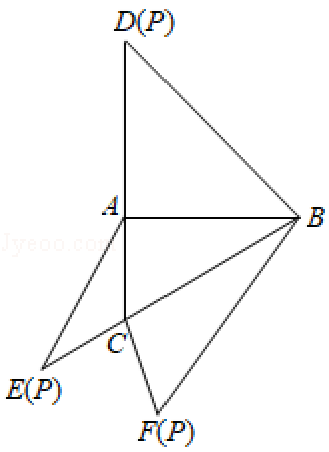
二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．（5 分）若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-2\leqslant 0,\\x-y-1\geqslant 0,\\y+1\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+7y$ 的最大值为_______．

14．（5 分）设 $\vec{a}$，$\vec{b}$为单位向量，且$|\vec{a}+\vec{b}|=1$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=$_______．

15．（5 分）已知 F 为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点，$A$ 为 C 的右顶点，B 为 C 上的点，且 BF 垂直于 x 轴．若 AB 的斜率为 3，则 C 的离心率为_______．

16．（5 分）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中，$AC=1$，$AB=AD=\sqrt{3}$，$AB\perp AC$，$AB\perp AD$，$\angle CAE=30°$，则 $\cos\angle FCB=$_______．



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）设$\{a_n\}$是公比不为 1 的等比数列，a_1 为 a_2，a_3 的等差中项．

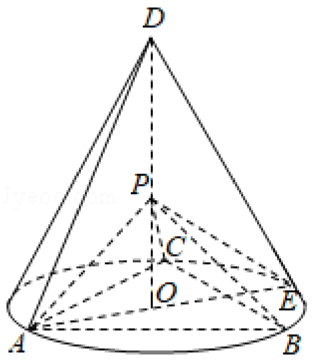
（1）求$\{a_n\}$的公比；

（2）若 $a_1=1$，求数列$\{na_n\}$的前 n 项和．

18．（12 分）如图，D 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面的圆心，AE 为底面直径，$AE=AD$．$\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形，P 为 DO 上一点，$PO=\frac{\sqrt{6}}{6}DO$．

（1）证明：$PA\perp$平面 PBC；

（2）求二面角 $B-PC-E$ 的余弦值．



19．（12 分）甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛，约定赛制如下：

累计负两场者被淘汰：比赛前抽签决定首先比赛的两人，另一人轮空；每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛，负者下一场轮空，直至有一人被淘汰；当一人被淘汰后，剩余的两人继续比赛，直至其中一人被淘汰，另一人最终获胜，比赛结束．

经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空．设每场比赛双方获胜的概率都为$\frac{1}{2}$．

（1）求甲连胜四场的概率；

（2）求需要进行第五场比赛的概率；

（3）求丙最终获胜的概率．

20．（12 分）已知 A，B 分别为椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a>1$）的左、右顶点，G 为 E 的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$．$P$ 为直线 $x=6$ 上的动点，PA 与 E 的另一交点为 C，PB 与 E 的另一交点为 D．

（1）求 E 的方程；

（2）证明：直线 CD 过定点．

21．（12 分）已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-x$．

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant \frac{1}{2}x^3+1$，求 a 的取值范围．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

22．（10 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos^k t,\\ y=\sin^k t\end{cases}$（$t$ 为参数）．以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$．

（1）当 $k=1$ 时，C_1 是什么曲线？

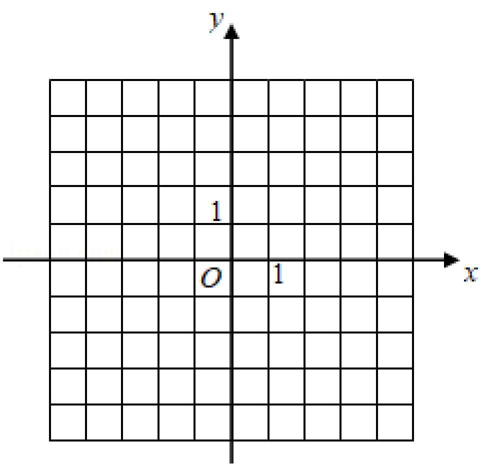
（2）当 $k=4$ 时，求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标．

[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

23．已知函数 $f(x)=|3x+1|-2|x-1|$．

（1）画出 $y=f(x)$ 的图象；

（2）求不等式 $f(x)>f(x+1)$ 的解集．



2020年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅰ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.（5分）若 $z=1+i$，则 $|z^2-2z|=$（　　）

A．0　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

【分析】由复数的乘方和加减运算，化简 z^2-2z，再由复数的模的定义，计算可得所求值．

【解答】解：若 $z=1+i$，则 $z^2-2z=(1+i)^2-2(1+i)=2i-2-2i=-2$，

则 $|z^2-2z|=|-2|=2$，

故选：D．

【点评】本题考查复数的运算，考查复数的模的求法，主要考查化简运算能力，是一道基础题．

2.（5分）设集合 $A=\{x|x^2-4\leqslant 0\}$，$B=\{x|2x+a\leqslant 0\}$，且 $A\cap B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$，则 $a=$（　　）

