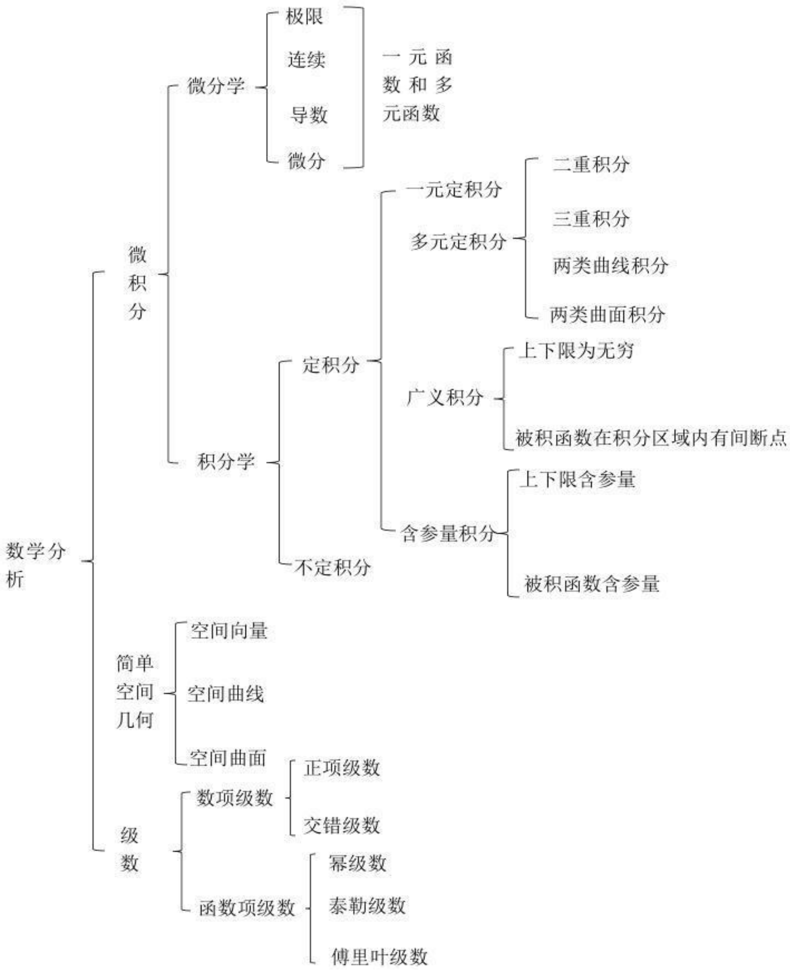
前言

在一切的开始之前，我想我们还是先梳理一下所谓数学分析、高等数学、与微积分的关系。



正如此图所示，所谓数学分析者是相对于整个数学而言，属于是数学的基础分支，与之相对应的是数论（研究数的性质）、代数（研究运算结构）、几何学（研究形的性质）等等，而微积分很明显是作为了数学分析的主要部分和主要工具而存在的。

通俗些来讲，微积分是数学分析的第一部分，而微积分加上一些简单的空间几何就构成的高等数学，而再加上级数就构成了完整的数学分析。

数学分析是一门很完善的学科，正如其名，是指对于一些数学概念的变化性质的研究，故而也可以将其看作是在微积分的基础上对一些变化的解释。

首先，还是先提一提微积分吧，顾名思义，这其中包括微分学和积分学，微

分学的首要基础是极限，也就是针对一个点对其在一个极小的范围内进行其值的判断，然后在极限的基础上针对该点加上了左右逼近的说法，使用左右极限是否相等来判断是否连续，而在连续的基础上就顺理成章的引入了导数，也就是变化率的概念，他的根本逻辑还是点到线，线又推回点，而最后到达的结果也就是所谓的微分，这个微分是为了和积分相对应才普遍使用的。

当我们能够熟练使用导数以及微分的技巧后，我们便可以使用逆运算，如函数x^2的导数是 2x,这里使用定义法可以求出：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

那么同样的，我们在知道 f(x) = 2x 后，便可以对它进行积分:

$$\int f(x)dx=\int 2xdx$$

$$=2\int xdx$$

又由于：$\int f'(x)dx=f(x)$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

$$\int \frac{dy}{dx}dx=y$$

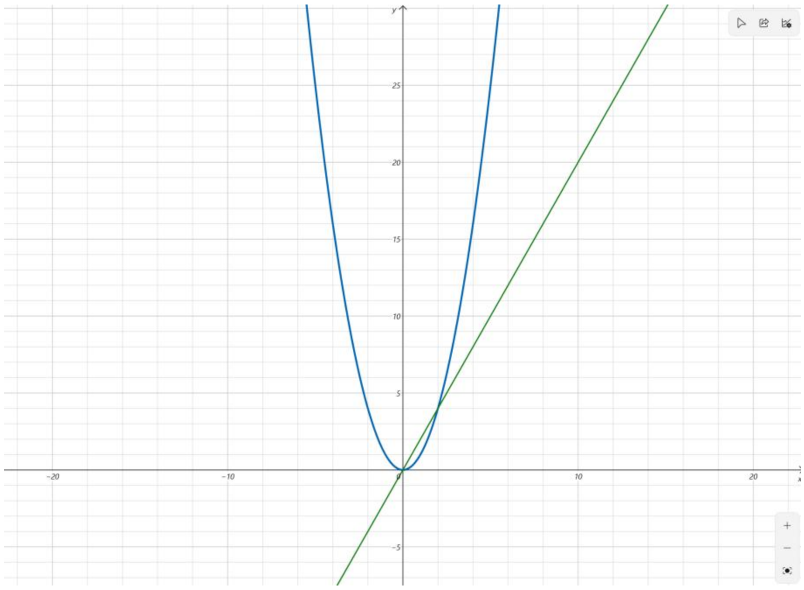
$\int dy=y$（这里可以看出 y 的导数就是 1）

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

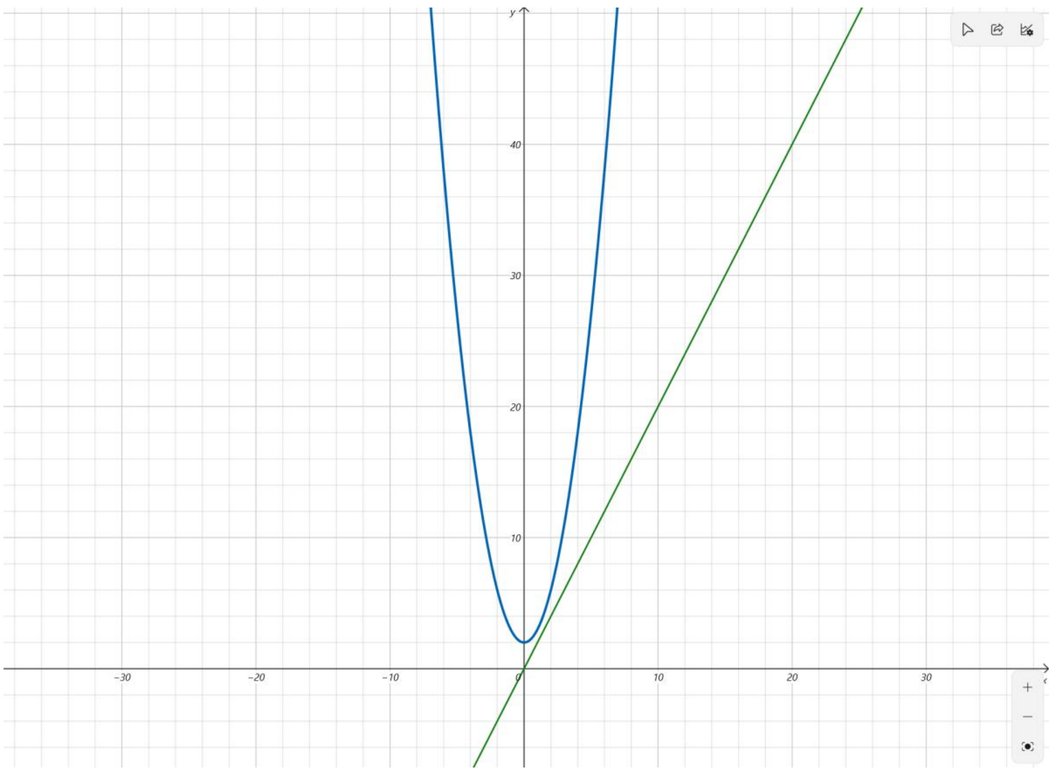
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2x$$

