**绝密★本科目考试启用前**

**2022年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）**

**数学**

**本试卷共5页，150分．考试时长120分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．**

**第一部分（选择题 共40分）**

**一、选择题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．**

1. 已知全集，集合，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】利用补集的定义可得正确的选项．

【详解】由补集定义可知：或，即，

故选：D．

2. 若复数*z*满足，则（ ）

A. 1 B. 5 C. 7 D. 25

【答案】B

【解析】

【分析】利用复数四则运算，先求出，再计算复数的模．

【详解】由题意有，故．

故选：B．

3. 若直线是圆的一条对称轴，则（ ）

A.  B.  C. 1 D. 

【答案】A

【解析】

【分析】若直线是圆的对称轴，则直线过圆心，将圆心代入直线计算求解．

【详解】由题可知圆心为，因为直线是圆的对称轴，所以圆心在直线上，即，解得．

故选：A．

4. 己知函数，则对任意实数*x*，有（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】直接代入计算，注意通分不要计算错误．

【详解】，故A错误，C正确；

，不常数，故BD错误；

故选：C．

5. 已知函数，则（ ）

A. 在上单调递减 B. 在上单调递增

C. 在上单调递减 D. 在上单调递增

【答案】C

【解析】

【分析】化简得出，利用余弦型函数的单调性逐项判断可得出合适的选项.

【详解】因为.

对于A选项，当时，，则在上单调递增，A错；

对于B选项，当时，，则在上不单调，B错；

对于C选项，当时，，则在上单调递减，C对；

对于D选项，当时，，则在上不单调，D错.

故选：C.

6. 设是公差不为0的无穷等差数列，则“为递增数列”是“存在正整数，当时，”的（ ）

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】设等差数列的公差为，则，利用等差数列的通项公式结合充分条件、必要条件的定义判断可得出结论.

【详解】设等差数列的公差为，则，记为不超过的最大整数.

若为单调递增数列，则，

若，则当时，；若，则，

由可得，取，则当时，，

所以，“是递增数列”“存在正整数，当时，”；

若存在正整数，当时，，取且，，

假设，令可得，且，

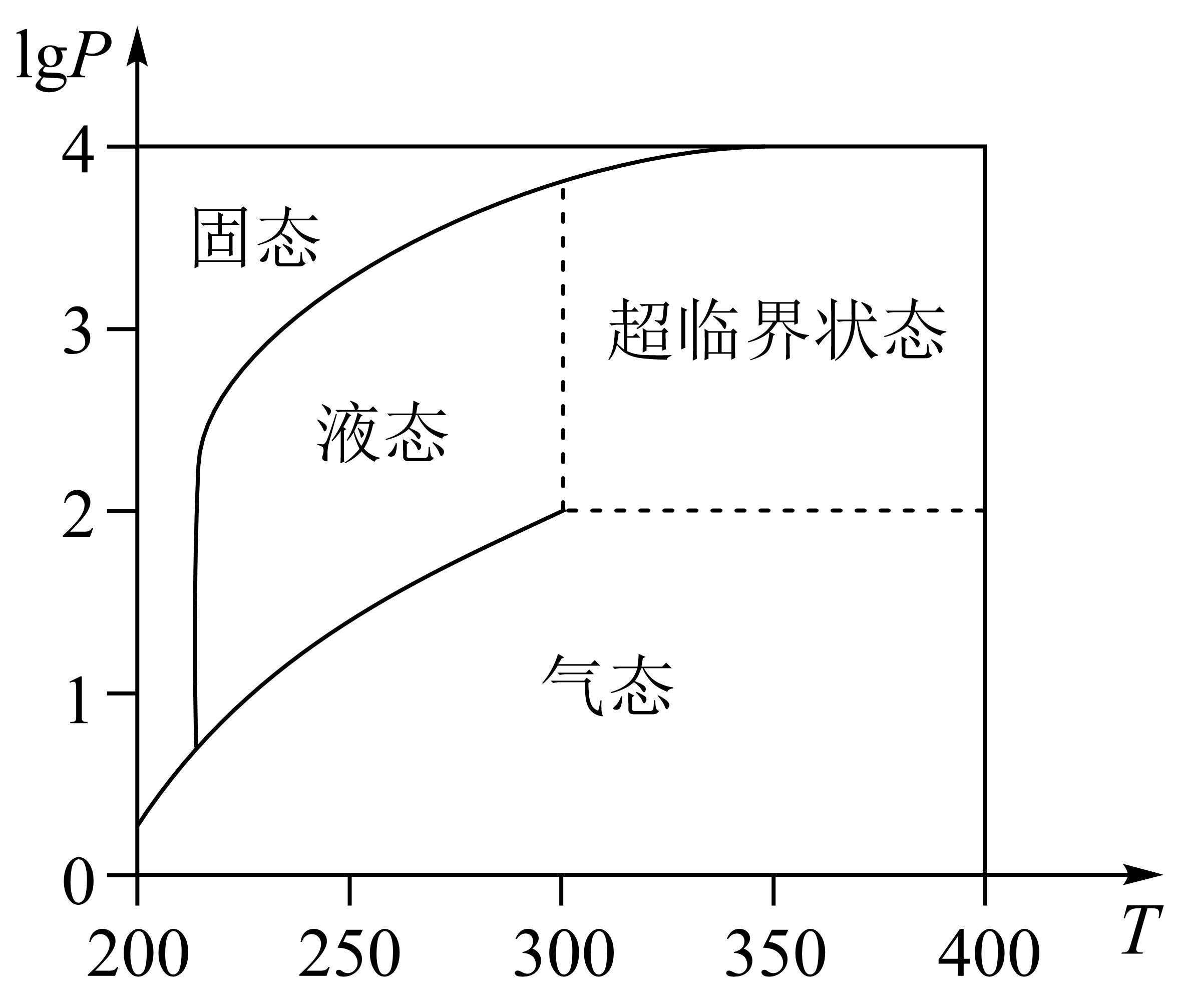
当时，，与题设矛盾，假设不成立，则，即数列是递增数列.