A．-4　　B．-2　　C．2　　D．4

【分析】由二次不等式和一次不等式的解法，化简集合 A，B，再由交集的定义，可得 a 的方程，解方程可得 a．

【解答】解：集合 $A=\{x|x^2-4\leqslant 0\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|2x+a\leqslant 0\}=\{x|x\leqslant -\frac{1}{2}a\}$，

由 $A\cap B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$，可得 $-\frac{1}{2}a=1$，

则 $a=-2$．

故选：B．

【点评】本题考查集合的交集运算，同时考查不等式的解法，考查方程思想和运算能力，是一道基础题．

3.（5分）埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥．以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【分析】先根据正四棱锥的几何性质列出等量关系，进而求解结论．

【解答】解：设正四棱锥的高为 h，底面边长为 a，侧面三角形底边上的高为 h'，

则依题意有：$\begin{cases} h^2=\frac{1}{2}ah' \\ h^2=h'^2-(\frac{a}{2})^2 \end{cases}$，

因此有 $h'^2-(\frac{a}{2})^2=\frac{1}{2}ah'\Rightarrow 4(\frac{h'}{a})^2-2(\frac{h'}{a})-1=0\Rightarrow\frac{h'}{a}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$（负值舍去）；

故选：C．

【点评】本题主要考查棱锥的几何性质，属于中档题．

4．（5 分）已知 A 为抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）上一点，点 A 到 C 的焦点的距离为 12，到 y 轴的距离为 9，则 $p=$（　　）

A．2　　B．3　　C．6　　D．9

【分析】直接利用抛物线的性质解题即可．

【解答】解：A 为抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）上一点，点 A 到 C 的焦点的距离为 12，到 y 轴的距离为 9，

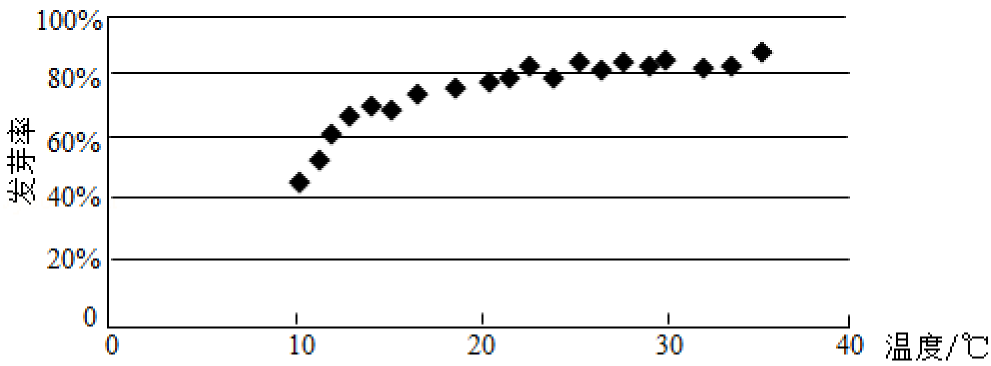
因为抛物线上的点到焦点的距离和到准线的距离相等，

故有：$9+\frac{p}{2}=12\Rightarrow p=6$；

故选：C．

【点评】本题主要考查抛物线性质的应用，属于基础题．

5．（5 分）某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x（单位：℃）的关系，在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验，由实验数据（x_i，y_i）（$i=1$，2，…，20）得到下面的散点图：



由此散点图，在10℃至40℃之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是（　　）

A．$y=a+bx$　　　B．$y=a+bx^2$　　　C．$y=a+be^x$　　　D．$y=a+b\ln x$

【分析】直接由散点图结合给出的选项得答案．

【解答】解：由散点图可知，在10℃至40℃之间，发芽率 y 和温度 x 所对应的点（x，y）在一段对数函数的曲线附近，

结合选项可知，$y=a+b\ln x$ 可作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型．

故选：D．

【点评】本题考查回归方程，考查学生的读图视图能力，是基础题．

6．（5分）函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图象在点（1，f（1））处的切线方程为（　　）

A．$y=-2x-1$　　　B．$y=-2x+1$　　　C．$y=2x-3$　　　D．$y=2x+1$

【分析】求出原函数的导函数，得到函数在 $x=1$ 处的导数，再求得 f（1），然后利用直线方程的点斜式求解．

【解答】解：由 $f(x)=x^4-2x^3$，得 $f'(x)=4x^3-6x^2$，

$\therefore f'(1)=4-6=-2$，

又 $f(1)=1-2=-1$，

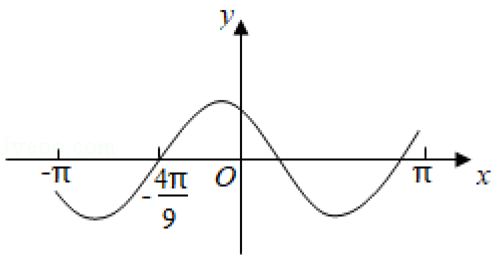
∴函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图象在点（1，f（1））处的切线方程为 $y-(-1)=-2(x-1)$，

即 $y=-2x+1$．

故选：B．

【点评】本题考查利用导数研究过曲线上某点处的切线方程，是基础的计算题．

7．（5分）设函数 $f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 在$[-\pi，\pi]$的图象大致如图，则 $f(x)$ 的最小正周期为（　　）