那么这个式子便与之前的式子一般无二了，我们轻而易举可以想到$f(x)=x^2$，但这样的结果明显是不对的，画出x^2的图像（蓝色）：



不难看出x^2是符合这个变化趋势的，比如，在x＜0 时，$f(x)$递减并归于平缓，x＞0 时，$f(x)$递增，并且递增趋势趋于无穷（接近垂直）。



此时的$f(x)$改为了x^2+2，不难看出，该函数依旧满足这个变化趋势，所以单独希望通过变化率又或者时微分来直接求得原函数是不可能的。

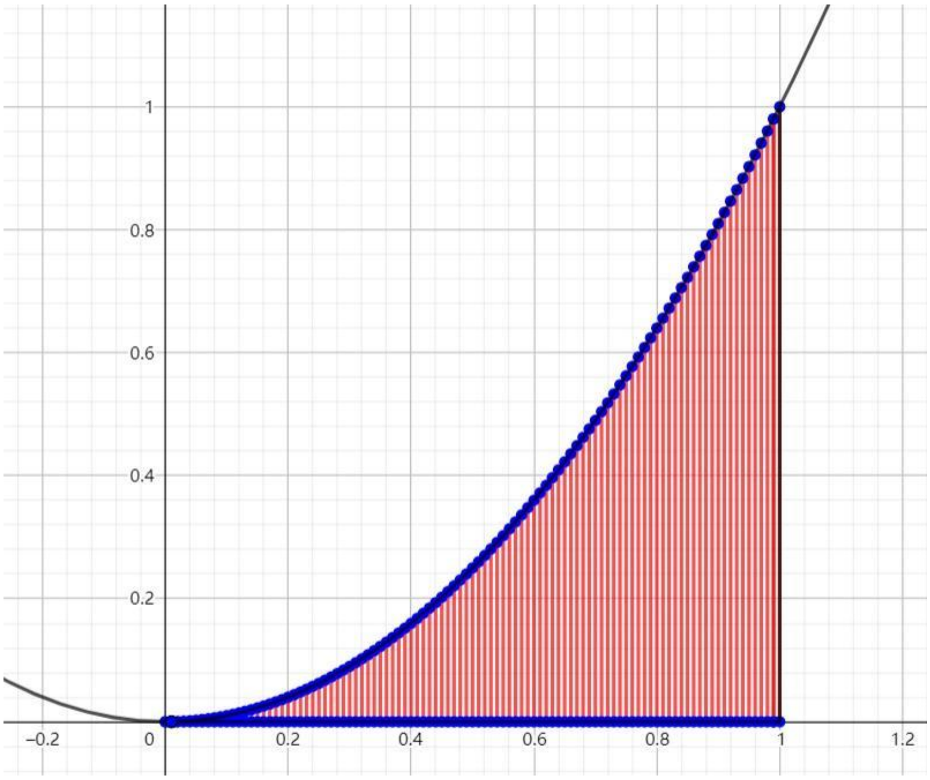
故此，在我们知道一个函数的微分，并对它进行不定积分后，则需要在其背后加上一个常数 C 来满足全部条件，故而$\int 2xdx$的真正结果应该是x^2+C。

通过上面那个例子，我们不难看出积分与微分之间的关系是通过导数连接的，当然其中还有其他的一些定理，后续我们将继续讨论这些问题。

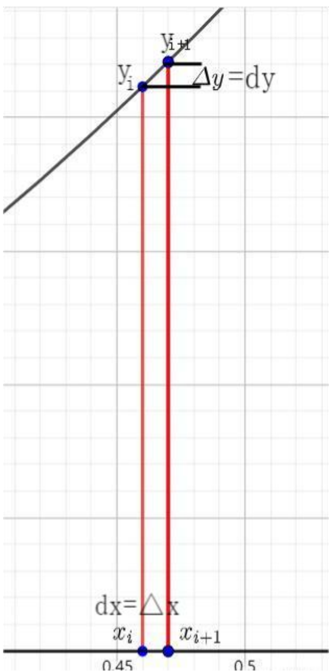
言归正传，如果上述的例子还是没有让你想明白所谓：

$$x、dx、\Delta x、x'、f(x)、f'(x)、dy、\Delta y、\frac{dy}{dx}、\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

之间的关系的话，其实也没有关系，下面我们接着来解释微分和积分。



假设需要去求函数$f(x) = x^2$与 x 轴在区间[0,1]上所围成的图像的大小，那我们便不能再使用简单的几何面积计算公式，因为这个图形它并不规整，但是我们又没有别的办法，只能寄希望于把 x 的[0,1]看作无限细小的直到能够作为平直并且可以供我们计算的线段。



所以我们假设[0,1]之间存在 n 份，把图像分为了 n 个梯形相加的结果，

随便取一块，这里x_i~x_{i+1}是 n 份中的一份，x_i、x_{i+1}是区间[0，1]之间极小的一个区间，所谓的Δx也就是x_i、x_{i+1}之间的距离，即Δx=$x_{i+1} - x_i$，而与x_i、x_{i+1}相对应的y_i、y_{i+1}之间的距离也就被称之为Δy=$y_{i+1} - y_i$。

当然，还是要记住需要满足无限细小的前提条件，

因为虽然在这个结果上我标记了dx=Δx，Δy=dy，但在某些地方这两个并不相等，原因在于dx、dy是莱布尼茨的写法，众所周知，这哥们是个哲学家，受当时哲学思想的影响，这个 d 的含义中便带有无限细分的哲学色彩，所以这个符号在数学上被定义为微分，而Δx、Δy的说法牛顿使用较多，众所又周知，这哥们是个物理学家，一心一意的拿这个东西就当个增量，所以当增量是满足无限细分的时候，两种说法就一致，而不满足的时候，比如x作为中间变量，那么Δx很容易就比dx大，那么就不能说是一致的，但总体上，大部分时间大家都会觉得是一个东西。