所以，“是递增数列”“存在正整数，当时，”.

所以，“是递增数列”是“存在正整数，当时，”的充分必要条件.

故选：C.

7. 在北京冬奥会上，国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术，为实现绿色冬奥作出了贡献．如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与*T*和的关系，其中*T*表示温度，单位是*K*；*P*表示压强，单位是．下列结论中正确的是（ ）



A. 当，时，二氧化碳处于液态

B. 当，时，二氧化碳处于气态

C. 当，时，二氧化碳处于超临界状态

D. 当，时，二氧化碳处于超临界状态

【答案】D

【解析】

【分析】根据与的关系图可得正确的选项.

【详解】当，时，，此时二氧化碳处于固态，故A错误.

当，时，，此时二氧化碳处于液态，故B错误.

当，时，与4非常接近，故此时二氧化碳处于固态，

另一方面，时对应的是非超临界状态，故C错误.

当，时，因, 故此时二氧化碳处于超临界状态，故D正确.

故选：D

8. 若，则（ ）

A. 40 B. 41 C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】利用赋值法可求的值.

【详解】令，则，

令，则，

故，

故选：B.

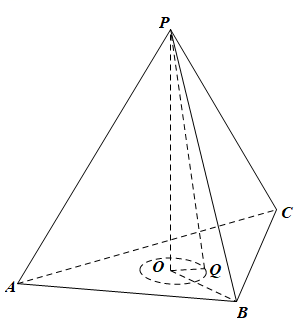
9. 已知正三棱锥的六条棱长均为6，*S*是及其内部的点构成的集合．设集合，则*T*表示的区域的面积为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】求出以为球心，5为半径的球与底面的截面圆的半径后可求区域的面积.

【详解】

设顶点在底面上的投影为，连接，则为三角形的中心，

且，故.

因为，故，

故的轨迹为以为圆心，1为半径的圆，

而三角形内切圆的圆心为，半径为，

故的轨迹圆在三角形内部，故其面积为

故选：B

10. 在中，．*P*为所在平面内的动点，且，则的取值范围是（ ）

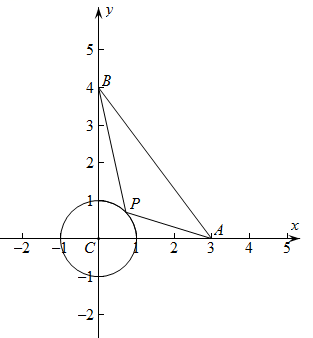
A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】依题意建立平面直角坐标系，设，表示出，，根据数量积的坐标表示、辅助角公式及正弦函数的性质计算可得；

【详解】解：依题意如图建立平面直角坐标系，则，，，



因为，所以在以为圆心，为半径的圆上运动，

设，，

所以，，

所以





，其中，，

因为，所以，即；

故选：D

**第二部分（非选择题 共110分）**

**二、填空题共5小题，每小题5分，共25分．**

11. 函数的定义域是\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】根据偶次方根的被开方数非负、分母不为零得到方程组，解得即可；

【详解】解：因为，所以，解得且，

故函数的定义域为；

故答案为：

12. 已知双曲线的渐近线方程为，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】首先可得，即可得到双曲线的标准方程，从而得到、，再跟渐近线方程得到方程，解得即可；

【详解】解：对于双曲线，所以，即双曲线的标准方程为，

则，，又双曲线的渐近线方程为，

所以，即，解得；

故答案为：

13. 若函数的一个零点为，则\_\_\_\_\_\_\_\_；\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 ①. 1 ②. 

