前言

本章节开始学习电磁学，电磁学看似有别于其他物理但其实还是没有脱离出牛顿力学那一套，还是愿意按照物质的角度来剖析这些问题，并且一切的一切都愿意建立在物质之间的相互影响上的，有别于广义相对论，这个东西自然也是特定情境特定使用，自然也谈不上“放之天下而皆准”。

牛顿物理学（一作经典物理学）的经典思想：认为世界是由运动着的粒子构成，而粒子间存在符合因果关系的关联（也称相互作用）。牛顿等老一派物理学家传承了古希腊自然哲学的理念，一定意义上信奉经验主义，尽管与笛卡尔类似的，牛顿也是个有名的有神论者，但是他对笛卡尔主义下的“我思故我在”明显是不屑一顾的，他认为真理广泛的存在于世界上，而非诞生于脑海间，相较之下，牛顿是明显的有点唯物了，不过身为一个物理学家，如果不能客观而现实的观察和思考，那迟早有一天就会成为一个有趣的神棍，爱因斯坦说上帝不掷骰子的时候，明显还是信任了上帝，但上帝懒得回应。

接着讲回电磁学，整个电磁学，建立在电场理论之下，（即电子与电子之间的作用并不是直接接触，而是基于一种力场，只要在一定空间范围就会受到影响），后发现电磁感应规律，仿照电场解释了磁场，最后随着相对论的建立，人们逐渐理解电磁一体两面的性质，即电子流动的时候的，正负电子相互依照光速运动，产生的库仑力造就了磁场，这也就是没有磁单极子的正确解释。讲到这里，你可能很难听懂，但无所谓，当我们了解了库仑定律和最基本的相对论效应后其实就能够简单讲解一下这个过程，同样的，当我们彻底了解了电场和磁场之后也就能完全理解这其中的奥妙了。

电磁场的分别建立其实还是蛮早的，1785 年库仑定律被提出，1820 年，电磁感应被发现，诞生到了 1865 年，一代电磁奇才麦克斯韦才横空出世，一扫之前的迷雾，大笔一挥，统一了电磁理论，提出了著名的麦克斯韦方程组。至此电磁学有关于粒子的部分开始结束，波粒二象性的发现更是验证了麦克斯韦的猜想，电磁波的概念被证实，光也被慢慢的纳入到讨论范围内，最后催生出了爱因斯坦、波尔等一众近代物理学神人，大大的推进了物理系学生学习的难度。

不过还好，所谓真理是越辩越明，学习是越学越精，我们还是遵循之前数学

笔记的老规矩，先打个预防针，解释一下经典电磁理论的集大成者——麦克斯韦方程组：

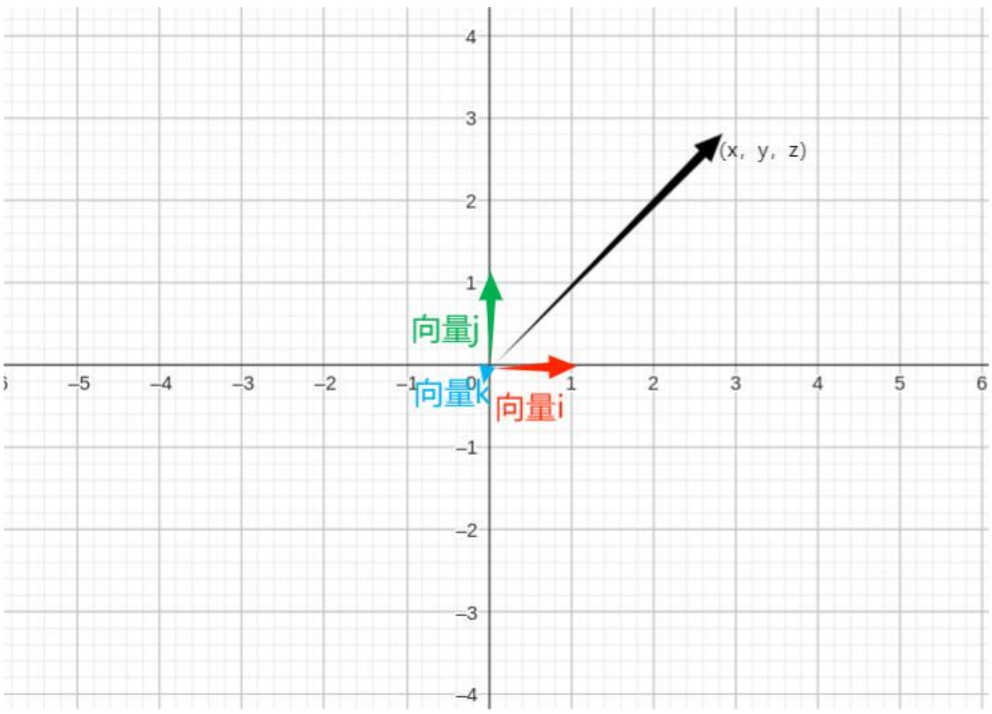
写出其微分形式：

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}(\text{高斯定理})$$

这个∇的符号称之为哈密顿算子，也可以叫 del，其实也就是哈密顿为了使得计算简便自己随手画个三角然后指代一种运算，算子的完整表达为：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$$

