

2014 年全国统一高考数学试卷（文科）（大纲版）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分）

1. （5 分）设集合 $M=\{1, 2, 4, 6, 8\}$, $N=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, 则 $M \cap N$ 中元素的个数为（ ）
- A. 2 B. 3 C. 5 D. 7
2. （5 分）已知角 α 的终边经过点 $(-4, 3)$, 则 $\cos \alpha =$ （ ）
- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$
3. （5 分）不等式组 $\begin{cases} x(x+2) > 0 \\ |x| < 1 \end{cases}$ 的解集为（ ）
- A. $\{x | -2 < x < -1\}$ B. $\{x | -1 < x < 0\}$
- C. $\{x | 0 < x < 1\}$ D. $\{x | x > 1\}$
4. （5 分）已知正四面体 $ABCD$ 中, E 是 AB 的中点, 则异面直线 CE 与 BD 所成角的余弦值为（ ）
- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
5. （5 分）函数 $y = \ln(\sqrt[3]{x} + 1)$ ($x > -1$) 的反函数是（ ）
- A. $y = (1 - e^x)^3$ ($x > -1$) B. $y = (e^x - 1)^3$ ($x > -1$)
- C. $y = (1 - e^x)^3$ ($x \in \mathbb{R}$) D. $y = (e^x - 1)^3$ ($x \in \mathbb{R}$)
6. （5 分）已知 \vec{a}, \vec{b} 为单位向量, 其夹角为 60° , 则 $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} =$ （ ）
- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
7. （5 分）有 6 名男医生、5 名女医生, 从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组, 则不同的选法共有（ ）
- A. 60 种 B. 70 种 C. 75 种 D. 150 种
8. （5 分）设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $S_2=3$, $S_4=15$, 则 $S_6=$ （ ）
- A. 31 B. 32 C. 63 D. 64
9. （5 分）已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点为 F_1, F_2 , 离心率

为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，过 F_2 的直线 l 交 C 于 A 、 B 两点，若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$ ，则 C 的方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ C. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ D. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

10. (5分) 正四棱锥的顶点都在同一球面上，若该棱锥的高为4，底面边长为2，则该球的表面积为（ ）

- A. $\frac{81\pi}{4}$ B. 16π C. 9π D. $\frac{27\pi}{4}$

11. (5分) 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为2，焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$ ，则 C 的焦距等于（ ）

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$

12. (5分) 奇函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} ，若 $f(x+2)$ 为偶函数，且 $f(1)=1$ ，则 $f(8)+f(9)=$ （ ）

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

二、填空题(本大题共4小题，每小题5分)

13. (5分) $(x-2)^6$ 的展开式中 x^3 的系数是_____。(用数字作答)

14. (5分) 函数 $y=\cos 2x+2\sin x$ 的最大值是_____.

15. (5分) 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+2y \leq 3 \\ x-2y \leq 1 \end{cases}$ ，则 $z=x+4y$ 的最大值为_____.

16. (5分) 直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线，若 l_1 与 l_2 的交点为 $(1, 3)$ ，则 l_1 与 l_2 的夹角的正切值等于_____.

三、解答题

17. (10分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=2, a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$.

(I) 设 $b_n=a_{n+1}-a_n$ ，证明 $\{b_n\}$ 是等差数列；

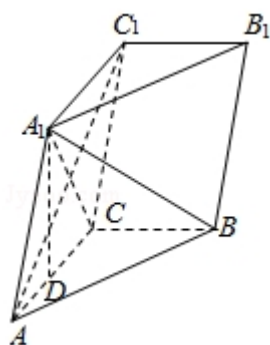
(II) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，已知 $3a\cos C = 2c\cos A$ ， $\tan A = \frac{1}{3}$ ，求 B 。

19. (12 分) 如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 A_1 在平面 ABC 内的射影 D 在 AC 上， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = 1$ ， $AC = CC_1 = 2$ 。

(I) 证明： $AC_1 \perp A_1B$ ；

(II) 设直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 的距离为 $\sqrt{3}$ ，求二面角 A_1-AB-C 的大小。



20. (12 分) 设每个工作日甲，乙，丙，丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6，0.5，0.5，0.4，各人是否需使用设备相互独立。
- (I) 求同一工作日至少 3 人需使用设备的概率；
- (II) 实验室计划购买 k 台设备供甲，乙，丙，丁使用，若要求“同一工作日需使用设备的人数大于 k ”的概率小于 0.1，求 k 的最小值。

21. (12 分) 函数 $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$ ($a \neq 0$).

