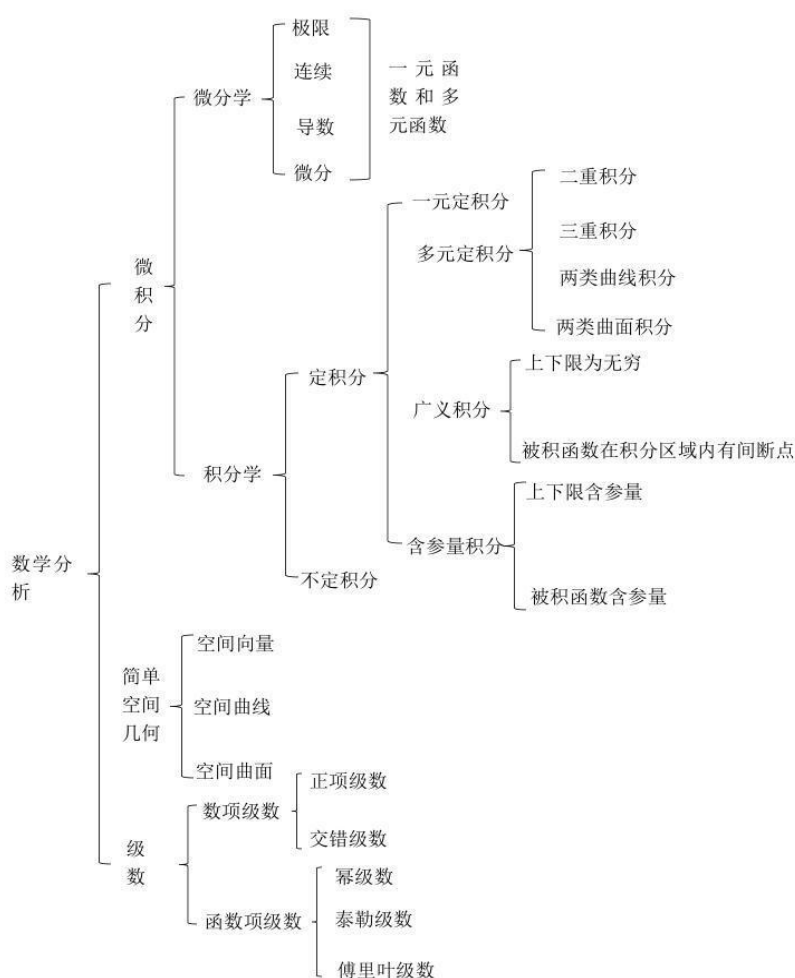


# 前言

在一切的开始之前，我想我们还是先梳理一下所谓数学分析、高等数学、与微积分的关系。



正如此图所示，所谓数学分析者是相对于整个数学而言，属于是数学的基础分支，与之相对应的是数论（研究数的性质）、代数（研究运算结构）、几何学（研究形的性质）等等，而微积分很明显是作为数学分析的主要部分和主要工具而存在的。

通俗些来讲，微积分是数学分析的第一部分，而微积分加上一些简单的空间几何就构成的高等数学，而再加上级数就构成了完整的数学分析。

数学分析是一门很完善的学科，正如其名，是指对于一些数学概念的变化性质的研究，故而也可以将其看作是在微积分的基础上对一些变化的解释。

首先，还是先提一提微积分吧，顾名思义，这其中包括微分学和积分学，微分学的首要基础是极限，也就是针对一个点对其在一个极小的范围内进行其值的判断，然后在极限的基础上针对该点加上了左右逼近的说法，使用左右极限是否相等来判断是否连续，而在连续的基础上就顺理成章的引入了导数，也就是变化率的概念，他的根本逻辑还是点到线，线又推回点，而最后到达的结果也就是所谓的微分，这个微分是为了和积分相对应才普遍使用的。

当我们能够熟练使用导数以及微分的技巧后，我们便可以使用逆运算，如函数 $x^2$ 的导数是 $2x$ ，这里使用定义法可以求出：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x \end{aligned}$$

那么同样的，我们在知道 $f(x) = 2x$ 后，便可以对它进行积分：

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int 2x dx \\ &= 2 \int x dx \end{aligned}$$

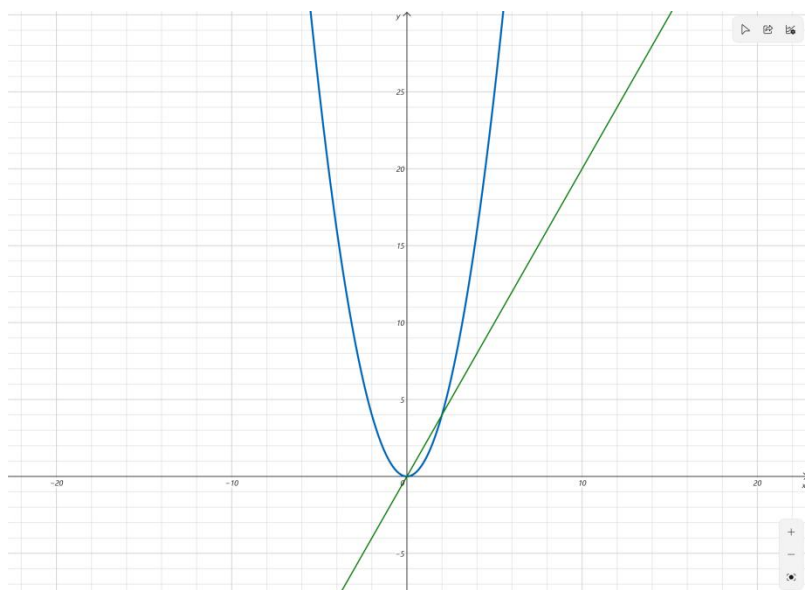
又由于： $\int f'(x) dx = f(x)$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f'(x) \\ \int \frac{dy}{dx} dx &= y \end{aligned}$$

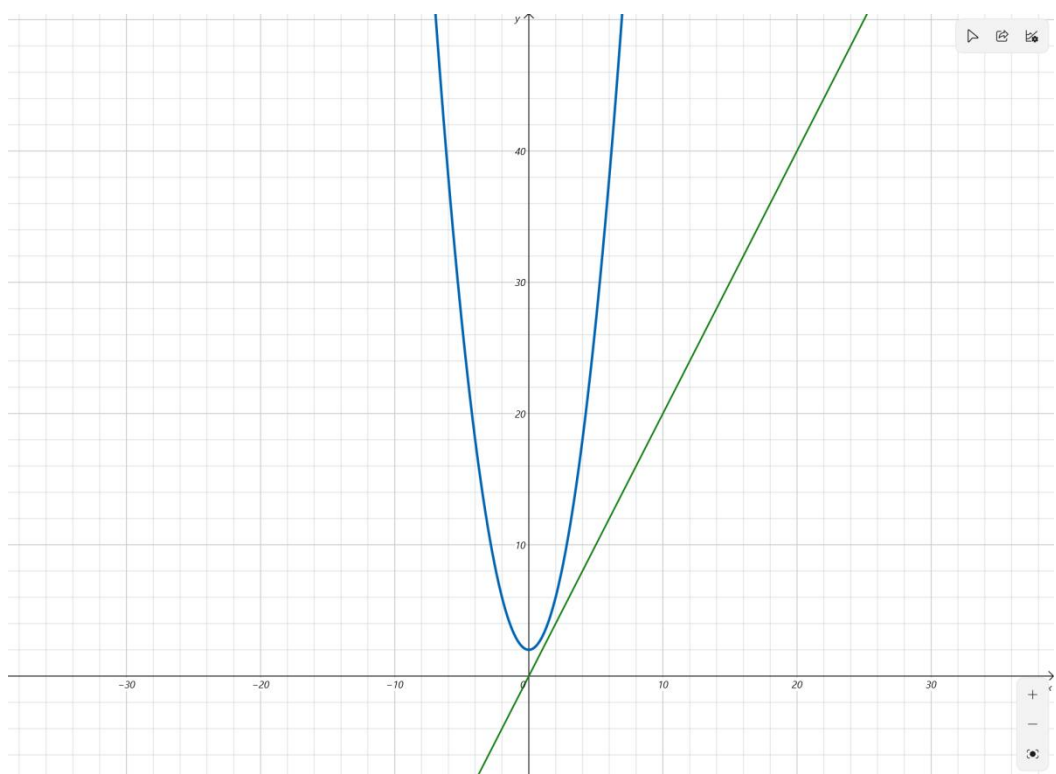
$\int dy = y$ （这里可以看出 $y$ 的导数就是1）

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2x \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 2x \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= 2x \end{aligned}$$

那么这个式子便与之前的式子一般无二了，我们轻而易举可以想到 $f(x) = x^2$ ，但这样的结果明显是不对的，画出 $x^2$ 的图像（蓝色）：



不难看出 $x^2$ 是符合这个变化趋势的，比如，在 $x < 0$ 时， $f(x)$ 递减并归于平缓， $x > 0$ 时， $f(x)$ 递增，并且递增趋势趋于无穷（接近垂直）。



此时的 $f(x)$ 改为了 $x^2 + 2$ ，不难看出，该函数依旧满足这个变化趋势，所以单独希望通过变化率又或者时微分来直接求得原函数是不可能的。

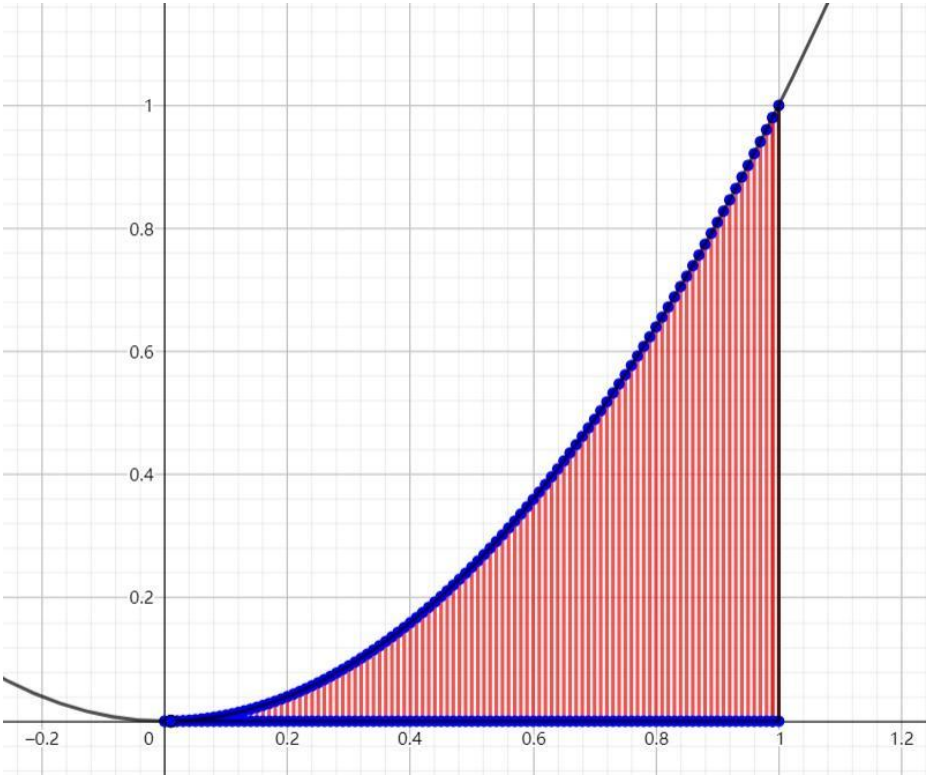
故此，在我们知道一个函数的微分，并对它进行不定积分后，则需要在其背后加上一个常数 $C$ 来满足全部条件，故而 $\int 2x dx$ 的真正结果应该是 $x^2 + C$ 。

通过上面那个例子，我们不难看出积分与微分之间的关系是通过导数连接的，当然其中还有其他的一些定理，后续我们将继续讨论这些问题。

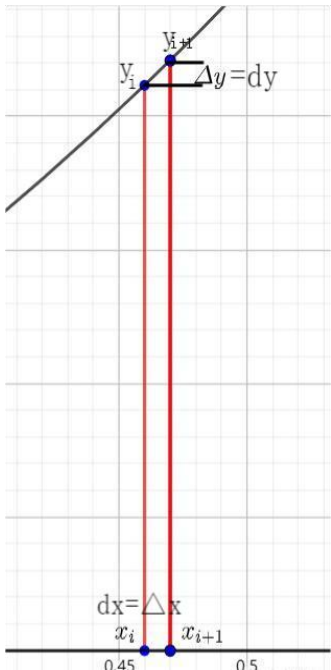
言归正传，如果上述的例子还是没有让你想明白所谓：

$$x、dx、\Delta x、x'、f(x)、f'(x)、dy、\Delta y、\frac{dy}{dx}、\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

之间的关系的话，其实也没有关系，下面我们接着来解释微分和积分。



假设需要去求函数  $f(x) = x^2$  与  $x$  轴在区间  $[0,1]$  上所围成的图像的大小，那我们便不能再使用简单的几何面积计算公式，因为这个图形它并不规整，但是我们又没有别的办法，只能寄希望于把  $x$  的  $[0,1]$  看作无限细小的直到能够作为平直并且可以供我们计算的线段。



所以我们假设  $[0,1]$  之间存在  $n$  份，把图像分为了  $n$  个梯形相加的结果，

随便取一块，这里  $x_i \sim x_{i+1}$  是  $n$  份中的一份， $x_i、x_{i+1}$  是区间  $[0, 1]$  之间极小的一个区间，所谓的  $\Delta x$  也就是  $x_i、x_{i+1}$  之间的距离，即  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ ，而与  $x_i、x_{i+1}$  相对应的  $y_i、y_{i+1}$  之间的距离也就被称之为  $\Delta y = y_{i+1} - y_i$ 。

