

Simulatie Black Jack counting card to beat Casino

模擬 21 點算牌技巧擊敗賭場



統計計算與模擬
期末報告

108354021
柳瑞俞

摘要

電影「決勝 21 點」中，有提到一個「算牌」策略，他們利用這方法贏遍了賭城。本研究試圖使用統計模擬的方式，驗證在各種條件與規則下「算牌」策略是否能夠確實的讓賭客在 21 點遊戲中擊敗莊家。

本研究試圖討論三點，1. 藉由算牌策略，在真數大時下注更高金額；反之真數小時下注更低的金額，模擬多副牌局後，觀察玩家最後收益。2. 觀察玩家在各流水數下獲勝的機率。3. 比較在各種規則下，何種對於玩家最為有利。而模擬規則包含下注金額 \$10 與 \$50，玩家數 2 人、4 人與 7 人，牌副數四副、五副、六副、七副與八副，叫牌閾值 13~16。

模擬結果發現叫牌閾值會影響勝率，撲克牌數會影響玩的局數，玩家數會影響變異數，下注金額會影響總收益的最大與最小值；且在下注金額\$50、玩家數 2 人，牌副數 8 副與叫牌閾值 16 時，有最高的總收益。

流水數為正時的勝率大於流水數為負時的勝率；流水數為正時的敗率低於流水數為負時的敗率；因此考慮流水數決定下注金額，確實是一個好的策略。

模擬過程並非每次總收益皆為正，代表了這並不是一個完美必勝的策略，時間久了，賭場中莊家才是最後的贏家，切勿拿出所有家當拚勝負。

目錄

一、	研究背景與動機.....	4
二、	研究目的.....	5
三、	遊戲流程與規則.....	6
四、	模擬規則.....	7
五、	模擬結果.....	8
	投注單位 \$10，叫牌閥值 13.....	8
	投注單位 \$10，叫牌閥值 14.....	8
	投注單位 \$10，叫牌閥值 15.....	9
	投注單位 \$10，叫牌閥值 16.....	9
	投注單位 \$50，叫牌閥值 13.....	10
	投注單位 \$50，叫牌閥值 14.....	10
	投注單位 \$50，叫牌閥值 15.....	11
	投注單位 \$50，叫牌閥值 16.....	11
六、	結論.....	14
七、	附錄.....	15

一、研究背景與動機

樂透或是賭博中，玩家得到的報酬期望值都是小於 0。在賭場中，只有一個遊戲是賭客能贏莊家的，就是「BLACK JACK」（即為 21 點）。

電影「決勝 21 點」中，有提到一個「算牌」策略，電影中，學校教授找了一群數理能力優異的學生並教導他們算牌技巧，每周末會帶領學生們至拉斯維加斯賭場賭 21 點，他們藉由心算、記憶力與團隊合作，在賭場無往不利，雖然這樣的手法並不算「詐賭」，但是賭城的所有賭場都明令禁止。如果被識破，可能會被保全員拷打、沒收身上的賭金，終身禁止進入賭場。而這些學生與老師以低調的態度，贏遍了賭城。

本研究利用統計模擬的方式，驗證在各種條件與規則下「算牌」策略是否能夠確實的讓賭客在 21 點遊戲中擊敗莊家。

二、 研究目的

本研究利用統計模擬的方式，驗證在各種條件與規則下「算牌」策略是否能夠確實的讓玩家在基本 21 點遊戲中擊敗莊家，主要探討以下幾點：

1. 撲克牌 21 點遊戲中，藉由算牌策略，在真數大時下注更高金額；反之真數小時下注更低的金額，藉由模擬多副牌局後，觀察玩家最後收益為多少。
2. 藉由統計模擬，觀察玩家在各流水數下獲勝的機率。
3. 比較在各種規則下（例如牌數、玩家數與叫牌策略等），何種規則對於玩家最為有利。