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 是增函数, 求 a 的取值范围.

22. (12 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 直线 $y=4$ 与 y 轴的交点为 P , 与 C 的交点为 Q , 且 $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$.

(I) 求 C 的方程;

(II) 过 F 的直线 l 与 C 相交于 A 、 B 两点, 若 AB 的垂直平分线 l' 与 C 相交于 M 、 N 两点, 且 A 、 M 、 B 、 N 四点在同一圆上, 求 l 的方程.

2014 年全国统一高考数学试卷（文科）（大纲版）

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分）

1. （5 分）设集合 $M=\{1, 2, 4, 6, 8\}$ ， $N=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ ，则 $M \cap N$ 中元素的个数为（ ）

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 7

【考点】1A：集合中元素个数的最值；1E：交集及其运算.

【专题】5J：集合.

【分析】根据 M 与 N ，找出两集合的交集，找出交集的元素即可.

【解答】解：∵ $M=\{1, 2, 4, 6, 8\}$ ， $N=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ ，

∴ $M \cap N=\{1, 2, 6\}$ ，即 $M \cap N$ 中元素的个数为 3.

故选：B.

【点评】此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键.

2. （5 分）已知角 α 的终边经过点 $(-4, 3)$ ，则 $\cos\alpha=$ （ ）

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

【考点】G9：任意角的三角函数的定义.

【专题】56：三角函数的求值.

【分析】由条件直接利用任意角的三角函数的定义求得 $\cos\alpha$ 的值.

【解答】解：∵ 角 α 的终边经过点 $(-4, 3)$ ，∴ $x=-4$ ， $y=3$ ， $r=\sqrt{x^2+y^2}=5$.

$$\therefore \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5},$$

故选：D.

【点评】本题主要考查任意角的三角函数的定义，两点间的距离公式的应用，属于基础题.

3. (5 分) 不等式组 $\begin{cases} x(x+2) > 0 \\ |x| < 1 \end{cases}$ 的解集为 ()

A. $\{x | -2 < x < -1\}$

B. $\{x | -1 < x < 0\}$ C. $\{x | 0 < x < 1\}$

D. $\{x | x > 1\}$

【考点】7E: 其他不等式的解法.

【专题】59: 不等式的解法及应用.

【分析】解一元二次不等式、绝对值不等式，分别求出不等式组中每个不等式的解集，再取交集，即得所求.

【解答】解：由不等式组 $\begin{cases} x(x+2) > 0 \\ |x| < 1 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x < -2, \text{ 或 } x > 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$ ，解得 $0 < x < 1$ ，

故选：C.

【点评】本题主要考查一元二次不等式、绝对值不等式的解法，属于基础题.

4. (5 分) 已知正四面体 ABCD 中，E 是 AB 的中点，则异面直线 CE 与 BD 所成角的余弦值为 ()

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【考点】LM: 异面直线及其所成的角.

【专题】5G: 空间角.

【分析】由 E 为 AB 的中点，可取 AD 中点 F，连接 EF，则 $\angle CEF$ 为异面直线 CE 与 BD 所成角，设出正四面体的棱长，求出 $\triangle CEF$ 的三边长，然后利用余弦定理求解异面直线 CE 与 BD 所成角的余弦值.

【解答】解：如图，

取 AD 中点 F，连接 EF，CF，

\because E 为 AB 的中点，

$\therefore EF \parallel DB$ ，

则 $\angle CEF$ 为异面直线 BD 与 CE 所成的角，

∵ABCD 为正四面体，E，F 分别为 AB，AD 的中点，

∴CE=CF.

设正四面体的棱长为 2a，

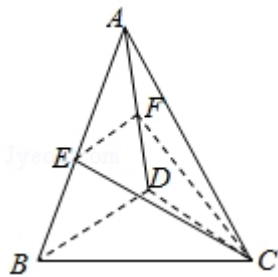
则 EF=a，

$$CE=CF=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a.$$

在△CEF 中，由余弦定理得：

$$\cos\angle CEF=\frac{CE^2+EF^2-CF^2}{2CE\cdot EF}=\frac{a^2}{2\times\sqrt{3}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

故选：B.



【点评】本题考查异面直线及其所成的角，关键是找角，考查了余弦定理的应用，是中档题.

5. (5 分) 函数 $y=\ln(\sqrt[3]{x}+1)$ ($x>-1$) 的反函数是 ()

A. $y=(1-e^x)^3$ ($x>-1$)

B. $y=(e^x-1)^3$ ($x>-1$)

C. $y=(1-e^x)^3$ ($x\in\mathbb{R}$)

D. $y=(e^x-1)^3$ ($x\in\mathbb{R}$)

【考点】4R: 反函数.

