**绝密☆启用前 试卷类型：A**

**2022年普通高等学校招生全国统一考试**

**数学**

**本试卷共4页，22小题，满分150分.考试用时120分钟.**

**注意事项：**

**1．答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上.将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.**

**2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.**

**3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.**

**4．考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 若集合，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】求出集合后可求.

详解】，故，

故选：D

2. 若，则（ ）

A.  B.  C. 1 D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】利用复数的除法可求，从而可求.

【详解】由题设有，故，故，

故选：D

3. 在中，点*D*在边*AB*上，．记，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据几何条件以及平面向量的线性运算即可解出．

【详解】因为点*D*在边*AB*上，，所以，即，

所以．

故选：B．

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔时，相应水面的面积为；水位为海拔时，相应水面的面积为，将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔上升到时，增加的水量约为（）（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

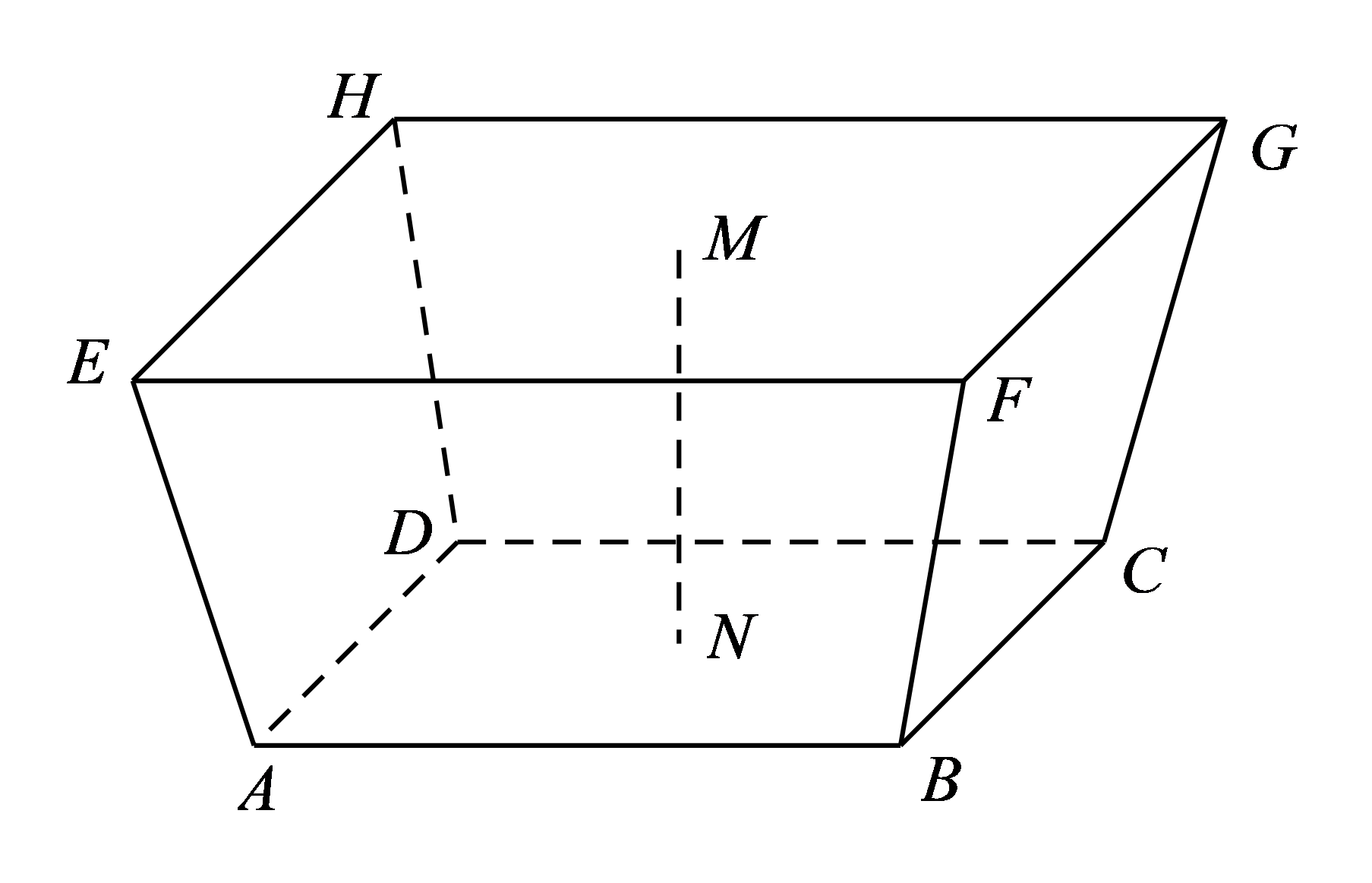
【分析】根据题意只要求出棱台的高，即可利用棱台的体积公式求出．

【详解】依题意可知棱台的高为(m)，所以增加的水量即为棱台的体积．

棱台上底面积，下底面积，

∴

．



故选：C．

5. 从2至8的7个整数中随机取2个不同的数，则这2个数互质的概率为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】由古典概型概率公式结合组合、列举法即可得解.

【详解】从2至8的7个整数中随机取2个不同的数，共有种不同的取法，

若两数不互质，不同的取法有：，共7种，