註：

每次洗牌起始流水數是 0，莊家每發一張牌，賭客重新計算流水數。

若牌是 2, 3, 4, 5, 6，將流水數加 1；

若牌是 7, 8, 9，流水數不變；

若牌是 10, J, Q, K, A，流水數就減 1。

真數 = 流水數 / 剩下牌副數； 注碼 = 投注單位 * (真數 - 1)

三、 遊戲流程與規則

1. 洗牌
2. 向各玩家分別派發一張明牌
3. 莊家發給自己一張明牌
4. 向各玩家派第二張明牌
5. 莊家再發給自己一張暗牌
6. 玩家進行金額下注動作
7. 莊家逐位詢問玩家是否加牌、直至閒家不加牌才詢問下一位玩家，輪流詢問玩家直至最後一位玩家加牌完成
8. 莊家如不足 16 點便需加牌直至超過或等於 16 點
9. 對未有爆牌的玩家，比點數大小，大者勝，可得賠金；如莊家爆牌、未有爆牌的玩家便可得賠金（超過 21 點即為爆牌）
10. 回收已使用的牌及打賞
11. 進行下一輪（重複步驟 1~10）

註：

1. 2 - 10 的牌按牌面的點數計算，J、Q、K 每張為 10 點。A 可記為 1 點或為 11 點，若玩家會因 A 而爆牌則 A 可算為 1 點。
2. 現今賭場洗牌大部分皆為每結束一次牌局立即使用洗牌機洗牌，重複洗牌後條件機率會喪失，故在此模擬每副牌局時，發牌至牌剩下一半時才進行洗牌的動作。

四、 模擬規則

1. 下注策略：（參考 21 點全職玩家建議）

每次洗牌起始流水數是 0，莊家每發一張牌，賭客重新計算流水數。

若牌是 2, 3, 4, 5, 6，將流水數加 1；

若牌是 7, 8, 9，流水數不變；

若牌是 10, J, Q, K, A，流水數就減 1。

$\text{真數} = \text{流水數} / \text{剩下牌副數}$ ； $\text{注碼} = \text{投注單位} * (\text{真數} - 1)$

分別模擬投注單位\$10 與\$50，並限制本金為 \$100000

2. 叫牌策略：（參考 21 點算牌策略時的叫牌策略）

因為流水數代表著大牌與小牌比例，保守策略為大牌多時，盡量不叫牌，等莊家爆牌（因為莊家至少要 16 點），在此模擬玩家叫牌閾值為 13、14、15、16 點。

3. 牌數：（參考賭場實際情況並延伸討論）

每局起始牌數為四副、五副、六副、七副與八副

4. 玩家數：

起始玩家數（包含莊家）為 2 人、4 人與 7 人

五、 模擬結果

模擬 1 次稱為玩到牌少於一半後重新洗牌，在此將模擬 100 次的過程重複 50 次並計算其收益的平均與標準差。

● 投注單位 \$10，叫牌閥值 13

		人數		
		2 人	4 人	7 人
牌 數	四副	-1204.4 (402.1583)	-621 (262.0115)	-415.4 (219.3114)
	五副	-1432 (413.0079)	-784.8 (377.1387)	-403 (276.9753)
	六副	-1678.4 (394.872)	-969.4 (341.8701)	-523.6 (284.4885)
	七副	-2005.4 (582.6513)	-1145.8 (375.6795)	-574 (348.9518)
	八副	-2364 (706.8181)	-1164 (389.15)	-705.8 (334.5548)

● 投注單位 \$10，叫牌閥值 14

		人數		
		2 人	4 人	7 人
牌 數	四副	-766.6 (403.3412)	-380.8 (322.5779)	-193.4 (251.6688)
	五副	-843.4 (483.2991)	-415 (299.5319)	-209.2 (253.4484)
	六副	-1173.4 (481.9036)	-575.2 (319.9633)	-323.4 (269.5696)
	七副	-1222.4 (558.4986)	-681.2 (448.3377)	-337.8 (252.3384)
	八副	-1561.2 (569.7212)	-803 (374.3416)	-386.2 (285.349)