【专题】51: 函数的性质及应用.

【分析】由已知式子解出 x，然后互换 x、y 的位置即可得到反函数.

【解答】解：∵ $y=\ln(\sqrt[3]{x}+1)$ ，

$$\therefore \sqrt[3]{x}+1=e^y, \text{ 即 } \sqrt[3]{x}=e^y-1,$$

$$\therefore x=(e^y-1)^3,$$

∴所求反函数为 $y = (e^x - 1)^3$,

故选: D.

【点评】 本题考查反函数解析式的求解, 属基础题.

6. (5 分) 已知 \vec{a} , \vec{b} 为单位向量, 其夹角为 60° , 则 $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} =$ ()

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

【考点】 90: 平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】 5A: 平面向量及应用.

【分析】 由条件利用两个向量的数量积的定义, 求得 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 、 \vec{b}^2 的值, 可得 $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}$ 的值.

【解答】 解: 由题意可得, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\vec{b}^2 = 1$,

∴ $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = 0$,

故选: B.

【点评】 本题主要考查两个向量的数量积的定义, 属于基础题.

7. (5 分) 有 6 名男医生、5 名女医生, 从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组, 则不同的选法共有 ()

A. 60 种

B. 70 种

C. 75 种

D. 150 种

【考点】 D9: 排列、组合及简单计数问题.

【专题】 50: 排列组合.

【分析】 根据题意, 分 2 步分析, 先从 6 名男医生中选 2 人, 再从 5 名女医生中选出 1 人, 由组合数公式依次求出每一步的情况数目, 由分步计数原理计算可得答案.

【解答】 解: 根据题意, 先从 6 名男医生中选 2 人, 有 $C_6^2 = 15$ 种选法, 再从 5 名女医生中选出 1 人, 有 $C_5^1 = 5$ 种选法,

则不同的选法共有 $15 \times 5 = 75$ 种；

故选：C.

【点评】本题考查分步计数原理的应用，注意区分排列、组合的不同.

8. (5 分) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $S_2=3$, $S_4=15$, 则 $S_6=$ ()

A. 31

B. 32

C. 63

D. 64

【考点】89: 等比数列的前 n 项和.

【专题】54: 等差数列与等比数列.

【分析】由等比数列的性质可得 S_2 , $S_4 - S_2$, $S_6 - S_4$ 成等比数列, 代入数据计算可得.

【解答】解: $S_2 = a_1 + a_2$, $S_4 - S_2 = a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) q^2$, $S_6 - S_4 = a_5 + a_6 = (a_1 + a_2) q^4$,

所以 S_2 , $S_4 - S_2$, $S_6 - S_4$ 成等比数列,

即 3, 12, $S_6 - 15$ 成等比数列,

可得 $12^2 = 3(S_6 - 15)$,

解得 $S_6 = 63$

故选: C.

【点评】本题考查等比数列的性质, 得出 S_2 , $S_4 - S_2$, $S_6 - S_4$ 成等比数列是解决问题的关键, 属基础题.

9. (5 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点为 F_1 、 F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过 F_2 的直线 l 交 C 于 A 、 B 两点, 若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$, 则 C 的方程为 ()

A. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

B. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$

C. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$

D. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

【考点】K4：椭圆的性质.

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】利用 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$ ，求出 $a=\sqrt{3}$ ，根据离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，可得 $c=1$ ，

求出 b ，即可得出椭圆的方程.

【解答】解： $\because \triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$ ，

$$\because \triangle AF_1B \text{ 的周长} = |AF_1| + |AF_2| + |BF_1| + |BF_2| = 2a + 2a = 4a,$$

$$\therefore 4a = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore a = \sqrt{3},$$

$$\because \text{离心率为 } \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad c = 1,$$

$$\therefore b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

故选：A.

【点评】本题考查椭圆的定义与方程，考查椭圆的几何性质，考查学生的计算能力，属于基础题.

10. (5 分) 正四棱锥的顶点都在同一球面上，若该棱锥的高为 4，底面边长为 2，则该球的表面积为 ()

A. $\frac{81\pi}{4}$

B. 16π

C. 9π

D. $\frac{27\pi}{4}$

【考点】LG：球的体积和表面积；LR：球内接多面体.

【专题】11：计算题；5F：空间位置关系与距离.

【分析】正四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的球心在它的高 PO_1 上，记为 O ，求出 PO_1 ， OO_1 ，解出球的半径，求出球的表面积.

