

# 前言

本章节开始学习电磁学，电磁学看似有别于其他物理但其实还是没有脱离出牛顿力学那一套，还是愿意按照物质的角度来剖析这些问题，并且一切的一切都愿意建立在物质之间的相互影响上的，有别于广义相对论，这个东西自然也是特定情境特定使用，自然也谈不上“放之天下而皆准”。

牛顿物理学（一作经典物理学）的经典思想：认为世界是由运动着的粒子构成，而粒子间存在符合因果关系的关联（也称相互作用）。牛顿等老一派物理学家传承了古希腊自然哲学的理念，一定意义上信奉经验主义，尽管与笛卡尔类似的，牛顿也是个有名的有神论者，但是他对笛卡尔主义下的“我思故我在”明显是不屑一顾的，他认为真理广泛的存在于世界上，而非诞生于脑海间，相较之下，牛顿是明显的有点唯物了，不过身为一个物理学家，如果不能客观而现实的观察和思考，那迟早有一天就会成为一个有趣的神棍，爱因斯坦说上帝不掷骰子的时候，明显还是信任了上帝，但上帝懒得回应。

接着讲回电磁学，整个电磁学，建立在电场理论之下，（即电子与电子之间的作用并不是直接接触，而是基于一种力场，只要在一定空间范围就会受到影响），后发现电磁感应规律，仿照电场解释了磁场，最后随着相对论的建立，人们逐渐理解电磁一体两面的性质，即电子流动的时候的，正负电子相互依照光速运动，产生的库仑力造就了磁场，这也就是没有磁单极子的正确解释。讲到这里，你可能很难听懂，但无所谓，当我们了解了库仑定律和最基本的相对论效应后其实就能够简单讲解一下这个过程，同样的，当我们彻底了解了电场和磁场之后也就能完全理解这其中的奥妙了。

电磁场的分别建立其实还是蛮早的，1785年库仑定律被提出，1820年，电磁感应被发现，诞生到了1865年，一代电磁奇才麦克斯韦才横空出世，一扫之前的迷雾，大笔一挥，统一了电磁理论，提出了著名的麦克斯韦方程组。至此电磁学有关于粒子的部分开始结束，波粒二象性的发现更是验证了麦克斯韦的猜想，电磁波的概念被证实，光也被慢慢的纳入到讨论范围内，最后催生出了爱因斯坦、波尔等一众近代物理学神人，大大的推进了物理系学生学习的难度。