当然，还是要记住需要满足无限细小的前提条件，

因为虽然在这个结果上我标记了 $dx=\Delta x$ ,  $\Delta y=dy$ , 但在某些地方这两个并不相等, 原因在于 $dx$ 、 $dy$ 是莱布尼茨的写法, 众所周知, 这哥们是个哲学家, 受当时哲学思想的影响, 这个 $d$ 的含义中便带有无限细分的哲学色彩, 所以这个符号在数学上被定义为微分, 而 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 的说法牛顿使用较多, 众所周知, 这哥们是个物理学家, 一心一意的拿这个东西就当个增量, 所以当增量是满足无限细分的时候, 两种说法就一致, 而不满足的时候, 比如 $x$ 作为中间变量, 那么 $\Delta x$ 很容易就比 $dx$ 大, 那么就不能说是一致的, 但总体上, 大部分时间大家都会觉得是一个东西。

由于在这个无限小的区间内, 曲线 $x^2$ 的部分可以被看作是平直的, 那么就可以求斜率,  $\frac{dy}{dx}$ 的概念便产生了, 将所有的描述改为数学语言, 也就是

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

这也便是导数的概念, 这个式子同样可以写为 $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ 。

而在这个区间里, 就可以把区间内 $\Delta x$ 的长度给求出来:

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b \text{ (区间的右端)} - a \text{ (区间的左端)}}{n \text{ (被区分出来的份数, 一般是无限)}}$$

我们可以简单求一下这个小区块的面积也就是 $s = \Delta x \cdot x_i^2$ , 总的 $S$ 就是每一个 $s$ 相加的总和:

$$S = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n=1} x_i^2$$

但由于 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 都被无限细分, 直接计算 $s$ 其实是 0, 所以旧的运算符号并不能满足这种计算形式, 于是乎我们将 $\Delta x$ 替换为 $dx$ ,  $\sum_{i=0}^{n=1} x_i^2$ 替换为 $\int_0^1 x^2$  (这一步其实是被叫做海涅定理的方法, 即 $\lim_{x_i \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$  对任意以 $x_0$ 为极限的数列, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ , 也就是一个数列中的数都趋向于这个结果, 则连接这个数列的函数也趋于这个结果, 当然这个说法并不准确, 原因就比如类似与狄利克雷函数之类的, 一旦反复跳跃, 则这个说法就不合适, 注意! 我说的是我的说法不合适而不是海涅定理不成立, 那种情况下极限不存在, 所以不满足前提。)

$$\text{于是乎, 式子则被改为了 } S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3};$$

同样的, 我们使用原本的方式进行计算: 假设分了 10 份,  $S = \frac{1}{10} \cdot (0 + 0.01 +$

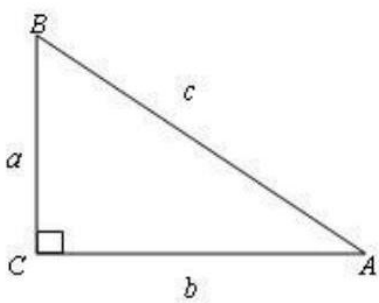
$0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81 + 1 = 0.305$ ; 当然也可以用自然数平方和的公式去算算, 在一百次的时候就已经成为 **0.338**, 最后答案是随着  $x$ ,  $S$  增大趋向于  $\frac{1}{3}$ , 证明这样的方法其实并没有出错。

到这里大概的微积分你大致已经理解, 正如最开始给出的那张图, 我们还有很多的内容并未学习, 但以此来作为前言来开启后续的学习我想是足够的, 具体的问题不妨让我们到了更合适的时机再来探讨; 那么让我们接着开启正式的学习吧。

# 第零章，衔接部分

以往的第一节老师们往往要讲述一些有关于函数的概念与特性，比方说什么反函数，复合函数，隐函数之类的，其实这些我们早都已经学过了，所以默认也是学会了的，当然了具体遇到这些，还是会单独说明的，就是不作系统讲述了，这里我们先讲一些高中与大学所衔接的部分。

## 0.1 正切与余切函数



我们先来复习一下三角函数，在  $Rt\triangle ABC$ （直角三角形）中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB$  是  $\angle C$  的对边  $c$ ， $BC$  是  $\angle A$  的对边  $a$ ， $AC$  是  $\angle B$  的对边  $b$ ，正弦函数就是  $\sin B$  (该角的正弦)  $= b$  (对边) /  $c$  (斜边)，余弦函数就是  $\cos B$  (该角的余弦)  $= a$  (邻边) /  $c$  (斜边)，正切函数就是  $\tan B$  (该角的正切)  $= b$  (对边) /  $a$  (邻边)。

那么现在我们来学习一下余切函数， $\cot B = a$  (邻边) /  $b$  (对边)，不难看出，所谓余切，其实就是正切的倒数。

下面我们对图像，来对它们的性质进行对比

$\tan x$	$\cot x$
定义域: $\{x   x \neq (\pi/2) + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	定义域: $\{x   x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
值域: $\mathbb{R}$	值域: $\mathbb{R}$
奇偶性: 有, 为奇函数	奇偶性: 有, 为奇函数
周期性: 有	周期性: 有

最小正周期: $\pi$	最小正周期: $\pi$
单调性: 有	单调性: 有
单调增区间: $(-\pi/2+k\pi, +\pi/2+k\pi), k \in \mathbb{Z}$	单调增区间: 无
单调减区间: 无	单调减区间: $(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$

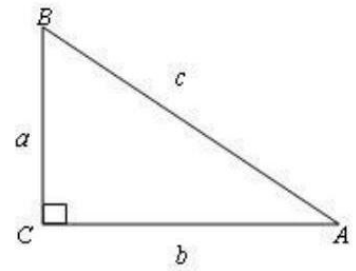
我们注意到余切函数的一个关键性质, 就是  $\tan x \cdot \cot x = 1$ 。基于这个性质, 我们也就可以认识一些  $\cot x$  的特殊函数值。

$\tan x$	$\cot x$
$\tan 0 = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \cot x = \infty$
$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$
$\tan \frac{\pi}{4} = 1$	$\cot \frac{\pi}{4} = 1$
$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$	$\cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$	$\cot \frac{\pi}{2} = 0$
$\tan \pi = 0$	$\lim_{x \rightarrow \pi} \cot x = \infty$
$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \tan x = \infty$	$\cot \frac{3\pi}{2} = 0$
$\tan 2\pi = 0$	$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \cot x = \infty$



# 0.2 正割与余割函数

某直角三角形中，一个锐角的斜边与其邻边的比（即角 A 斜边比邻边），叫做该锐角的正割，用  $\sec(\text{角})$  表示。如设该直角三角形各边为  $a, b, c$ ，则  $\sec A = c/b$ 。



在直角三角形中，一个锐角  $\angle A$  它的斜边与对边的比值，叫做该锐角的余割，用  $\csc(\text{角})$  表示，比如： $\csc A = c/a$ 。

其实我们不难发现正割、余割函数其实与正弦、余弦函数间其实也是类似于正切、余切的互为倒数的关系：

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}; \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}; \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

同样的，让我们还是通过比较图像来对比其性质。

$\sec \theta$	$\csc \theta$
定义域， $\{x x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$	定义域： $\{x x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
值域， $\sec x \geq 1$ 或 $\sec x \leq -1$	值域： $\{y y \geq 1 \text{ 或 } y \leq -1\}$
周期性：最小正周期 $T=2\pi$	周期性：最小正周期为 $2\pi$
奇偶性：偶函数	奇偶性：奇函数

三角函数中关键的运算关系与推导过程如下：

$$1 + \cot^2 a = \csc^2 a$$

证明：

$$1 + \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{1}{\sin^2 a}$$

$$1 = \frac{1}{\sin^2 a} - \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a}$$

$$1 = \frac{1 - \cos^2 a}{\sin^2 a}$$

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$$

由于 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , 证毕

$$1 + \tan^2 a = \sec^2 a$$

只需要将上面的 $\cos$ 与 $\sin$ 交换位置即可完成证明。

$$\cot a = \cos a \times \csc a = \frac{\cos a}{\sin a} \quad (*)$$

$$\tan a \times \cot a = 1 \quad (\text{互为倒数})$$

显然。

(\*) 式由于:

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}; \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

则有:

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\csc a}{\sec a} \quad (**)$$

### 0.3.1 反三角函数

这个概念是极为简单的，我们都知道三角函数的存在使得数字与角度、弧度产生了联系，可以通过特定的函数使得该角度通过某个值表示，即：

$$\text{角度} \xrightarrow{\text{三角函数}} \text{数}$$

那么反三角函数作为三角函数的反函数，其主要作用就是：

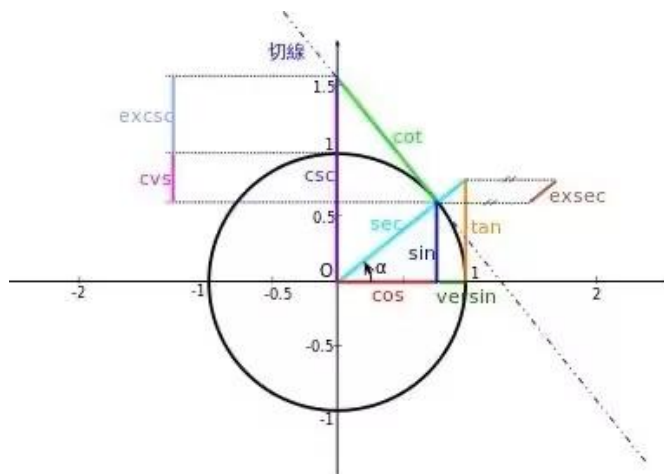
$$\text{数} \xrightarrow{\text{反三角函数}} \text{角度}$$

（一般来说，设函数  $y = f(x)$  ( $x \in A$ ) 的值域是  $C$ ，若找得到一个函数  $g(y)$  在每一处  $g(y)$  都等于  $x$ ，这样的函数叫  $x = g(y)$  ( $y \in C$ ) ( $y$  做函数  $y = f(x)$  ( $x \in A$ ) 的反函数，记作  $x = f^{-1}(y)$ 。这里的反主要是作用在  $f$  上，强调的是运算过程也就是函数  $f$  与反函数  $g$  的关系，即  $g = f^{-1}$ ，当然，这样写并不规范，这里的  $x$  与  $y$  其实没有做变化，也就是需要忘掉  $x$  是自变量的身份，转而认为括号里的是自变量，此外，需要注意的是定义域与值域之间的交换。)

$y = \arcsin x$  是  $y = \sin x$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) 的反函数，同样的， $y = \arccos x$  是  $y = \cos x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 的反函数。

也许你可能会发问这里的  $\arcsin$  到底是什么意思，我用  $\sin^{-1}$ 、 $\cos^{-1}$  可不可以，答案是肯定可以的，那么为什么还要复杂的使用  $\arcsin$  呢？我查阅了一些资料，大家都喜欢说  $\arcsin$  是弧度的意思，最早是欧拉在使用，后人一直坚持使用是表达对欧拉的敬意，但其实我还发现了一个更有趣的说法。

在单位圆中，我们将  $\sin \theta$  定义为  $\sin \theta = \frac{y}{r}$ ，而  $r = 1$ ，则  $\sin \theta = y$ ，也就是说  $\sin \theta$  随着  $y$  的移动移动  $\theta$ ，再注意到弧长公式： $S = \theta r$ ，那我们难免有一个疑问：给定一个特定的  $y$  坐标，需要多少弧长才能到达那里？正如我们上面讨论的单位圆，该弧长与角度相同。那么其实这里这个“ $\arcsin$ ”的意



不过既然讲到这里了，那么就不妨也说一说单位圆中三角函数的定义和切线、割线的确定吧，正切、反切、正割、反割到底是如何来的，这里其实并不是很重要，你如果能够记住三角函数的一些公式然后能够推出相应的公式其实就已经足够了。

A unit circle diagram illustrating the trigonometric functions  $\sin(\alpha)$ ,  $\cos(\alpha)$ ,  $\tan(\alpha)$ , and  $\cot(\alpha)$  for an angle  $\alpha$ . The circle is centered at the origin (0,0) with a radius of 1. A point on the circle is labeled with coordinates  $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ . A right triangle is formed with the origin, the point on the circle, and its projection on the x-axis. The hypotenuse is the radius (length 1), the vertical side is  $\sin(\alpha)$ , and the horizontal side is  $\cos(\alpha)$ . A larger right triangle is formed by extending the sides to the tangent lines at the points  $(1,0)$  and  $(0,1)$ . The horizontal leg of this larger triangle is  $\tan(\alpha)$ , and the vertical leg is  $\cot(\alpha)$ . The angle  $\alpha$  is shown at the origin. The angle  $\beta$  is shown at the point  $(1,0)$ . The angle  $\gamma = 0.5\pi$  is shown at the point  $(0,1)$ . The angle  $\zeta = 90^\circ$  is shown at the top of the unit circle. The diagram also shows the complementary angle  $\beta$  at the origin and the angle  $\beta$  at the point  $(1,0)$ .