由于在这个无限小的区间内，曲线x^2的部分可以被看作是平直的，那么就可以求斜率，$\frac{dy}{dx}$的概念便产生了，将所有的描述改为数学语言，也就是

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

这也便是导数的概念，这个式子同样可以写为$f'(x)$=$\frac{dy}{dx}$。

而在这个区间里，就可以把区间内Δx的长度给求出来：

$$\Delta x=x_{i+1}-x_i=\frac{b\text{（区间的右端）}-a\text{（区间的左端）}}{n\text{（被区分出来的份数，一般是无限）}}$$

我们可以简单求一下这个小区块的面积也就是$s=\Delta x\cdot {x_i}^2$，总的S就是每一个s相加的总和：

$$S=\Delta x\cdot\sum_{i=0}^{n=1}{x_i}^2$$

但由于Δx、Δy都被无限细分，直接计算s其实是 0，所以旧的运算符号并不能满足这种计算形式，于是乎我们将Δx替换为dx，$\sum_{i=0}^{n=1}{x_i}^2$替换为$\int_0^1 x^2$（这一步其实是被叫做海涅定理的方法，即$\lim\limits_{x_i\to x_0}f（x）=A\Leftrightarrow$对任意以$x_0$为极限的数列，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f（x_n）=A$，也就是一个数列中的数都趋向于这个结果，则连接这个数列的函数也趋于这个结果，当然这个说法并不准确，原因就比如类似与狄利克雷函数之类的，一旦反复跳跃，则这个说法就不合适，注意！我说的是我的说法不合适而不是海涅定理不成立，那种情况下极限不存在，所以不满足前提。）

于是乎，式子则被改为了$S=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1$=$\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$;

同样的，我们使用原本的方式进行计算：假设分了 10 份，$S=\frac{1}{10}\cdot$（$0+0.01+$

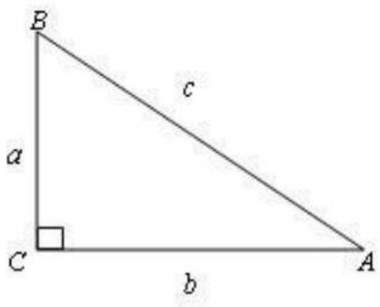
$0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81 + 1$）=0.305；当然也可以用自然数平方和的公式去算算，在一百次的时候就已经成为 0.338，最后答案是随着x，S增大趋向于$\frac{1}{3}$，证明这样的方法其实并没有出错。

到这里大概的微积分你大致已经理解，正如最开始给出的那张图，我们还有很多的内容并未学习，但以此来作为前言来开启后续的学习我想是足够的，具体的问题不妨让我们到了更合适的时机再来探讨；那么让我们接着开启正式的学习吧。

第零章，衔接部分

以往的第一节老师们往往要讲述一些有关于函数的概念与特性，比方说什么反函数，复合函数，隐函数之类的，其实这些我们早都已经学过了，所以默认也是学会了的，当然了具体遇到这些，还是会单独说明的，就是不作系统讲述了，这里我们先讲一些高中与大学所衔接的部分。

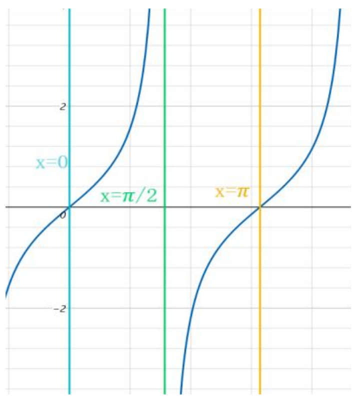
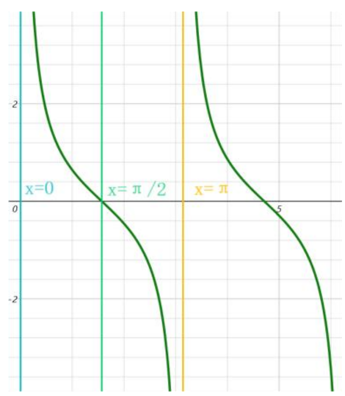
0.1 正切与余切函数



我们先来复习一下三角函数，在 Rt△ABC（直角三角形）中，∠C=90°，AB 是∠C 的对边 c，BC 是∠A 的对边 a，AC 是∠B 的对边 b，正弦函数就是 sinB(该角的正弦)=b（对边）/c（斜边），余弦函数就是 cosB（该角的余弦）=a（邻边）/c（斜边），正切函数就是 tanB（该角的正切）=b（对边）/a（邻边）。

那么现在我们来学习一下余切函数，cotB=a（邻边）/b（对边），不难看出，所谓余切，其实就是正切的倒数。

下面我们对比图像，来对它们的性质进行对比

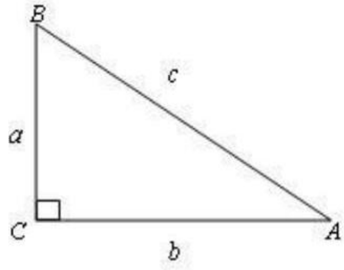
$\tan x$	$\cot x$
	
定义域：{x|x≠(π/2)+kπ,k∈Z}	定义域：{x|x≠kπ,k∈Z}
值域：R	值域：R
奇偶性：有，为奇函数	奇偶性：有，为奇函数
周期性：有	周期性：有