【解析】

【分析】先代入零点，求得A的值，再将函数化简为，代入自变量，计算即可.

【详解】∵，∴

∴



故答案为：1，

14. 设函数若存在最小值，则*a*的一个取值为\_\_\_\_\_\_\_\_；*a*的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】 ①. 0（答案不唯一） ②. 1

【解析】

【分析】根据分段函数中的函数的单调性进行分类讨论，可知，符合条件，不符合条件，时函数没有最小值，故的最小值只能取的最小值，根据定义域讨论可知或， 解得 .

【详解】解：若时，，∴；

若时，当时，单调递增，当时，，故没有最小值，不符合题目要求；

若时，

当时，单调递减，，

当时，

∴或，

解得，

综上可得；

故答案为：0（答案不唯一），1

15. 己知数列各项均为正数，其前*n*项和满足．给出下列四个结论：

①的第2项小于3； ②为等比数列；

③为递减数列； ④中存在小于的项．

其中所有正确结论序号是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】①③④

【解析】

【分析】推导出，求出、的值，可判断①；利用反证法可判断②④；利用数列单调性的定义可判断③.

【详解】由题意可知，，，

当时，，可得；

当时，由可得，两式作差可得，

所以，，则，整理可得，

因为，解得，①对；

假设数列为等比数列，设其公比为，则，即，

所以，，可得，解得，不合乎题意，

故数列不是等比数列，②错；

当时，，可得，所以，数列为递减数列，③对；

假设对任意的，，则，

所以，，与假设矛盾，假设不成立，④对.

故答案为：①③④.

【点睛】关键点点睛：本题在推断②④的正误时，利用正面推理较为复杂时，可采用反证法来进行推导.

**三、解答题共6小愿，共85分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．**

16. 在中，．

（1）求；

（2）若，且的面积为，求的周长．

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）利用二倍角的正弦公式化简可得的值，结合角的取值范围可求得角的值；

（2）利用三角形的面积公式可求得的值，由余弦定理可求得的值，即可求得的周长.

【小问1详解】

解：因为，则，由已知可得，

可得，因此，.

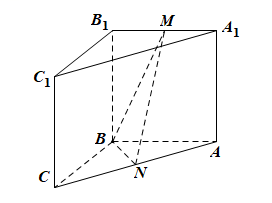
【小问2详解】

解：由三角形的面积公式可得，解得.

由余弦定理可得，，

所以，的周长为.

17. 如图，在三棱柱中，侧面为正方形，平面平面，，*M*，*N*分别为，*AC*的中点．



（1）求证：平面；

（2）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求直线*AB*与平面*BMN*所成角的正弦值．

条件①：；

条件②：．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．

【答案】（1）见解析 （2）见解析

【解析】

【分析】（1）取的中点为，连接，可证平面平面，从而可证平面.

（2）选①②均可证明平面，从而可建立如图所示的空间直角坐标系，利用空间向量可求线面角的正弦值.

【小问1详解】

取的中点为，连接，

由三棱柱可得四边形为平行四边形，

而，则，

而平面，平面，故平面，

而，则，同理可得平面，

而平面，

故平面平面，而平面，故平面，

小问2详解】

因为侧面为正方形，故，

而平面，平面平面，

平面平面，故平面，

因为，故平面，

因为平面，故，

若选①，则，而，，

故平面，而平面，故，

所以，而，，故平面，

故可建立如所示的空间直角坐标系，则，

故，

设平面的法向量为，

则，从而，取，则，

设直线与平面所成的角为，则

.

若选②，因，故平面，而平面，

故，而，故，

而，，故，

所以，故，

而，，故平面，

故可建立如所示的空间直角坐标系，则，

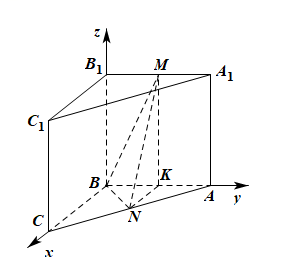
故，

设平面的法向量为，

则，从而，取，则，

设直线与平面所成的角为，则

.



18. 在校运动会上，只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛，比赛成绩达到以上（含）的同学将获得优秀奖．为预测获得优秀奖的人数及冠军得主，收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩，并整理得到如下数据（单位：m）：

甲：9.80，9.70，9.55，9.54，9.48，9.42，9.40，935，9.30，9.25；

乙：9.78，9.56，9.51，9.36，9.32，9.23；

丙：9.85，9.65，9.20，9.16．

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立．

（1）估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率；

（2）设*X*是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数，估计*X*的数学期望*E*（*X*）；

（3）在校运动会铅球比赛中，甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大？（结论不要求证明）

【答案】（1）0.4 （2）

（3）丙

【解析】

【分析】(1) 由频率估计概率即可

(2) 求解得*X*的分布列，即可计算出*X*的数学期望.