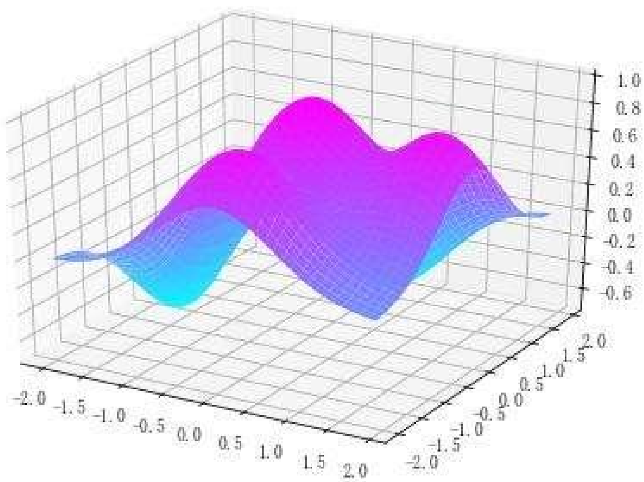
我们都知道向量可以被写成(x, y, z)的形式，而印象里这个是代表一个从原点出发指向点(x, y, z)的箭头，它的大小为$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，那么我们为他规定三个完全不同的单位向量也就是分别与x, y, z三轴相互平行且长度为 1 的向量并且命名为(i, j, k)，此时此刻原本的向量就可以被写为$xi + yj + zk$，而i, j, k又被常常省略写为$x + y + z$。

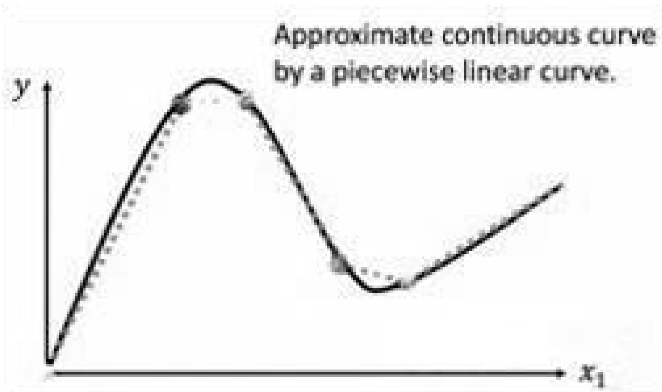


此时此刻想必你应该可以理解这个算符的本质了，它本质上其实就是一个向量，所以在计算上也遵循向量的运算法则，但又由于其包含了导数成分，所以又只能作为一个运算作用在其他函数上而不能单独存在，所以你可以将它理解为一种类似于加减法的运算。

接着说等式右半边的意思，$\frac{\partial}{\partial x}$意为求偏导，在具备多个变量的函数中我们直

接求导是会对一切自变量求导，而在一些特殊情况下，我们只希望得到自变量其中一部分的变化，所以偏导应运而生；如适才的$x+y+z$，我们对它完全求导，就是 1，原因是三个方向被合成为了一个方向，而这个方向的就是直接指向(x,y,z)方向上的单位向量。但如果我们只想看 x 方向上的变化呢，你可能想到只对x求导，你说对了，那么$\frac{\partial(x+y+z)}{\partial x}=1$,在这个过程中我们不在考虑$y,z$方向，所以直接将他们当成一个常数，也就是原本是下面这样一个完整的形状，你在y,z的固定时刻开始观察x，也就得到下下面的图像，就是纯粹的x的变化率了。





聊回$\nabla\cdot$E，这个运算称之为求电场 E 的散度，意义就是对电场（电场是有方向的）作点乘，也即单纯的计算电场 E 有关于三个方向的变化量，然后相加，即：

$$\nabla\cdot E=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

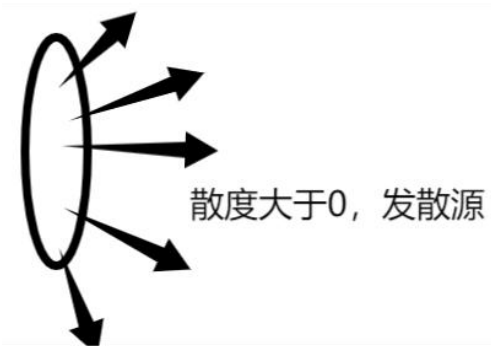
由于是点乘，也就是以投影的形式，所以得到的其实是一个标量，导数的定义其实就是针对于之前的变化：

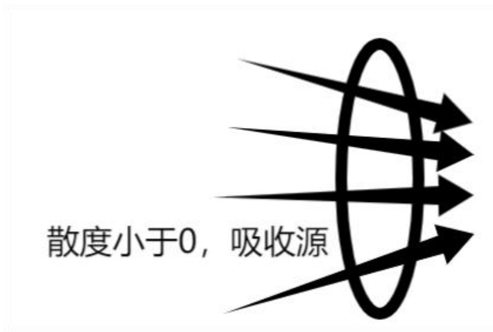
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}。$$

所以便可以发现当散度大于 0 时，其后面的邻域内就发生了增长，就好像这个点是往外在吐东西的（直观观察，不要想吐了东西内部东西变少了，如果你要这么理解就把他理解为一个喷管，里面的东西是无限的，喷管内部是不变化的但是在喷口处画上x, y, z三个轴，就明显的发现x, y, z均发生了增大，所以类似的这种结果也就是该点位是一个发散源）。

而在散度小于 0 时，我们就发现它相较于之前就明显的下降了，也就是开始向内收缩，此时此刻它就像是一个洞，开始吸收周围的东西，所以我们就说他是一个吸收源头。（注意：你并不能将它完全认为是一节水管，由于只是变化趋势，所以最多看洞口。）