名称	英文	缩写	定义	等式(单位圆: c=1)
正弦	sine	sin	<p>①角α的对边 a 比斜边 c</p> <p>②单位圆上点所在的半径, 在 y 轴上的投影 (正半轴为正值, 负半轴为负值)</p>	<p>①<math>\sin(\alpha) = a/c = a</math></p> <p>②<math>\sin(\alpha) = a</math></p>
余弦	cosine	cos	<p>①角α的邻边 b 比斜边 c</p> <p>②单位圆上点所在的半径, 在 x 轴上的投影 (同上)</p>	<p>①<math>\cos(\alpha) = b/c = b</math></p> <p>②<math>\cos(\alpha) = b</math></p> <p>∵ 由正弦、余弦定义①, 直角三角形勾股定理  <math>\therefore a^2 + b^2 = c^2 = 1</math>  <math>\therefore \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1</math></p>
正切	tangent	tan	<p>①角α的对边 a 比邻边 b</p> <p>②单位圆上点所在的切点, 到 所在切线与 x 轴上交点的 长度 (同上)</p>	<p>①<math>\tan(\alpha) = a/b = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)</math></p> <p>②</p> <p>∵ 等比三角形, <math>\tan(\alpha) = d</math>  <math>\therefore dx = ab</math>  <math>\therefore \tan(\alpha) = d = a/b = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)</math></p>
余切	cotangent	cot	<p>①角α的邻边 b 比对边 a</p> <p>②单位圆上点所在的切点, 到 所在切线与 y 轴上交点的 长度 (同上)</p>	<p>①<math>\cot(\alpha) = b/a = \cos(\alpha)/\sin(\alpha)</math></p> <p>②</p> <p>∵ 等比三角形, <math>\cot(\alpha) = e</math>  <math>\therefore ex = ba</math>  <math>\therefore \cot(\alpha) = e = b/a = \cos(\alpha)/\sin(\alpha)</math></p>

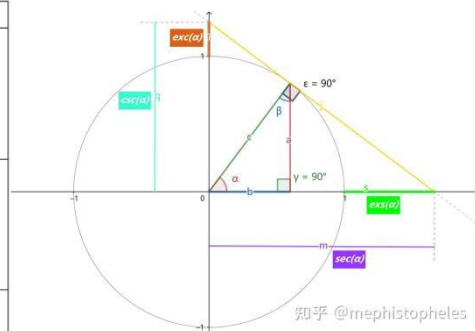
上,我们注意到这里满足勾股定理,则可以构建一个直角三角形,然后由于 $r = 1$ ,也就是图中的 $c = 1$ ,则针对这个三角形,  $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$  (也就是 $\sin a$ 、 $\cos a$ )就直接表达为 $y$ 与 $x$  (也就是 $a$ 与 $b$ )。

由于  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ , 将上面的结果代入  $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{a}{b}$ , 沿单位圆与三角形的交

则:  $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{a}{b} = \frac{d}{c} = d。$

则有:  $\cot a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{b}{a} = \frac{e}{c} = e。$

名称	英文	缩写	定义	等式(单位圆: $c=1$ )
正割	secant	sec	①角 $\alpha$ 的斜边 $c$ 比邻边 $b$ ②单位圆上点所在的切线 与 $x$ 轴的交点 到 原点的长度 (正半轴为正值, 负半轴为负值)	① $\sec(\alpha) = c/b = 1/b = 1/\cos(\alpha)$ ② $\therefore$ 等比三角形, $\sec(\alpha) = m$ $\therefore m:c = c:b$ $\therefore \tan(\alpha) = m = c/b = 1/b = 1/\cos(\alpha)$
余割	cosecant	csc	①角 $\alpha$ 的斜边 $c$ 比对边 $a$ ②单位圆上点所在的切线 与 $y$ 轴的交点 到 原点的长度 (同上)	① $\csc(\alpha) = c/a = 1/a = 1/\sin(\alpha)$ ② $\therefore$ 等比三角形, $\csc(\alpha) = q$ $\therefore q:c = c:a$ $\therefore \tan(\alpha) = q = c/a = 1/a = 1/\sin(\alpha)$
外正割	exsecant	exs	①单位圆上点所在的切线 与 $x$ 轴的交点 到 原点长度在单位圆外的部分 (同上)	① $\text{exs}(\alpha) = \sec(\alpha) - 1 = 1/\cos(\alpha) - 1$
外余割	excosecant	exc	①单位圆上点所在的切线 与 $y$ 轴的交点 到 原点长度在单位圆外的部分 (同上)	① $\text{exc}(\alpha) = \csc(\alpha) - 1 = 1/\sin(\alpha) - 1$



这里不难理解为

何被称之为切线, 包括

正切, 反切了, 向下划自然是顺手的, 也就称之为正切, 反之则反手, 也就叫余切了, 当然, 需要注意这个并不叫反切, 反切是直接 with 正切相对应的反函数, 即  $\arctan\theta$ 。

正割、余割函数由于与正弦、余弦函数的特殊关系 ( $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ ,  $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ), 很容易就能判断  $\sec a = \frac{1}{b}$ ,  $\csc a = \frac{1}{a}$ 。

正割、余割的第二点证明注意之前切线构成的三角形, 然后使用同样的等比的方式, 则有:  $\sec a = \frac{c}{b} = \frac{m}{c} = m$ ;  $\csc a = \frac{c}{a} = \frac{q}{c} = q$ 。由于此两条线类似于对圆内部的直接分割, 故有正割, 余割的说法。

至于剩下的外正割与外余割其实不难理解, 平时讨论的也少, 也就不在赘述。

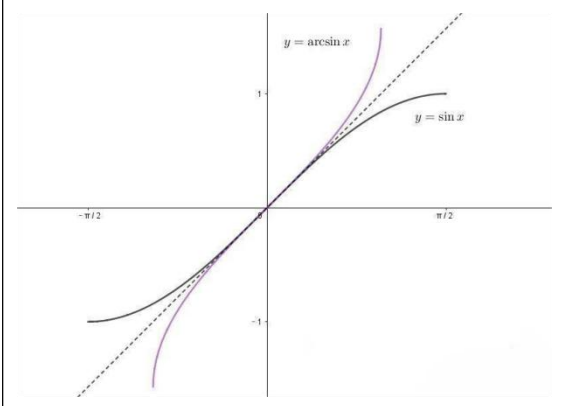
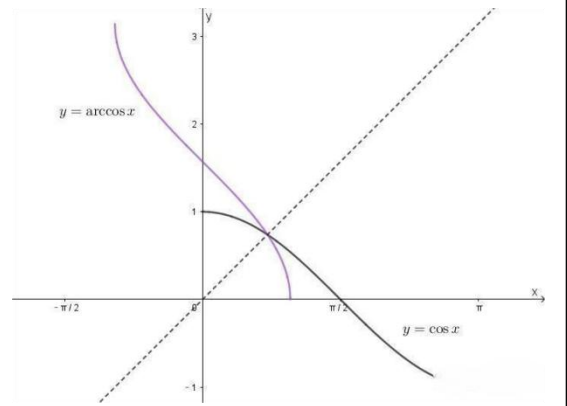
### 0.3.2 反正弦、余弦函数

上文中说到，反正弦函数（反三角函数之一）为正弦函数 $y = \sin x$ （ $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ ）的反函数，记作 $y = \arcsin x$ 或 $x = \sin y$ （ $x \in [-1, 1]$ ）。

由原函数的图像和它的反函数的图像关于一三象限角平分线对称可知正弦函数的图像和反正弦函数的图像也关于一三象限角平分线对称。

同上的，反余弦函数（反三角函数之一）为余弦函数 $y = \cos x$ （ $x \in [0, \pi]$ ）的反函数，记作 $y = \arccos x$ 或 $\cos y = x$ （ $x \in [-1, 1]$ ）。

由原函数的图像和它的反函数的图像关于一三象限角平分线对称可知余弦函数的图像和反余弦函数的图像也关于一三象限角平分线对称。

$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$
	
定义域： $x \in [-1, 1]$	定义域： $x \in [-1, 1]$
值域： $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	值域： $y \in [0, \pi]$
单调性： 单调递增函数	单调性： 单调递减函数
奇偶性： 奇函数	奇偶性： 非奇非偶函数

通过上图，其实也不难观察出一些反函数之间的性质，下面一一列出：

1、互为反函数的两个函数的图象关于直线  $y=x$  对称；

证明：  $f^{-1}[f(x)] = x; f(x) = y$

则有：  $f^{-1}(y) = x$

假设函数 $f(x)$ 上存在一点（ $a, b$ ）表示为 $f^{-1}(a) = b$ ，那么在其反函数上 $f^{-1}(y)$ 上则表示为 $f^{-1}(b) = a$ 。点（ $a, b$ ）与点（ $b, a$ ）之间 $x$ 与 $y$

交换了位置，证明对称轴为 $y = x$ 。

2、函数存在反函数的充要条件是，函数在它的定义域上是单调的；

证明这个性质我们需要使用到映射的概念，所谓映射是集合论之中的说法，即存在  $A$ 、 $B$  乃至更多个集合，它们中的元素可以通过某种运算规则(也就是  $f(A) \rightarrow B$ )达成联系，此种针对两个集合间的行为称之为映射。

而在映射中，倘若对  $A$  中任意两个不同元素 $a_1$ 不等于 $a_2$ ，它们的像 $f_1$ 不等于 $f_2$ ，则称 $f$ 为  $A$  到  $B$  的单射，换句话说，就是指  $A$  中的元素与  $B$  中的元素是不是单对单，这里也是单调性的体现，我们往往说函数是单调的其实也就是说函数是单射的，当然了，这里还需要一个不可忽视的条件即函数是连续的，而连续的概念我们后续会讲到也就不在这里讨论了。

证明：假设存在函数 $f$ ，它的定义域到值域（ $D \rightarrow f(D)$ ）是单射（也就满足了单调的条件），那么在这个过程中就是一个 $x$ 对应一个 $y$ ，反之就是一个 $y$ 对应一个 $x$ 。

在此情况下就存在一个逆映射 $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ ，我们就可以说这个函数是原函数 $f$ 的反函数。

则在  $f(x) = y$  的定义下，任意的 $y$ 均属于  $f(x)$  集合下，即 $y \in f(x)$ 。

同理： $f^{-1}(y) = x$ ，则 $x \in f^{-1}(y)$  则有任意的 $x$ 均属于 $f^{-1}(y)$  集合。

此情况下，我们可以将原本的定义域和值域添加进来：

也就是说： $f(x) = y, x \in D$ ;则有： $f^{-1}(y) = x; y \in S$

在这里，我们发现原本的 $x$ 、 $y$ 的取值其实并没有变化（实际操作时候需要注意特定的运算，比如分母为 0 的问题和根号下为负的问题）二者只是由于 $x$ 、 $y$ 位置的转换，各自地由自己原本的位置转换为了对方的位置，但内部取值具体的数并没有改变。

接着证明，因为单射的定义，一个唯一的 $x$ 只能对应一个唯一的 $y$ ，所以如果函数单调则在一定范围里随着 $x$ 的增长或者减小， $y$ 也会相应的增长或者减小（注意这里的 $x$ 、 $y$ 之间的增长、减小并不一定是 $x$ 的增长对应 $y$ 的增长，也不一定是 $x$ 的减小对应 $y$ 的减小，二者的关系完全取决于函数的单调性），更不会存在两个相同的 $x$ 与 $y$ ，还有一个相同的 $x$ 对应两个 $y$ ，又或者是一个 $y$ ，对应两个 $x$ ，所以

就说函数单调则必是单射,而单射必有反函数,进而得出,函数单调则必有反函数.

自然的,以上的证明并不严谨,只是帮助理解,当然也可以使用这个方法简单证明:原函数是单调函数,设它是单调递增的,由此, $y$ 随着 $x$ 的增大而增大,反函数在图像上交换了 $x,y$ 轴,或是说关于了 $y=x$ 这条直线对称,因此, $x$ 也随着 $y$ 的增大而增大。

下面给出数学意义上的正式证明:

设 $f$ 在其定义域 $D$ 上单调增加,证明其反函数 $f^{-1}$ 在其定义域 $f(D)$ 上也单调增加.

任取 $y_1, y_2 \in f(D)$ , 且 $y_1 < y_2$ .

根据函数 $f$ 的定义,

对于 $x_1, y_1$ :

对 $y_1$ 在 $D$ 内,存在唯一的原像 $x_1$ ,使得 $f(x_1) = y_1$ ,于是 $f^{-1}(y_1) = x_1$

对于 $x_2, y_2$ :

对 $y_2$ 在 $D$ 内,存在唯一的原像 $x_2$ ,使得 $f(x_2) = y_2$ ,于是 $f^{-1}(y_2) = x_2$

情况一:如果 $x_1 > x_2$ 则由 $f(x)$ 单调增加,必有 $y_1 > y_2$ 。

情况二:如果 $x_1 = x_2$ ,则显然有 $y_1 = y_2$

此二种情况均与题设 $y_1 < y_2$ 冲突,则我们继续讨论第三种情况:

$x_1 < x_2$ , 使得 $y_1 < y_2$ .

即 $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ , 使得 $y_1 < y_2$ .