故所求概率.

故选：D.

6. 记函数的最小正周期为*T*．若，且的图象关于点中心对称，则（ ）

A. 1 B.  C.  D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】由三角函数的图象与性质可求得参数，进而可得函数解析式，代入即可得解.

【详解】由函数的最小正周期*T*满足，得，解得，

又因为函数图象关于点对称，所以，且，

所以，所以，，

所以.

故选：A

7. 设，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】构造函数， 导数判断其单调性，由此确定大小.

【详解】设，因为，

当时，，当时，

所以函数在单调递减，在上单调递增，

所以，所以，故，即，

所以，所以，故，所以，

故，

设，则,

令，，

当时，，函数单调递减，

当时，，函数单调递增，

又，

所以当时，，

所以当时，，函数单调递增，

所以，即，所以

故选：C.

8. 已知正四棱锥的侧棱长为*l*，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为，且，则该正四棱锥体积的取值范围是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】设正四棱锥的高为，由球的截面性质列方程求出正四棱锥的底面边长与高的关系，由此确定正四棱锥体积的取值范围.

【详解】∵ 球的体积为，所以球的半径,

设正四棱锥的底面边长为，高为，

则，,

所以，

所以正四棱锥的体积，

所以，

当时，，当时，，

所以当时，正四棱锥的体积取最大值，最大值为，

又时，，时，,

所以正四棱锥的体积的最小值为，

所以该正四棱锥体积的取值范围是.

故选：C.

**二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．**

9. 已知正方体，则（ ）

A. 直线与所成的角为 B. 直线与所成的角为

C. 直线与平面所成的角为 D. 直线与平面*ABCD*所成的角为

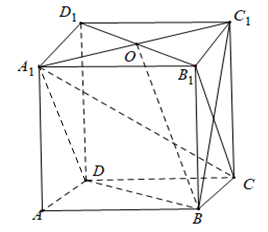
【答案】ABD

【解析】

【分析】数形结合，依次对所给选项进行判断即可.

【详解】如图，连接、，因为，所以直线与所成的角即为直线与所成的角，

因为四边形为正方形，则，故直线与所成的角为，A正确；



连接，因为平面，平面，则，

因为，，所以平面，

又平面，所以，故B正确；

连接，设，连接，

因为平面，平面，则，

因为，，所以平面，

所以为直线与平面所成的角，

设正方体棱长为，则，，，

所以，直线与平面所成的角为，故C错误；

因为平面，所以为直线与平面所成的角，易得，故D正确.