那么等于 0 的情况呢？也就是它既不吸取也不放出，也就是无源。





接着说回这个式子：

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}(\text{高斯定理})$$

那么我们就不难理解左边的意思了，左边的意思就说要算电场的源，到底是吸收还是发散，此时我们再注意右边，ρ是电荷密度，也就是单位体积里的电荷量，ε_0是真空介电常数，众所周知，物理中的常数一般往往就说用来完成凑数的，再相对论思想下，随着我们认定的坐标系的不同，这些常数都会发生相应的变化，但是物理定律不会发生改变，换句话说就是，发生再这个世界里的事情其实是一个事，但是由于我们两个人认为的 1 不一样场，所以我们计算出来的大小其实不一样。

如此说来这个式子其实就是，电场的发散与否，看空间内电荷量的多少，要

是正电子多，那么电场发散，指向；而负电子多，电场就指向内，表现为吸收。

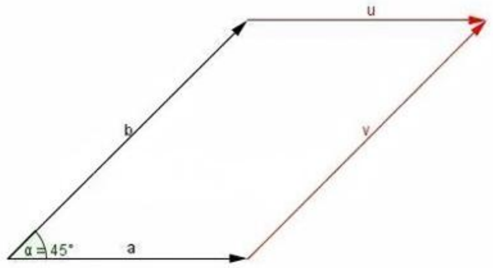
可能有些许复杂，但是你只要记住电场其实是有源的，它的变化受到它源头（正负电子）的影响。

$$\nabla \cdot B = 0\text{(安培环路定理)}$$

于此相对的是磁场，通过上面的式子我们可以看出磁场其实是无源的。没有磁荷，所以磁场并不能单独存在，如果你看到一个磁场，那么它要么是从无穷远来到无穷远去，要么就是首尾相连，有南极有北极，遥相呼应。

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}\text{(法拉第感应定律)}$$

我们知道向量的叉乘，即$a \times b$，会产生一个与向量a，b均垂直的大小为$|a||b|\sin\angle(a，b)$的向量，不难理解的，也就是会产生一个大小为a，b所构成的平行四边形面积的垂直于它们所构成的平面的向量。



接着我们将∇考虑进来，由于$a \times b$可以写为行列式的形式：

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= (a_y \cdot b_z - a_z b_y)i + (a_z \cdot b_x - a_x b_z)j + (a_x \cdot b_y - a_y b_x)k$$

所以旋度$\nabla \times$也可以写为：

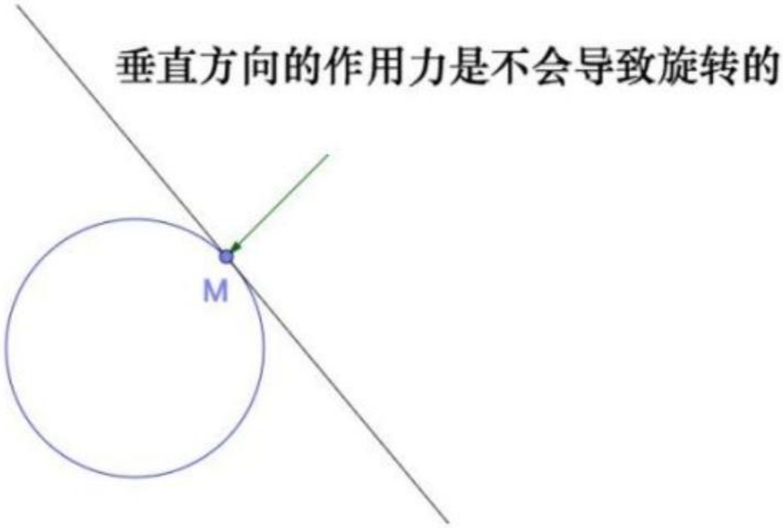
$$\nabla \times E = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)k$$

此时此刻你注意到，它的三个方向上都是取相互垂直的偏导，也就是E的z

分量在y方向上的变化和E的y分量在z方向上的变化构成了这个向量的x分量，与之对应的也就是E的x分量在z方向上的变化和E的z分量在x方向上的变化构成了这个向量的y分量，E的y分量在x方向上的变化和E的y分量在x方向上的变化构成了这个向量的z分量。

你估计还是无法理解，为什么要对分量求相互垂直的偏导，那样又怎么会有值呢？但实际上，你的想象还停留在x, y, z相互独立，分离的情况下，我们拿一个球来打比方，你给它一个指向球心的力，那么它自然只会向前滑动，但是只要你的角度变为切向，这个球就会滚动起来。



旋度的概念也是类似，通过求垂直方向的变化，来描述整个向量场的切向变化，也就是旋转变化，通过确定一个位置（如 M），来计算经过这个点的变化量下一步是向上运动还是向下运动，如果向上运动，呈现出逆时针的运动趋势，那么函数值是上升的，变化率就会大于 0；而向下运动，呈现出顺时针的趋势，那么函数值是下降的，变化率也就小于 0。

换句话说：

$$\nabla \times A > 0 \Leftrightarrow \text{逆时针旋转}$$

$$\nabla \times A < 0 \Leftrightarrow \text{顺时针旋转}$$

再来看回法拉第电磁感应定律：

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}(\text{法拉第感应定律})$$

这句话的意思其实就是电场的旋转会引发磁场的随时间变动，又或者是磁场

的变动，会引发电场的旋转，用我们高中所学过的话说就是右手螺旋法则，电流穿过螺线管会产生磁场。

再看最后一个式子：

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}(\text{安培定律})$$

与上面类似的，法拉第电磁感应定律告诉我们磁能生电，安培定律则为我们完整的描述了电磁相生的对偶关系，二者针对电磁场的完整描述共同促进了第二次科技革命，使得人类科技水平有了质的突破。