- 投注單位 \$10，叫牌閾值 15

		人數		
		2 人	4 人	7 人
牌 數	四副	-475.4 (417.9923)	-163 (294.0238)	-98.4 (271.341)
	五副	-424.8 (428.7344)	-203.200 (369.928)	-109.6 (240.7129)
	六副	-429 (501.1874)	-236.6 (395.524)	-118.2 (271.4338)
	七副	-685.2 (525.9015)	-280 (367.3957)	-147.6 (288.95)
	八副	-723.2 (529.0902)	-350 (397.9154)	-184.8 (299.2524)

- 投注單位 \$10，叫牌閾值 16

		人數		
		2 人	4 人	7 人
牌 數	四副	-24.8 (374.2434)	31.4 (259.0958)	-10 (233.6315)
	五副	39.2 (433.9841)	-46.2 (315.2446)	-22.6 (209.8766)
	六副	43.3 (428.2746)	18.8 (325.8248)	-85.2 (244.3742)
	七副	65.6 (506.0619)	-82.6 (383.1172)	55.2 (261.6372)
	八副	54.8 (407.1015)	-35.6 (400.5005)	17.2 (259.8229)

- 投注單位 \$50，叫牌閥值 13

		人數		
		2 人	4 人	7 人
牌 數	四副	-5992 (2314.316)	-3269 (1552.48)	-1426 (1002.967)
	五副	-6865 (2542.922)	-3907 (1787.628)	-1949 (1413.329)
	六副	-8359 (2499.932)	-4862.0 (2116.036)	-2505 (1388.445)
	七副	-10383 (3025.48)	-5340 (2080.546)	-2510 (1448.257)
	八副	-12297 (3157.618)	-6247 (2477.396)	-3353 (1255.982)

- 投注單位 \$50，叫牌閥值 14

		人數		
		2 人	4 人	7 人
牌 數	四副	-3516 (1999.093)	-2267 (1858.636)	-1137 (1294.329)
	五副	-4968 (1804.41)	-2292 (1858.636)	-1191 (1552.342)
	六副	-4664 (2754.2)	-3109 (1482.438)	-1416 (1320.074)
	七副	-5979 (2714.043)	-4013 (2010.605)	-1717 (1688.122)
	八副	-7684 (3335.836)	-3832 (1828.369)	-1911 (1197.459)

- 投注單位 \$50，叫牌閾值 15

		人數		
		2 人	4 人	7 人
牌 數	四副	-1767 (1788.872)	-874 (1418.617)	-486 (1015.544)
	五副	-2840 (2340)	-1425 (1606.595)	-726 (1143.091)
	六副	-1669 (2343.726)	-1234 (1679.512)	-884 (1415.672)
	七副	-2692 (2928.996)	-1852 (1868.017)	-778 (1270.542)
	八副	-3665 (3165.99)	-2059 (2031.102)	-777 (1145.542)