不过还好，所谓真理是越辩越明，学习是越学越精，我们还是遵循之前数学

笔记的老规矩，先打个预防针，解释一下经典电磁理论的集大成者——麦克斯韦方程组：

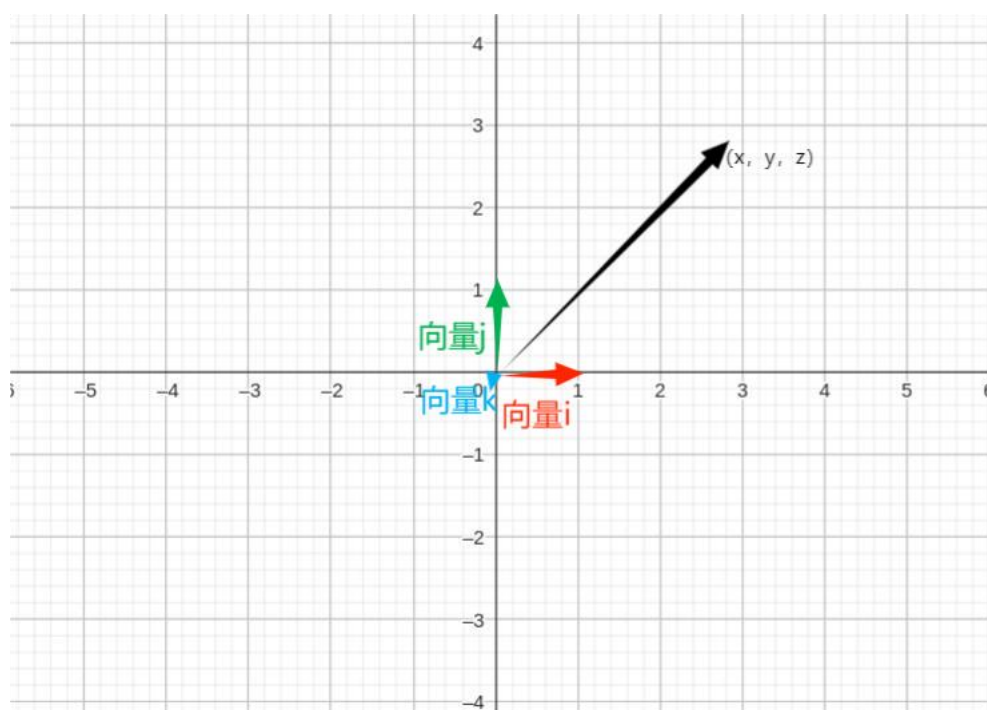
写出其微分形式：

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ (高斯定理)}$$

这个 $\nabla$ 的符号称之为哈密顿算子，也可以叫 **del**，其实也就是哈密顿为了使得计算简便自己随手画个三角然后指代一种运算，算子的完整表达为：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$$

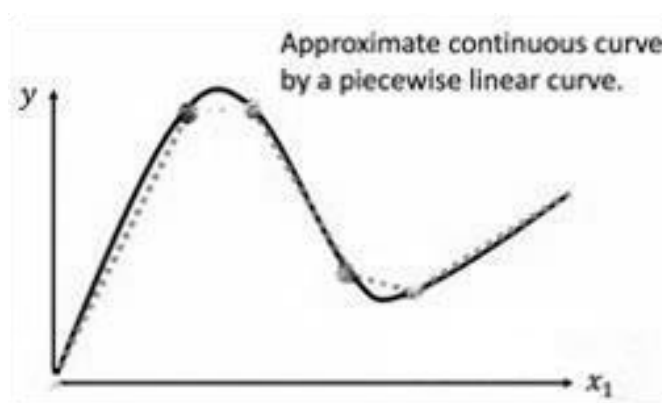
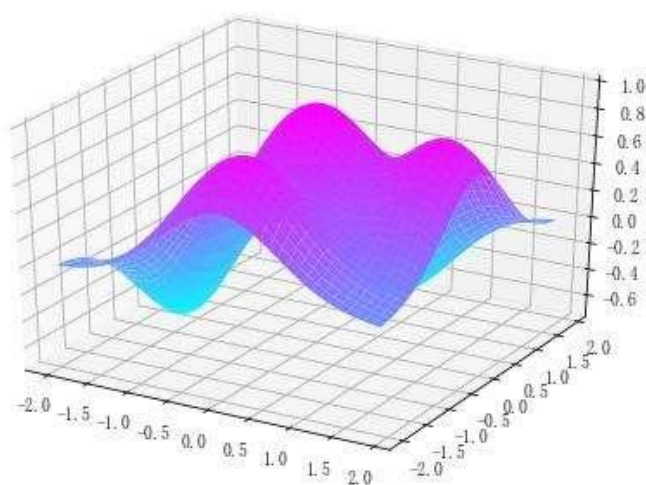
我们都知道向量可以被写成 $(x, y, z)$ 的形式，而印象里这个是代表一个从原点出发指向点 $(x, y, z)$ 的箭头，它的大小为 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ，那么我们为他规定三个完全不同的单位向量也就是分别与 $x, y, z$ 三轴相互平行且长度为 1 的向量并且命名为 $(i, j, k)$ ，此时此刻原本的向量就可以被写为 $xi + yj + zk$ ，而 $i, j, k$ 又被常常省略写为 $x + y + z$ 。



此时此刻想必你应该可以理解这个算符的本质了，它本质上其实就是一个向量，所以在计算上也遵循向量的运算法则，但又由于其包含了导数成分，所以又只能作为一个运算作用在其他函数上而不能单独存在，所以你可以将它理解为一种类似于加减法的运算。

接着说等式右半边的意思， $\frac{\partial}{\partial x}$ 意为求偏导，在具备多个变量的函数中我们直

接求导是会对一切自变量求导，而在一些特殊情况下，我们只希望得到自变量其中一部分的变化，所以偏导应运而生；如适才的 $x + y + z$ ，我们对它完全求导，就是1，原因是三个方向被合成为了一个方向，而这个方向的就是直接指向 $(x, y, z)$ 方向上的单位向量。但如果我们只想看 $x$ 方向上的变化呢，你可能想到只对 $x$ 求导，你说对了，那么 $\frac{\partial(x+y+z)}{\partial x} = 1$ ，在这个过程中我们不在考虑 $y, z$ 方向，所以直接将他们当成一个常数，也就是原本是下面这样一个完整的形状，你在 $y, z$ 的固定时刻开始观察 $x$ ，也就得到下下面的图像，就是纯粹的 $x$ 的变化率了。