说回定律，式子的左边的意思是磁场的旋转，右边J是电流密度，μ_0为磁常数，$\frac{\partial E}{\partial t}$意为电场变化，完整表达就是，磁场的旋转会产生$\mu_0 J$，也就是恒定电流，同样的，电场的时间变化其实也可以引起磁场的旋转，所以$\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$有时也会被写作$J_D$，名为位移电流，意思也就是由于电场受到时间变化而产生的电流，由于我们知道电流就是电子的运动，电场的变化就是电子与电子关系的变化：

库伦定律：

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{R}$$

电场定义：

$$\vec{E} = \lim_{q_2 \to 0} \frac{F}{q_2}$$

可得：

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{R}$$

需要注意的是最初的定律是没有位移电流$J_D = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$的，也就是安培最开始的实验是恒定电流下进行的，所以也就给出恒定电流下的安培定律：

$$\nabla \times B = \mu_0 J$$

随后麦克斯韦考虑到电流的本质，在后面又加上了一部分位移电流，这个式子方才呈现出今天的样子。

最后我想如果我们能够理解以上的四个式子，电磁学的框架其实就已经建立起来了，而麦克斯韦方程组四个方程，无非就是有电荷，无磁荷，电磁感应相生，也谈不上什么难度，下面还是让我们开始正式的学习吧。

静电学

小时候学语文难免碰到一种题目就叫做作者为什么要起这个标题，以前打辩论也要求必须要开宗明义，所以静电学也需要我们先从静电学起。

静电，顾名思义，静止的电荷，那为什么我们不讲运动着的呢，因为那是电流。任何物质都是由原子组合而成，而原子的基本结构为质子、中子及电子。学界将质子定义为正电，中子不带电，电子带负电。在正常状况下，一个原子的质子数与电子数量相同，正负电平衡，所以对外表现出不带电的现象。但是由于外界作用如摩擦或以各种能量如动能、位能、热能、化学能等的形式作用会使原子的正负电不平衡。在日常生活中所说的摩擦实质上就是一种不断接触与分离的过程。有些情况下不摩擦也能产生静电，如感应静电起电，热电和压电起电、亥姆霍兹层、喷射起电等。任何两个不同材质的物体接触后再分离，即可产生静电，而产生静电的普遍方法，就是摩擦生电。材料的绝缘性越好，越容易产生静电。因为空气也是由原子组合而成，所以可以这么说，在人们生活的任何时间、任何地点都有可能产生静电。

科学来说，静电是通过摩擦引起电荷的重新分布而形成的，也有由于电荷的相互吸引引起电荷的重新分布形成。一般情况下原子核的正电荷与电子的负电荷相等，正负平衡，所以不显电性。 但是如果电子受外力而脱离轨道，造成不平衡电子分布，比如实质上摩擦起电就是一种造成正负电荷不平衡的过程。当两个不同的物体相互接触并且相互摩擦时，一个物体的电子转移到另一个物体，就因为缺少电子而带正电，而另一个体得到一些剩余电子的物体而带负电，物体带上了静电，而我们要学习的静电学也就是基于这一现象为基础，不断推论而产生的学科，相比较之下，静电学的内容虽然谈不上多，但都是基础中的基础，所以不光需要记住，更需要理解，也即与现实生活尽可能的思考联系。

库仑定律与电场

1785 年，库伦通过扭秤实验总结出了两个静止的点电荷（与质点定义类似，但带电）之间相互作用（一般物理世界里的相互作用通常都是力的作用）的规律，即电荷间的平方反比定律，称库仑定律，数学表示为：

$$\vec{F}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0R^2}\vec{R}$$

其中，q_1，q_2表示两个电荷（值是两个电荷的电荷量），R代表两个电荷之间的距离，$\vec{R}$是一个单位向量，方向为q_1指向q_2，ε_0为真空介电常数，由实验测得真空中值为 $8.854187817\times10^{-12}\mathrm{F/m}$，意为真空中保持电荷的能力。后可与真空磁导率$\mu_0$，共同确定光速，即自由空间内电磁波所能达到的最高速度：

$$\mathrm{c}=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\cdot\mu_0}}$$

高中库伦定律的公式为

$$\mathrm{F}=\mathrm{k}\frac{q_1q_2}{R^2}$$

其中将$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$直接定义为 k，目的是方便计算，但是 k 的值其实也具备一定的物理含义，ε_0代表了真空条件下储存电能的能力，我们都知道 F 是电容的单位，而ε_0的量纲表示为 F/m，其实表达的真正含义是整个空间中能够接受的 1m 内的最大电容就是 $8.854187817\times10^{-12}\mathrm{F}$，如果你有一个类似的扭秤的话，你可以随手再抓两个电子，最后通过测量会发现常数 k 值大致为 $8.99\times10^{9}\mathrm{N\cdot m^2/C^2}$,当值大于这个数值时，明显就会出现突破库仑力做功，进而影响到电子的内部结构，最后我们再拿其余部分常数简单计算，其实也就可以测算出ε_0的值（当然学了电动力学之后麦克斯韦会给你新的计算办法）：

$$\varepsilon_0=\frac{1}{4\pi\times k}\approx8.85\times10^{-12}\mathrm{C/N\cdot m^2}$$