反之则证明 $y_1 < y_2$ .可推出 $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ , 单调递增。

我们再次总结一下刚才的两个知识点, 即:

**函数单射  $\Leftrightarrow$  反函数存在。**

**函数单射,且函数是单调函数  $\Leftrightarrow$  反函数存在,且反函数单调,且单调趋势与直接函数相同。**

也许有的同学难免发问,我们明明前面的意思不是说单射和单调一个意思吗,为什么这里还要区分?原因在于单射的证明存在于集合领域,而在集合中并未强调连续的概念。那么如果放置到函数中就会出现函数并不连续的情况,那么在这个情况下函数其实谈不上单调了,这也就是我们常说的单调



函数其实不具备第二类间断点，当然现在不了解无所谓，其实也是后面不远的概念，姑且挖个坑在这。

请记住这几个需要记住的恒等式，当然了，如果可以的话，其实也可以去尝试记住推导过程：

$$\sin \sin^{-1} x = \sin (\arcsin x) = x; x \in [-1, 1]$$

$$\cos \cos^{-1} x = \cos (\arccos x) = x; x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin(\sin y) = y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos(\cos y) = y, y \in [0, \pi]$$

其实这些都不难理解，互为反函数嘛，里面的先运算把定义域给转化成了值域，然后外面的再运算，又给运算了回来；需要注意的是下面两个。

$$\sin \arccos x = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1]$$

$$\cos \arcsin x = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1]$$

此处证明如下：

$$\text{令 } t = \arccos x, x \in [-1, 1]$$

由反函数的定义我们可以得到： $x = \cos t, t \in [0, \pi]$ ；

则有 $\sin t > 0$ ，又因为 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ ；

将 $x = \cos t$ 带入：

则有： $\sin t = \sqrt{1 - x^2}$ 。

则 $\sin \arccos x = \sqrt{1 - x^2}$ 。

同理亦可证 $\cos t = \sqrt{1 - x^2}$ 。

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

这个式子思索起来还是简单的，即带入三角关系中，我们都知道 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ， $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ，不难理解的，此时的 $\frac{1}{2}$ 替代了 $x$ ，则很容易就能看出来这种关系，当然了 $\sin 30^\circ$ 和 $\cos 60^\circ$ 的关系再一个直角三角形中就很显而易见了，就是一条边嘛，

但是还是不妨碍我们今天仍然需要学习它(还要再没有三角形的情况下)。

我还是担心你没有学明白，所以我还是继续证明下吧，当然，如果你已经学会了还请略过就是。

我们令  $x = \sin a = \cos b$ ;

那么原式  $= a + b$ ;

$$\sqrt{1-x^2} = \cos a = \sin b \text{ (上面证明过)}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin a$$

$$= x^2 + (1-x^2) = 1$$

那么什么角度的正弦是 1 呢？真的是好难猜啊。

由上得证：  $a + b = \frac{\pi}{2}$ 。

最后，让我们记住几个比较重要的函数值，那么就可以完成这一章反正弦函数与反余弦函数的学习了。

$$\arcsin 0 = \arccos 1 = 0; \arcsin \frac{1}{2} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6};$$

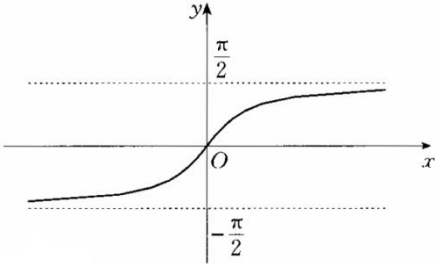
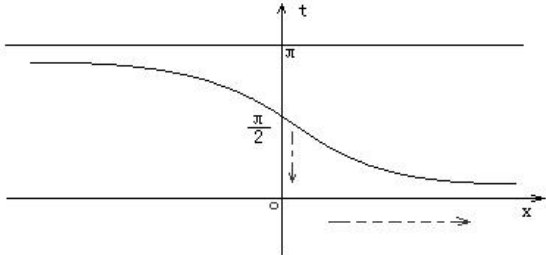
$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3};$$

$$\arcsin 1 = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

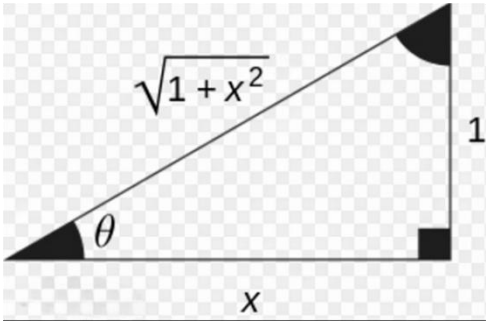
### 0.3.3 反正切、余切函数

其实这里并不足以作为一章来单独讲，甚至是极少数人愿意将题目出在这里，但是考虑到笔记完整性的缘故，还是简单讲些；话不多说，下面开始学习。

所谓反正切、反余切函数都是相对于正切、余切函数而言的，所以经过上面对于反函数的部分学习，我们其实是可以确定函数的基本图像和值域、定义域之类的，那么给出反正切、余切函数的性质如下：

反正切函数 ( $\arctan x$ )	反余切函数 ( $\operatorname{arccot} x$ )
	
定义域: $\mathbf{R}$	定义域: $\mathbf{R}$
值域: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	值域: $(0, \pi)$
奇偶性: 奇	奇偶性: 非奇非偶
周期性: 并非周期函数	周期性: 并非周期函数
单调性: $(-\infty, +\infty)$ 单调递增	单调性: $(-\infty, +\infty)$ 单调递减

假设存在一个这样的直角三角形，则我们可以更加直观的得到这些三角函数之间的关系：



$$\sin (\arccot x) = \cos (\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin (\arctan x) = \cos (\operatorname{arccot} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan (\operatorname{arccot} x)=\cot (\arctan x)=\frac{1}{x}$$

值得一提的，与 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ 类似， $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$ 也具备同样的性质，结合上图可以轻易证明， $\theta$ 与另一个角相加起来是满足这个条件的。

下面是一些特殊的函数值：

$$\arctan 0=0 ; \arctan \frac{\sqrt{3}}{3}=\operatorname{arccot} \sqrt{3}=\frac{\pi}{6} ; \arctan 1=\operatorname{arccot} 1=\frac{\pi}{4} ;$$

$$\arctan \sqrt{3}=\operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3} ; \operatorname{arccot} 0=\frac{\pi}{2} ;$$

注意几个是极限：

$$\lim _{x \rightarrow-\infty} \arctan x=-\frac{\pi}{2} ; \lim _{x \rightarrow+\infty} \arctan x=\frac{\pi}{2} ;$$

$$\lim _{x \rightarrow-\infty} \operatorname{arccot} x=\pi ; \lim _{x \rightarrow+\infty} \operatorname{arccot} x=0 ;$$

这里我们便可以注意到无穷处极限与值域和定义域之间的关系，结合图像其实可以发现它本质上并不代到达某个点，更多的是代表一种趋势，即可望而不可即的过程，在幻想里我们给它一个完美的结果，即等式右半边的数值，而左半边我们则为他套上 limit 的枷锁。

# 第一章 极限

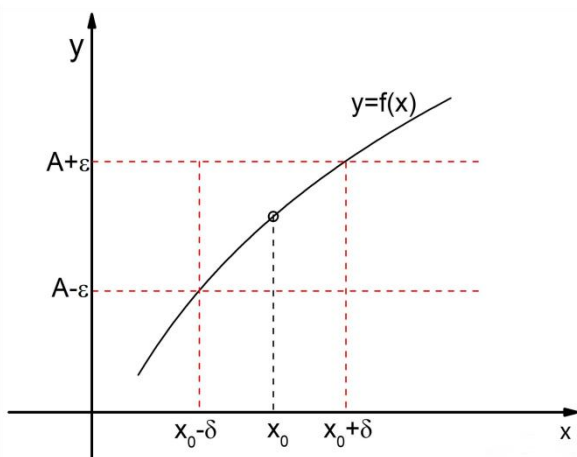
## 1.1 函数极限

### 1.1.1 函数极限的定义

其实在写这章之前我还是在不断的再做一些构思，因为常规的高等数学和数学分析的教学方法总是要现在函数极限之中引入一个数列极限的过程，当然了我们不能否认数列极限也的确是属于会考察的部分，但是那种学习方法仿佛更符合数学逻辑，是点到线，线到面的逻辑顺序，那么我们正常人是怎么学习的呢，肯定是先第一眼看见个整体，然后观察它的一些边边角角来找到一些显而易见的规律，最后才会不断地推理这些性质，来和已知的部分做联系寻找规律，然后带着所有的知识重新审视这个东西，最后写出一套满足逻辑推理由大到小（一般是由小到大的）的文字以供他人学习；也正因如此，我们学习起来就很容易不知所云，因为我们连一些最明显的特征都没有见到，然后就被迫要去用积木重新构建这个由现实世界的客观规律搭建起来的城堡，这并不是学习规律的过程，反倒像是改造自己的内部世界使其趋同于整体外界的过程，这个过程中独属于作为人的那一部分不被重视，不过考虑到诸多外界因素，就比如，在体系化的学科中逻辑化是一种性价比极高的基础表达方式，所以满足学生学习兴趣的这个责任也就落到了教导学生的老师身上，往往一个优秀的老师都会创新的找出更合适自己学生的教学顺序，这样当然并不能根本上解决问题，但俗话讲“师傅领进门，修行在个人。”又讲“兴趣是最好的老师。”所以学习时，请你一定不要过于在乎一时的了解与否，如果前处的知识有什么不理解的，不妨先搁置，往后看看，结合后处再做逆推，有些时候当你在感叹为什么他总能找到一些奇奇怪怪的数来证明某个定理时，请你也不要计较，有可能那个数就耗尽了无数人的一生，就比如哥德巴赫猜想，就整整给欧拉这个老头熬死了，说真的，你只是一个学生，请你豁达一些，没必要因为一两个定理的证明就自我怀疑，所以逻辑上请你严谨，以保证你对科学的崇敬，而现实中请你冷静，以保持你对学习的兴趣。闲话到此结束，我们开始正式的学习。

先来点不是人话的：所谓函数极限，在数学的定义为：

设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 $A$ ，对于任意给定的正数 $\varepsilon$ （无论它多么小），总存在正数 $\delta$ ，使得当 $x$ 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，那么就说 $A$ 是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限，记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。



下面来作一下解释，我们可以注意到在点 $(x_0, A)$ 周围的一定范围都已经被标记出来，大致是 $x$ 轴上的范围为 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ， $y$ 轴上的范围为 $[A + \varepsilon, A - \varepsilon]$ ，那么这样一个范围就可以作为它的邻域了。所谓去心邻域，顾名思义，就是将这个区域的最中心的

的点 $(x_0, A)$ 去掉，至于为什么去掉，就需要考虑到我们平时所谈论一个函数的连续等因素了，在连续的函数中，我们在这个邻域中取极限其实是一个很随意的过程，无关到底是否可望而不可及的问题，但在间断点处，贸然的认为这个范围内是连续的是一种本质上的错误。至于 $\varepsilon$ 、 $\delta$ 到底取多大，大家的解释都是宏观上足够小，微观上足够大，前半句的意思是你的去心邻域要取的符合“邻”的定义，我们算的极限无非就是一个点上的性质，当你超过了这个点周围的范围，把属于其他的点的区域计算了进来，那么这个结果就很难符合预期了，后半句的意思是虽然大家都知道 $x$ 轴、 $y$ 轴都是一条实数轴，而实数满足连续性，但是你得认为它是可以断开的，并且在这个断开的范围内，它可以无限大，它足以让每一个靠近它的点都落在这个领域内，以此来帮助你完成计算。

在了解到这些知识后，我们再去理解这句话也就没有那么困难了，下面开始逐行逐字解释：

设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 $A$ ；  
 $x_0$ 和它周围我都要取，取完我得到一个答案 $A$

这里解释起来其实还是简单的，之所以要这么说，其实是数学语言的特色，就比如“设函数 $f(x)$ ”，就给出了处理的背景，而“点 $x_0$ 的某一去心邻域内有定义”的意思类似于免责声明，为后面“存在常数 $A$ ”做了铺垫，当然也有另外一个作

用，进一步把处理环境划小，引出去心邻域的说法。

对于任意给定的正数 $\varepsilon$ （无论它多么小），总存在正数 $\delta$ ，使得当 $x$ 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

---

在 $x$ 轴上，我限定邻域的范围为 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ，在 $y$ 轴上我也限定一个允许的误差

这里，其实就是我们刚才讨论过的去心领域的概念，不过还是要补充一个概念，邻域的本质就是就是区间，而且是开区间，那么为什么我在这里却在使用闭区间呢，原因在于 $\delta$ 、 $\varepsilon$ ，我们刚才说 $\delta$ 、 $\varepsilon$ 是一个在宏观上无限小，微观上无限大的定义，那么 $\delta$ 、 $\varepsilon$ 都是可以取的，因为它们的取值与否根本不足以影响到整个邻域。我们正常情况下也会自然的觉得所谓区间最重要的是它的两端，但是邻域明显关注的是内部的范围，所以我并没有在一开始就告诉你这就是一个区间，防止你一般的认识到它，所以请你见到 $\delta$ 、 $\varepsilon$ 时，请自觉注意到它所包含的范围，而不要过于的去抠无限大和无限小的字眼，那里本就是无关痛痒的地方。

对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，那么就说 $A$ 是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限，记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

---

我刚才选定的 $x_0$ 和它周围邻域里的值经过计算后都不会超过 $A$ 值周围 $\varepsilon$ 的误差，现在我说我取的函数在这个点上的结果就是 $A$ 。

可能还是有些同学会问，到底在什么时候会用去心邻域，又会在什么情况下用邻域，其实这个问题还是比较简单的，在面对可能存在间断的地方使用去心邻域，在不需要面对间断的情况下，使用邻域，就比如我们会在函数极限上使用去心邻域，而在后面在考虑函数连续的问题上就会使用邻域，当然你也不必要因为想不明白在什么情况下使用合适的邻域来担心，因为这些只是数学定义，它的本质只是规范化，你在学习这个概念时其实未必理解 Cauchy（柯西）和 Weierstrass（魏尔斯特拉斯）的 $\delta - \varepsilon$ 语言，你只需要记住这幅图就足够了。

极限是一种伟大的思想，本质上包含人类对于终极的思考，所以我更希望我们可以在学习到这种数学定义后可以更进一步地去学习它的根本，我记得很久以前听过的一句话，聪明的人看穿它的形式，智慧的人得到它的本质；明显地，我们对于极限的了解还并不完全，那么不妨来了解一些背景知识，进而更清楚地了解数学与现实的关系：

极限思想的萌芽阶段，我们不得不提到古希腊的阿基米德（Archimedes），中国的惠施（Hui Shi）、刘徽（Liu Hui）、祖冲之（Tsu Chung-Chi）等数学家。