A．$\frac{10\pi}{9}$　　　　B．$\frac{7\pi}{6}$　　　　C．$\frac{4\pi}{3}$　　　　D．$\frac{3\pi}{2}$

【分析】由图象观察可得最小正周期小于$\frac{13\pi}{9}$，大于$\frac{10\pi}{9}$，排除 A，D；再由 f（$-\frac{4\pi}{9}$）$=0$，求得 ω，对照选项 B，C，代入计算，即可得到结论．

【解答】解：由图象可得最小正周期小于 $\pi-(-\frac{4\pi}{9})=\frac{13\pi}{9}$，大于 $2\times(\pi-\frac{4\pi}{9})=\frac{10\pi}{9}$，排除 A，D；

由图象可得 $f(-\frac{4\pi}{9})=\cos(-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6})=0$，

即为 $-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，（*）

若选 B，即有 $\omega=\frac{2\pi}{\frac{7\pi}{6}}=\frac{12}{7}$，由 $-\frac{4\pi}{9}\times\frac{12}{7}+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，可得 k 不为整数，排除 B；

若选 C，即有 $\omega=\frac{2\pi}{\frac{4\pi}{3}}=\frac{3}{2}$，由 $-\frac{4\pi}{9}\times\frac{3}{2}+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，可得 $k=-1$，成立．

故选：C．

【点评】本题考查三角函数的图象和性质，主要是函数的周期的求法，运用排除法是迅速解题的关键，属于中档题．

8．（5 分）$(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为（　　）

A．5　　　　B．10　　　　C．15　　　　D．20

【分析】先把条件整理转化为求 $(x^2+y^2)(x+y)^5$ 展开式中 x^4y^3 的系数，再结合二项式的展开式的特点即可求解．

【解答】解：因为 $(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5=\frac{(x^2+y^2)(x+y)^5}{x}$；

要求展开式中 x^3y^3 的系数即为求 $(x^2+y^2)(x+y)^5$ 展开式中 x^4y^3 的系数；

展开式含 x^4y^3 的项为：$x^2\cdot C_5^2x^2\cdot y^3+y^2\cdot C_5^4x^4\cdot y=15x^4y^3$；

故 $(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为 15；

故选：C.

【点评】本题主要考查二项式定理的应用，二项式展开式的通项公式，二项式系数的性质，属基础题.

9.（5 分）已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $3\cos2\alpha-8\cos\alpha=5$，则 $\sin\alpha=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

【分析】利用二倍角的余弦把已知等式变形，化为关于 $\cos\alpha$ 的一元二次方程，求解后再由同角三角函数基本关系式求得 $\sin\alpha$ 的值.

【解答】解：由 $3\cos2\alpha-8\cos\alpha=5$，得 $3(2\cos^2\alpha-1)-8\cos\alpha-5=0$，

即 $3\cos^2\alpha-4\cos\alpha-4=0$，解得 $\cos\alpha=2$（舍去），或 $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$.

$\because\alpha\in(0,\pi)$，$\therefore\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，

则 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(-\frac{2}{3})^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

故选：A.

【点评】本题考查三角函数的化简求值，考查同角三角函数基本关系式与二倍角公式的应用，是基础题.

10.（5 分）已知 A，B，C 为球 O 的球面上的三个点，$\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆．若 $\odot O_1$ 的面积为 4π，$AB=BC=AC=OO_1$，则球 O 的表面积为（　　）

A. 64π　　B. 48π　　C. 36π　　D. 32π

【分析】画出图形，利用已知条件求出 OO_1，然后求解球的半径，即可求解球的表面积.

【解答】解：由题意可知图形如图：$\odot O_1$ 的面积为 4π，可得 $O_1A=2$，则

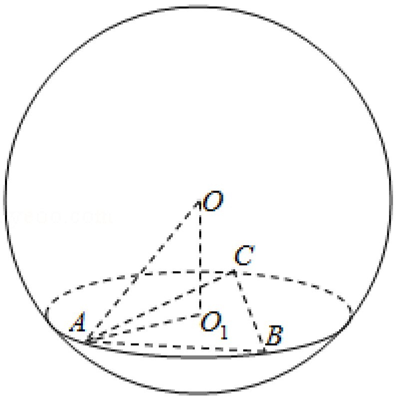
$\frac{3}{2}AO_1=AB\sin60^\circ$，$\frac{3}{2}AO_1=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，

$\therefore AB=BC=AC=OO_1=2\sqrt{3}$，

外接球的半径为：$R=\sqrt{AO_1^2+OO_1^2}=4$，

球 O 的表面积：$4\times\pi\times4^2=64\pi$.

故选：A.