最小正周期：π	最小正周期；π
单调性：有	单调性：有
单调增区间： (-π/2+kπ，+π/2+kπ),k∈Z	单调增区间：无
单调减区间：无	单调减区间：(kπ，(k+1)π),k∈Z

我们注意到余切函数的一个关键性质，就是$\tan x\cdot\cot x=1$。基于这个性质，我们也就可以认识一些$\cot x$的特殊函数值。

$\tan x$	$\cot x$
$\tan 0=0$	$\lim\limits_{x\to 0}\cot x=\infty$
$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$
$\tan\frac{\pi}{4}=1$	$\cot\frac{\pi}{4}=1$
$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$	$\cot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$	$\cot\frac{\pi}{2}=0$
$\tan\pi=0$	$\lim\limits_{x\to\pi}\cot x=\infty$
$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}}\tan x=\infty$	$\cot\frac{3\pi}{2}=0$
$\tan 2\pi=0$	$\lim\limits_{x\to 2\pi}\cot x=\infty$

0.2 正割与余割函数



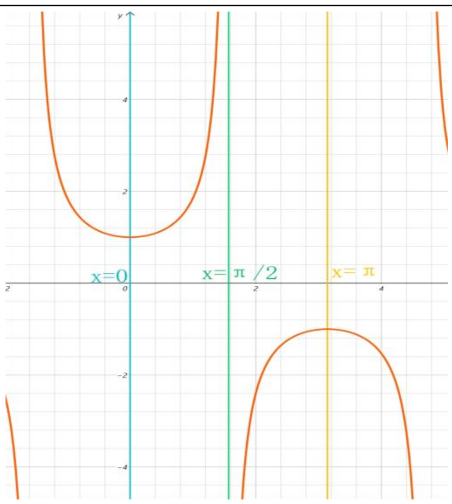
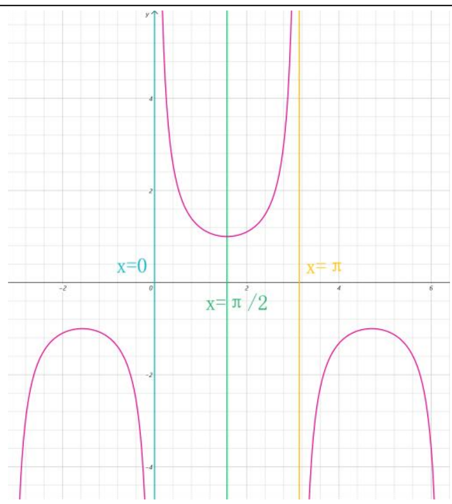
某直角三角形中，一个锐角的斜边与其邻边的比（即角 A 斜边比邻边），叫做该锐角的正割，用 sec（角）表示 。如设该直角三角形各边为 a，b，c，则 secA=c/b。

在直角三角形中，一个锐角∠A 它的斜边与对边的比值，叫做该锐角的余割，用 csc（角）表示，比如：cscA=c/a。

其实我们不难发现正割、余割函数其实与正弦、余弦函数间其实也是类似于正切、余切的互为倒数的关系：

$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta};\ \ \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta};\ \ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

同样的，让我们还是通过比较图像来对比其性质。

$\sec\theta$	$\csc\theta$
	
定义域，{x|x≠kπ+π/2，k∈Z}	定义域：{x|x≠kπ，k∈Z}
值域，secx≥1 或 secx≤－1	值域：{y|y≥1 或 y≤-1}
周期性：最小正周期 T=2π	周期性：最小正周期为 2π
奇偶性：偶函数	奇偶性：奇函数

三角函数中关键的运算关系与推导过程如下：

$$\mathbf{1+\cot^2}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{csc^2a}$$

证明：

$$1+\frac{cos^2a}{sin^2a}=\frac{1}{sin^2a}$$

$$1=\frac{1}{sin^2a}-\frac{cos^2a}{sin^2a}$$

$$1=\frac{1-cos^2a}{sin^2a}$$

$$sin^2a=1-cos^2a$$

由于$sin^2\theta+cos^2\theta=1$，*证毕*

$$\mathbf{1+\tan^2 a=sec^2 a}$$

只需要将上面的cos与sin交换位置即可完成证明。

$$\boldsymbol{\cot a=\cos a\times\csc a=\frac{\cos a}{\sin a}}\quad (*)$$

$$\boldsymbol{\tan a\times\cot a=1}\text{（互为倒数）}$$

显然。

（*）式由于：

$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta};\ \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$$