公元前 5 世纪，距离我们今天站立的时代，大约 2500 年，古希腊数学家安蒂丰（Antiphon）提出了“穷竭法”（Method of Exhaustion）。

之后，古希腊数学家欧多克斯（Eudoxus）进一步完善“穷竭法”，使其成为一

种合格的几何方法；再过 100 多年，阿基米德（Archimedes）做了进一步发展，其著作《论球和圆柱》运用“穷竭法”建立命题：

只要边数足够多，圆外切正多边形的面积与内接正多边形的面积之差可以任意小。

以现代数学来看，阿基米德（Archimedes）建立的命题饱含“极限思想”，用无限逼近的方式从有限中认识无限，从近似中认识精确，已经十分贴近于现代对于极限的认识。

但由于毕达哥拉斯学派对于无限（infinite）的厌恶，其原因可能是因为毕达哥拉斯作为早期的算术家，发现了很多基础的数学关系，包括且不限于勾股定理与黄金分割率，他认识到世间的很多规律满足数学间的关系，所以认为数天然的存在于这个世界，与大小，颜色一样，是物质的基本属性，而数的运算又满足相应的规则（毕达哥拉斯所认识到的是数量间关系，并不算完整的数的运算）。所以他坚持用数来认识世界，他用石头摆出三角形和正方形，把数分为三角形数（类似 1, 3, 6, 10 等等能排列出三角形的数，第  $n$  个三角形数满足  $\frac{n(n+1)}{2}$  的规律）和正方形数（类似  $1^2$ 、 $2^2$ 、 $3^2$ 、 $4^2$  等能排列为正方形的数，所以正方形数又称为平方数），然后他就发现正方形数与三角形数之间的某种关系，正方形沿着对角线打开就是三角形，而对角线居然和两边没有数学关系（毕达哥拉斯认为不满足同一个度量即整数与可数小数的度量便算没有数学关系），对角线的存在对于整个毕达哥拉斯学派来说都是一块严重的绊脚石，他们再也无法直观的通过几何关系来确定数量关系来和现实世界产生关联了，而后来人为了使得算术学和几何学不出现割裂，于是引进了无理数，从而解决了第一次数学危机。

当然了，我们并不能单纯的认为一个  $\sqrt{2}$  足以打破一个合格的思想家、哲学家、算术家，但是问题就在于毕达哥拉斯坚持要用数来解释整个世界，他认为数量级关系是协调的、美丽的、普适的，宇宙间的一切事物都可以通过数的和谐关系有秩序的建立起来，这里可以看出毕达哥拉斯学派所践行的道德观，即对于和谐和秩序的不懈追求，具体体现为他们强调城邦不能没有法律，统治者与被统治者要用爱来联结，以及每个市民在国家中要有指定的地位等等，都是贯彻着他们的道德原则的。所以当我们在了解到这些之后其实就不难理解，无限到底代表着什



么，他代表不可知与没有尽头，恰好就是毕达哥拉斯学派所坚持的和谐与秩序所摒弃的，故而并非是他们不能接受这个数和这个概念，而是从他们的世界观出发，是无法根本的理解这些概念，就比如他们可以接受圆，甚至认为圆是最高层次的规律，宇宙的奥秘就隐藏在其中，但是无序到有序的、无限到有限的过程是他们当时的科学水平能够触及的，而百思不得其解的，自然而然就被搁置，他们不能通过正推的方式（即面对无穷的问题），于是提出了使用反推的方法，即归谬法，使用反证的逻辑方式，通过对方的逻辑推论驳倒对方的立论，著名的《以子之矛，攻子之盾》就是这个思想的东方版。

与毕达哥拉斯学派类似的，三教九流中（三教指儒教、佛教、道教三教。九流指先秦至汉初的九大学术流派，儒家者流、阴阳家者流、道家者流、法家者流、农家者流、名家者流、墨家者流、纵横家者流、杂家者流）的九流中有个名家：他们也喜欢搞一点纯粹的论证，只不过他们并不关心数字这种小道，他们更喜欢通过语言的论证，当然，你也可以认为他们的任务主要是当杠精，因为我发现只要是春秋战国时期只要是有一些有名的吵架（他们叫辩论）的地方，总有他们的身影，比如惠施的“濠梁之辩”，公孙龙的“白马论”；当然他们的结果往往也是为历史所扬弃的，原因在于越往后期发展，名家学说抛弃了现实支撑，转而开始专心研究如何语言对敌，也就是从最初邓析创立的重人文，轻自然，穷极事理，对事物进行严肃分析的名家转变为了东方朔的消坚释石，当世无双，专注辩略的名家。

说的远了些，我们言归正传。

名家惠子说过一句话：“至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一。无厚，不可积也，其大千里。天与地卑，山与泽平。日方中方睨，物方生方死。大同而与小同异，此之谓‘小同异’；万物毕同毕异，此之谓‘大同异’。南方无穷而有穷。今日适越而昔来。连环可解也。我知天之中央，燕之北、越之南是也。泛爱万物，天地一体也。”其中的意思便是无穷和有限，极大和极小之间是对立统一的，这句话其实就已经对无穷小的定义给出了描述，无厚，不可积也，只不过这里的不可积的意思不是积分，而是对于有限个无穷小相加的描述，此积非彼积。世人当时多嘲笑他，说他，“卵有毛。鸡有三足。郢有天下。犬可以为羊。马有卵。丁子有尾。火不热。山出口。轮不碾地。目不见。指不至，至不绝。龟长于

蛇。矩不方，规不可以为圆。凿不围枘。飞鸟之景未尝动也。镞矢之疾，而有不行、不止之时。狗非犬。黄马骊牛三。白狗黑。”觉得他干了指鹿为马的事，而惠子也不恼怒，搬出“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的例子，这里可以算是最早的针对数列极限的描述了，可惜没有更深层次的论述了。此篇出自《庄子·杂篇·天下》。后续其实还有点，但是庄子说惠子弱于德，强于物，这里也就不引用了。

后来魏晋时期，刘徽使用割圆法给出 $\pi = 3.1416$ ，具体方法为从直径为 2 尺的圆内接正六边形开始割圆，依次得正 12 边形、正 24 边形……直到 3072 边形，得出结论：割得越细，正多边形面积和圆面积之差越小（割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。）

当我们今天重新看待这个问题，可以写下简单的表述

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right) \cdot n = \pi$$

经过简单的计算，得到：

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( \frac{\pi}{n} \right) \cdot n$$

取 $t = \frac{1}{n}$ ，则：

$$\text{上式} = \lim_{t \rightarrow 0} \sin (t\pi) \cdot \frac{1}{t}$$

取等价无穷小， $x \approx \sin x$ ，有：

$$\text{上式} = \lim_{t \rightarrow 0} t\pi \cdot \frac{1}{t} = \pi$$

也许对于我们而言，这只不过是几步简单的计算，但对于刘徽、祖冲之来说，这就是他们的一生，而对毕达哥拉斯来说，它的毕生追求，最大的和谐和秩序就隐藏在他百思不得其解的无穷之中，人们总是都喜欢把功劳归到做出了突破性贡献的人身上，但正如路易斯·巴斯德（Louis Pasteur）所言：“伟大的科学成就从未凭空产生，而是建立在许多前人的积累之上。”这样的过程，其本质上也是对极限思想下产生的微积分的践行；这何尝又不算是某种意义上的浪漫呢？

由于极限思想的过于晦涩（当时缺乏简明的数学语言用以表达），所以大家都并未系统研究其中的奥秘，直到中世纪结束，文艺复兴时期，由于过多的问题依旧无法为初等数学所能解决，故而不得不出现在拿起旧时遗弃的工具，重新开始

面对来自无穷的魔鬼，在此过程中崭新的武器——微积分为牛顿、莱布尼茨所提出，这里的故事我们下次在微积分处再讲，话题再回到极限。

公元十八世纪，一批数学家做出了卓有成效的贡献，使得极限和微积分开始形成密不可分的关系，其中包括：达朗贝尔（D'Alembert），欧拉（Euler）、拉格朗日（Lagrange）等。

期间，达朗贝尔（D'Alembert）定性地给出了极限的定义：“一个变量趋于一个固定量，趋于程度小于任何给定量，且变量永远达不到固定量”。除此之外，运用极限思想给出了判定级数（Series）敛散性的达朗贝尔判别法（D'Alembert's Test）：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ ，结论：① 当 $\rho < 1$ ，级数收敛；② 当 $\rho > 1$ ，级数发散；③ 当 $\rho = 1$ ，级数可能收敛也可能发散。

现代数学中，达朗贝尔判别法（D'Alembert's Test）仍然是级数敛散性判定的重要方法。

期间，欧拉（Euler）极大地推进了微积分涉及到函数和求法，而事实上，牛顿（Newton）和莱布尼茨（Leibniz）只涉及到少量函数及求法。在极限理论发展上，欧拉（Euler）提出了关于无穷小量的不同阶零的理论。

期间，拉格朗日（Lagrange）迷上并专攻数学分析，是数学分析仅次于欧拉的最大开拓者。虽然拉格朗日回避极限概念，但他也承认微分法可以在极限理论的基础上建立起来。

在这一阶段，真正意义上的极限定义得以产生，虽然它仍然过于直观，与数学追求的严密原则相抵触。

十九世纪，捷克数学家波尔查诺（Bolzano）抛弃无穷小量的概念，运用极限的概念定义导数和连续性，并且获得了判别级数收敛的一般准则——柯西准则（Cauchy's Convergence Test）。然而，令人遗憾的是，波尔查诺的工作被长期埋没，没有对当时数学的发展产生影响。

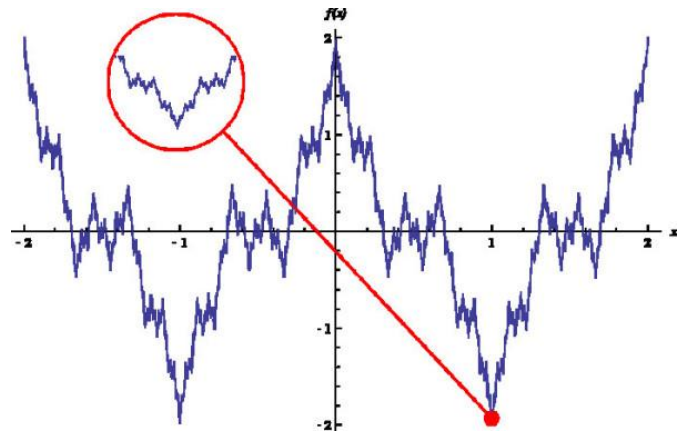
再到后来，法国数学家柯西（Cauchy）发表《分析教程》，独立得到波尔查诺之前证明的基本结论，并以极限为基础，定义无穷小量和微积分学中的基本概念，建立了级数收敛性的一般理论，成为对分析严格化影响最大的数学家。

柯西收敛准则的定义为：对任意给定的正数 $\varepsilon$ ，总存在正整数 $N$ ，使得当 $m, n > N$ 时，有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$ ，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛，表现几何含义为：收敛的数

列中,内部元素随着序数的增加会愈发靠近,理论上足够靠后的两项会无比接近。

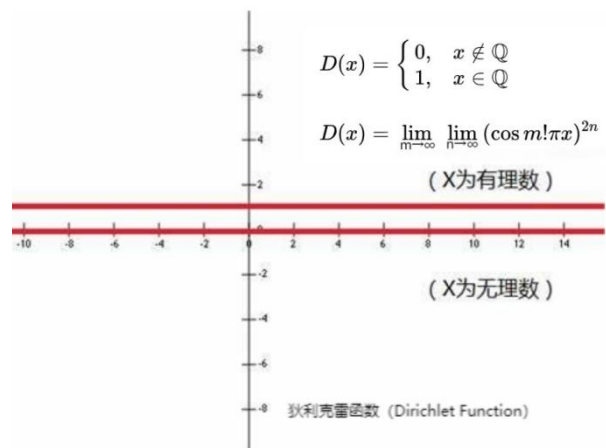
按照现代标准衡量,柯西的分析理论大多基于几何直观,严密性仍然不够。

就比如德国数学家魏尔斯特拉斯(Weierstrass)为了反驳上述极限定义,给出了魏尔斯特拉斯函数(Weierstrass Function),一个由无穷级数定义的函数,直观地想象它,是一条连续的锯齿状折线,但锯齿的大小无限地小。

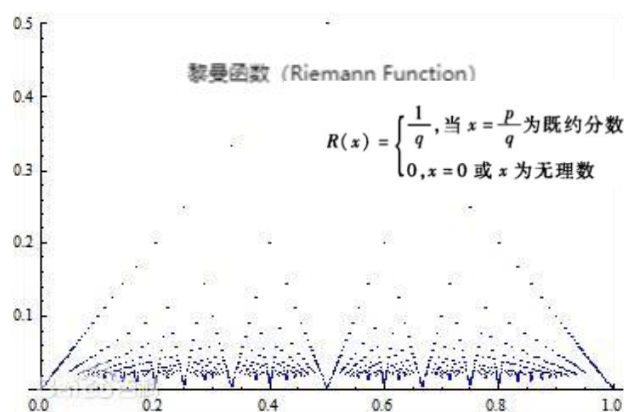


魏尔斯特拉斯函数 (Weierstrass Function)

魏尔斯特拉斯函数,否定了数学家认为“除少数特殊点,连续函数处处可导”的观点。随后,狄利克雷函数(Dirichlet Function)、黎曼函数(Riemann Function)和赫维赛德函数(Heaviside Function)等病态函数的例子,充分说明了直观及几何的思考并不可靠。



狄利克雷函数 (Dirichlet Function)



魏尔斯特拉斯在前面数学家工作的基础上，定量地给出了极限定义，就是现代通用的“ $\delta - \varepsilon$  定义”： $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta$ ，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，记为： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