【解答】解：设球的半径为 R ，则

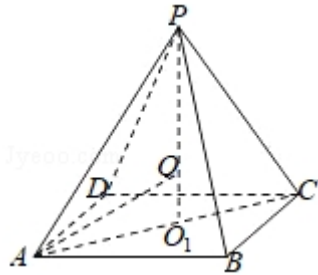
\because 棱锥的高为 4，底面边长为 2，

$$\therefore R^2 = (4-R)^2 + (\sqrt{2})^2,$$

$$\therefore R = \frac{9}{4},$$

$$\therefore \text{球的表面积为 } 4\pi \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81\pi}{4}.$$

故选：A.



【点评】本题考查球的表面积，球的内接几何体问题，考查计算能力，是基础题

11. (5分) 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 2，焦点到渐近线的

距离为 $\sqrt{3}$ ，则 C 的焦距等于 ()

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. 4

D. $4\sqrt{2}$

【考点】KC：双曲线的性质.

【专题】5D：圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】根据双曲线的离心率以及焦点到直线的距离公式，建立方程组即可得到结论.

【解答】解： $\because \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 2，

$\therefore e = \frac{c}{a} = 2$ ，双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，不妨取 $y = \frac{b}{a}x$ ，即 $bx - ay = 0$ ，

则 $c = 2a$ ， $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}a$ ，

\therefore 焦点 $F(c, 0)$ 到渐近线 $bx - ay = 0$ 的距离为 $\sqrt{3}$ ，

$$\therefore d = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{3},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}a \cdot c}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{\sqrt{3}ac}{2a} = \frac{\sqrt{3}c}{2} = \sqrt{3},$$

解得 $c=2$,

则焦距为 $2c=4$,

故选: C.

【点评】本题主要考查是双曲线的基本运算,利用双曲线的离心率以及焦点到直线的距离公式,建立方程组是解决本题的关键,比较基础.

12. (5 分) 奇函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 若 $f(x+2)$ 为偶函数, 且 $f(1)=1$, 则 $f(8)+f(9)=$ ()

A. - 2

B. - 1

C. 0

D. 1

【考点】3K: 函数奇偶性的性质与判断.

【专题】51: 函数的性质及应用.

【分析】根据函数的奇偶性的性质, 得到 $f(x+8)=f(x)$, 即可得到结论.

【解答】解: $\because f(x+2)$ 为偶函数, $f(x)$ 是奇函数,

\therefore 设 $g(x)=f(x+2)$,

则 $g(-x)=g(x)$,

即 $f(-x+2)=f(x+2)$,

$\because f(x)$ 是奇函数,

$\therefore f(-x+2)=f(x+2)=-f(x-2)$,

即 $f(x+4)=-f(x)$, $f(x+8)=f(x+4+4)=-f(x+4)=f(x)$,

则 $f(8)=f(0)=0$, $f(9)=f(1)=1$,

$\therefore f(8)+f(9)=0+1=1$,

故选: D.

【点评】本题主要考查函数值的计算,利用函数奇偶性的性质,得到函数的对称轴是解决本题的关键.

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分)

13. (5 分) $(x-2)^6$ 的展开式中 x^3 的系数是 - 160. (用数字作答)

【考点】DA: 二项式定理.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据题意, 由二项式定理可得 $(x-2)^6$ 的展开式的通项, 令 x 的系数为 3, 可得 $r=3$, 将 $r=3$ 代入通项, 计算可得 $T_4=-160x^3$, 即可得答案.

【解答】解: 根据题意, $(x-2)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r} (-2)^r = (-1)^r \cdot 2^r \cdot C_6^r x^{6-r}$,

令 $6-r=3$ 可得 $r=3$,

此时 $T_4 = (-1)^3 \cdot 2^3 \cdot C_6^3 x^3 = -160x^3$, 即 x^3 的系数是 -160;

故答案为 -160.

【点评】本题考查二项式定理的应用, 关键要得到 $(x-2)^6$ 的展开式的通项.

14. (5 分) 函数 $y=\cos 2x+2\sin x$ 的最大值是 $\frac{3}{2}$.

【考点】HW: 三角函数的最值.

【专题】11: 计算题.