【点评】本题考查球的内接体问题，球的表面积的求法，求解球的半径是解题的关键．

11．（5 分）已知⊙M：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线 l：$2x+y+2=0$，P 为 l 上的动点．过点 P 作⊙M 的切线 PA，PB，切点为 A，B，当$|PM|\cdot|AB|$最小时，直线 AB 的方程为（　　）

A．$2x-y-1=0$　　B．$2x+y-1=0$　　C．$2x-y+1=0$　　D．$2x+y+1=0$

【分析】由已知结合四边形面积公式及三角形面积公式可得$|PM|\cdot|AB|=2\sqrt{|PM|^2-4}$，说明要使$|PM|\cdot|AB|$最小，则需$|PM|$最小，此时 PM 与直线 l 垂直．写出 PM 所在直线方程，与直线 l 的方程联立，求得 P 点坐标，然后写出以 PM 为直径的圆的方程，再与圆 M 的方程联立可得 AB 所在直线方程．

【解答】解：化圆 M 为 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$，

圆心 $M(1，1)$，半径 $r=2$．

∵ $S_{四边形PAMB}=\frac{1}{2}|PM|\cdot|AB|=2S_{\triangle PAM}=|PA|\cdot|AM|=2|PA|=2\sqrt{|PM|^2-4}$．

∴要使$|PM|\cdot|AB|$最小，则需$|PM|$最小，此时 PM 与直线 l 垂直．

直线 PM 的方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x-1)$，即 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，

联立$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\\2x+y+2=0\end{cases}$，解得 $P(-1，0)$．

则以 PM 为直径的圆的方程为 $x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$．

联立$\begin{cases}x^2+y^2-2x-2y-2=0\\x^2+y^2-y-1=0\end{cases}$，可得直线 AB 的方程为 $2x+y+1=0$．

故选：D．

【点评】本题考查直线与圆位置关系的应用，考查圆的切线方程，考查过圆两切点的直线方程的求法，是中档题．

12．（5 分）若 $2^a+\log_2a=4^b+2\log_4b$，则（　　）

A．$a>2b$　　B．$a<2b$　　C．$a>b^2$　　D．$a<b^2$

【分析】先根据指数函数以及对数函数的性质得到 $2^a+\log_2a<2^{2b}+\log_22b$；再借助于函数的单调性即可求解结论．

【解答】解：因为 $2^a+\log_2a=4^b+2\log_4b=2^{2b}+\log_2b$；

因为 $2^{2b}+\log_2b<2^{2b}+\log_22b=2^{2b}+\log_2b+1$ 即 $2^a+\log_2a<2^{2b}+\log_22b$；

令 $f(x)=2^x+\log_2x$，由指对数函数的单调性可得 $f(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 内单调递增；

且 $f(a)<f(2b)\Rightarrow a<2b$；

故选：B．

【点评】本题主要考查指数函数以及对数函数性质的应用，属于基础题．

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．（5 分）若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-2\leqslant 0,\\x-y-1\geqslant 0,\\y+1\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+7y$ 的最大值为__1__．

【分析】先根据约束条件画出可行域，再利用几何意义求最值，只需求出可行域直线在 y 轴上的截距最大值即可．

【解答】解：x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-2\leqslant 0,\\x-y-1\geqslant 0,\\y+1\geqslant 0,\end{cases}$，

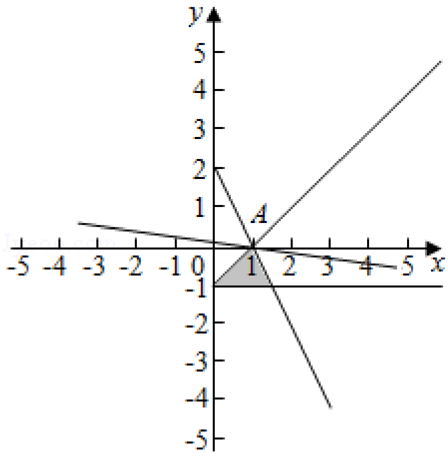
不等式组表示的平面区域如图所示，

由 $\begin{cases}2x+y-2=0\\x-y-1=0\end{cases}$，可得 $A(1，0)$ 时，目标函数 $z=x+7y$，可得 $y=-\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}z$，

当直线 $y=-\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}z$ 过点 A 时，在 y 轴上截距最大，

此时 z 取得最大值：$1+7\times 0=1$．

故答案为：1．



【点评】本题主要考查了简单的线性规划，以及利用几何意义求最值，属于基础题．

14．（5 分）设$\vec{a}$，$\vec{b}$为单位向量，且$|\vec{a}+\vec{b}|$=1，则$|\vec{a}-\vec{b}|$=__$\sqrt{3}$__．

【分析】直接利用向量的模的平方，结合已知条件转化求解即可．

【解答】解：$\vec{a}$，$\vec{b}$为单位向量，且$|\vec{a}+\vec{b}|$=1，

$|\vec{a}+\vec{b}|^2$=1，

可得$\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1$，

$1+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=1$，

所以$2\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，

则$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{3}$．

故答案为：$\sqrt{3}$．

【点评】本题考查向量的模的求法，数量积的应用，考查计算能力．

15．（5 分）已知 F 为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点，$A$ 为 C 的右顶点，B 为 C 上的点，且 BF 垂直于 x 轴．若 AB 的斜率为 3，则 C 的离心率为__2__．

【分析】利用已知条件求出 A，B 的坐标，通过 AB 的斜率为 3，转化求解双曲线的离心率即可．

【解答】解：F 为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点（$c$，0），$A$ 为 C 的右顶点（a，0），