故选：ABD

10. 已知函数，则（ ）

A. 有两个极值点 B. 有三个零点

C. 点是曲线的对称中心 D. 直线是曲线的切线

【答案】AC

【解析】

【分析】利用极值点的定义可判断A，结合的单调性、极值可判断B，利用平移可判断C；利用导数的几何意义判断D.

【详解】由题，，令得或，

令得，

所以在上单调递减，在，上单调递增，

所以是极值点，故A正确；

因，，，

所以，函数在上有一个零点，

当时，，即函数在上无零点，

综上所述，函数有一个零点，故B错误；

令，该函数的定义域为，，

则是奇函数，是的对称中心，

将的图象向上移动一个单位得到的图象，

所以点是曲线的对称中心，故C正确；

令，可得，又，

当切点为时，切线方程为，当切点为时，切线方程为，

故D错误.

故选：AC

11. 已知*O*为坐标原点，点在抛物线上，过点的直线交*C*于*P*，*Q*两点，则（ ）

A. *C*的准线为 B. 直线*AB*与*C*相切

C.  D. 

【答案】BCD

【解析】

【分析】求出抛物线方程可判断A，联立*AB*与抛物线的方程求交点可判断B，利用距离公式及弦长公式可判断C、D.

【详解】将点的代入抛物线方程得，所以抛物线方程为，故准线方程为，A错误；

，所以直线的方程为，

联立，可得，解得，故B正确；

设过的直线为，若直线与轴重合，则直线与抛物线只有一个交点，

所以，直线的斜率存在，设其方程为，，

联立，得，

所以，所以或，，

又，，

所以，故C正确；

因为，，

所以，而，故D正确.

故选：BCD

12. 已知函数及其导函数的定义域均为，记，若，均为偶函数，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】BC

【解析】

【分析】转化题设条件为函数的对称性，结合原函数与导函数图象的关系，根据函数的性质逐项判断即可得解.

【详解】因为，均为偶函数，

所以即，，

所以，，则，故C正确；

函数，的图象分别关于直线对称，

又，且函数可导，

所以，

所以，所以，

所以，，故B正确，D错误；

若函数满足题设条件，则函数（*C*为常数）也满足题设条件，所以无法确定的函数值，故A错误.

故选：BC.

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是转化题干条件为抽象函数的性质，准确把握原函数与导函数图象间的关系，准确把握函数的性质（必要时结合图象）即可得解.

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．**

13. 的展开式中的系数为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_（用数字作答）．

【答案】-28

【解析】

【分析】可化为，结合二项式展开式的通项公式求解.

【详解】因为，

所以的展开式中含的项为，

的展开式中的系数为-28

故答案为：-28

14. 写出与圆和都相切的一条直线的方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】或或

【解析】

【分析】先判断两圆位置关系，分情况讨论即可.