聊回 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ ，这个运算称之为求电场 $\mathbf{E}$ 的散度，意义就是对电场（电场是有方向的）作点乘，也即单纯的计算电场 $\mathbf{E}$ 有关于三个方向的变化量，然后相加，即：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

由于是点乘，也就是以投影的形式，所以得到的其实是一个标量，导数的定义其实就是针对于之前的变化：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}。$$

所以便可以发现当散度大于 0 时，其后面的邻域内就发生了增长，就好像这个点是往外在吐东西的（直观观察，不要想吐了东西内部东西变少了，如果你要这么理解就把他理解为一个喷管，里面的东西是无限的，喷管内部是不变化的但是在喷口处画上  $x, y, z$  三个轴，就明显的发现  $x, y, z$  均发生了增大，所以类似的这种结果也就是该点位是一个发散源）。

而在散度小于 0 时，我们就发现它相较于之前就明显的下降了，也就是开始向内收缩，此时此刻它就像是一个洞，开始吸收周围的东西，所以我们就说它是一个吸收源头。（注意：你并不能将它完全认为是一节水管，由于只是变化趋势，所以最多看洞口。）

那么等于 0 的情况呢？也就是它既不吸取也不放出，也就是无源。



接着说回这个式子：

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ (高斯定理)}$$

那么我们就并不难理解左边的意思了，左边的意思就说要算电场的源，到底是吸收还是发散，此时我们再注意右边， $\rho$  是电荷密度，也就是单位体积里的电荷量， $\epsilon_0$  是真空介电常数，众所周知，物理中的常数一般往往就说用来完成凑数的，再相对论思想下，随着我们认定的坐标系的不同，这些常数都会发生相应的变化，但是物理定律不会发生改变，换句话说就是，发生再这个世界里的事情其实是一个事，但是由于我们两个人认为的 1 不一样场，所以我们计算出来的大小其实不一样。

如此说来这个式子其实就是，电场的发散与否，看空间内电荷量的多少，要

是正电子多，那么电场发散，指向；而负电子多，电场就指向内，表现为吸收。

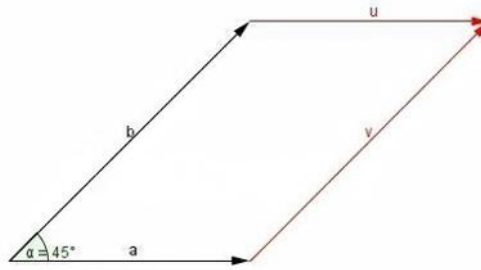
可能有些许复杂，但是你只要记住电场其实是有源的，它的变化受到它源头（正负电子）的影响。

$$\nabla \cdot B = 0 \text{ (安培环路定理)}$$

于此相对的是磁场，通过上面的式子我们可以看出磁场其实是无源的。没有磁荷，所以磁场并不能单独存在，如果你看到一个磁场，那么它要么是从无穷远来到无穷远去，要么就是首尾相连，有南极有北极，遥相呼应。

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \text{ (法拉第感应定律)}$$

我们知道向量的叉乘，即  $a \times b$ ，会产生一个与向量  $a$ ， $b$  均垂直的大小为  $|a||b| \sin \angle(a, b)$  的向量，不难理解的，也就是会产生一个大小为  $a$ ， $b$  所构成的平行四边形面积的垂直于它们所构成的平面的向量。



接着我们将  $\nabla$  考虑进来，由于  $a \times b$  可以写为行列式的形式：

$$\begin{aligned} a \times b &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y \cdot b_z - a_z b_y)i + (a_z \cdot b_x - a_x b_z)j + (a_x \cdot b_y - a_y b_x)k \end{aligned}$$