B 为 C 上的点，且 BF 垂直于 x 轴．所以 B（c，$\frac{b^2}{a}$），

若 AB 的斜率为 3，可得：$\frac{\frac{b^2}{a}-0}{c-a}=3$，

$b^2=c^2-a^2$，代入上式化简可得 $c^2=3ac-2a^2$，$e=\frac{c}{a}$，

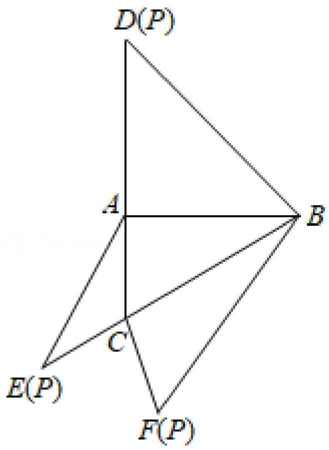
可得 $e^2-3e+2=0$，$e>1$，

解得 $e=2$．

故答案为：2．

【点评】本题考查双曲线的简单性质的应用，离心率的求法，考查转化思想以及计算能力．

16．（5 分）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中，$AC=1$，$AB=AD=\sqrt{3}$，$AB\perp AC$，$AB\perp AD$，$\angle CAE=30°$，则 $\cos\angle FCB=$___$-\frac{1}{4}$__．



【分析】根据条件可知 D、E、F 三点重合，分别求得 BC、CF、BF 即可．

【解答】解：由已知得 $BD=\sqrt{2}AB=\sqrt{6}$，$BC=2$，

因为 D、E、F 三点重合，所以 $AE=AD=\sqrt{3}$，$BF=BD=\sqrt{2}AB=\sqrt{6}$，

则在△ACE 中，由余弦定理可得 $CE^2=AC^2+AE^2-2AC\cdot AE\cdot\cos\angle CAE=1+3-2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=1$，

所以 $CE=CF=1$，

则在△BCD 中，由余弦定理得 $\cos\angle FCB=\frac{BC^2+CF^2-BF^2}{2BC\cdot CF}=\frac{1+4-6}{2\times1\times2}=-\frac{1}{4}$，

故答案为：$-\frac{1}{4}$．

【点评】本题考查三棱锥展开图，涉及余弦定理的应用，数形结合思想，属于中档题．

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）设$\{a_n\}$是公比不为 1 的等比数列，a_1为a_2，a_3的等差中项.

（1）求$\{a_n\}$的公比；

（2）若$a_1=1$，求数列$\{na_n\}$的前 n 项和.

【分析】（1）设$\{a_n\}$是公比 q 不为 1 的等比数列，运用等差数列的中项性质和等比数列的通项公式，解方程可得公比 q；

（2）求得 a_n，na_n，运用数列的数列的错位相减法求和，结合等比数列的求和公式，化简整理，可得所求和.

【解答】解：（1）设$\{a_n\}$是公比 q 不为 1 的等比数列，

a_1为a_2，a_3的等差中项，可得$2a_1=a_2+a_3$，

即$2a_1=a_1q+a_1q^2$，

即为$q^2+q-2=0$，

解得$q=-2$（1 舍去），

所以$\{a_n\}$的公比为-2；

（2）若$a_1=1$，则$a_n=(-2)^{n-1}$，

$na_n=n\cdot(-2)^{n-1}$，

则数列$\{na_n\}$的前 n 项和为$S_n=1\cdot1+2\cdot(-2)+3\cdot(-2)^2+\cdots+n\cdot(-2)^{n-1}$，

$-2S_n=1\cdot(-2)+2\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)^3+\cdots+n\cdot(-2)^n$，

两式相减可得$3S_n=1+(-2)+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^{n-1}-n\cdot(-2)^n$

$=\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}-n\cdot(-2)^n$，

化简可得$S_n=\frac{1-(1+3n)\cdot(-2)^n}{9}$，

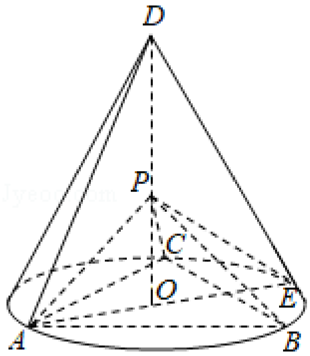
所以数列$\{na_n\}$的前 n 项和为$\frac{1-(1+3n)\cdot(-2)^n}{9}$.

【点评】本题考查等比数列的通项公式和求和公式的运用，以及等差数列的中项性质，考查数列的错位相减法求和，主要考查方程思想和化简运算能力，属于中档题.

18.（12 分）如图，D 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面的圆心，AE 为底面直径，$AE=AD$. $\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形，P 为 DO 上一点，$PO=\frac{\sqrt{6}}{6}DO$.

