绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

本试卷共5页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。

2．选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。

3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。

4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。

5．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x\mid x>-1\}$，$B=\{x\mid x<2\}$，则 $A\cap B=$

A．$(-1,+\infty)$　　B．$(-\infty,2)$

C．$(-1,2)$　　D．$\varnothing$

2．设 $z=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})$，则 $\overline{z}=$

A．$1+2\mathrm{i}$　　B．$-1+2\mathrm{i}$

C．$1-2\mathrm{i}$　　D．$-1-2\mathrm{i}$

3．已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,2)$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$

A．$\sqrt{2}$　　B．2

C．$5\sqrt{2}$　　D．50

4．生物实验室有 5 只兔子，其中只有 3 只测量过某项指标，若从这 5 只兔子中随机取出 3 只，则恰有 2 只测量过该指标的概率为

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{3}{5}$

C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{1}{5}$

5．在“一带一路”知识测验后，甲、乙、丙三人对成绩进行预测．

甲：我的成绩比乙高．

乙：丙的成绩比我和甲的都高．

丙：我的成绩比乙高．

成绩公布后，三人成绩互不相同且只有一个人预测正确，那么三人按成绩由高到低的次序为

A．甲、乙、丙　　B．乙、甲、丙

C．丙、乙、甲　　D．甲、丙、乙

6．设 $f(x)$为奇函数，且当 $x\geq0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{x}-1$，则当 $x<0$ 时，$f(x)=$

A．$\mathrm{e}^{-x}-1$　　B．$\mathrm{e}^{-x}+1$

C．$-\mathrm{e}^{-x}-1$　　D．$-\mathrm{e}^{-x}+1$

7．设 α，β 为两个平面，则 $\alpha /\!/ \beta$ 的充要条件是

A．α 内有无数条直线与 β 平行

B．α 内有两条相交直线与 β 平行

C．α，β 平行于同一条直线

D．α，β 垂直于同一平面

8．若 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$，$x_2=\dfrac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin\omega x\,(\omega>0)$两个相邻的极值点，则 $\omega=$

A．2　　B．$\dfrac{3}{2}$

C．1　　D．$\dfrac{1}{2}$

9．若抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点是椭圆 $\dfrac{x^2}{3p}+\dfrac{y^2}{p}=1$ 的一个焦点，则 $p=$

A．2　　B．3

C．4　　D．8

10．曲线 $y=2\sin x+\cos x$ 在点$(\pi，-1)$处的切线方程为

A．$x-y-\pi-1=0$　　B．$2x-y-2\pi-1=0$

C．$2x+y-2\pi+1=0$　　D．$x+y-\pi+1=0$

11．已知 $a\in$（0，$\dfrac{\pi}{2}$），$2\sin2\alpha=\cos2\alpha+1$，则 $\sin\alpha=$

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

12．设 F 为双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点，$O$ 为坐标原点，以 OF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P、Q 两点．若$|PQ|=|OF|$，则 C 的离心率为

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$

C．2　　D．$\sqrt{5}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．若变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x+3y-6\ge 0, \\ x+y-3\le 0, \\ y-2\le 0, \end{cases}$ 则 $z=3x-y$ 的最大值是__________.

14．我国高铁发展迅速，技术先进．经统计，在经停某站的高铁列车中，有 10 个车次的正点率为 0.97，有 20 个车次的正点率为 0.98，有 10 个车次的正点率为 0.99，则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为__________.

15．$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.已知 $b\sin A+a\cos B=0$，则 $B=$__________.

16．中国有悠久的金石文化，印信是金石文化的代表之一．印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体，但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是半正多面体"（图 1）.半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体.半正多面体体现了数学的对称美．图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，且此正方体的棱长为 1．则该半正多面体共有________个面，其棱长为_________．（本题第一空 2 分，第二空 3 分．）

图 1

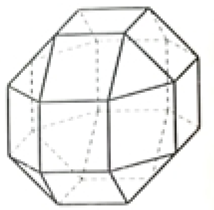


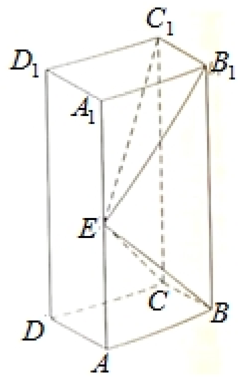
图 2

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）

如图，长方体 $ABCD–A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，点 E 在棱 AA_1 上，$BE\perp EC_1$.