则有：

$$\boldsymbol{\cot a=\frac{\cos a}{\sin a}=\frac{csca}{seca}}\quad (**)$$

0.3.1 反三角函数

这个概念是极为简单的，我们都知道三角函数的存在使得数字与角度、弧度产生了联系，可以通过特定的函数使得该角度通过某个值表示，即：

$$角度\xrightarrow{三角函数}数$$

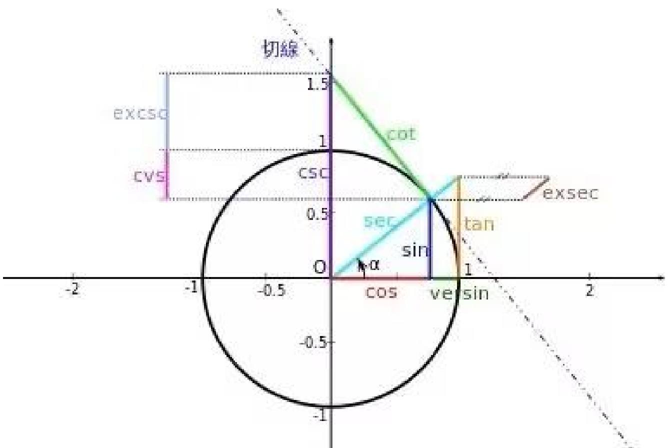
那么反三角函数作为三角函数的反函数，其主要作用就是：

$$数\xrightarrow{反三角函数}角度$$

（一般来说，设函数$y=f$（x）（$x\in A$）的值域是 C，若找得到一个函数g（y）在每一处g（y）都等于x，这样的函数叫$x=g$（y）（$y\in C$）（y做函数$y=f$（x）（$x\in A$）的反函数，记作 $x=f^{-1}$（x）。这里的反主要是作用在f上，强调的是运算过程也就是函数f与反函数g的关系，即$g=f^{-1}$，当然，这样写并不规范，这里的x与y其实没有做变化，也就是需要忘掉x是自变量的身份，转而认为括号里的是自变量，此外，需要注意的是定义域与值域之间的交换。）

$y=arc\sin x$是$y=\sin x$（$-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$）的反函数，同样的，$y=arc\cos x$是$y=\cos x$（$0\leq x\leq\pi$）的反函数。

也许你可能会发问这里的 arc 到底是什么意思，我用$\sin^{-1}$ 、 $\cos^{-1}$可不可以，答案是肯定可以的，那么为什么还要复杂的使用 arc 呢？我查阅了一些资料，大家都喜欢说 arc 是弧度的意思，最早是欧拉在使用，后人一直坚持使用是表达对欧拉的的敬意，但其实我还发现了一个更有趣的说法。

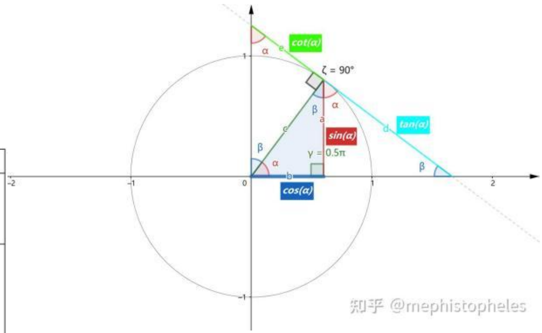


在单位圆中，我们将$\sin\theta$定义为$\sin\theta=\frac{y}{r}$，而$r=1$，则$\sin\theta=y$，也就是说$\sin\theta$随着y的移动移动θ，再注意到弧长公式：$S=\theta r$，那我们难免有一个疑问：给定一个特定的y坐标，需要多少弧长才能到达那里？正如我们上面讨论的单位圆，该弧长与角度相同。那么其实这里这个“arc”的意义其实才完全表达出来，那么其实也可以把$\theta=arc\sin y$读作：我沿着单位圆行

进到达的弧长是多少y，不知道这样的说法你是否更喜欢些，两种说法并不冲突，选用自己更容易理解的方式吧。

不过既然讲到这里了，那么就不妨也说一说单位圆中三角函数的定义和切线，割线的确定吧，正切、反切、正割、反割到底是如何来的，这里其实并不是很重要，你如果能够记住三角函数的一些公式然后能够推出相应的公式其实就已经足够了。

它的图十分优秀，我就不自己画了，并且依照它的想法来证明，我主要再做一些补充。



名称	英文	缩写	定义	等式(单位圆: c=1)
正弦	sine	sin	❶角α的对边 a 比斜边 c ❷单位圆上点所在的半径，在 y 轴上的投影 （正半轴为正值，负半轴为负值）	❶sin(α) = a/c = a ❷sin(α) = a
余弦	cosine	cos	❶角α的邻边 b 比斜边 c ❷单位圆上点所在的半径，在 x 轴上的投影（同上）	❶cos(α) = b/c = b ❷cos(α) = b ∵由正弦、余弦定义❷，直角三角形勾股定理 ∴$a^2+b^2 = c^2 = 1$ ∴$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$
正切	tangent	tan	❶角α的对边 a 比邻边 b ❷单位圆上点所在的切点，到 所在切线与 x 轴上交点的 长度（同上）	❶tan(α) = a/b = sin(α)/cos(α) ❷ ∵ 等比三角形, tan(α) = d ∴ d:c = a:b ∴ tan(α) = d = a/b = sin(α)/cos(α)
余切	cotangent	cot	❶角α的邻边 b 比对边 a ❷单位圆上点所在的切点，到 所在切线与 y 轴上交点的 长度（同上）	❶cot(α) = b/a = cos(α)/sin(α) ❷ ∵ 等比三角形, cot(α) = e ∴ e:c = b:a ∴ cot(α) = e = b/a = cos(α)/sin(α)