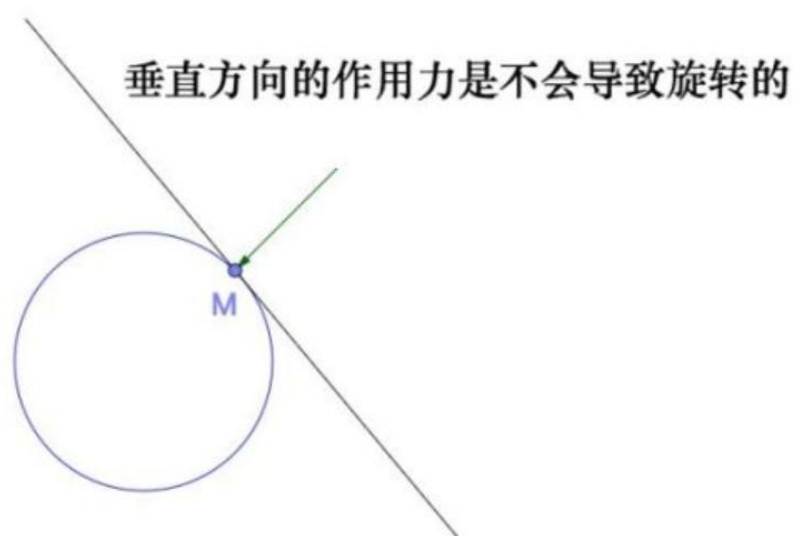
所以旋度  $\nabla \times$  也可以写为：

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) k \end{aligned}$$

此时此刻你注意到，它的三个方向上都是取相互垂直的偏导，也就是  $E$  的  $z$

分量在 $y$ 方向上的变化和 $E$ 的 $y$ 分量在 $z$ 方向上的变化构成了这个向量的 $x$ 分量，与之对应的也就是 $E$ 的 $x$ 分量在 $z$ 方向上的变化和 $E$ 的 $z$ 分量在 $x$ 方向上的变化构成了这个向量的 $y$ 分量， $E$ 的 $y$ 分量在 $x$ 方向上的变化和 $E$ 的 $y$ 分量在 $x$ 方向上的变化构成了这个向量的 $z$ 分量。

你估计还是无法理解，为什么要对分量求相互垂直的偏导，那样又怎么会有值呢？但实际上，你的想象还停留在 $x, y, z$ 相互独立，分离的情况下，我们拿一个球来打比方，你给它一个指向球心的力，那么它自然只会向前滑动，但是只要你的角度变为切向，这个球就会滚动起来。



旋度的概念也是类似，通过求垂直方向的变化，来描述整个向量场的切向变化，也就是旋转变换，通过确定一个位置（如  $M$ ），来计算经过这个点的变化量。下一步是向上运动还是向下运动，如果向上运动，呈现出逆时针的运动趋势，那么函数值是上升的，变化率就会大于 0；而向下运动，呈现出顺时针的趋势，那么函数值是下降的，变化率也就小于 0。

换句话说：

$$\nabla \times A > 0 \Leftrightarrow \text{逆时针旋转}$$

$$\nabla \times A < 0 \Leftrightarrow \text{顺时针旋转}$$

再来看回法拉第电磁感应定律：

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \text{ (法拉第感应定律)}$$

这句话的意思其实就是电场的旋转会引发磁场的随时间变动，又或者是磁场

的变动，会引发电场的旋转，用我们高中所学过的话说就是右手螺旋法则，电流穿过螺线管会产生磁场。

再看最后一个式子：

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \text{ (安培定律)}$$

与上面类似的，法拉第电磁感应定律告诉我们磁能生电，安培定律则为我们完整的描述了电磁相生的对偶关系，二者针对电磁场的完整描述共同促进了第二次科技革命，使得人类科技水平有了质的突破。

说回定律，式子的左边的意思是磁场的旋转，右边 $J$ 是电流密度， $\mu_0$ 为磁常数， $\frac{\partial E}{\partial t}$ 意为电场变化，完整表达就是，磁场的旋转会产生 $\mu_0 J$ ，也就是恒定电流，同样的，电场的时间变化其实也可以引起磁场的旋转，所以 $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ 有时也会被写作 $J_D$ ，名为位移电流，意思也就是由于电场受到时间变化而产生的电流，由于我们知道电流就是电子的运动，电场的变化就是电子与电子关系的变化：

库伦定律：

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 R^2} \vec{R}$$

电场定义：

$$\vec{E} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} \frac{F}{q_2}$$

可得：

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R^2} \vec{R}$$

需要注意的是最初的定律是没有位移电流 $J_D = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ 的，也就是安培最开始的实验是恒定电流下进行的，所以也就给出恒定电流下的安培定律：

$$\nabla \times B = \mu_0 J$$

随后麦克斯韦考虑到电流的本质，在后面又加上了一部分位移电流，这个式子方才呈现出今天的样子。

最后我想如果我们能够理解以上的四个式子，电磁学的框架其实就已经建立起来了，而麦克斯韦方程组四个方程，无非就是有电荷，无磁荷，电磁感应相生，也谈不上什么难度，下面还是让我们开始正式的学习吧。