【分析】利用二倍角公式对函数化简可得 $y=\cos 2x+2\sin x=1-2\sin^2 x+2\sin x=-2(\sin x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}$, 结合 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 及二次函数的性质可求函数有最大值

【解答】解: $\because y=\cos 2x+2\sin x=1-2\sin^2 x+2\sin x=-2(\sin x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}$

又 $\because -1 \leq \sin x \leq 1$

当 $\sin x=\frac{1}{2}$ 时, 函数有最大值 $\frac{3}{2}$

故答案为: $\frac{3}{2}$

【点评】本题主要考查了利用二倍角度公式对三角函数进行化简，二次函数在闭区间上的最值的求解，解题中要注意 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 的条件.

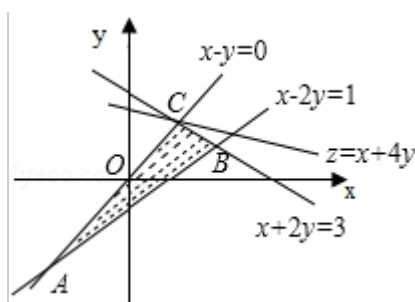
15. (5 分) 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+2y \leq 3 \\ x-2y \leq 1 \end{cases}$, 则 $z=x+4y$ 的最大值为 5.

【考点】7C: 简单线性规划.

【专题】31: 数形结合.

【分析】由约束条件作出可行域，化目标函数为直线方程的斜截式，由图得到最优解，联立方程组求出最优解的坐标，代入目标函数得答案.

【解答】解：由约束条件 $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+2y \leq 3 \\ x-2y \leq 1 \end{cases}$ 作出可行域如图，



联立 $\begin{cases} x-y=0 \\ x+2y=3 \end{cases}$, 解得 $C(1, 1)$.

化目标函数 $z=x+4y$ 为直线方程的斜截式，得 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{z}{4}$.

由图可知，当直线 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{z}{4}$ 过 C 点时，直线在 y 轴上的截距最大， z 最大.

此时 $z_{\max}=1+4 \times 1=5$.

故答案为：5.

【点评】本题考查简单的线性规划，考查了数形结合的解题思想方法，是中档题.

16. (5 分) 直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线，若 l_1 与 l_2 的交点为 $(1, 3)$,

则 l_1 与 l_2 的夹角的正切值等于 $-\frac{4}{3}$.

【考点】IV：两直线的夹角与到角问题.

【专题】5B：直线与圆.

【分析】设 l_1 与 l_2 的夹角为 2θ ，由于 l_1 与 l_2 的交点 $A(1, 3)$ 在圆的外部，由直角三角形中的边角关系求得 $\sin\theta = \frac{r}{OA}$ 的值，可得 $\cos\theta$ 、 $\tan\theta$ 的值，再根据

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}, \text{ 计算求得结果.}$$

【解答】解：设 l_1 与 l_2 的夹角为 2θ ，由于 l_1 与 l_2 的交点 $A(1, 3)$ 在圆的外部，且点 A 与圆心 O 之间的距离为 $OA = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ ，

圆的半径为 $r = \sqrt{2}$ ，

$$\therefore \sin\theta = \frac{r}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}},$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}, \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

故答案为： $\frac{4}{3}$.

【点评】本题主要考查直线和圆相切的性质，直角三角形中的变角关系，同角三角函数的基本关系、二倍角的正切公式的应用，属于中档题.

三、解答题

17. (10分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$.

(I) 设 $b_n=a_{n+1}-a_n$ ，证明 $\{b_n\}$ 是等差数列；

(II) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【考点】83：等差数列的性质；84：等差数列的通项公式；8H：数列递推式.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】(I) 将 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$ 变形为： $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+2$ ，再由条件得

$b_{n+1}=b_n+2$ ，根据条件求出 b_1 ，由等差数列的定义证明 $\{b_n\}$ 是等差数列；

(Ⅱ) 由 (Ⅰ) 和等差数列的通项公式求出 b_n ，代入 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 并令 n 从 1 开始取值，依次得 $(n-1)$ 个式子，然后相加，利用等差数列的前 n 项和公式求出 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 。

【解答】解：(Ⅰ) 由 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$ 得，

$$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+2,$$

$$\text{由 } b_n=a_{n+1}-a_n \text{ 得, } b_{n+1}=b_n+2,$$

$$\text{即 } b_{n+1}-b_n=2,$$

$$\text{又 } b_1=a_2-a_1=1,$$

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列。

$$(Ⅱ) \text{ 由 (Ⅰ) 得, } b_n=1+2(n-1)=2n-1,$$

$$\text{由 } b_n=a_{n+1}-a_n \text{ 得, } a_{n+1}-a_n=2n-1,$$

$$\text{则 } a_2-a_1=1, a_3-a_2=3, a_4-a_3=5, \dots, a_n-a_{n-1}=2(n-1)-1,$$

$$\text{所以, } a_n-a_1=1+3+5+\dots+2(n-1)-1$$

$$=\frac{(n-1)(1+2n-3)}{2}=(n-1)^2,$$

$$\text{又 } a_1=1,$$

$$\text{所以 } \{a_n\} \text{ 的通项公式 } a_n=(n-1)^2+1=n^2-2n+2.$$

【点评】本题考查了等差数列的定义、通项公式、前 n 项和公式，及累加法求数列的通项公式和转化思想，属于中档题。

18. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，已知 $3a\cos C=2c\cos A$ ， $\tan A=\frac{1}{3}$ ，求 B 。