【详解】圆的圆心为，半径为，圆的圆心为，半径为，

两圆圆心距为，等于两圆半径之和，故两圆外切，

如图，

当切线为*l*时，因为，所以，设方程为

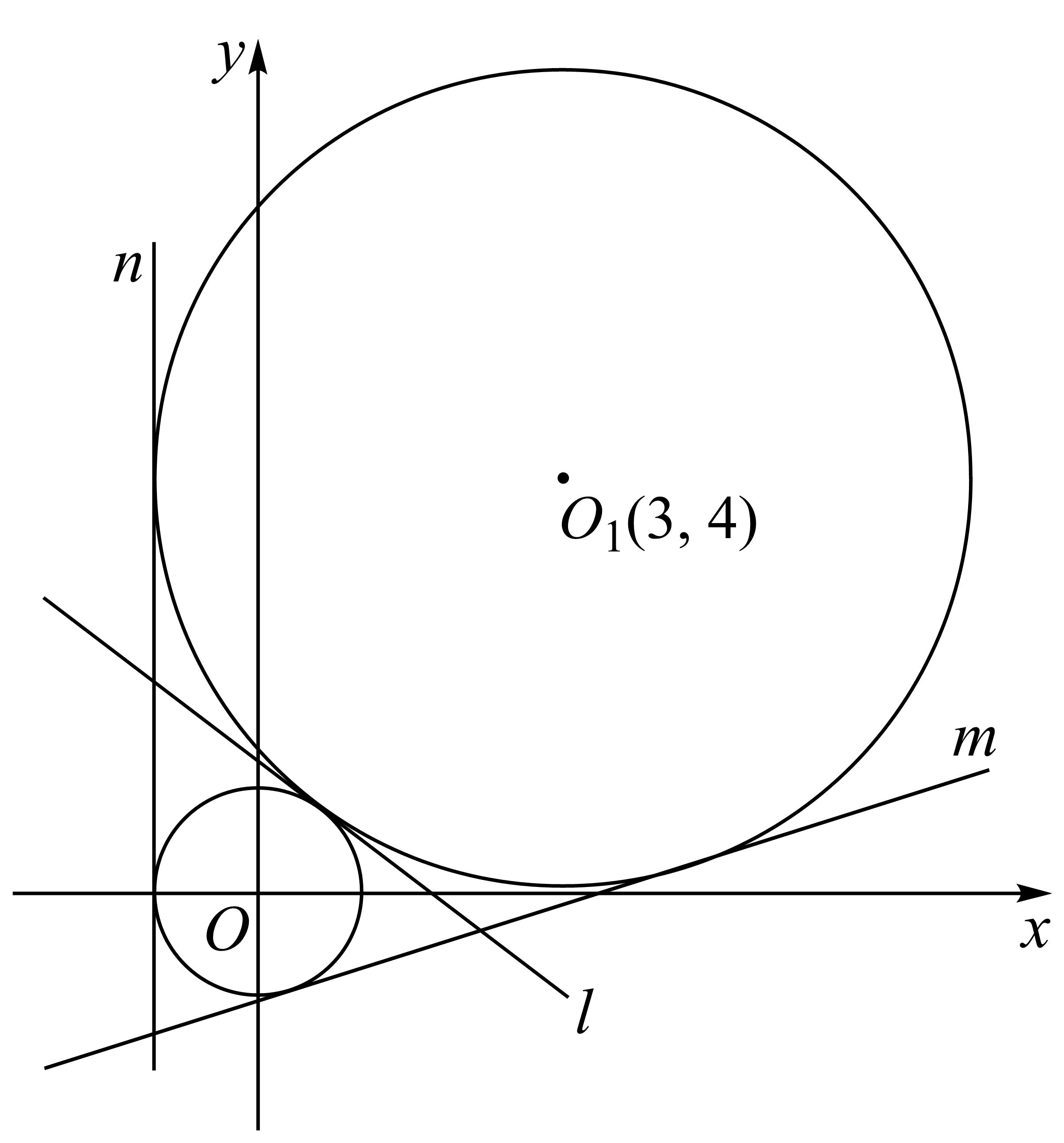
*O*到*l*的距离，解得，所以*l*的方程为，

当切线为*m*时，设直线方程为，其中，，

由题意，解得，

当切线为*n*时，易知切线方程为，

故答案为：或或.



15. 若曲线有两条过坐标原点的切线，则*a*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】设出切点横坐标，利用导数的几何意义求得切线方程，根据切线经过原点得到关于的方程，根据此方程应有两个不同的实数根，求得的取值范围.

【详解】∵，∴，

设切点为,则,切线斜率,

切线方程为：,

∵切线过原点，∴,

整理得：,

∵切线有两条，∴,解得或,

∴的取值范围是,

故答案为：

16. 已知椭圆，*C*的上顶点为*A*，两个焦点为，，离心率为．过且垂直于的直线与*C*交于*D*，*E*两点，，则的周长是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】13

【解析】

【分析】利用离心率得到椭圆的方程为，根据离心率得到直线的斜率，进而利用直线的垂直关系得到直线的斜率，写出直线的方程：，代入椭圆方程，整理化简得到：，利用弦长公式求得，得，根据对称性将的周长转化为的周长，利用椭圆的定义得到周长为.