# 静电学

小时候学语文难免碰到一种题目就叫做作者为什么要起这个标题，以前打辩论也要求必须要开宗明义，所以静电学也需要我们先从静电学起。

静电，顾名思义，静止的电荷，那为什么我们不讲运动着的呢，因为那是电流。任何物质都是由原子组合而成，而原子的基本结构为质子、中子及电子。学界将质子定义为正电，中子不带电，电子带负电。在正常状况下，一个原子的质子数与电子数量相同，正负电平衡，所以对外表现出不带电的现象。但是由于外界作用如摩擦或以各种能量如动能、位能、热能、化学能等的形式作用会使原子的正负电不平衡。在日常生活中所说的摩擦实质上就是一种不断接触与分离的过程。有些情况下不摩擦也能产生静电，如感应静电起电，热电和压电起电、亥姆霍兹层、喷射起电等。任何两个不同材质的物体接触后再分离，即可产生静电，而产生静电的普遍方法，就是摩擦生电。材料的绝缘性越好，越容易产生静电。因为空气也是由原子组合而成，所以可以这么说，在人们生活的任何时间、任何地点都有可能产生静电。

科学来说，静电是通过摩擦引起电荷的重新分布而形成的，也有由于电荷的相互吸引引起电荷的重新分布形成。一般情况下原子核的正电荷与电子的负电荷相等，正负平衡，所以不显电性。但是如果电子受外力而脱离轨道，造成不平衡电子分布，比如实质上摩擦起电就是一种造成正负电荷不平衡的过程。当两个不同的物体相互接触并且相互摩擦时，一个物体的电子转移到另一个物体，就因为缺少电子而带正电，而另一个体得到一些剩余电子的物体而带负电，物体带上了静电，而我们要学习的静电学也就是基于这一现象为基础，不断推论而产生的学科，相比较之下，静电学的内容虽然谈不上多，但都是基础中的基础，所以不光需要记住，更需要理解，也即与现实生活尽可能的思考联系。

## 1、库仑定律

1785 年，库仑通过扭秤实验总结出了两个静止的点电荷（与质点定义类似，但带电）之间相互作用（一般物理世界里的相互作用通常都是力的作用）的规律，即电荷间的平方反比定律，称库仑定律，数学表示为：



$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{R}$$

其中， $q_1, q_2$ 表示两个电荷（值是二个电荷的电荷量）， $R$ 代表二个电荷之间的距离， $\vec{R}$ 是一个单位向量，方向为 $q_1$ 指向 $q_2$ ， $\epsilon_0$ 为真空介电常数，由实验测得真空中值为  $8.854187817 \times 10^{-12} \text{F/m}$ ，意为真空中保持电荷的能力。后可与真空磁导率 $\mu_0$ ，共同确定光速，即自由空间内电磁波所能达到的最高速度：

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

高中库伦定律的公式为

$$F = k \frac{q_1 q_2}{R^2}$$

其中将 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ 直接定义为  $k$ ，目的是方便计算，但是  $k$  的值其实也具备一定的物理含义， $\epsilon_0$ 代表了真空条件下储存电能的能力，我们都知道  $F$  是电容的单位，而 $\epsilon_0$ 的量纲表示为  $\text{F/m}$ ，其实表达的真正含义是整个空间中能够接受的  $1\text{m}$  内的最大电容就是  $8.854187817 \times 10^{-12} \text{F}$ ，如果你有一个类似的扭秤的话，你可以随手再抓两个电子，最后通过测量会发现常数  $k$  值大致为  $8.99 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ ，当值大于这个数值时，明显就会出现突破库仑力做功，进而影响到电子的内部结构，最后我们再拿其余部分常数简单计算，其实也就可以测算出 $\epsilon_0$ 的值（当然学了电动力学之后麦克斯韦会给你新的计算办法）：

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times k} \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{C/N} \cdot \text{m}^2$$