【考点】GL：三角函数中的恒等变换应用；HP：正弦定理。

【专题】58：解三角形。

【分析】由 $3a\cos C=2c\cos A$ ，利用正弦定理可得 $3\sin A\cos C=2\sin C\cos A$ ，再利用同角的三角函数基本关系式可得 $\tan C$ ，利用 $\tan B=\tan[\pi-(A+C)]=-\tan(A+C)$ 即可得出.

【解答】解： $\because 3a\cos C=2c\cos A$ ，

由正弦定理可得 $3\sin A\cos C=2\sin C\cos A$ ，

$$\therefore 3\tan A=2\tan C,$$

$$\because \tan A=\frac{1}{3},$$

$$\therefore 2\tan C=3\times\frac{1}{3}=1, \text{ 解得 } \tan C=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \tan B=\tan[\pi-(A+C)]=-\tan(A+C)=-\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=-\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=-1,$$

$$\because B\in(0, \pi),$$

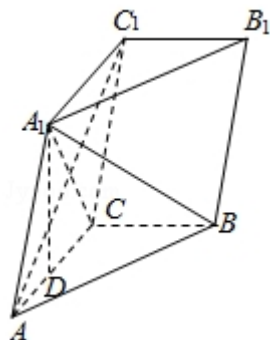
$$\therefore B=\frac{3\pi}{4}$$

【点评】本题考查了正弦定理、同角的三角函数基本关系式、两角和差的正切公式、诱导公式等基础知识与基本技能方法，考查了推理能力和计算能力，属于中档题.

19. (12分) 如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 A_1 在平面 ABC 内的射影 D 在 AC 上， $\angle ACB=90^\circ$ ， $BC=1$ ， $AC=CC_1=2$.

(I) 证明： $AC_1\perp A_1B$ ；

(II) 设直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 的距离为 $\sqrt{3}$ ，求二面角 A_1-AB-C 的大小.



【考点】LW：直线与平面垂直；MJ：二面角的平面角及求法.

【专题】5F：空间位置关系与距离.

【分析】（I）由已知数据结合线面垂直的判定和性质可得；

（II）作辅助线可证 $\angle A_1FD$ 为二面角 A_1-AB-C 的平面角，解三角形由反三角函数可得.

【解答】解：（I） $\because A_1D \perp$ 平面 ABC ， $A_1D \subset$ 平面 AA_1C_1C ，

\therefore 平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 ABC ，又 $BC \perp AC$

$\therefore BC \perp$ 平面 AA_1C_1C ，连结 A_1C ，

由侧面 AA_1C_1C 为菱形可得 $AC_1 \perp A_1C$ ，

又 $AC_1 \perp BC$ ， $A_1C \cap BC = C$ ，

$\therefore AC_1 \perp$ 平面 A_1BC ， $AB_1 \subset$ 平面 A_1BC ，

$\therefore AC_1 \perp A_1B$ ；

（II） $\because BC \perp$ 平面 AA_1C_1C ， $BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 ，

\therefore 平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，

作 $A_1E \perp CC_1$ ， E 为垂足，可得 $A_1E \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，

又直线 $AA_1 \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ，

$\therefore A_1E$ 为直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 的距离，即 $A_1E = \sqrt{3}$ ，

$\because A_1C$ 为 $\angle ACC_1$ 的平分线， $\therefore A_1D = A_1E = \sqrt{3}$ ，

作 $DF \perp AB$ ， F 为垂足，连结 A_1F ，

又可得 $AB \perp A_1D$ ， $A_1F \cap A_1D = A_1$ ，

$\therefore AB \perp$ 平面 A_1DF ， $\because A_1F \subset$ 平面 A_1DF

$\therefore A_1F \perp AB$ ，

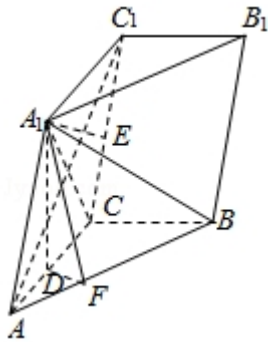
$\therefore \angle A_1FD$ 为二面角 A_1-AB-C 的平面角，