现在你终于注意到 k 中的另一部分$\frac{1}{4\pi}$，它的展开应该是$\frac{1}{4\pi R^2}$，这个式子很是眼熟，我们知道球体的体积为：

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

直接求导得：

$$S_{球}=4\pi r^2$$

这个计算是由圆的周长推导来的，数学家可以观察出圆的周长公式：

$$\mathrm{C}=2\pi r$$

而再观察圆的面积公式：

$$S_{圆} = \pi r^2$$

不难发现，我们只要对r进行求导，就能由圆的面积求得圆的周长，这个原理是极为简单的，还记得导数的定义吗？

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

我们将$S_{圆}$看作是原函数$f(x)$，此时此刻右侧式子为：

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2}{\Delta r}$$

整理得：

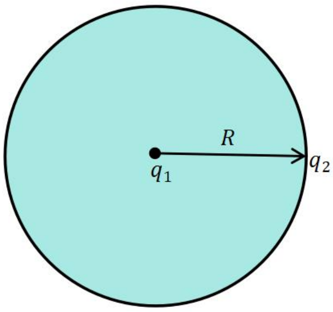
$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\pi[(r + \Delta r)^2 - r^2]}{\Delta r}$$

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\pi[r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2 - r^2]}{\Delta r}$$

消去Δr，直接计算结果：

$$\lim_{\Delta r \to 0} \pi[2r + \Delta r^2] = 2\pi r$$

其实整个计算的含义是非常明确的，就是再圆的边上再加了一条无穷小的薄壳，然后用整个壳的面积减去圆的面积，同样的，我们在三维空间下的圆（流形的说法）也就是球的外壳上加上一个薄薄的夹层，然后再减去最开始的面积也就能得到球的表面积。



现在我们来看这个图，由于我们的经验，我们可以知道电荷q_1对与其距离都是R的q_2可以构成这样一个圆，在这个圆上所有的电荷能受到的库仑力大小都是一样的，这也被称之为对称性，放到三维空间内，这个圆也就变成了球，我们便称它为球对称性，球对称性的好处在于，你只需要求出一点便能得到一个面，所以之所以要再乘$\frac{1}{4\pi R^2}$，目的本身就是求它的密度，这也就是场作用与力作用的直接区别，

场是直接作用于范围的，而力需要一个着力点，所有场力其实只是场的一部分而已，这个将会再广义相对论里进行更加精确的描述，这里也就不作赘述了。

$$\vec{F}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0R^2}\vec{R}$$

现在我们重新认识这个式子，库仑定律的真正含义其实就是在这个空间内，两个电荷所构成的电场产生的力受到两个电荷大小，距离的影响，而受到电荷大小影响的原因是意味电场由q_1q_2构成，没有q_1处在q_2的电场中，又或者q_2处在q_1的电场里，就不会出现力的作用，因为没有作用点。而受距离R^2的影响的原因是这个作用点的位置决定了场的密度大小，场能就那么大，距离越远，密度越小，能量越低，作用（力）就越小。

同样的理解，你也可以应用在万有引力公式里，那样你其实也就不难理解引力场的概念了。

现在我们顺理成章的引入电场的概念，由于刚才的作用点的加入，让我们了解到力是场作用的一部分，所以现在可以直接撤去另一个作用点，保留其源点：

令$\vec{F}=\vec{E}q_2$，则可以求出q_1的电场：

$$\vec{E}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0R^2}\vec{R}$$

也许你会发问，为什么这里的 $4\pi R^2$依旧保留着，我不是已经求了完整的电场了吗？你需要注意的，这个电场它上面有一个箭头，它的描述是一个向量，所谓向量必须是有头有脚，所以有地方来，就要有地方去，所以不论是正常的正电荷指向负电荷的电场，还是从无穷远来到负电荷；从正电荷到无穷远处的电场，其本质上都是点对点的，还记得我们曾经在数学笔记里写过的，无穷大和无穷小本质上是两个数，但是感觉上它是一种趋势，最后我们就只好说他是超实数。

所以只要是用点来作为开始结束描述的，就只能是向量的表示，又由于是点作为终点，所以 $4\pi R^2$必须保留。

现在你也就不难理解为什么正电荷是发散的，负电荷是吸收的了，由于常数都是正的，距离又是平方，电荷量只要是正的，$\nabla\cdot E$就是正的，所以电场线就会在电荷所在的点出现扩张，而电荷量一旦是负的，$\nabla\cdot E$也会是负的，在该点就会收缩，而在一个电中和的环境下，每一对$+\mathrm{q}$，$-\mathrm{q}$ 一一结对，彼此之间单独的电场$+\mathrm{E},-\mathrm{E}$ 相加为 0，最后在外部宏观看来，是不存在电场的。

电场强度叠加原理

这个原理其实刚才我们提到过，即所谓的$+\mathrm{E}$，$-\mathrm{E}$，这其实就是电场叠加原理的一部分，众所周知的，电场力是一个向量，只要是向量就遵循向量叠加原理，即：

$$\mathrm{F}=\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2+\mathrm{F}_3+\mathrm{F}_4+\ldots$$

除去他们给各自的电荷：q_1、q_2、q_3、…

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{q}}=\frac{\mathrm{F}_1}{q_1}+\frac{\mathrm{F}_2}{q_2}+\frac{\mathrm{F}_3}{q_3}+\frac{\mathrm{F}_4}{\mathrm{q}_4}+\ldots$$
$$=\mathrm{E}=\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2+\mathrm{E}_3+\mathrm{E}_4+\ldots$$