（1）证明：$PA\perp$平面 PBC；

（2）求二面角 $B-PC-E$ 的余弦值．



【分析】（1）设圆 O 的半径为 1，求出各线段的长度，利用勾股定理即可得到 $PA\perp PC$，$PA\perp PB$，进而得证；

（2）建立空间直角坐标系，求出平面 PBC 及平面 PCE 的法向量，利用向量的夹角公式即可得解．

【解答】解：(1)不妨设圆 O 的半径为 1，$OA=OB=OC=1$，$AE=AD=2$，$AB=BC=AC=\sqrt{3}$，

$DO=\sqrt{DA^2-OA^2}=\sqrt{3}$，$PO=\frac{\sqrt{6}}{6}DO=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$PA=PB=PC=\sqrt{PO^2+AO^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

在△PAC 中，$PA^2+PC^2=AC^2$，故 $PA\perp PC$，

同理可得 $PA\perp PB$，又 $PB\cap PC=P$，

故 $PA\perp$平面 PBC；

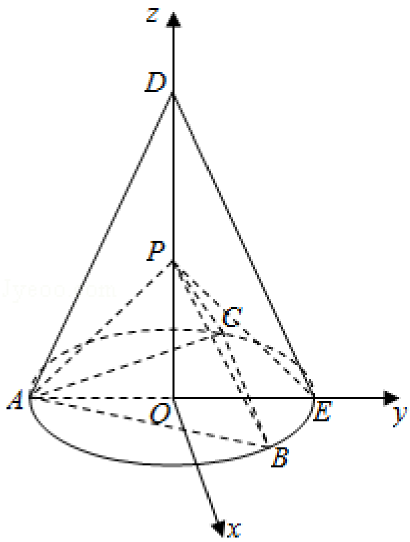
（2）建立如图所示的空间直角坐标系，则有 $B(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，$C(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，$P(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$E(0,1,0)$，

故 $\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{CE}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，$\overrightarrow{CP}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，

设平面 PBC 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BC}=-\sqrt{3}x=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{CP}=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0\end{cases}$，可取 $\overrightarrow{m}=(0,\sqrt{2},1)$，

同理可求得平面 PCE 的法向量为 $\overrightarrow{n}=(\sqrt{2},-\sqrt{6},-2\sqrt{3})$，

故 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即二面角 $B-PC-E$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$．



【点评】本题考查线面垂直的判定以及利用空间向量求解二面角，考查推理能力及计算能力，属于基础题.

19.（12分）甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛，约定赛制如下：

累计负两场者被淘汰：比赛前抽签决定首先比赛的两人，另一人轮空；每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛，负者下一场轮空，直至有一人被淘汰；当一人被淘汰后，剩余的两人继续比赛，直至其中一人被淘汰，另一人最终获胜，比赛结束.

经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空．设每场比赛双方获胜的概率都为$\frac{1}{2}$.

（1）求甲连胜四场的概率；

（2）求需要进行第五场比赛的概率；

（3）求丙最终获胜的概率.

【分析】（1）甲连胜四场只能是前四场全胜，由此能求出甲连胜四场的概率.

（2）根据赛制，至少需要进行四场比赛，至多需要进行五场比赛，比赛四场结束，共有三种情况，甲连胜四场比赛，乙连日胜四场比赛，丙上场后连胜三场，由此能求出需要进行五场比赛的概率.

（3）丙最终获胜，有两种情况，比赛四场结束且丙最终获胜，比赛五场结束丙最终获胜，则从第二场开始的四场比赛按丙的胜、负、轮空结果有三种情况：胜胜负胜，胜负空胜，负空胜胜，由此能求出丙最终获胜的概率.

【解答】（1）甲连胜四场只能是前四场全胜，$P=(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$.

（2）根据赛制，至少需要进行四场比赛，至多需要进行五场比赛，

比赛四场结束，共有三种情况，

甲连胜四场的概率为$\frac{1}{16}$，乙连胜四场比赛的概率为$\frac{1}{16}$，

丙上场后连胜三场的概率为$\frac{1}{8}$，

∴需要进行五场比赛的概率为：

$P=1-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$.

（3）丙最终获胜，有两种情况，

比赛四场结束且丙最终获胜的概率为$\frac{1}{8}$，

比赛五场结束丙最终获胜，

则从第二场开始的四场比赛按丙的胜、负、轮空结果有三种情况：

胜胜负胜，胜负空胜，负空胜胜，概率分别为$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{8}$，

∴丙最终获胜的概率 $P=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{16}$.

【点评】本题考查概率的求法，考查相互独立事件概率计算公式和互斥事件概率加法公式等基础知识，考查运算求解能力，是中档题.

20.（12 分）已知 A，B 分别为椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a>1$）的左、右顶点，G 为 E 的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$. P 为直线 $x=6$ 上的动点，PA 与 E 的另一交点为 C，PB 与 E 的另一交点为 D.

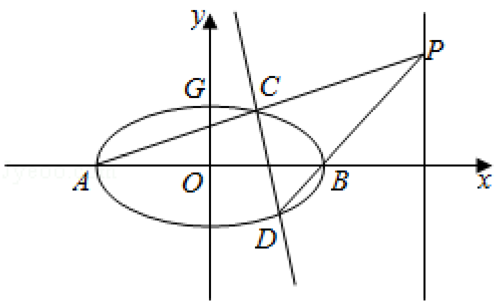
（1）求 E 的方程；

（2）证明：直线 CD 过定点.

【分析】（1）求出$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=a^2-1=8$，解出 a，求出 E 的方程即可；

（2）联立直线和椭圆的方程求出 C，D 的坐标，求出直线 CD 的方程，判断即可.