（1）证明：$BE\perp$平面 EB_1C_1；

（2）若 $AE=A_1E$，$AB=3$，求四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积.

18．（12 分）

已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，$a_1=2,a_3=2a_2+16$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\log_2 a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

19．（12 分）

某行业主管部门为了解本行业中小企业的生产情况，随机调查了 100 个企业，得到这些企业第一季度相对于前一年第一季度产值增长率 y 的频数分布表.

y 的分组	$[-0.20,0)$	$[0,0.20)$	$[0.20,0.40)$	$[0.40,0.60)$	$[0.60,0.80)$
企业数	2	24	53	14	7

（1）分别估计这类企业中产值增长率不低于 40%的企业比例、产值负增长的企业比例；

（2）求这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）.（精确到 0.01）

附：$\sqrt{74}\approx 8.602$.

20．（12 分）

已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，P 为 C 上一点，O 为坐标原点.

（1）若 $\triangle POF_2$ 为等边三角形，求 C 的离心率；

(2)如果存在点 P，使得 $PF_1\perp PF_2$，且 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 16，求 b 的值和 a 的取值范围.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$.证明：

（1）$f(x)$ 存在唯一的极值点；

（2）$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分．

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在极坐标系中，O 为极点，点 $M(\rho_0,\theta_0)(\rho_0>0)$ 在曲线 $C:\rho=4\sin\theta$ 上，直线 l 过点 $A(4,0)$ 且与 OM 垂直，垂足为 P.

（1）当 $\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$ 时，求 ρ_0 及 l 的极坐标方程；

（2）当 M 在 C 上运动且 P 在线段 OM 上时，求 P 点轨迹的极坐标方程.

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知 $f(x)=|x-a|x+|x-2|(x-a)$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)<0$ 的解集；

（2）若 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f(x)<0$，求 a 的取值范围.

1. C　　2. D　　3. A　　4. B　　5. A　　6. D

7. B　　8. A　　9. D　　10. C　　11. B　　12. A

13. 9　　14. 0.98　　15. $\dfrac{3\pi}{4}$　　16. $\sqrt{2}-1$

17．解：（1）由已知得 $B_1C_1\perp$平面 ABB_1A_1，$BE\subset$平面 ABB_1A_1，

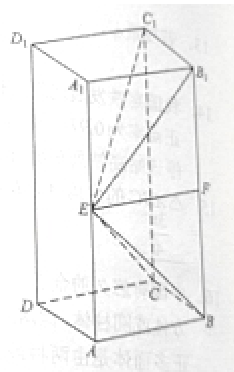
故 $B_1C_1\perp BE$.

又 $BE\perp EC_1$，所以 $BE\perp$平面 EB_1C_1.

（2）由（1）知 $\angle BEB_1$=90°. 由题设知 $\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong \mathrm{Rt}\triangle A_1B_1E$，所以 $\angle AEB=\angle A_1EB_1=45^\circ$，故 $AE=AB=3$，$AA_1=2AE=6$.

作 $EF\perp BB_1$，垂足为 F，则 $EF\perp$平面 BB_1C_1C，且 $EF=AB=3$.

所以，四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times 3\times 6\times 3=18$.



18．解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由题设得

$2q^2=4q+16$，即 $q^2-2q-8=0$.

解得 $q=-2$（舍去）或 $q=4$.

因此$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2\times 4^{n-1}=2^{2n-1}$.

（2）由（1）得$b_n=(2n-1)\log_2 2=2n-1$，因此数列$\{b_n\}$的前n项和为$1+3+\cdots+2n-1=n$.

19.解：（1）根据产值增长率频数分布表得，所调查的100个企业中产值增长率不低于40%的企业频率为$\frac{14+7}{100}=0.21$.

产值负增长的企业频率为$\frac{2}{100}=0.02$.

用样本频率分布估计总体分布得这类企业中产值增长率不低于40%的企业比例为21%，产值负增长的企业比例为2%.