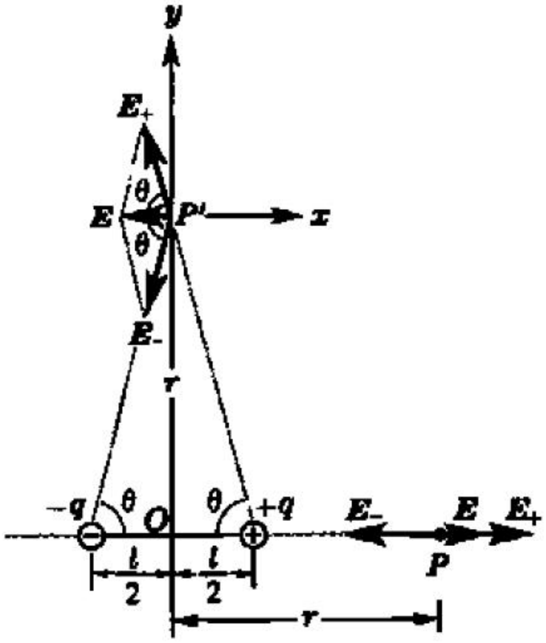
不难理解，此时的E_1、E_2、E_3、E_4均是它们各自的电荷的电场，而总力 F 根本上可以看作是两个电荷（一个是场源电荷，另一个是试探电荷）的作用，也即

$$\vec{F}=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{R}$$

其中q是总的场源，Q是试探电荷，但要写成上面$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{q}}$的形式，就必须要一个前提条件，如果你是站在试探电荷的角度来看，你的场源就只能来自于一个地方，也就是所有的q_1、q_2、q_3、…都处在同一个空间点，而站在场源电荷的角度来看，和你产生同一个力（大小方向都相同）的电荷只能在一个位置，所以试探电荷就只能是同一个，所以电场叠加原理虽然可以广泛地应用在电磁学的推算中，但也要注意不要随意的就认为两个电场就能叠加，它们的场的叠加更不是单纯的覆盖加厚，如果你想更为普适的使用这个原理，请记住，向量的运算要注意方向。

电偶极子

正如我们刚才所说的叠加电场，现在我们来考虑一个最简单的带电系统——电偶极子所产生的场强变化：假设存在一对等量异号点电荷$+\mathrm{q}$、$-\mathrm{q}$，它们的距离为l，然后在两个电荷的延长线上放置一个试探电荷 P，并且在它们的中垂线上放置另一个试探电荷 P'，具体作图如下：



先求延长线上 P 点的场强：

$$\begin{cases}\vec{E}_+ = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{+q}{\left(r = \dfrac{l}{2}\right)^2}\\ \vec{E}_- = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{-q}{\left(r + \dfrac{l}{2}\right)^2}\end{cases}$$

根据场强叠加原理：$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2}\right]$$

从强度大小来看，$\vec{E}_+$是要更大一些，所以在延长线上的电场的方向更接近试探电荷靠近的场源电荷所激发出的磁场。

再求中垂线上P'的场强：

根据勾股定理，$\pm q$距离P'的距离都是$\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$，所以不考虑方向的话，它们的大小都应该是

$$\mathrm{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

此时此刻，我们再考虑方向的问题，由于$+q$取正的原因，所以其方向就是$+q$向外延申指向P'的那一根电场线。相反的，$-q$就是由无穷远处指向$-q$的并且经过P'的那一根电场线。

使用平行四边形法则，可以合成出它们所共同构成的那一个电场向量，即图中标记的$\vec{E}$。

由于$\vec{E}_+$与$\vec{E}_-$的三角关系，可以直接通过设一个它们共同大小的角θ来实现$\vec{E}$、$\vec{E}_+$、$\vec{E}_-$之间的关联，具体关系如下：

$$\begin{cases} E_x=E_{+x}+E_{-x}=2E_+\cos\theta \\ E_y=E_{+y}+E_{-y}=0 \end{cases}$$

再观察其几何关系，可以直接得出：

$$\cos\theta=\frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}$$

代入计算得到，总场强的大小为：

$$E=|E_x|=2E_+\cos\theta=2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}\cdot\frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}$$

$$=2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot\frac{l}{2}}{\left[r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{ql}{\left[r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

需要注意到的是，要成为一对电偶极子，需要满足一个另外的条件，就是一对$\pm q$之间的距离要远比场点（试探电荷的位置）距离它们的位置r要小的多。

此时：

$$\frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}=\frac{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2-\left(r=\frac{l}{2}\right)^2}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2\cdot\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}=\frac{2rl}{\left[r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^2}\approx\frac{2l}{r^3}$$

$$\frac{l}{\left[r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{l}{r^3}$$