【解答】解：如图示：



（1）由题意 A（$-a$，0），B（a，0），G（0，1），

$\therefore \overrightarrow{AG}=(a,1)$，$\overrightarrow{GB}=(a,-1)$，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=a^2-1=8$，解得：$a=3$，

故椭圆 E 的方程是$\frac{x^2}{9}+y^2=1$；

（2）由（1）知 $A(-3,0)$，$B(3,0)$，设 $P(6,m)$，

则直线 PA 的方程是 $y=\frac{m}{9}(x+3)$，

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+y^2=1\\ y=\frac{m}{9}(x+3)\end{cases}\Rightarrow(9+m^2)x^2+6m^2x+9m^2-81=0$，

由韦达定理 $-3x_C=\frac{9m^2-81}{9+m^2}\Rightarrow x_C=\frac{-3m^2+27}{9+m^2}$，

代入直线 PA 的方程为 $y=\frac{m}{9}(x+3)$ 得：

$y_C=\frac{6m}{9+m^2}$，即 $C\left(\frac{-3m^2+27}{9+m^2},\ \frac{6m}{9+m^2}\right)$，

直线 PB 的方程是 $y=\frac{m}{3}(x-3)$，

联立方程$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+y^2=1\\ y=\frac{m}{3}(x-3)\end{cases}\Rightarrow(1+m^2)x^2-6m^2x+9m^2-9=0$，

由韦达定理 $3x_D=\frac{9m^2-9}{1+m^2}\Rightarrow x_D=\frac{3m^2-3}{1+m^2}$，

代入直线 PB 的方程为 $y=\frac{m}{3}(x-3)$ 得 $y_D=\frac{-2m}{1+m^2}$，

即 $D\left(\frac{3m^2-3}{1+m^2},\ \frac{-2m}{1+m^2}\right)$，

$\therefore$直线 CD 的斜率 $K_{CD}=\frac{y_C-y_D}{x_C-x_D}=\frac{4m}{3(3-m^2)}$，

$\therefore$直线 CD 的方程是 $y-\frac{-2m}{1+m^2}=\frac{4m}{3(3-m^2)}\left(x-\frac{3m^2-3}{1+m^2}\right)$，整理得：

$y=\frac{4m}{3(3-m^2)}\left(x-\frac{3}{2}\right)$，

故直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$．

【点评】本题考查了求椭圆的方程问题，考查直线和椭圆的关系以及直线方程问题，是

一道综合题.

21.（12 分）已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-x$.

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant \frac{1}{2}x^3+1$，求 a 的取值范围.

【分析】（1）求得 $a=1$ 时，$f(x)$ 的解析式，两次对 x 求得导数，结合指数函数的值域判断导数的符号，即可得到所求单调性；

（2）讨论 $x=0$，不等式恒成立；$x>0$ 时，运用参数分离和构造函数，求得导数，判断单调性和最值，进而得到所求范围.

【解答】解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x+x^2-x$，

$f'(x)=e^x+2x-1$，设 $g(x)=f'(x)$，

因为 $g'(x)=e^x+2>0$，可得 $g(x)$ 在 **R** 上递增，即 $f'(x)$ 在 **R** 上递增，

因为 $f'(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的增区间为 $(0,+\infty)$，减区间为 $(-\infty,0)$；

（2）当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant \frac{1}{2}x^3+1$ 恒成立，

①当 $x=0$ 时，不等式恒成立，可得 $a\in\mathbf{R}$；

②当 $x>0$ 时，可得 $a\geqslant \dfrac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}$恒成立，

设 $h(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}$，则 $h'(x)=\dfrac{(2-x)(e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1)}{x^3}$，

可设 $m(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$，可得 $m'(x)=e^x-x-1$，$m''(x)=e^x-1$，

由 $x\geqslant 0$，可得 $m''(x)\geqslant 0$ 恒成立，可得 $m'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，

所以 $m'(x)_{min}=m'(0)=0$，

即 $m'(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，所以 $m(x)_{min}=m(0)=0$，

再令 $h'(x)=0$，可得 $x=2$，当 $0<x<2$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,2)$ 递增；

$x>2$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 递减，所以 $h(x)_{max}=h(2)=\dfrac{7-e^2}{4}$，

所以 $a\geqslant \dfrac{7-e^2}{4}$，

综上可得 a 的取值范围是$[\dfrac{7-e^2}{4},+\infty)$.

【点评】本题考查导数的运用：求单调性和最值，考查构造函数法，主要考查分类讨论

思想和化简运算能力、推理能力，属于难题．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

22．（10 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos^k t,\\ y=\sin^k t\end{cases}$（$t$ 为参数）．以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$．

（1）当 $k=1$ 时，C_1 是什么曲线？

（2）当 $k=4$ 时，求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标．

【分析】（1）当 $k=1$ 时，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$，（$t$ 为参数），利用平方关系消去参数 t，可得 $x^2+y^2=1$，故 C_1 是以原点为圆心，以 1 为半径的圆；

（2）当 $k=4$ 时，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos^4 t\\ y=\sin^4 t\end{cases}$，（$t$ 为参数），消去参数 t，可得 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，由 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$，结合极坐标与直角坐标的互化公式可得 $4x-16y+3=0$．联立方程组即可求得 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标为（$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$）．

【解答】解：（1）当 $k=1$ 时，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$，（$t$ 为参数），