（2）$\overline{y}=\frac{1}{100}(-0.10\times 2+0.10\times 24+0.30\times 53+0.50\times 14+0.70\times 7)=0.30$，

$s^2=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{5}n_i\left(y_i-\overline{y}\right)^2$

$=\frac{1}{100}\left[(-0.40)^2\times 2+(-0.20)^2\times 24+0^2\times 53+0.20^2\times 14+0.40^2\times 7\right]$

=0.0296，

$s=\sqrt{0.0296}=0.02\times\sqrt{74}\approx 0.17$，

所以，这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值分别为30%，17%.

20.解：（1）连结PF_1，由$\triangle POF_2$为等边三角形可知在$\triangle F_1PF_2$中，$\angle F_1PF_2=90°$，$|PF_2|=c$，$|PF_1|=\sqrt{3}c$，于是$2a=|PF_1|+|PF_2|=(\sqrt{3}+1)c$，故$C$的离心率是$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}-1$.

（2）由题意可知，满足条件的点$P(x,y)$存在当且仅当$\frac{1}{2}|y|\cdot 2c=16$，$\frac{y}{x+c}\cdot\frac{y}{x-c}=-1$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，即$c|y|=16$，①

$x^2+y^2=c^2$，②

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，③

由②③及 $a^2=b^2+c^2$ 得 $y^2=\frac{b^4}{c^2}$，又由①知 $y^2=\frac{16^2}{c^2}$，故 $b=4$.

由②③得 $x^2=\frac{a^2}{c^2}\left(c^2-b^2\right)$，所以 $c^2\geq b^2$，从而 $a^2=b^2+c^2\geq 2b^2=32,$ 故 $a\geq 4\sqrt{2}$.

当 $b=4$，$a\geq 4\sqrt{2}$ 时，存在满足条件的点*P*.

所以 $b=4$，a 的取值范围为 $[4\sqrt{2},+\infty)$.

21.解：（1）$f(x)$ 的定义域为（0，+∞）.

$f'(x)=\frac{x-1}{x}+\ln x-1=\ln x-\frac{1}{x}$.

因为 $y=\ln x$ 单调递增，$y=\frac{1}{x}$ 单调递减，所以 $f'(x)$ 单调递增，又 $f'(1)=-1<0$，

$f'(2)=\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{\ln 4-1}{2}>0$，故存在唯一 $x_0\in(1,2)$，使得 $f'\left(x_0\right)=0$.

又当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

因此，$f(x)$ 存在唯一的极值点.

（2）由（1）知 $f\left(x_0\right)<f(1)=-2$，又 $f\left(\mathrm{e}^2\right)=\mathrm{e}^2-3>0$，所以 $f(x)=0$ 在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 内存在唯一根 $x=\alpha$.

由 $\alpha>x_0>1$ 得 $\frac{1}{\alpha}<1<x_0$.

又 $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\ln\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}-1=\frac{f(\alpha)}{\alpha}=0$，故 $\frac{1}{\alpha}$ 是 $f(x)=0$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 的唯一根.

综上，$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

22．解：（1）因为$M\left(\rho_0,\theta_0\right)$在$C$上，当$\theta_0=\frac{\pi}{3}$时，$\rho_0=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$.

由已知得$|OP|=|OA|\cos\frac{\pi}{3}=2$.

设$Q(\rho,\theta)$为l上除P的任意一点.在$\mathrm{Rt}\triangle OPQ$中$\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=|OP|=2$，

经检验，点$P(2,\frac{\pi}{3})$在曲线$\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=2$上.

所以，l的极坐标方程为$\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=2$.

（2）设$P(\rho,\theta)$，在$\mathrm{Rt}\triangle OAP$中，$|OP|=|OA|\cos\theta=4\cos\theta$, 即 $\rho=4\cos\theta$..

因为P在线段OM上，且$AP\perp OM$，故θ的取值范围是$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

所以，P点轨迹的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta,\quad \theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

23．解：（1）当a=1时，$f(x)=|x-1|\,x+|x-2|(x-1)$.

当$x<1$时，$f(x)=-2(x-1)^2<0$；当$x\geq1$时，$f(x)\geq0$.

所以，不等式$f(x)<0$的解集为$(-\infty,1)$.

（2）因为$f(a)=0$，所以$a\geq1$.

当$a\geq1$，$x\in(-\infty,1)$时，$f(x)=(a-x)\,x+(2-x)(x-a)=2(a-x)(x-1)<0$.

所以，a的取值范围是$[1,+\infty)$.