【详解】∵椭圆的离心率为，∴，∴，∴椭圆的方程为，不妨设左焦点为，右焦点为，如图所示，∵，∴，∴为正三角形，∵过且垂直于的直线与*C*交于*D*，*E*两点，为线段的垂直平分线，∴直线的斜率为，斜率倒数为， 直线的方程：，代入椭圆方程，整理化简得到：，

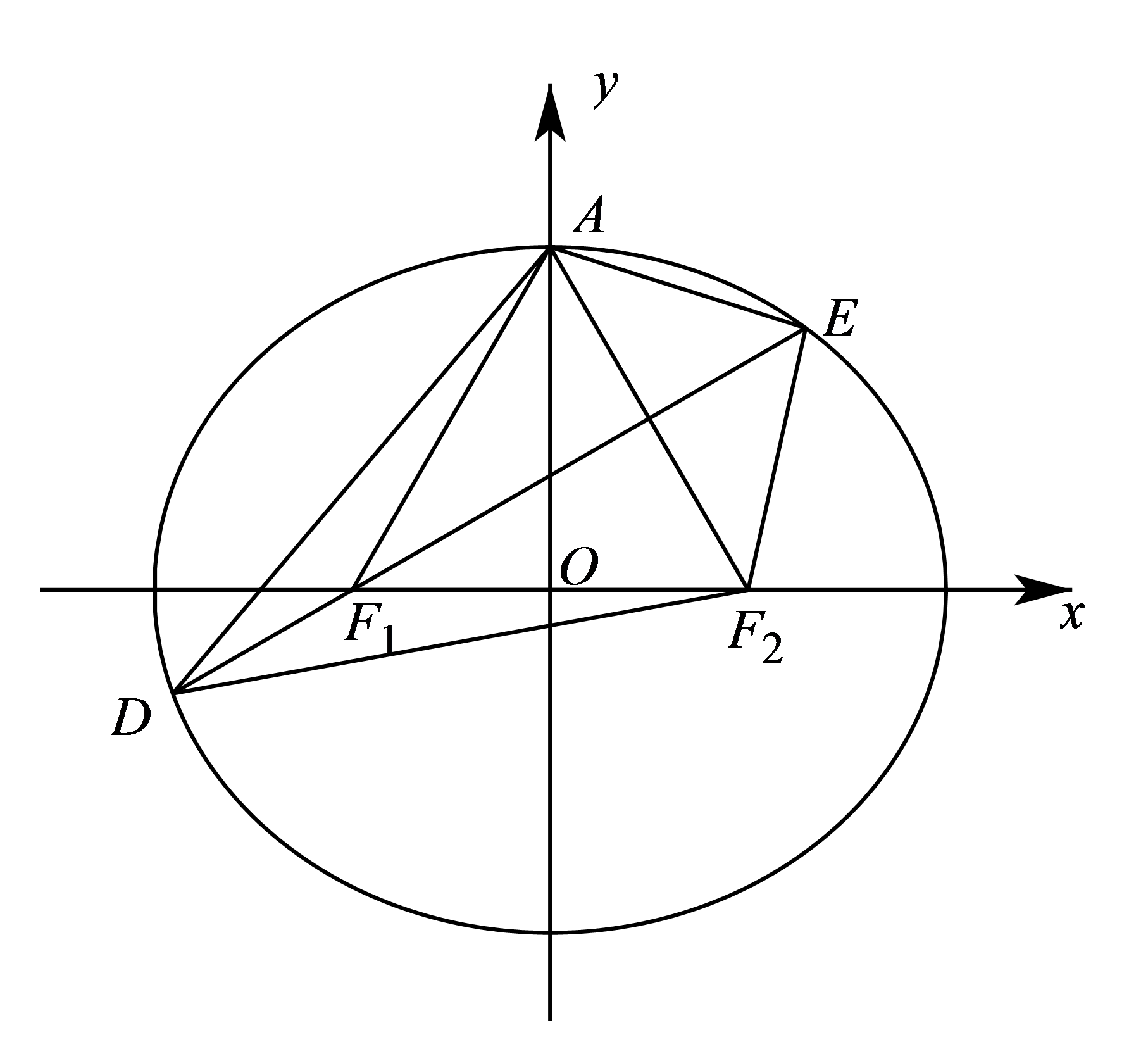
判别式*，*

∴，

∴ ， 得，

∵为线段的垂直平分线，根据对称性，，∴的周长等于的周长，利用椭圆的定义得到周长为.

故答案为：13.



**四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

17. 记为数列的前*n*项和，已知是公差为的等差数列．

（1）求的通项公式；

（2）证明：．

【答案】（1）

（2）见解析

【解析】

【分析】（1）利用等差数列的通项公式求得，得到，利用和与项的关系得到当时，,进而得：，利用累乘法求得，检验对于也成立，得到的通项公式；

（2）由（1）的结论，利用裂项求和法得到，进而证得.

【小问1详解】

∵，∴,∴,

又∵是公差为的等差数列，

∴,∴,

∴当时，，

∴,

整理得：,

即,

∴