魏尔斯特拉斯以极限理论为基础严格建立微积分，系统创立实分析和复分析，基本上实现了分析的算术化，克服了数学发展过程中的危机和矛盾，被尊为“现代分析之父”。而这，严格化的微积分也为 20 世纪数学的发展奠定了基础。

综上所述就是整个极限思想发展的历史，由于篇幅的原因，我们并不能将整个历史都展现出来，所以只能通过挑选其中重要的节点来方便介绍，本节内容并不复杂，主要介绍的是邻域的概念及  $\delta - \varepsilon$  的通俗解释，算是正式开始极限学习前的一点点“开胃菜”吧，希望在此过程中，你能有所收获！

### 1.1.2 极限的性质

前文中我们了解到了极限的概念，认识到了“可望而不可即”的“悲哀”，现在我们要开始正式的研究它了，所谓极限，分为数列极限和函数极限，二者大同小异，本质上我们完全可以将数列极限看作是函数极限中的某一部分被单独取出，所以在描述极限性质时，我们将会对照数列极限和函数极限来进行总结。

我们按照他们的共同部分到不同部分进行排列，对二者而言，最为共通的性质，是所有极限均具备的性质，即：

#### (1) 唯一性

顾名思义的，所有的极限如果存在那么只会为一个极限，不会存在在同样情况下出现两个极限的情况。

对于一个数列而言，存在一个这样的定理：

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，则我们说这个数列它的极限唯一。

修改为数学语言则表示为：

$$\lim x_n = A, \lim x_n = B$$

$$\Rightarrow A = B$$

这里不难证明，但我们先做理解，数列极限有两部分构成，一部分是数列，一部分是极限，所谓数列，意为由数排列而成，遵循某一规律，使得数与位次产生一一对应的关系，当然也有更为正式的定义：

如果按照某一法则，对每个 $n \in N_+$ ，都对应着一个实数 $x_n$ ，这些实数按照下标  $n$  从小到大排列得到的一个序列： $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 就叫数列，记作数列 $\{x_n\}$ 。

我们再给出极限（数列）的定义：

设 $\{x_n\}$ 为一个数列，存在一个常数 $a$ ， $\forall \varepsilon > 0$ （ $\varepsilon$ 为给定的正数并且不论它有多么的小），总存在正整数 $N$ （足够大），使得当 $n > N$ 时，不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 都成立，那么则称 $a$ 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a$ 。

注意到，这里只有 $\delta - \varepsilon$ 语言中的 $\varepsilon$ ，并未包括 $\delta$ ，这是因为相较于函数，数列与数轴之间的关系仅仅停留在  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ 等正整数层面，而取

代  $0 < |x - x_0| < \delta$  中的  $x_0$  的是  $N$ ，这里的  $N$  并不指代某一个正整数，他的意思是一个足够大的正整数，用以描述  $n$  所代表的大于  $N$  的部分，也就是大于  $x_N$  的部分，而  $N$  又要比任何你知道的数大，比  $\infty$  小，所以意思就是越往后，越趋近于这个极限。所以也可以表示为： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  又或者  $x_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$ 。

值得一提的，当我们令  $x_n$  的项数  $n$  不停增加，如果  $x_n$  也不停增加时，我们并不能说他是趋于无穷的，而是说他的极限不存在，这其中的原因在于，在定义时，大家就选了一个有限数（注意前面说的是常数），而非任意的数，当然如果你还是觉得不合理，认为凭什么函数极限可以取到无穷而数列极限不能取无穷的话，我其实还有一个解答，我们都知道所谓的取到无穷，真正的意思其实是逼近无穷，所谓逼近，就需要一个过程，而众所周知，数列极限是一段一段的，那么它在趋近于无穷的过程中，必然有一个点出现在了有限与无穷的边界，那么在这个点， $|x_n - \infty|$  的值就不可能任意小，而且在趋近无穷的过程中，越靠后的每个点都比前一个点更趋近无穷，所以  $|x_n - x_{n-1}|$  的值也不会  $< \varepsilon$ ，所以，对于数列极限而言，定义上就不能存在极限趋于无穷的情况。

而函数极限是连续的，所以哪怕取到无穷，我们仍然只观察领域部分内，所以，函数极限可以取无穷。

同样的，我们仿照刚才数列极限的唯一性，给出函数极限的唯一性定理：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B \\ \Rightarrow A = B \end{aligned}$$

下面我们开始证明极限的唯一性：

通过反证法，假设数列  $\{x_n\}$  收敛，并且存在两个不同的极限， $L_1$ 、 $L_2$ （即  $L_1 \neq L_2$ ），则根据数列极限的定义：

对于任意的  $\varepsilon > 0$ ，存在正整数  $N_1$ ，当  $n > N_1$  时， $|a_n - L_1| < \varepsilon$ 。

对于同样的  $\varepsilon > 0$ ，存在正整数  $N_2$ ，当  $n > N_2$  时， $|a_n - L_2| < \varepsilon$ 。

取  $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{3}$ ，因为  $L_1 \neq L_2$ ，所以  $|L_1 - L_2| > 0$ ，此时  $\varepsilon > 0$ 。

由定义知， $n$  可取  $\max(N_1, N_2)$ ，则有：

$$|a_n - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}, \quad |a_n - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}$$

结合三角不等式：

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - a_n) + (a_n - L_2)| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2|$$

代入结果，有：

$$|L_1 - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{3} + \frac{|L_1 - L_2|}{3} = \frac{2|L_1 - L_2|}{3}$$

左右两边同时除以 $|L_1 - L_2|$ ，可得到 $1 < \frac{2}{3}$ ，显然不合理。当然也可以直接观察出 $|L_1 - L_2| < 0$ ，与 $|L_1 - L_2| > 0$ 矛盾。

故此，假设 $L_1 \neq L_2$ 并不成立，证明极限唯一。

同理，对于函数极限，我们依旧可以使用同样的方法：

假设函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow a$ 处存在两个不同的极限 $L_1$ 、 $L_2$ 。即：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2, \quad \text{并且 } L_1 \neq L_2。$$

根据函数极限的定义：

对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\sigma_1 > 0$ ，当 $0 < |x - a| < \sigma_1$ 时，有 $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ 。

对于同样的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\sigma_2 > 0$ ，当 $0 < |x - a| < \sigma_2$ 时，有 $|f(x) - L_2| < \varepsilon$ 。

我们同样选取 $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{3}$ ，并令 $\sigma = \min(\sigma_1, \sigma_2)$ ，当 $0 < |x - a| < \sigma$ 时，同时

有：

$$|f(x) - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}, \quad |f(x) - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}$$

再利用三角不等式：

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2|$$

代入上式：

$$|L_1 - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{3} + \frac{|L_1 - L_2|}{3} = \frac{2|L_1 - L_2|}{3}$$

此式与 $L_1 \neq L_2$ 矛盾，故此，假设 $L_1 \neq L_2$ 不成立，函数极限满足唯一性。

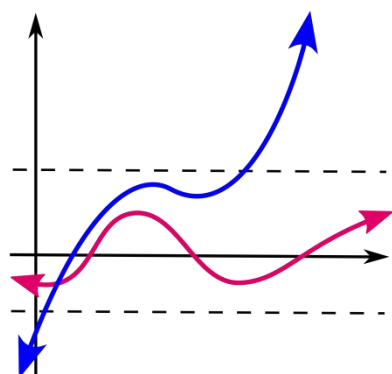
注意到，这里我们特地通过选取一个特殊的 $\varepsilon$ 来完成证明，如果你很难直接接受这个从天而降的 $\varepsilon$ ，无法进行下面的思考的话，我希望你能明白，所谓的 $\varepsilon$ 只是为了满足后续的反证法，是先打的靶，后描的框，如果你选用不同的不等式，那么也自然会出现不同的 $\varepsilon$ ，由于 $\varepsilon$ 的任意性，无论在什么样的取值下，都要要求



式子成立，否则就是假设错误，这也就是证明题与计算题的直接区别，证明题往往是给你答案，填写过程，考察你的逻辑链是否严密，计算题就相反，给你开头，让你推论下去，考察你的逻辑链是否连贯。

## （2）有界性（数列极限）与局部有界性（函数极限）

大家在课上经常念叨的一句顺口溜：“单调必然有界，而有界未必单调。”当然这里未必说的一个东西，只是说我们需要引入“界”的概念：



如图所示，我们给出两个函数，注意到，红色的函数一直处在虚线内，所以它就叫有界函数，而蓝色函数并不受虚线也就是“界”的管理，所以便叫它无界函数。另外，我们还注意到虚线有上下两条，上面虚线以及上面的我们就称呼它为上界，下面虚线下面的就称呼它为下界，而两条虚线由于是已经确定了的，所以也就称之为上（下）确界。

我们还是先随便讲讲，下面给出比较正式的定义：

按照函数是一个集合到另一个集合的映射的概念，我们可以给出上下界的定义，设 $S$ 是实数集合，如果存在实数 $M$ ，使得集合上的所有 $x \in S$ ，都有 $x \leq M$ ，则我们称 $M$ 是集合 $S$ 的上界。（注意：只要是大于集合上的每一个 $x$ 的部分，都可以被称为上界。

同样的情况，我们设 $T$ 是实数集合，如果存在实数 $m$ ，使得所有的 $x \in T$ ，都有 $x \geq m$ ，则我们称 $m$ 为集合 $T$ 的下界。（同样请注意，只要是比 $x$ 小的部分我们都可以认为是下界。）

上下界概念中还有两个比较重要的概念：

**上确界（Supremum）**：设 $S$ 是实数集合，如果 $S$ 有上界，则上确界（也称为上最小界）是集合 $S$ 的最小上界，记作 $\sup S$ 。

换句话说，上确界是一个最小的数，它是集合的一个上界，并且没有任何一个比它更小的上界。上确界可能是集合中的一个元素，也可能不是集合中的元素（即它是集合的“极限”上界）。

改为形式化定义： $\sup S = M$ ，当且仅当：

（1） $M$ 是 $S$ 的上界。

(2) 对于任意的小于 $M$ 的数 $m(m < M)$ , 存在集合 $S$ 中的元素 $x$ , 使得 $x > m$ 。(此句话的意思为所有小于上确界的实数, 必然会有一个 $x$ 大于这个数, 侧面印证了最小上界的概念。)

**下确界 (Infimum):** 设 $T$ 是实数集合, 如果 $T$ 有下界, 则下确界 (也称为下最大界) 是集合 $T$ 的最大下界, 记作 $\inf T$ 。

换句话说, 下确界是一个最大的数, 它是集合的一个下界, 并且没有任何一个比它更大的下界。下确界也可能是集合中的一个元素, 或者它不是集合中的元素 (即它是集合的“极限”下界)。

同样给出形式化定义:  $\inf T = N$ , 当且仅当:

(1)  $N$ 是 $T$ 的下界。

(2) 对于任意大于 $N$ 的数 $n(n > N)$ , 存在集合 $T$ 中的元素 $x$ , 使得 $x < n$ 。

在了解了函数的界的定义和概念之后, 我们给出针对于极限“有界性”的表述:

**数列极限有界性:**

如果数列 $\{a_n\}$ 的极限 $L$ 存在, 则此时我们说这个数列是有界的。反过来, 如果存在一个常数 $M > 0$ , 使得对于所有的 $n$ , 都有:  $|a_n| \leq M$ , 也就表明此数列的所有项均受到某个常数的限制。

这句话可能是难于理解的, 所以我们可以做出一些简化, 即: **如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则该数列一定有界。但是反过来说数列 $\{x_n\}$ 有界则不能证明该数列收敛。**比如我们规定一个数列为 $\{1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, \dots\}$ , 这个数列就明显有上下界, 但不存在极限。

另外, 数列的极限有界性意味着, 如果数列收敛到  $L$ , 那么数列的所有项最终都趋近于 $L$ , 并且不会无界增大或减小。此话其实也不难理解, 根据我们刚才所说的收敛数列一定有界的说法, 那么这个数列必然受到它的极限限制, 而这个极限就属于是它的上 (下) 界之一, 所以收敛数列的极限和它的上下界是有密切关联的, 至于是不是上 (下) 确界, 我只能说大部分时候其实是。

### 数列极限有界性证明:

假设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $L$ ,即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

根据极限定义,对于任意的 $\varepsilon > 0$ ,存在一个正整数 $N$ ,使得 $n > N$ 时:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

取 $\varepsilon = 1$ ,则存在一个正整数 $N_1$ ,使得当 $n > N_1$ 时:

$$|a_n - L| < 1$$

即:

$$L - 1 < a_n < L + 1 \quad \text{对于所有 } n > N_1$$

因此,数列 $\{a_n\}$ 中的所有项在 $n > N_1$ 时,全部位于 $[L - 1, L + 1]$ 内,这表明数列在此部分内有界。

再考虑之前的 $N_1$ 项,不难证明,由于有限项总是有界的,所以可以设其最大值为 $M_1$ ,此时,我们可以选择 $\max(M_1, |L| + 1)$ ,使得对于所有的 $n$ ,都有:

$$|a_n| \leq M$$

因此收敛数列 $\{a_n\}$ 是有界的。

### 函数极限局部有界性:

也许你注意到了,相较于数列极限,函数极限多了“局部”二字,这是因为函数极限的定义所导致的,我们都知道函数极限不同于数列极限,是倾向于函数的某一点而不是观察整个函数的指向,又或者说数列函数由于它天生的不连续性,只能够对 $n \rightarrow \infty$ 时进行趋势的观察,其余点位均有具体的值,而函数可以再任意处产生可能的极限,如 $x^2$ 的极限出现在 $\pm\infty$ 处, $\frac{1}{x}$ 的极限除去 $\pm\infty$ 还可以出现在 $0$ 处。所以我们在研究函数极限时其实只能确定极限附近的部分,而函数极限也只能证明在自变量趋于某值时,因变量趋于另一某值,并不直接代表函数的变化(函数的变化是导数确立的,导数虽然是极限推论下的产物,但也要注意不要张冠李戴了)。