由 $AD = \sqrt{AA_1^2 - A_1D^2} = 1$ 可知 D 为 AC 中点，

$$\therefore DF = \frac{1}{2} \times \frac{AC \times BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \tan \angle A_1FD = \frac{A_1D}{DF} = \sqrt{15},$$

\therefore 二面角 A_1-AB-C 的大小为 $\arctan \sqrt{15}$



【点评】本题考查二面角的求解，作出并证明二面角的平面角是解决问题的关键，属中档题.

20. (12 分) 设每个工作日甲, 乙, 丙, 丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6, 0.5, 0.5, 0.4, 各人是否需使用设备相互独立.

(I) 求同一工作日至少 3 人需使用设备的概率;

(II) 实验室计划购买 k 台设备供甲, 乙, 丙, 丁使用, 若要求“同一工作日需使用设备的人数大于 k ”的概率小于 0.1, 求 k 的最小值.

【考点】C8: 相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式.

【专题】5I: 概率与统计.

【分析】(I) 把 4 个人都需使用设备的概率、4 个人中有 3 个人使用设备的概率相加, 即得所求.

(II) 由 (I) 可得若 $k=2$, 不满足条件. 若 $k=3$, 求得“同一工作日需使用设备的人数大于 3”的概率为 $0.06 < 0.1$, 满足条件, 从而得出结论.

【解答】解: (I) 由题意可得“同一工作日至少 3 人需使用设备”的概率为

$$0.6 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 + (1 - 0.6) \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 + 0.6 \times (1 - 0.5) \times 0.5 \times 0.4 + 0.6 \times 0.5 \times (1 - 0.5) \times 0.4 + 0.6 \times 0.5 \times 0.5 \times (1 - 0.4) = 0.31.$$

(II) 由 (I) 可得若 $k=2$, 则“同一工作日需使用设备的人数大于 2”的概率为 $0.31 > 0.1$, 不满足条件.

若 $k=3$, 则“同一工作日需使用设备的人数大于 3”的概率为 $0.6 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 = 0.06 < 0.1$, 满足条件.

故 k 的最小值为 3.

【点评】本题主要考查相互独立事件的概率乘法公式，体现了分类讨论的数学思想，属于中档题.

21. (12 分) 函数 $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$ ($a \neq 0$).

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 是增函数, 求 a 的取值范围.

【考点】6B: 利用导数研究函数的单调性; 6D: 利用导数研究函数的极值.

【专题】53: 导数的综合应用.

【分析】(I) 求出函数的导数, 通过导数为 0, 利用二次函数的根, 通过 a 的范围讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 当 $a > 0$, $x > 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 是增函数, 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 是增函数, 推出 $f'(1) \geq 0$ 且 $f'(2) \geq 0$, 即可求 a 的取值范围.

【解答】解: (I) 函数 $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$,

$$\therefore f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3,$$

令 $f'(x) = 0$, 即 $3ax^2 + 6x + 3 = 0$, 则 $\Delta = 36(1 - a)$,

①若 $a \geq 1$ 时, 则 $\Delta \leq 0$, $f'(x) \geq 0$, $\therefore f(x)$ 在 \mathbb{R} 上是增函数;

②因为 $a \neq 0$, $\therefore a \leq 1$ 且 $a \neq 0$ 时, $\Delta > 0$, $f'(x) = 0$ 方程有两个根, $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}$, $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}$,

当 $0 < a < 1$ 时, 则当 $x \in (-\infty, x_2)$ 或 $(x_1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 故函数在 $(-\infty, x_2)$ 或 $(x_1, +\infty)$ 是增函数; 在 (x_2, x_1) 是减函数;

当 $a < 0$ 时, 则当 $x \in (-\infty, x_1)$ 或 $(x_2, +\infty)$, $f'(x) < 0$, 故函数在 $(-\infty, x_1)$ 或 $(x_2, +\infty)$ 是减函数; 在 (x_1, x_2) 是增函数;

(II) 当 $a > 0$, $x > 0$ 时, $f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3 > 0$ 故 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 是增函数,

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 是增函数,

当且仅当: $f'(1) \geq 0$ 且 $f'(2) \geq 0$, 解得 $-\frac{5}{4} \leq a < 0$,

a 的取值范围 $[-\frac{5}{4}, 0) \cup (0, +\infty)$.