，

显然对于也成立，

∴的通项公式；

【小问2详解】



∴

18. 记的内角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，已知．

（1）若，求*B*；

（2）求的最小值．

【答案】（1）；

（2）．

【解析】

【分析】（1）根据二倍角公式以及两角差的余弦公式可将化成，再结合，即可求出；

（2）由（1）知，，，再利用正弦定理以及二倍角公式将化成，然后利用基本不等式即可解出．

【小问1详解】

因为，即，

而，所以；

【小问2详解】

由（1）知，，所以，

而，

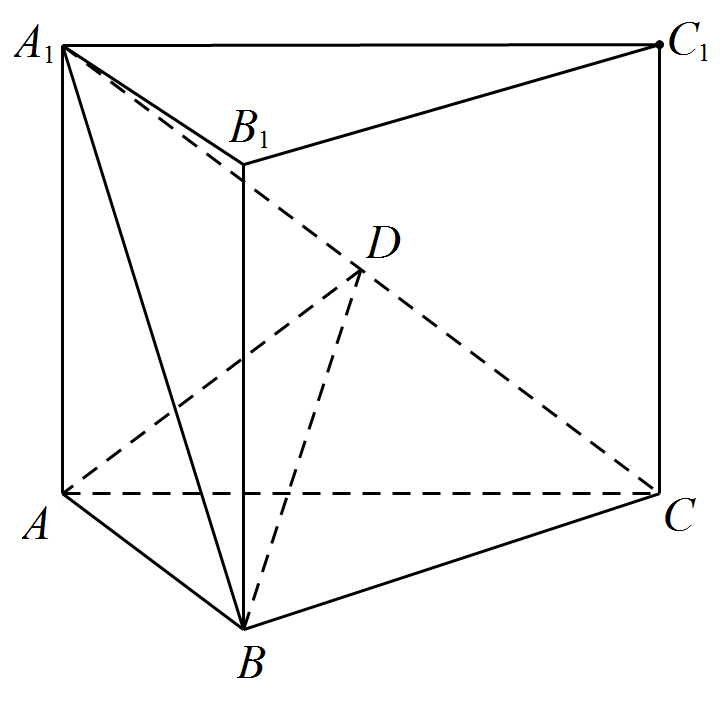
所以，即有．

所以

．

当且仅当时取等号，所以的最小值为．

19. 如图，直三棱柱的体积为4，的面积为．



（1）求*A*到平面的距离；

（2）设*D*为的中点，，平面平面，求二面角的正弦值．

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）由等体积法运算即可得解；

（2）由面面垂直的性质及判定可得平面，建立空间直角坐标系，利用空间向量法即可得解.