$\sin\theta$与$\cos\theta$的关键点在于理解由x、y与r共同构成的三角形，单位圆的表达式子为$x^2 + y^2 = 1$，在此基础上，我们注意到这里满足勾股定理，则可以构建一个直角三角形，然后由于$r = 1$，也就是图中的$c = 1$，则针对这个三角形，$\sin\theta$、$\cos\theta$（也就是$\sin a$、$\cos a$）就直接表达为y与x（也就是a与b）。

正切函数$\tan x$的证明过程如下：

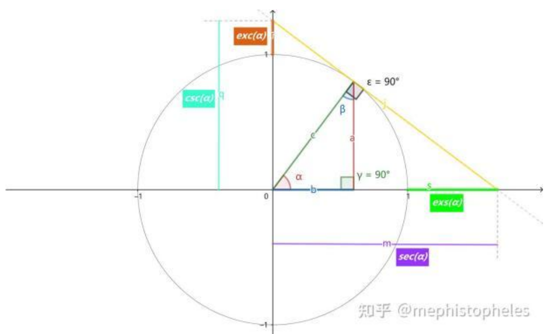
由于$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，将上面的结果带入$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{a}{b}$，沿单位圆与三角形的交点作一条切线，由于是切线，大三角形该角$\tau = 90°$，又由于$\angle\alpha$同时出现在了两个三角形之中，则第三个角也相应的相等，那么这两个三角形是相似的。

则：$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{a}{b} = \frac{d}{c} = d$。

余切函数$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{b}{a}$，同上，依旧是那条切线，这次我们反着看，向上与$y$轴构成一个三角形，$\angle\beta$与$\angle\alpha$互余，三个角相等，又是一个相似三角形。

则有：$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{b}{a} = \frac{e}{c} = e$。

这里不难理解为何被称之为切线，包括正切，



名称	英文	缩写	定义	等式(单位圆: c=1)
正割	secant	sec	❶角α的斜边 c 比邻边 b ❷单位圆上点所在的切线 与 x 轴的交点 到 原点的长度（正半轴为正值，负半轴为负值）	❶sec(α) = c/b = 1/b = 1/cos(α) ❷ ∵ 等比三角形, sec(α) = m ∴ m:c=c:b ∴ tan(α) = m = c/b = 1/b = 1/cos(α)
余割	cosecant	csc	❶角α的斜边 c 比对边 a ❷单位圆上点所在的切线 与 y 轴的交点 到 原点的长度（同上）	❶cos(α) = c/a = 1/a = 1/sin(α) ❷ ∵ 等比三角形, csc(α) = q ∴ q:c=c:a ∴ tan(α) = q = c/a = 1/a = 1/sin(α)
外正割	exsecant	exs	❶单位圆上点所在的切线 与 x 轴的交点 到 原点长度在单位圆外的部分（同上）	❶exs(α) = sec(α) – 1 = 1/cos(α) - 1
外余割	excosecent	exc	❶单位圆上点所在的切线 与 y 轴的交点 到 原点长度在单位圆外的部分（同上）	❶exc(α) = csc(α) - 1 = 1/sin(α) - 1

反切了，向下划自然是顺手的，也就称之为正切，反之则反手，也就叫余切了，当然，需要注意这个并不叫反切，反切是直接与正切相对应的反函数，即$arc\tan\theta$。

正割、余割函数由于与正弦、余弦函数的特殊关系（$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$、$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$），很容易就能判断$\sec a=\frac{1}{b}$，$\csc a=\frac{1}{a}$。

正割、余割的第二点证明注意之前切线构成的三角形，然后使用同样的等比的方式，则有：$\sec a=\frac{c}{b}=\frac{m}{c}=m$；$\csc a=\frac{c}{a}=\frac{q}{c}=q$。由于此两条线类似于对圆内部的直接分割，故有正割，余割的说法。