消去参数 t，可得 $x^2+y^2=1$，

故 C_1 是以原点为圆心，以 1 为半径的圆；

（2）法一：当 $k=4$ 时，C_1：$\begin{cases}x=\cos^4 t\\ y=\sin^4 t\end{cases}$，消去 t 得到 C_1 的直角坐标方程为 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，

C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$ 可得 C_2 的直角坐标方程为 $4x-16y+3=0$，

$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\\ 4x-16y+3=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\ y=\frac{1}{4}\end{cases}$．

$\therefore C_1$ 与 C_2 的公共点的直角坐标为（$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$）．

法二：当 $k=4$ 时，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos^4 t\\ y=\sin^4 t\end{cases}$，（$t$ 为参数），

两式作差可得 $x-y=\cos^4 t-\sin^4 t=\cos^2 t-\sin^2 t=2\cos^2 t-1$，

$\therefore \cos^2 t=\frac{x-y+1}{2}$，得 $x=\cos^4 t=(\frac{x-y+1}{2})^2$，

整理得：$(x-y)^2-2(x+y)+1=0$（$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$）.

由 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$，又 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

$\therefore 4x-16y+3=0$.

联立 $\begin{cases}(x-y)^2-2(x+y)+1=0\\4x-16y+3=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\frac{169}{36}\\y=\frac{49}{36}\end{cases}$（舍），或 $\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=\frac{1}{4}\end{cases}$.

$\therefore C_1$ 与 C_2 的公共点的直角坐标为（$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$）.

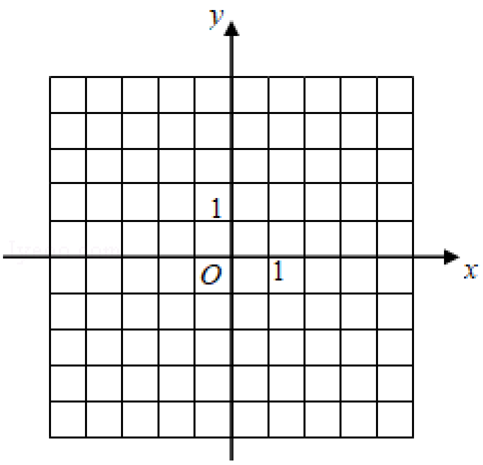
【点评】本题考查简单曲线的极坐标方程，考查参数方程化普通方程，考查计算能力，是中档题.

[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

23．已知函数 $f(x)=|3x+1|-2|x-1|$.

（1）画出 $y=f(x)$ 的图象；

（2）求不等式 $f(x)>f(x+1)$ 的解集.

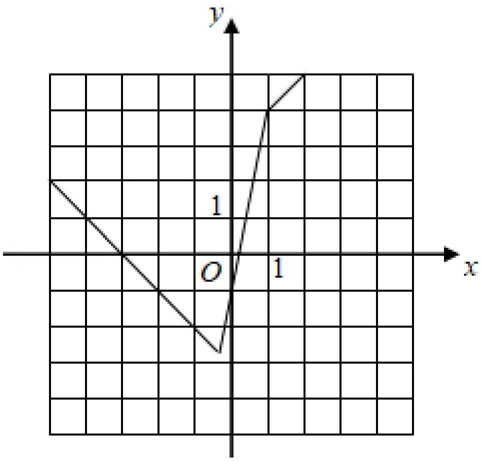


【分析】（1）将函数零点分段，即可作出图象；

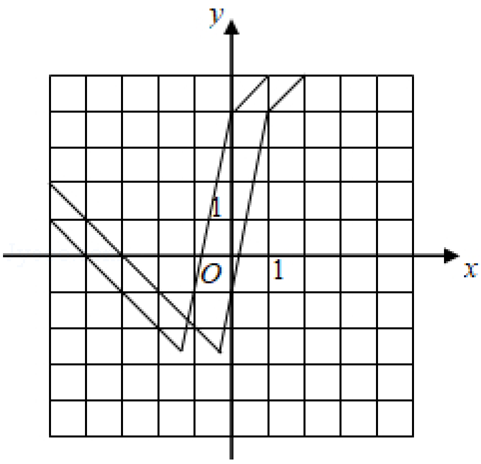
（2）由于 $f(x+1)$ 是函数 $f(x)$ 向左平移了一个 1 单位，作出图象可得答案；

【解答】解：函数 $f(x)=|3x+1|-2|x-1|=\begin{cases}x+3,\ (x\geqslant 1)\\5x-1,\ (-\frac{1}{3}\leqslant x<1)\\-x-3,\ (x<-\frac{1}{3})\end{cases}$，

图象如图所示



（2）由于 f（x+1）的图象是函数 f（x）的图象向左平移了一个 1 单位所得，（如图所示）



直线 $y=5x-1$ 向左平移一个单位后表示为 $y=5(x+1)-1=5x+4$，

联立 $\begin{cases} y=-x-3 \\ y=5x+4 \end{cases}$，解得横坐标为 $x=-\frac{7}{6}$，

∴不等式 $f(x)>f(x+1)$ 的解集为 $\{x|x<-\frac{7}{6}\}$．

【点评】本题考查了绝对值函数的解法，分段作出图象是解题的关键．属于基础题．