【点评】 本题考查函数的导数的应用, 判断函数的单调性以及已知单调性求解函数中的变量的范围, 考查分类讨论思想的应用.

22. (12 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 直线 $y = 4$ 与 y 轴的交点为 P , 与 C 的交点为 Q , 且 $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$.

(I) 求 C 的方程;

(II) 过 F 的直线 l 与 C 相交于 A 、 B 两点, 若 AB 的垂直平分线 l' 与 C 相交于 M 、 N 两点, 且 A 、 M 、 B 、 N 四点在同一圆上, 求 l 的方程.

【考点】 KH: 直线与圆锥曲线的综合.

【专题】 5E: 圆锥曲线中的最值与范围问题.

【分析】 (I) 设点 Q 的坐标为 $(x_0, 4)$, 把点 Q 的坐标代入抛物线 C 的方程, 求得 $x_0 = \frac{8}{p}$, 根据 $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$ 求得 p 的值, 可得 C 的方程.

(II) 设 l 的方程为 $x = my + 1$ ($m \neq 0$), 代入抛物线方程化简, 利用韦达定理、中点公式、弦长公式求得弦长 $|AB|$. 把直线 l' 的方程代入抛物线方程化简, 利用韦达定理、弦长公式求得 $|MN|$. 由于 MN 垂直平分线段 AB , 故 $AMBN$ 四点共圆等价于 $|AE| = |BE| = \frac{1}{2}|MN|$, 由此求得 m 的值, 可得直线 l 的方程.

【解答】 解 (I) 设点 Q 的坐标为 $(x_0, 4)$, 把点 Q 的坐标代入抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$),

可得 $x_0 = \frac{8}{p}$, \because 点 $P(0, 4)$, $\therefore |PQ| = \frac{8}{p}$.

又 $|QF| = x_0 + \frac{p}{2} = \frac{8}{p} + \frac{p}{2}$, $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$,

$\therefore \frac{8}{p} + \frac{p}{2} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{p}$, 求得 $p = 2$, 或 $p = -2$ (舍去).

故 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

(II) 由题意可得, 直线 l 和坐标轴不垂直, $y^2 = 4x$ 的焦点 $F(1, 0)$,

设 l 的方程为 $x=my+1$ ($m \neq 0$),

代入抛物线方程可得 $y^2 - 4my - 4 = 0$, 显然判别式 $\Delta = 16m^2 + 16 > 0$, $y_1 + y_2 = 4m$,

$$y_1 \cdot y_2 = -4.$$

$\therefore AB$ 的中点坐标为 $D(2m^2+1, 2m)$, 弦长

$$|AB| = \sqrt{m^2+1} |y_1 - y_2| = \sqrt{m^2+1} \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = 4(m^2+1).$$

又直线 l' 的斜率为 $-m$, \therefore 直线 l' 的方程为 $x = -\frac{1}{m}y + 2m^2+3$.

过 F 的直线 l 与 C 相交于 A, B 两点, 若 AB 的垂直平分线 l' 与 C 相交于 M, N 两点,

把线 l' 的方程代入抛物线方程可得 $y^2 + \frac{4}{m}y - 4(2m^2+3) = 0$, $\therefore y_3 + y_4 = -\frac{4}{m}$, $y_3 \cdot y_4 = -4(2m^2+3)$.

故线段 MN 的中点 E 的坐标为 $(\frac{2}{m^2} + 2m^2 + 3, \frac{-2}{m})$, $\therefore |MN| = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} |y_3 - y_4| =$
$$\frac{4(m^2+1) \cdot \sqrt{2m^2+1}}{m^2},$$

$\because MN$ 垂直平分线段 AB , 故 A, M, B, N 四点共圆等价于 $|AE| = |BE| = \frac{1}{2}|MN|$,

$$\therefore \frac{1}{4} \cdot |AB|^2 + |DE|^2 = \frac{1}{4} |MN|^2,$$

$$\therefore 4(m^2+1)^2 + (2m + \frac{2}{m})^2 + (\frac{2}{m^2} + 2)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{16 \cdot (m^2+1)^2 \cdot (2m^2+1)}{m^4}, \text{ 化简可得}$$

$$m^2 - 1 = 0,$$

$\therefore m = \pm 1$, \therefore 直线 l 的方程为 $x - y - 1 = 0$, 或 $x + y - 1 = 0$.

【点评】 本题主要考查求抛物线的标准方程, 直线和圆锥曲线的位置关系的应用, 韦达定理、弦长公式的应用, 体现了转化的数学思想, 属于难题.