现在你终于注意到  $k$  中的另一部分 $\frac{1}{4\pi}$ ，它的展开应该是 $\frac{1}{4\pi R^2}$ ，这个式子很是眼熟，我们知道球体的体积为：

$$V_{球} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

直接求导得：

$$S_{球} = 4\pi r^2$$

这个计算是由圆的周长推导来的，数学家可以观察到圆的周长公式：

$$C = 2\pi r$$

而再观察圆的面积公式：

$$S_{\text{圆}} = \pi r^2$$

不难发现，我们只要对 $r$ 进行求导，就能由圆的面积求得圆的周长，这个原理是极为简单的，还记得导数的定义吗？

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

我们将 $S_{\text{圆}}$ 看作是原函数 $f(x)$ ，此时此刻右侧式子为：

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2}{\Delta r}$$

整理得：

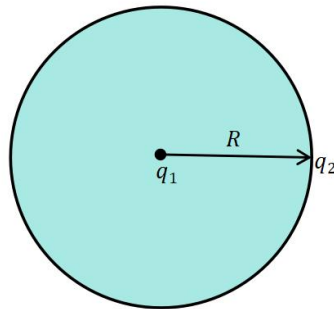
$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\pi[(r + \Delta r)^2 - r^2]}{\Delta r}$$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\pi[r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2 - r^2]}{\Delta r}$$

消去 $\Delta r$ ，直接计算结果：

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \pi[2r + \Delta r] = 2\pi r$$

其实整个计算的含义是非常明确的，就是再圆的边上再加了一条无穷小的薄壳，然后用整个壳的面积减去圆的面积，同样的，我们在三维空间下的圆（流形的说法）也就是球的外壳上加上一个薄薄的夹层，然后再减去最开始的面积也就能得到球的表面积。



现在来看这个图，由于我们的经验，我们可以知道电荷 $q_1$ 对与其距离都是 $R$ 的 $q_2$ 可以构成这样一个圆，在这个圆上所有的电荷能受到的库仑力大小都是一样的，这也被称之为对称性，放到三维空间内，这个圆也就变成了球，我们便称它为球对称性，球对称性的好处在于，你只需要求出一点便能得到一个面，所以之所以要再乘 $\frac{1}{4\pi R^2}$ ，目的本身就是求它的密度，这也就是场作用与力作用的直接区别，

场是直接作用于范围的，而力需要一个着力点，所有场力其实只是场的一部分而已，这个将会再广义相对论里进行更加精确的描述，这里也就不作赘述了。

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{R}$$

现在我们重新认识这个式子，库仑定律的真正含义其实就是在这个空间内，两个电荷所构成的电场产生的力受到两个电荷大小，距离的影响，而受到电荷大小影响的原因是意味电场由 $q_1 q_2$ 构成，没有 $q_1$ 处在 $q_2$ 的电场中，又或者 $q_2$ 处在 $q_1$ 的电场里，就不会出现力的作用，因为没有作用点。而受距离 $R^2$ 的影响的原因是这个作用点的位置决定了场的密度大小，场能就那么大，距离越远，密度越小，能量越低，作用（力）就越小。

同样的理解，你也可以应用在万有引力公式里，那样你其实也就不难理解引力场的概念了。

现在我们顺理成章的引入电场的概念，由于刚才的作用点的加入，让我们了解到力是场作用的一部分，所以现在可以直接撤去另一个作用点，保留其源点：

令 $\vec{F} = \vec{E} q_2$ ，则可以求出 $q_1$ 的电场：

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{R}$$

也许你会发问，为什么这里的 $4\pi R^2$ 依旧保留着，我不是已经求了完整的电场了吗？你需要注意的，这个电场它上面有一个箭头，它的描述是一个向量，所谓向量必须是有头有脚，所以有地方来，就要有地方去，所以不论是正常的正电荷指向负电荷的电场，还是从无穷远来到负电荷；从正电荷到无穷远处的电场，其本质上都是点对点的，还记得我们曾经在数学笔记里写过的，无穷大和无穷小本质上是两个数，但是感觉上它是一种趋势，最后我们就只好说他是超实数。

所以只要是用点来作为开始结束描述的，就只能是向量的表示，又由于是点作为终点，所以 $4\pi R^2$ 必须保留。

现在你也就不难理解为什么正电荷是发散的，负电荷是吸收的了，由于常数都是正的，距离又是平方，电荷量只要是正的， $\nabla \cdot \vec{E}$ 就是正的，所以电场线就会在电荷所在的点出现扩张，而电荷量一旦是负的， $\nabla \cdot \vec{E}$ 也会是负的，在该点就会收缩，而在一个电中和的环境下，每一对 $+q$ ， $-q$ 一一结对，彼此之间单独的电场 $+\vec{E}$ ， $-\vec{E}$ 相加为 $0$ ，最后在外部宏观看来，是不存在电场的。