(3) 计算出各自获得最高成绩的概率，再根据其各自的最高成绩可判断丙夺冠的概率估计值最大.

【小问1详解】

由频率估计概率可得

甲获得优秀的概率为0.4，乙获得优秀的概率为0.5，丙获得优秀的概率为0.5，

故答案为0.4

【小问2详解】

设甲获得优秀为事件*A*1,乙获得优秀为事件*A*2，丙获得优秀为事件*A*3

，



，



，

.

∴*X*的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *P* |  |  |  |  |

∴

【小问3详解】

丙夺冠概率估计值最大.

因为铅球比赛无论比赛几次就取最高成绩.比赛一次，丙获得9.85的概率为，甲获得9.80的概率为，乙获得9.78的概率为.并且丙的最高成绩是所有成绩中最高的，比赛次数越多，对丙越有利.

19. 已知椭圆：的一个顶点为，焦距为．

（1）求椭圆*E*的方程；

（2）过点作斜率为*k*的直线与椭圆*E*交于不同的两点*B*，*C*，直线*AB*，*AC*分别与*x*轴交于点*M*，*N*，当时，求*k*的值．

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）依题意可得，即可求出，从而求出椭圆方程；

（2）首先表示出直线方程，设、，联立直线与椭圆方程，消元列出韦达定理，由直线、的方程，表示出、，根据得到方程，解得即可；

【小问1详解】

解：依题意可得，，又，

所以，所以椭圆方程为；

【小问2详解】

解：依题意过点的直线为，设、，不妨令，

由，消去整理得，

所以，解得，

所以，，

直线的方程为，令，解得，

直线的方程为，令，解得，

所以







，

所以，

即

即

即

整理得，解得

20. 已知函数．

（1）求曲线在点处的切线方程；

（2）设，讨论函数在上的单调性；

（3）证明：对任意的，有．

【答案】（1）

（2）在上单调递增.

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）先求出切点坐标，在由导数求得切线斜率，即得切线方程；

（2）在求一次导数无法判断的情况下，构造新的函数，再求一次导数，问题即得解；

（3）令，，即证，由第二问结论可知在[0,+∞）上单调递增，即得证.

【小问1详解】

解：因为，所以，

即切点坐标为，

又，

∴切线斜率

∴切线方程为：

【小问2详解】

解：因为，

所以，

令，

则，

∴在上单调递增，

∴

∴在上恒成立，

∴在上单调递增.

【小问3详解】

解：原不等式等价于，

令，，

即证，

∵，

，

由（2）知在上单调递增，

∴，

∴

∴在上单调递增，又因为，

∴，所以命题得证.

21. 已知为有穷整数数列．给定正整数*m*，若对任意的，在*Q*中存在，使得，则称*Q*为连续可表数列．

（1）判断是否为连续可表数列？是否为连续可表数列？说明理由；

（2）若为连续可表数列，求证：*k*的最小值为4；

（3）若为连续可表数列，且，求证：．

【答案】（1）是连续可表数列；不是连续可表数列．

（2）证明见解析． （3）证明见解析．

【解析】

【分析】（1）直接利用定义验证即可；

（2）先考虑不符合，再列举一个合题即可；

（3）时，根据和的个数易得显然不行，再讨论时，由可知里面必然有负数，再确定负数只能是，然后分类讨论验证不行即可．

小问1详解】

，，，，，所以是连续可表数列；易知，不存在使得，所以不是连续可表数列．

【小问2详解】

若,设为,则至多，6个数字，没有个，矛盾；

当时,数列，满足，，，，，，，， ．

【小问3详解】

，若最多有种，若，最多有种，所以最多有种，

若，则至多可表个数，矛盾,

从而若,则，至多可表个数，

而，所以其中有负的，从而可表1~20及那个负数（恰 21个），这表明中仅一个负的，没有0，且这个负的在中绝对值最小，同时中没有两数相同,设那个负数为 ，

则所有数之和，，

，再考虑排序，排序中不能有和相同，否则不足个，

 （仅一种方式），

与2相邻，

若不在两端,则形式，

若，则（有2种结果相同，方式矛盾），

， 同理 ，故在一端，不妨为形式，

若,则 （有2种结果相同，矛盾），同理不行，

，则 （有2种结果相同，矛盾），从而，

由于,由表法唯一知3,4不相邻,、

故只能，①或，②

这2种情形，

对①：，矛盾，

对②：，也矛盾，综上

．

【点睛】关键点睛，先理解题意，是否为可表数列核心就是是否存在连续的几项（可以是一项）之和能表示从到中间的任意一个值．本题第二问时，通过和值可能个数否定；第三问先通过和值的可能个数否定，再验证时，数列中的几项如果符合必然是的一个排序，可验证这组数不合题．