给出关于函数极限“有界性”的定义:

如果函数 $f(x)$ 在某点 $a$ 的极限 $L$ 存在，即：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

那么我们说函数的极限是有界的，表示存在某个 $M > 0$ ，使得对于所有 $x$ 足够接近 $a$ （即 $x$ 在某个区间内靠近 $a$ ）时，都满足：

$$|f(x)| \leq M$$

即函数值不会超过这个范围。

我依旧还是换一句话来说：如果函数在某一点上有极限，那么我们就认为函数在该点附近有界（局部）。改为数学语言：

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ ，存在常数 $M > 0$  (界) 和 $\delta > 0$ ，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ （局部：该点附近），有 $f(x) \leq M$ 。

**函数极限局部有界性证明：**

假设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处极限为 $L$ ，即：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

根据极限的定义：对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时：

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

同样选择 $\varepsilon = 1$ ，则存在 $\delta_1 > 0$ ，使得当 $0 < |x - a| < \delta_1$ 时：

$$|f(x) - L| < 1$$

即：

$$L - 1 < f(x) < L + 1, \text{ 对于 } 0 < |x - a| < \delta_1$$

这表示函数 $f(x)$ 在 $x$ 靠近 $a$ 时，其值都被限制在区间 $[L - 1, L + 1]$ 内，也即表明函数 $f(x)$ 在该邻域内是有界的。

### (3) 保号性与局部保号性

也许你此前并未听过这方面的说法，但我想你对于此性质的应用一定早已开始，所谓保号性，其实就是当极限存在时，你在靠近这个极限的时候就会和这个极限具备相同的正负性。我们拿几个例子来说：

#### 数列极限保号性

考虑数列 $a_n = \frac{1}{n}$ 并取极限：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

这个数列极限为 0，但是我们可以注意到，该数列的每一项其实都是正数，我们其实可以说这个数列的符号得到了保留。也许还不是很直观，我们换一个数列：

$$b_n = \frac{1}{n} + 1$$

取极限有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

这个数列的极限为 1，同样的，这个数列的每一项都属于正数，那么此时此刻保号性得到了体现。

再考虑数列 $a_n = -\frac{1}{n}$ 并取极限：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

此时极限依旧为 0，我们同样可以发现，这个数列的每一项都是负数，经过刚才的经验我们知道这个其实还是保号性的表现。同样给出一个数列 $\{b_n\}$ ：

$$b_n = -\left(\frac{1}{n} + 1\right)$$

取极限：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$$

这个数列的极限为负，而其每一项都属于负数。

考虑极限 $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ ，我们注意到这个数列属于是正负交替的，但是它的极限依旧存在，取极限：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

这里我们就注意到，由于数列的项正负性的反复交替，那么它就不属于保号性的定义。

再给出一个 $\{b_n\}$ ：

$$b_n = 1 - \frac{1000}{n}$$

取极限：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

我们注意到这个例子在前 1000 项取值均为负，只有在 1000 项后才开始取值为正，所以这里引出数列极限保号性的正式定义：

设 $\{a_n\}$ 为一个极限，并令其极限为：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

1、若极限 $L > 0$ ，则：

存在一个正整数 $N > 0$ ，使得所有的 $n > N$ ，都有：

$$a_n > 0$$

此即意味着数列的项随着 $n$ 的增大，最终会和极限一样，保持正号。

2、若极限 $L < 0$ ，则：

存在一个正整数 $N > 0$ ，使得所有的 $n > N$ ，都有：

$$a_n < 0$$

这意味着数列的项随着 $n$ 的增大，最终会和极限一样，保持负号。

3、若极限 $L = 0$ ，则：

保号性通常不成立。需考虑数列的项在接近 0 时的符号变化，尤其是正负交替的情况。

总结一下：

1、数列极限的保号性意味着如果数列的极限是正数或负数，那么数列的项最终会保持相同的符号。

2、如果数列的极限是零，则数列项可能在正负之间交替，不能保证符号的保持。

## 函数极限局部保号性

考虑函数 $f(x) = x^2$ 在 $x \rightarrow 1$ 时的极限，即：

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

注意到该函数的所有 $x$ 均为正，也就可以说函数在 $x \rightarrow 1$ 的极限处和极限 $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$ 有着保持着相同的正负属性，符合极限保号性。

再考虑函数 $f(x) = -x^2$ 在 $x \rightarrow 1$ 时的极限，即：

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

由注意到该函数的所有 $x$ 均为负，则也可以证明符合极限保号性。

最后再考虑 $f(x) = \sin x$ 在 $x \rightarrow 0$ 处的极限，即：

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

此时此刻虽然极限值为0，但可以发现 $\sin x$ 会随着 $x$ 的取值产生正负的变化，即 $x > 0$ 的部分 $\sin x > 0$ ， $x < 0$ 的部分 $\sin x < 0$ 。也就是说，在 $x \rightarrow 0$ 时， $\sin x$ 会在正负间变化，也就不具备保号性。

我们依旧给出函数极限局部保号性的数学定义：

假设 $f(x)$ 是一个定义在某个领域内的函数，且：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

1、若极限 $L > 0$ ，则：

存在 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时， $f(x) > 0$ ，此时则称函数 $f(x)$ 保号。

这意味着当 $x$ 足够接近 $a$ 时， $f(x)$ 将和极限 $L$ 一样保持正号。

2、若极限 $L < 0$ ，则：

存在 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时， $f(x) < 0$ ，此时则称函数 $f(x)$ 保号。

这意味着当 $x$ 足够接近 $a$ 时， $f(x)$ 将和极限 $L$ 一样保持负号。

3、若极限 $L = 0$ ，则：

保号性通常不成立，需要考虑函数在极限的符号变化，该值可能会在正负间切换，最后趋向0。

总结一下：

1、函数极限的保号性意味着，如果一个函数的极限是正的或者负的，那么在该极限点附近，函数的值会保持与极限相同的符号。

2、如果极限是零，那么保号性通常不成立，函数值可能会在正负之间切换。

再额外加一条：需要注意函数极限和数列极限都要求在靠近极限处，此外通有界性，需要额外注意函数极限的“局部”特性。

### 极限保号性的证明

这一段其实并不算是重要的步骤，但是考虑到认识问题需要全面，有因有果，方得始终，所以还是给出证明，内容其实与上面大同小异，所以请你随心意选择是否观看。

### 数列极限保号性的证明过程

设 $\{a_n\}$ 为一个数列，并令其极限为：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

1、若极限 $L > 0$ ，则：

根据极限的定义，对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在一个正整数 $N > 0$ ，使得所有的 $n > N$ ，都满足：

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

选择 $\varepsilon = \frac{L}{2}$ ，可以得到：

$$|a_n - L| < \frac{L}{2}$$

此即意味着对于所有的 $n > N$ ，都有：

$$L - \frac{L}{2} < a_n < L + \frac{L}{2}$$

即：

$$\frac{L}{2} < a_n < \frac{3L}{2}$$

由于 $L > 0$ ，则 $\frac{L}{2} > 0$ ，故此，对于所有的 $n > N$ ，都满足：

$$a_n > 0$$

以上， $L > 0$ 时，保号性得证。

2、若极限 $L < 0$ ，则：

据极限的定义，对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在一个正整数 $N > 0$ ，使得所有的 $n > N$ ，都满足：



$$|a_n - L| < \varepsilon$$

选择  $\varepsilon = \frac{|L|}{2} = -\frac{L}{2}$ , 可以得到:

$$|a_n - L| < \frac{|L|}{2} = -\frac{L}{2}$$

此即意味着对于所有的  $n > N$ , 都有:

$$\begin{aligned} L - \frac{|L|}{2} &< a_n < L + \frac{|L|}{2} \\ &= L - \left(-\frac{L}{2}\right) < a_n < L + \left(-\frac{L}{2}\right) \end{aligned}$$

即:

$$\frac{3L}{2} < a_n < \frac{L}{2}$$

由于  $L < 0$ , 则  $\frac{3L}{2} < 0$ , 故此, 对于所有的  $n > N$ , 都满足:

$$a_n < 0$$

以上,  $L < 0$  时, 保号性得证。

3、极限  $L = 0$  时, 考虑特殊情况: 如  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ , 极限数列虽然为 0, 但存在正负交替, 所以保号性基本不成立。

### 函数极限局部保号性的证明

设函数  $f(x)$  极限为:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

1、若极限  $L > 0$ , 则:

根据极限的定义, 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在一个正数  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - a| < \delta$  时, 都满足:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

选择  $\varepsilon = \frac{L}{2}$ , 可以得到:

$$|f(x) - L| < \frac{L}{2}$$

此即意味着对于所有满足  $0 < |x - a| < \delta$  的  $x$ , 都有:

$$L - \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2}$$

即:

$$\frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}$$

由于  $L > 0$ ，则  $\frac{L}{2} > 0$ ，故此，所有满足  $0 < |x - a| < \delta$  的  $x$ ，都满足：

$$f(x) > 0$$

以上， $L > 0$  时，保号性得证。

2、若极限  $L < 0$ ，则：

根据极限的定义，对于任意的  $\varepsilon > 0$ ，存在一个正数  $\delta > 0$ ，使得当  $0 < |x - a| < \delta$  时，都满足：

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

选择  $\varepsilon = \frac{|L|}{2} = -\frac{L}{2}$ ，可以得到：

$$|f(x) - L| < \frac{|L|}{2} = -\frac{L}{2}$$

此即意味着对于所有满足  $0 < |x - a| < \delta$  的  $x$ ，都有：

$$\begin{aligned} L - \frac{|L|}{2} &< f(x) < L + \frac{|L|}{2} \\ &= L - \left(-\frac{L}{2}\right) < f(x) < L + \left(-\frac{L}{2}\right) \end{aligned}$$

即：

$$\frac{3L}{2} < f(x) < \frac{L}{2}$$

由于  $L < 0$ ，则  $\frac{3L}{2} < 0$ ，故此，所有满足  $0 < |x - a| < \delta$  的  $x$ ，都满足：

$$f(x) < 0$$

以上， $L < 0$  时，保号性得证。

3、极限  $L = 0$  时，考虑特殊情况： $f(x) = \sin x$ ，函数值会出现正负变化，最后趋于 0，所以保号性也基本不成立。

#### (4) 保序性与局部保序性

有一说一，这个性质是很少列出来的，但是如果不谈这个性质，那么在我们学习夹逼定理时就可能出现一些理解上的问题，所以还是拎出来讲讲，所谓保序性，本质上就是对于保号性的推广，二者殊途同归，当然保序性自然也可以推广，那也就是下面的保不等式性了。

## 数列极限保序性及其证明

假设存在两个数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ ，并且它们的极限分别为 $L_1$ 、 $L_2$ ，并且 $L_1 > L_2$ ，则在靠近极限的过程中存在一个正整数 $N > 0$ ，使得 $n > N$ 时，有 $a_n > b_n$ 。

也就是说当两个数列极限确定后，极限大的数列越往后的项比极限小的数列越往后的项大。

这里进一步体现了极限对于整个数列的限制作用，下面给出完整的证明：

假设：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_2$$

且 $L_1 > L_2$ ，则根据极限定义，有：

根据极限的定义，对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在一个正整数 $N > 0$ ，使得所有的 $n > N$ ，都满足：

$$|a_n - L_1| < \varepsilon$$

也就是：

$$L_1 - \varepsilon < a_n < L_1 + \varepsilon$$

同理，对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在一个正整数 $N > 0$ ，使得所有的 $n > N$ ，都满足：

$$|b_n - L_2| < \varepsilon$$

即：

$$L_2 - \varepsilon < b_n < L_2 + \varepsilon$$

由于 $L_1 > L_2$ ，则对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在一个正整数 $N > 0$ ，使得所有的 $n > N$ ，都满足：

$$L_2 - \varepsilon < b_n \leq a_n < L_1 + \varepsilon$$

综上，保序性可证。

反之，假设存在两个数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ ，在靠近极限的过程中存在一个正整数 $N > 0$ ，使得 $n > N$ 时，有 $a_n > b_n$ 时，亦可证明 $L_1 > L_2$ 。

## 函数极限局部保序性及其证明

假设有两个函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ ，且均于 $x = a$ 处存在极限：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$$

并且满足 $L_1 > L_2$ ，则在靠近极限过程中，在 $x = a$ 处附近（存在一个正整数 $\delta$ ，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时），有：

$$f(x) > g(x)$$

也就是说在对于同一个 $x$ 取相同的极限时，极限大的函数在极限附近比极限小的函数在极限附近的函数大。

具体证明过程如下：

假设：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$$

且 $L_1 > L_2$ ，则根据极限定义，有：

根据极限的定义，对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在一个正数 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，都满足：

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon$$

也就是：

$$L_1 - \varepsilon < f(x) < L_1 + \varepsilon$$

同理，对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在一个正数 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，都满足：

$$|g(x) - L_2| < \varepsilon$$

即：

$$L_2 - \varepsilon < g(x) < L_2 + \varepsilon$$

由于 $L_1 > L_2$ ，则对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在一个正数 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，都满足：

$$L_2 - \varepsilon < g(x) \leq f(x) < L_1 + \varepsilon$$

综上，保序性可证。

反之，假设存在两个函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ ，在靠近极限的过程中存在一个正数 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，有 $f(x) > g(x)$ 时，亦可证明 $L_1 > L_2$ 。