故而在电偶极子延长线上，场强E的大小为：

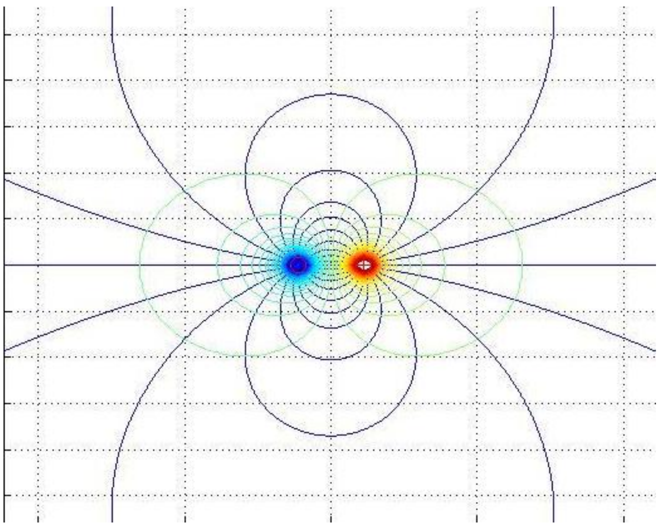
$$E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r^3}$$

在中垂面上，场强E的大小为：

$$E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^3}$$

此时，我们注意到，当电荷量q增大一倍，l变为之前的$\frac{1}{2}$，场强的大小是不会发生变化的，于是我们可以定义一个电偶极矩：$p = ql$，物理意义为两个电荷相互构成的系统内部的极化程度。

表现出电偶极子所产生的电场图像如下：



电荷密度

在长期的学习中，我们是熟悉密度的含义的，凡是提及到密度的内容我们就知道要化整为零，即密度是数量与所占空间的比值；那么在此定义下我们也便引出了电荷密度的三个不同定义：

对于正常处于三维空间的一组电荷而言，我们要求它的密度也就是从中划分出一块足够小的空间（我们称之为体积元），然后针对这个体积元内的电荷继续划分空间，直到空间上划无可划，最后得出该空间的电荷数量即可，乍一听似乎

有些许唬人，但是我们刚巧学习了微积分，所以这些也只能算是小 case，所以给出空间里的体密度定义：

$$\rho_e = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum q}{\Delta V}$$

其中ΔV代表了体积元的定义，即一块划分出来的无限微小的空间，$\sum q$指代处在体积元空间内的电荷总量。也许你会想，空间无限划分，电子也会被切割出去，怎么可能还会有大量电子处在这个体积元空间内呢，这是以为我们先是有两个共识才会发展出这样的假设：第一，大家广泛的接受大量电荷聚集运动是会产生电流一样的宏观效应，并且不影响计算的。在这个前提下，大量的电荷不会被看作是单独的个体，反而会是一个整体，就像我们看水一样，我们知道水分子之间存在间隙，但是我们计算水流量的时候，依然会将其认为是连续的。第二，绝对意义上的无限微小空间是没有任何物理含义的，以为在那里什么都不会发生与存在，自然缺乏被定义的意义，所以这个空间其实也是宏观上无限小，微观上无限大的产物，是符合极限的理念的。

那么同样的定义，我们假设存在一片极薄的夹层，他的厚度为δ，面积为ΔS，那么此时此刻，这块夹层的体积也就被求了出来，即：

$$V = \delta \cdot \Delta S$$

由于这片夹层的厚度极薄，所以δ可以近似看成趋向于 0，依旧使用前面体密度的概念，就可以计算出该面上的电荷总和，即：

$$\Delta q = \delta \cdot \Delta S \cdot \rho_e$$

根据密度定义，有下面的式子：

$$\sigma_e = \frac{\Delta q}{\Delta S} = \delta \cdot \rho_e$$

σ_e也就是定义下的面密度，但是由于$\delta \to 0$的特性，如果ρ_e不被看作是趋向于∞的话，面密度σ_e也就不会呈现出一个有限值，所以在面密度的平面上，由于体积元的更为微弱的微观属性，想要通过面密度来直接划分体密度是不合理的。这也体现了微观上无限大，宏观上无限小的属性，当然更主要的因素是我们的任

何密度都是在遵循取平均的逻辑思维，而很明显，面密度和体密度之间的平均是要相差一个维度的无穷的，所以令$\rho_e \to \infty$是一种数学考量，类似于打补丁。

当然，如果你愿意的话，你同样也可以采取与体密度相似的定义：

$$\sigma_e = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\sum q}{\Delta S}$$

与此类似，我们也可以先给出线密度的定义，再思考它是如何从面密度完成转换的：

$$\eta_e = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\sum q}{\Delta l}$$

由上式的定义其实不难看出线密度就是当电荷以线形分布时，采取的近似平均，如下图所示：

此时，我们依照体密度的定义，需要计算出它的体积：

$$V = S \cdot \Delta l$$

计算得到该情况下的电量（电荷总量）：

$$\Delta q = S \cdot \Delta l \cdot \rho_e$$

考虑线形的特征，令$S \to 0$，同样为了保证运算的符合实际，也令$\rho_e \to \infty$，所以得出线密度的公式：

$$\eta_e = \frac{\Delta q}{\Delta l} = S \cdot \rho_e$$

最后需要一提的是以上不同种密度的考虑其实都是为了适应对应的形状，在单个电荷的情况下，我们可以依旧使用库仑定律和电场叠加，但是面对存在于具体问题下的电荷系统，这些定律就完全不够看了，于是乎，需要我们将其看作一个整体，为了保证电磁基本定律的依旧可以使用，所以我们抽象出以上概念，目的是方便计算与解决问题。