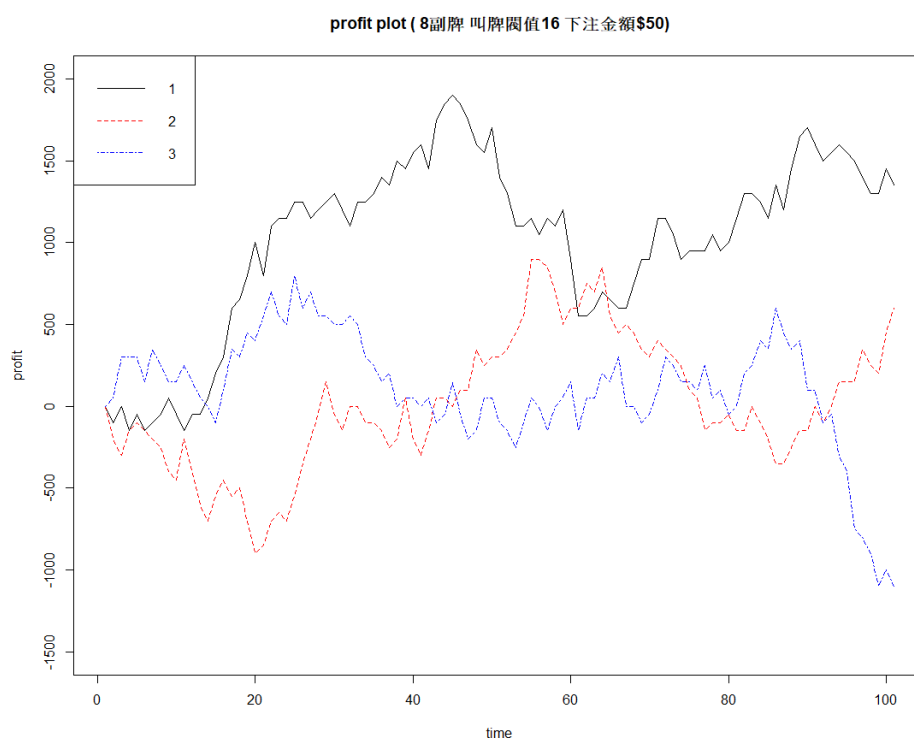
- 投注單位 \$50，叫牌閾值 16

		人數		
		2 人	4 人	7 人
牌 數	四副	283 (2044.795)	403 (1193.349)	88 (1200.874)
	五副	-150 (2285.647)	42 (1453.615)	66 (1192.17)
	六副	142 (2872)	134 (1726.813)	-77 (1202.854)
	七副	-223 (2919)	169 (1534.664)	-35 (1332.645)
	八副	916 (2593.289)	625 (2117.716)	-109 (1170.239)

上面八張報表各種狀況模擬結果可以看出，影響最後總收益最多的變數是叫牌時決定的閾值，而這也間接的代表我們的叫牌策略，此次叫牌策略參考網路上的保守策略，因為莊家最低需要 16 點，利用大小牌比例的因素，使莊家需要補牌，進而造成爆牌。但在本研究中發現，讓自己閾值低於 16 並不是個好策略。

而我們可以發現，撲克牌數主要是影響你玩的局數，若你的叫牌閾值太低，會使你輸的場次比贏的多，而玩得更多局，會有越輸越多的狀況發生；在玩家數方面，人數越多，會使你的標準差更小，因為人越多越能分攤更多撲克牌，使得流水數經常在 0 之間徘徊，使得過大或過小的流水數出現次數較少；下注金額則是會決定到你的總收益，若是在叫牌閾值較低的時候，下注金額越大，則會使你輸的更多，反之在叫牌閾值較高的時候，下注金額越大，會使你贏的更多。

下圖為模擬玩完 100 副牌後收益最高的情況，8 副牌、叫牌閾值 16 與下注金額\$50，模擬三次可以發現最後收益有正亦有負，代表這並不是穩贏不輸的必勝策略。



而模擬玩完 100 副牌，在 8 副牌、叫牌閾值 16 與下注金額\$50 的情況下，可以計算出其各流水數出現次數如下：

流水數	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
次數	1	3	35	63	112	182	194	162	108	71	14	13	3