### 保序性和保号性的特殊关系：

对于数列极限而言，保序性需要两个数列，即 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ ，并且需要他们有极限 $L_1$ 、 $L_2$ ，当 $L_1 > L_2$ 时（当 $L_1 < L_2$ 时），即可证明在靠近极限过程中， $a_n > b_n$ （ $a_n < b_n$ ）。

当 $b_n = 0$ 时，原定义改为：存在数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$ ，当 $L_1 > 0$ 时（当 $L_1 < 0$ 时），即证明在靠近极限过程中， $a_n > 0$ （ $a_n < 0$ ）。此即为数列极限保号性的描述。

对于函数极限而言同样，需要两个函数： $f(x)$ 、 $g(x)$ ，并且均于同一 $x$ 处存在极限 $C_1$ 、 $C_2$ ，当 $C_1 > C_2$ 时（当 $C_1 < C_2$ 时）即可证明在靠近极限过程中， $f(x) > g(x)$ （ $f(x) < g(x)$ ）。

我们同样令 $g(x) = 0$ ，则定义变为：存在函数极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C_1$ ，当 $C_1 > 0$ 时（当 $C_1 < 0$ 时），即证明在靠近极限过程中， $f(x) > 0$ （ $f(x) < 0$ ）。此即为数列极限保号性的描述。

我们刚开始说保序性其实是保号性的推论，其实不妨说保号性就是保序性的一种特殊情况，二者均体现了极限在趋近过程中对于函数（数列）的限制。

### （5）保不等式性与局部保不等式性

顾名思义，保不等式性描述了数列和函数趋于某个值时，其极限将会保有原有的不等式关系，也即适才保序性描述的反向论述，具体的证明过程参见上处，此处给出结论：

对于数列极限而言： $\{x_n\} > \{y_n\}$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ ， $A > B$ 。

对于函数极限而言：若 $\exists \delta > 0$ ， $\forall x \in U(a, \delta)$ （以 $a$ 为中心， $\delta$ 为范围的去心邻域）， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C$ ， $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = D$ ，有 $f(x) > g(x)$ ，则 $C > D$ 。

简单来说就是原来大的，它的极限也就越大，这里体现了函数（数列）对极限的反向约束。

以上就是数列和函数极限所共有的性质，接下来展示它们各自独有的，先从数列极限开始。

### 1) 数列极限归并性

这个名字听起来唬人，但是相当简单，符合逻辑，一句话就可以解释：**收敛数列的任一子数列收敛于同一极限。**

同样给出比较正式的定义：

如果一个数列 $\{a_n\}$ 收敛到 $A$ （极限为 $A$ ），即：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

那么所有的子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛，其极限与原数列的极限相同，即：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$$

这里体现了数列极限的传递性，需要注意的：**数列收敛 $\Rightarrow$ 子列收敛，子列收敛 $\nRightarrow$ 数列收敛。**

如数列 $b_n = (-1)^n$ ，其展开形式为 $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ ，我们知道数列 $b_n$ 不存在极限，但取其中的奇数子列，取极限得 $-1$ ，取其中的偶数子列，取极限为 $1$ ，可见子列收敛并不代表数列收敛。

也许你可能会想子列收敛到一个数，数列收敛到另一个数会发生吗？答案是不会，因为这样就违背了归并性，归并性要求所有收敛数列的子列都必须无条件的服从收敛数列，所以数列可以不收敛，一旦收敛，那么所有子列必须服从。

**归并性的证明：**

假设：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

则意味着对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在一个正整数 $N > 0$ ，使得所有的 $n > N$ ，都满足：

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

取 $\{a_n\}$ 中按照一定规则提取出的一个新数列，命名为 $\{a_{n_k}\}$ 。

对于子列 $\{a_{n_k}\}$ ，由于 $n \rightarrow \infty$ ，则 $n_k \rightarrow \infty$ ，那么可以找到一个 $K$ (对应于 $n_k > N$ )使得当 $k > K$ 时：

$$n_k > N$$

此即意味着，当任意 $k > K$ 时，子列的下标 $n_k$ 满足母数列的收敛条件 $n > N$ 。

由此可知：对于任意的 $k > K$ ，有：

$$|a_{n_k} - A| = |a_n - A| < \varepsilon$$

由此可见，对于任意子列 $\{a_{n_k}\}$ ，均满足：

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$$

## 2) 数列极限合并性

严格来说，这不足以作为一个性质来单独列出，它更适合作为归并性的推论存在，但考虑到奇偶数列在子列的特殊地位，需要掌握的熟练程度，还是讲讲为好。

前面我们提到了归并性的说明：**收敛数列的任一子数列收敛于同一极限**。那么我们此时便可以思考，是否可以换个说法：它要求收敛数列的任意子列都收敛到同一个极限，那么我们就说一个数列的所有子列均收敛到同一个极限，是否可以证明他自己也收敛。答案是显然的，因为我们在对子列的定义里也包括了自己。所以直接给出合并性的性质：当一个数列其奇偶子列均收敛于同一极限，其本身也收敛于该极限。

数学语言描述如下：

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = A \text{ 且 } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$$

具体证明十分简单，先给出奇偶数列的极限的 $\delta - \varepsilon$ 数学定义，然后证明 $2k - 1$ （奇数列）和 $2k$ （偶数列）共同完整的构成了 $n$ （整个数列），最后合并奇偶数列的 $\delta - \varepsilon$ 数学定义，就可以完成证明。

## 3) 数列极限的计算法则

假设： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ ：

a. 加减法则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \pm B$$

b. 乘法法则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \cdot B$$

c. 数乘法法则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot x_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \cdot A$$

d. 除法法则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{A}{B} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0, B \neq 0)$$

数列极限运算法则的证明过程：

对于加减法则：

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ，则知对于任意的  $\varepsilon > 0$ ，存在一个正整数  $N_1 > 0$ ，使得所有的  $n > N_1$ ，都满足：

$$|x_n - A| < \varepsilon$$

又由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ ，则知对于任意的  $\varepsilon > 0$ ，存在一个正整数  $N_2 > 0$ ，使得所有的  $n > N_2$ ，都满足：

$$|y_n - B| < \varepsilon$$

由于  $\varepsilon$  的任意性，可取  $\varepsilon$  为原来的一半，即  $\frac{\varepsilon}{2}$ ，此时上式变为：

$$|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

考虑  $x_n + y_n$ ，此时对于  $n > \max(N_1, N_2)$ ，同时满足：

$$|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

两式相加，有：

$$|(x_n - A) + (y_n - B)| = |(x_n + y_n) - (A + B)|$$

根据三角不等式：

$$|(x_n - A) + (y_n - B)| < |x_n - A| + |y_n - B|$$



又 $|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ , 代入式中, 可知:

$$|(x_n - A) + (y_n - B)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

故有:

$$|(x_n + y_n) - (A + B)| < \varepsilon$$

即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A + B$$

减法只需将 $|(x_n - A) + (y_n - B)|$ 变更为 $|(x_n - A) - (y_n - B)|$ , 此时有:

$$|(x_n - y_n) - (A - B)| < \varepsilon$$

即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A - B$$

对于乘法法则:

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$ , 则知对于任意的 $\varepsilon_1 > 0$ , 存在一个正整数 $N_1 > 0$ , 使得所有的 $n > N_1$ , 都满足:

$$|c_n - A| < \varepsilon_1$$

又由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = B$ , 则知对于任意的 $\varepsilon_2 > 0$ , 存在一个正整数 $N_2 > 0$ , 使得所有的 $n > N_2$ , 都满足:

$$|d_n - B| < \varepsilon_2$$

先证明乘法引理, 即:

若 $A = B = 0$ , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n \cdot d_n) = 0$ 。

此时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ , 则知对于任意的 $\varepsilon > 0$ , 存在一个正整数 $N > 0$ , 使得所有的 $n > N_1$ , 都满足:

$$|c_n - 0| < \sqrt{\varepsilon}$$

又由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ , 则知对于任意的 $\varepsilon > 0$ , 存在一个正整数 $N > 0$ , 使得所有的 $n > N_2$ , 都满足:

$$|d_n - 0| < \sqrt{\varepsilon}$$

直接相乘有：

$$|c_n - 0| \cdot |d_n - 0| = |c_n \cdot d_n| < \varepsilon$$

可化为：

$$|c_n \cdot d_n - 0| < \varepsilon$$

即，当 $A = B = 0$ 时：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n \cdot d_n) = 0$$

当完成乘法引理的证明后，我们就可以开始正式的乘法运算规则的证明：

设： $S_n = x_n - a$ ， $T_n = y_n - b$ ；且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ ，即：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) \text{ , } \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - b)$$

利用加减运算得：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a = a - a = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - b) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b = b - b = 0$$

由于乘法引理： $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \cdot T_n) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(S_n + a) \cdot (T_n + b)]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \cdot T_n + a \cdot T_n + b \cdot S_n + a \cdot b)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \cdot T_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot T_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b \cdot S_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot b)$$

$$= 0 + 0 + 0 + a \cdot b = a \cdot b$$

由此可证乘法法则成立。

对于**数乘法**则：

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = A$ ，则知对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在一个正整数 $N_1 > 0$ ，使得所有的 $n > N_1$ ，都满足：

$$|d_n - A| < \varepsilon$$

考虑 $c \cdot d_n$ ，则式子变为：

$$|c \cdot (d_n - A)| = |c \cdot d_n - c \cdot A|$$

由于 $\varepsilon$ 的任意性，可令 $\varepsilon$ 变为之前的 $\frac{1}{c}$ ，则原式变为：

$$|d_n - A| < \frac{\varepsilon}{c}$$

在等式的左右两边同时乘上 $c$ ：

$$|c \cdot (d_n - A)| = |c \cdot d_n - c \cdot A| < \varepsilon$$

由此可证：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot d_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$$

对于**除法法则**：

设存在极限： $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = P, \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = Q, Q \neq 0$ ：

此时对于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_n}{h_n}$ 的运算来说需要满足下列条件：

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = Q$ ，

所以给定任意的正数 $\varepsilon_0$ ，总存在正整数 $N$ ，当 $n > N$ 时，均有： $|h_n - Q| < \varepsilon_0$   
成立，又有绝对值不等式：

$$|Q| - |h_n| \leq |h_n - Q| < \varepsilon_0$$

则：

$$|h_n| > |Q| - \varepsilon_0$$

又因为 $Q \neq 0$ ，取 $\varepsilon_0 = \frac{|Q|}{3} > 0$ ，即：

$$|h_n| > |Q| - \varepsilon_0 = \frac{2|Q|}{3} > 0$$

由此知 $h_n \neq 0$ ，此时： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_n}{h_n}$ 才有意义。

$$|h_n| > \frac{2|Q|}{3}$$

则：

$$\frac{1}{|h_n|} < \frac{3}{2|Q|}$$

又因为：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = P, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = Q$$

所以给定任意的正数 $\varepsilon$ ，总存在正整数 $N$ ，当 $n > N$ 时，均有：

$$|e_n - P| < \frac{|Q|}{3} \varepsilon$$

给定任意的正数 $\varepsilon$ ，总存在正整数 $N$ ，当 $n > N$ 时，均有：

$$|h_n - Q| < \frac{|Q|^2}{3|P|} \varepsilon$$

(值得注意的：此时不论是 $e_n$ 的 $\frac{|Q|}{3} \varepsilon$ ，还是 $h_n$ 的 $\frac{|Q|^2}{3|P|} \varepsilon$ ，都是基于 $\varepsilon$ 的任意性，目的是便于计算，当然你也可以尝试按照乘法法则证明的方式证明 $\frac{1}{h_n}$ 与 $e_n$ 的乘法，这里使用其他的方法。)

$$\begin{aligned} \left| \frac{e_n}{h_n} - \frac{P}{Q} \right| &= \left| \frac{Q \cdot e_n - P \cdot h_n}{Q \cdot h_n} \right| = \left| \frac{Q \cdot e_n - PQ - P \cdot h_n + PQ}{Q \cdot h_n} \right| \\ &= \left| \frac{Q(e_n - P) - P(h_n - Q)}{Q \cdot h_n} \right| \end{aligned}$$

根据绝对值不等式，有：

$$\begin{aligned} \left| \frac{Q(e_n - P) - P(h_n - Q)}{Q \cdot h_n} \right| &\leq \frac{|Q| \cdot |e_n - P| + |P| \cdot |h_n - Q|}{|Q \cdot h_n|} \\ &= \frac{1}{|h_n|} \cdot \frac{|Q| \cdot |e_n - P| + |P| \cdot |h_n - Q|}{|Q|} \end{aligned}$$

带入 $\frac{1}{|h_n|} < \frac{3}{2|Q|}$ ：

$$\begin{aligned} \frac{1}{|h_n|} \cdot \frac{|Q| \cdot |e_n - P| + |P| \cdot |h_n - Q|}{|Q|} &< \frac{3}{2|Q|} \cdot \frac{|Q| \cdot |e_n - P| + |P| \cdot |h_n - Q|}{|Q|} \\ &= \frac{3}{2|Q|} \cdot |e_n - P| + \frac{3|P|}{2|Q|^2} \cdot |h_n - Q| \end{aligned}$$

将 $|e_n - P| < \frac{|Q|}{3} \varepsilon$ 与 $|h_n - Q| < \frac{|Q|^2}{3|P|} \varepsilon$ 带入：

$$\begin{aligned} \frac{3}{2|Q|} \cdot |e_n - P| + \frac{3|P|}{2|Q|^2} \cdot |h_n - Q| &< \frac{3}{2|Q|} \cdot \frac{|Q|}{3} \varepsilon + \frac{3|P|}{2|Q|^2} \cdot \frac{|Q|^2}{3|P|} \varepsilon \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

即：

$$\left| \frac{e_n}{h_n} - \frac{P}{Q} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

由此可证：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$