电场线

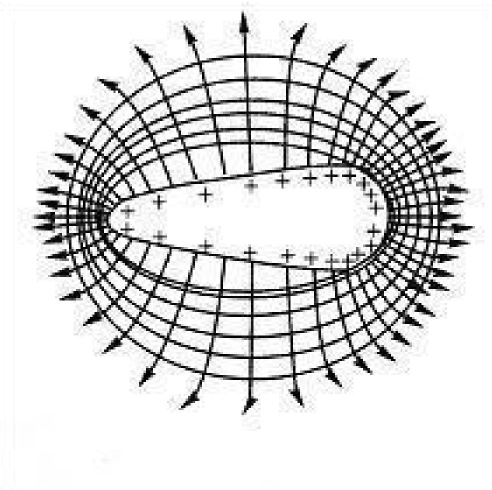
我一直所强调的，电场其本质上是一种力场，也就是作用场，如果没有接受该作用的载体出现，电场的性质是无法为人所得知的。

也正是由于力场的性质，我们给出了电场的定义：

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{R}$$

其本质上就是力的表现，所以只要是带电的系统，我们都可以得出它的电场分布，但是明显地，通过电荷分布计算出的电场分布过程难免有些过于复杂，如果是规则的形状还好，可一旦遇上形状不规则的系统，大家就难免要抓耳挠腮了，所以依照电荷连续分布的假设，也便有了不同基本类型带电系统下的电场研究。

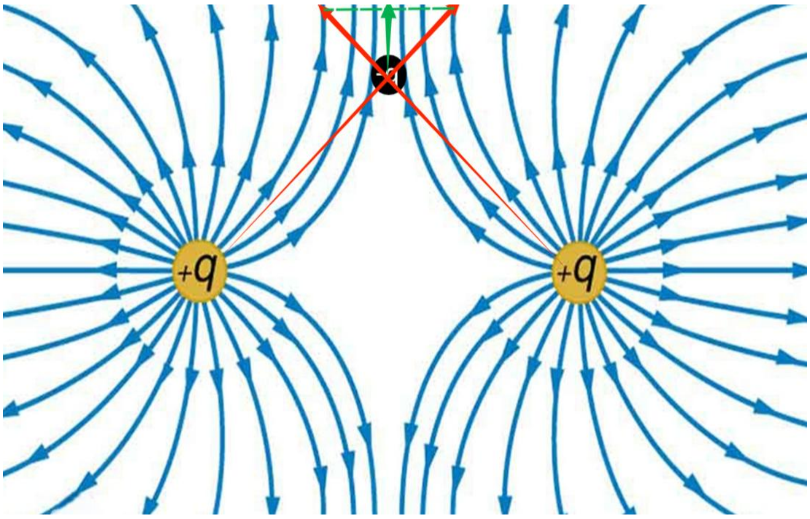
高中的学习中，老师告诉我们电场线上的每一个点上的切线方向其实都与电场强度保持一致，而我们知道一种特殊情况，即静电场情况下，所有的电场线都垂直于导体表面，如下图所示。



这张图可能并没有那么标准，但是用以表达电场线的含义我想是再完美不过了。我们都知道正电荷的电场线是有电荷直接向外发散，这是因为在电场运算中，我们直接抛弃了试探电荷的概念，即公式$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$，所以我们的电场方向其实是场源电荷指向试探电荷的方向，而在上图中的导体上，我们就可以直接将其看作是一堆正电荷的集合体，而在导体表面，每一根电场线都由一个正电荷发出，所以在静电场中，电场线才会展现出完全垂直于导体表面的性质，而一切的根本在于试探电荷所受到的力。

那么你肯定还会有新的问题，为什么不规则的导体往往电场线会出现弯曲，

这就不得不提到我们最开始讨论库仑定律时讲到的球体表面积$S_{球} = 4\pi r^2$，当时我们说之所以 K 中蕴含一个$\frac{1}{4\pi r^2}$，是因为在这个球体表面的任何一个电荷都会收到同样大小的库仑力（也就是电荷间的电场力），因为点电荷自己是规则的，所以它对于这个球面（由于是高斯提出的，所以也叫高斯面）的力就是均匀的，但是不规则导体的表面上，处于同一个位置的试探电荷很明显就会直接受到来自不同位置的场源电荷的影响，最直接的就类似于两个正电荷正中心的电场相互抗拒。



这个过程就已经说明了，电场线的不规则其实就是场源电荷的位置不同导致的该点位上的试探电荷受到的力不相同，从而产生的力的叠加导致的。

我们注意到每个不同的空间点位都会受到大小、方向的力（由于矢量叠加），那么我们将每个位置出现的试探电荷而催生出的电场强度方向（切线方向）作为该点上的导数，那么最后就会得到一条每个点的切线都是该点电场方向的曲线，这个曲线就是电场线。

也许高中老师还告诉过你，电场线会和等势面垂直，那么我们就不得不引入电势的概念，力的大小和导致的位移的乘积是能量的定义，而电势的定义是能量与电量的比值，所以就有如下公式：

$$W = Fl = Uq$$

计算得：

$$U = El$$

当然，这样的定义并不够严谨，如果正式来写的话应该使用积分的方式，但用于理解的话，明显这样更为直接，电势 U 此时作为一个物理量来说，只要是

电场强度大小和距离乘积相等的点都可以被连接起来作为等势面，所以在点电荷情况下，相同距离下的电场力相等，导致电场强度相等，再导致电势相等，所以它表现为一个球面；同样的，我们考虑电场线上的某点附近的电势，假设存在一个邻域，那么在这个点附近的电场强度都是相近的，而距离也是相近的，所以也可以被连接起来，成为一个等势面。（需注意，以上这些都是为了便于理解，所以讨论的都是静电场的情况，复杂情形下虽然也是这样的原理，但还需要考虑电荷的运动。）