【小问1详解】

在直三棱柱中，设点*A*到平面的距离为*h*，

则，

解得，

所以点*A*到平面的距离为；

【小问2详解】

取的中点*E*,连接*AE*,如图，因为，所以,

又平面平面，平面平面，

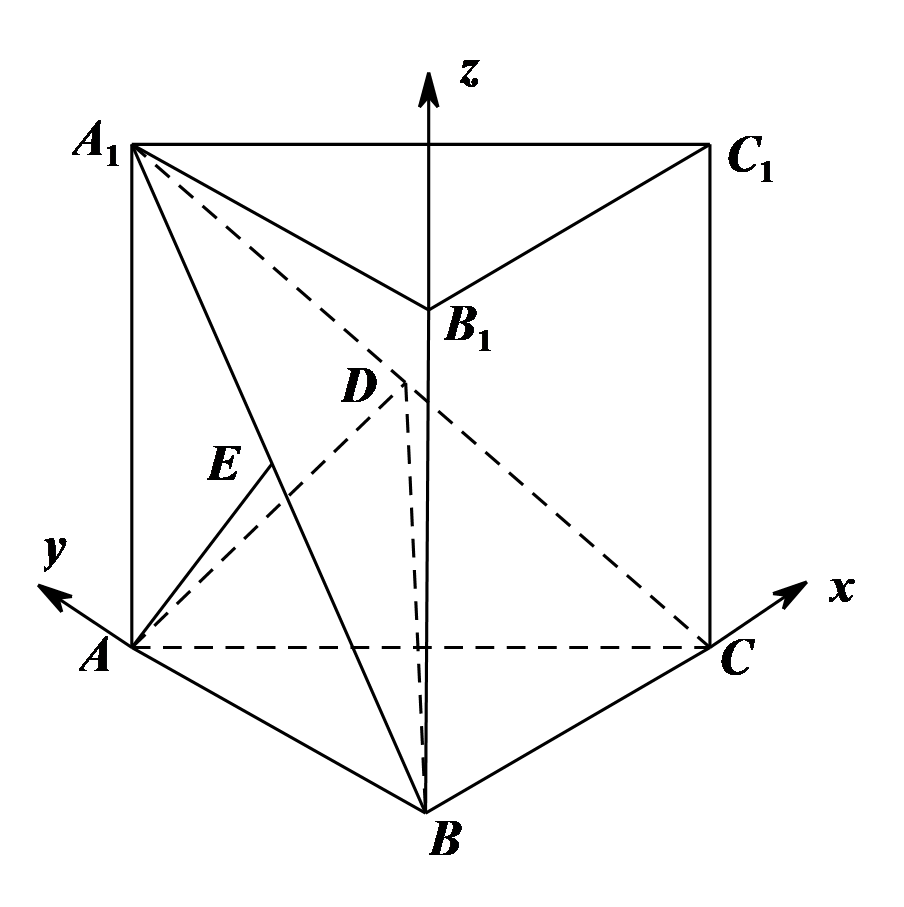
且平面，所以平面，

在直三棱柱中，平面，

由平面，平面可得，，

又平面且相交，所以平面，

所以两两垂直，以*B*为原点，建立空间直角坐标系，如图，



由（1）得，所以，，所以，

则,所以的中点，

则，,

设平面的一个法向量，则，

可取，

设平面的一个法向量，则，

可取，

则，

所以二面角的正弦值为.

20. 一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了100例（称为病例组），同时在未患该疾病的人群中随机调查了100人（称为对照组），得到如下数据：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 不够良好 | 良好 |
| 病例组 | 40 | 60 |
| 对照组 | 10 | 90 |

（1）能否有99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

（2）从该地的人群中任选一人，*A*表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，*B*表示事件“选到的人患有该疾病”．与的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为*R*．

（ⅰ）证明：；

（ⅱ）利用该调查数据，给出的估计值，并利用（ⅰ）的结果给出*R*的估计值．

附，

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
| *k* | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

【答案】（1）答案见解析

（2）（i）证明见解析；(ii)；

【解析】

【分析】(1)由所给数据结合公式求出的值，将其与临界值比较大小，由此确定是否有99%的把握认为患该疾病群体与未黄该疾病群体的卫生习惯有差异；(2)(i) 根据定义结合条件概率公式即可完成证明；(ii)根据（i）结合已知数据求.