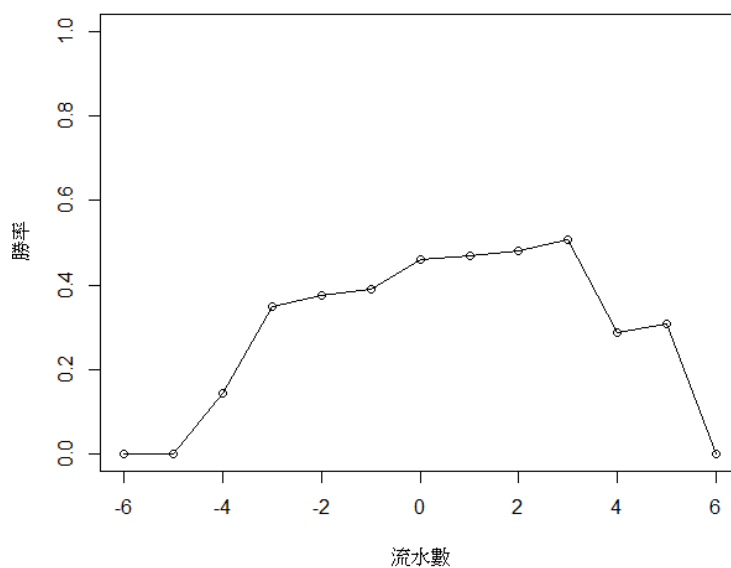
而各流水數的勝率如下：

流水數	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
勝率(%)	0	0	14.2	34.9	37.5	39.0	45.8	46.9	48.1	50.7	28.5	30.7	0

從上面模擬結果可以發現，流水數越高，勝率相對的也較高，驗證了一開始下注策略的想法，真數大時下注越多，而真數與流水數也有正比關係，剛好驗證了大牌小牌比例會間接影響玩家勝率的想法，而從下圖各流水數敗率圖來看，卻時流水數高時，敗率也較低。

流水數	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
敗率(%)	100	0	31.4	23.8	20.5	20.8	19.5	14.8	17.5	19.7	14.2	15.3	0

各流水數勝率圖



六、 結論

從模擬過程發現，叫牌閾值、撲克牌數、玩家數、下注金額皆會影響到最後的總收益，其中叫牌閾值影響最大，而這也與自己的叫牌策略有關，因為 21 點遊戲是否加牌取決於自己，而這方面策略過多，本研究中僅討論最常見的「保守策略」，也就是善用莊家至少要 16 點的規則，讓莊家在叫牌時容易爆牌的局下注更高的金額，讓自己在勝率較高時拿到更高收益。在本研究中發現此策略並不太好，因為閾值過低時，想讓莊家爆牌的機率也不高，純拚點數的狀況下會造成自己勝率下降。

而撲克牌數會影響玩的局數，玩家數會影響變異數，下注金額會影響總收益的最大與最小值。

從各流水數勝率可以知道，流水數為正時的勝率高於流水數為負時的勝率；流水數為正時的敗率低於流水數為負時的敗率，因此本策略參考流水數並決定下注金額的想法，才是最直接影響總收益的因素。

在本次模擬過程中所考慮的各種狀況可以知道，在下注金額 \$50、牌副數 8 副、玩家數 7 人與叫牌閾值 16 的情況下，最後總收益是最佳的，也就是當你確保你勝率是會高時，玩家數越多可以讓你變異數更小，牌副數是讓你玩更多局，而下注金額越高會讓你贏的更多，但切記，可能也會輸的更多，而從結果顯示，玩完 8 副牌 50 次後，最後收益僅有 917 元，是非常不符合時間成本的想法。

電影「決勝 21 點」中雖然也是採取此種策略，但他們有團隊配合，有其他人先在各賭桌上觀察並計算流水數，等流水數大時，才讓主要玩家加入，因此他們可以確保只玩到勝率較高的牌局。

七、 附錄

參考資料：

1. 如何用 21 點擊敗賭場？
<http://xccds1977.blogspot.com/2012/03/21.html?m=1>
2. Beating the Dealer with Programming
<https://towardsdatascience.com/beating-the-dealer-with-simple-statistics-71b5e3701638>
3. 決勝 21 點算牌技巧
https://blog.xuite.net/yahoo_swaq0511/blog/256273892-%E6%B1%BA%E5%8B%9D21%E9%BB%9E%E4%B9%8B%E7%AE%97%E7%89%8C%E6%8A%80%E5%B7%A7++%E7%B5%95%E5%B0%8D%E5%BF%85%E7%9C%8B
4. 決勝 21 點 - 21 點算牌法
<https://medium.com/@macaugamblinghk/%E6%B1%BA%E5%8B%9D21%E9%BB%9E-%E7%AE%97%E7%89%8C%E6%B3%95-3d8e3d3cff14>
5. 維基百科 - 21 點
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B1%BA%E5%8B%9D21%E9%BB%9E>
6. 電影 - 「決勝 21 點」