【小问1详解】

由已知，

又，，

所以有99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异.

【小问2详解】

(i)因为，

所以

所以，

(ii)

由已知，，

又，，

所以

21. 已知点在双曲线上，直线*l*交*C*于*P*，*Q*两点，直线的斜率之和为0．

（1）求*l*的斜率；

（2）若，求的面积．

【答案】（1）；

（2）．

【解析】

【分析】（1）由点在双曲线上可求出，易知直线*l*的斜率存在，设，，再根据，即可解出*l*的斜率；

（2）根据直线的斜率之和为0可知直线的倾斜角互补，再根据即可求出直线的斜率，再分别联立直线与双曲线方程求出点的坐标，即可得到直线的方程以及的长，由点到直线的距离公式求出点到直线的距离，即可得出的面积．

【小问1详解】

因为点在双曲线上，所以，解得，即双曲线

易知直线*l*的斜率存在，设，，

联立可得，，

所以，，．

所以由可得，，

即，

即，

所以，

化简得，，即，

所以或，

当时，直线过点，与题意不符，舍去，

故．

【小问2详解】

不妨设直线的倾斜角为，因为，所以，

因为，所以，即，

即，解得，

于是，直线，直线，

联立可得，，

因为方程有一个根为，所以，，

同理可得，，．

所以，，

点到直线的距离，

故的面积为．

22. 已知函数和有相同最小值．

（1）求*a*；

（2）证明：存在直线，其与两条曲线和共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列．

【答案】（1）

（2）见解析

【解析】

【分析】（1）根据导数可得函数的单调性，从而可得相应的最小值，根据最小值相等可求*a.*注意分类讨论.

（2）根据（1）可得当时， 的解的个数、的解的个数均为2，构建新函数，利用导数可得该函数只有一个零点且可得的大小关系，根据存在直线与曲线、有三个不同的交点可得的取值，再根据两类方程的根的关系可证明三根成等差数列.

【小问1详解】

的定义域为，而，

若，则，此时无最小值，故.

的定义域为，而.

当时，，故在上为减函数，

当时，，故在上为增函数，

故.

当时，，故在上为减函数，

当时，，故在上为增函数，

故.

因为和有相同的最小值，

故，整理得到，其中，

设，则，

故为上的减函数，而，

故的唯一解为，故的解为.

综上，.

【小问2详解】

由（1）可得和的最小值为.

当时，考虑的解的个数、的解的个数.

设，，

当时，，当时，，

故在上为减函数，在上为增函数，

所以，

而，，

设，其中，则，

故在上为增函数，故，

故，故有两个不同的零点，即的解的个数为2.

设，，

当时，，当时，，

故在上为减函数，在上为增函数，

所以，

而，，

有两个不同的零点即的解的个数为2.

当，由（1）讨论可得、仅有一个零点，

当时，由（1）讨论可得、均无零点，

故若存在直线与曲线、有三个不同的交点，

则.

设，其中，故，

设，，则，

故在上为增函数，故即，

所以，所以在上为增函数，

而，，

故在上有且只有一个零点，且：

当时，即即，

当时，即即，

因此若存在直线与曲线、有三个不同交点，

故，

此时有两个不同的零点，

此时有两个不同的零点，

故，，，

所以即即，

故为方程的解，同理也为方程的解

又可化为即即，

故为方程的解，同理也为方程的解，

所以，而，

故即.

【点睛】思路点睛：函数的最值问题，往往需要利用导数讨论函数的单调性，此时注意对参数的分类讨论，而不同方程的根的性质，注意利用方程的特征找到两类根之间的关系.