至于剩下的外正割与外余割其实不难理解，平时讨论的也少，也就不在赘述。

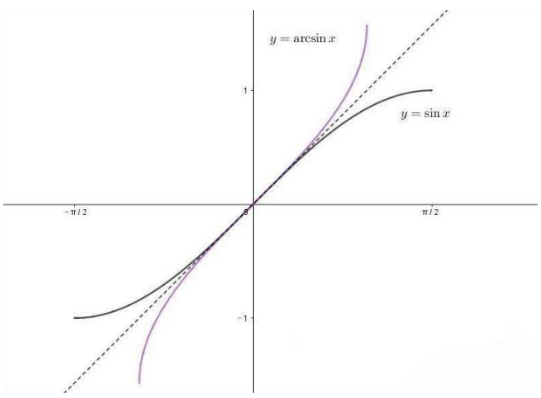
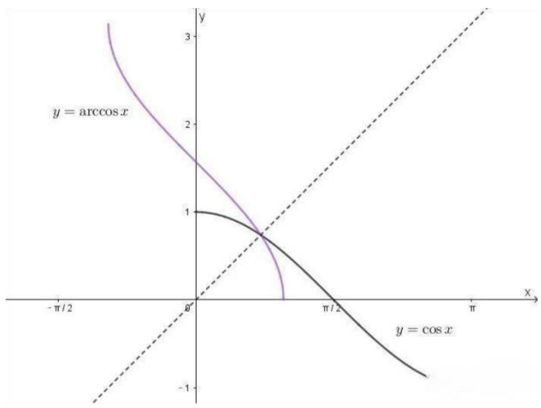
0.3.2 反正弦、余弦函数

上文中说到，反正弦函数（反三角函数之一）为正弦函数$y=\sin x$（x∈$[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$）的反函数，记作$y=arc\sin x$或$x=\sin y$（x∈[-1,1]）。

由原函数的图像和它的反函数的图像关于一三象限角平分线对称可知正弦函数的图像和反正弦函数的图像也关于一三象限角平分线对称。

同上的，反余弦函数（反三角函数之一）为余弦函数$y=\cos x$（x∈$[0,\pi]$）的反函数，记作$y=arc\cos x$或$\cos y=x$(x∈[-1,1])。

由原函数的图像和它的反函数的图像关于一三象限角平分线对称可知余弦函数的图像和反余弦函数的图像也关于一三象限角平分线对称。

$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$
	
定义域：$x\epsilon$[-1,1]	定义域：$x\epsilon$[-1,1]
值域：$y\epsilon[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	值域：$y\epsilon[0,\pi]$
单调性：单调递增函数	单调性：单调递减函数
奇偶性：奇函数	奇偶性：非奇非偶函数

通过上图，其实也不难观察出一些反函数之间的性质，下面一一列出：

1、互为反函数的两个函数的图象关于直线 y＝x 对称；

证明：$f^{-1}[f(x)]=x;f(x)=y$

则有：f^{-1}（y）$=x$

假设函数$f(x)$上存在一点（a，b）表示为f^{-1}（a）$=b$，那么在其反函数上f^{-1}（y）上则表示为f^{-1}（b）$=a$。点（a，b）与点（b，a）之间x与y交换了位置，证明对称轴为$y=x$。

2、函数存在反函数的充要条件是，函数在它的定义域上是单调的；

证明这个性质我们需要使用到映射的概念，所谓映射是集合论之中的说法，即存在 A、B 乃至更多个集合，它们中的元素可以通过某种运算规则(也就是f（A） $\rightarrow$ B)达成联系，此种针对两个集合间的行为称之为映射。

而在映射中，倘若若对 A 中任意两个不同元素a_1不等于a_2，它们的像f_1不等于f_2，则称f为 A 到 B 的单射，换句话说，就是指 A 中的元素与 B 中的元素是不是单对单，这里也是单调性的体现，我们往往说函数是单调的其实也就是说函数是单射的，当然了，这里还需要一个不可忽视的条件即函数是连续的，而连续的概念我们后续会讲到也就不在这里讨论了。

证明：假设存在函数f，它的定义域到值域（$D \rightarrow f$（D））是单射（也就满足了单调的条件），那么在这个过程中就是一个x对应一个y，反之就是一个y对应一个x。

在此情况下就存在一个逆映射f^{-1}：f（D） $\rightarrow D$，我们就可以说这个函数是原函数f的反函数。

则在 $f(x) = y$的定义下，任意的y均属于 $f(x)$集合下，即$y \in f(x)$。

同理：f^{-1}（y） $= x$，则$x \in f^{-1}$（y）则有任意的x均属于f^{-1}（y）集合。

此情况下，我们可以将原本的定义域和值域添加进来：

也就是说：$f(x) = y$，$x \in D$;则有：f^{-1}（y） $= x$；$y \in S$

在这里，我们发现原本的x、y的取值其实并没有变化（实际操作时候需要注意特定的运算，比如分母为 0 的问题和根号下为负的问题）二者只是由于x、y位置的转换，各自地由自己原本的位置转换为了对方的位置，但内部取值具体的数并没有改变。

接着证明，因为单射的定义，一个唯一的x只能对应一个唯一的y，所以如果函数单调则在一定范围里随着x的增长或者减小，y也会相应的增长或者减小（注意这里的x、y之间的增长、减小并不一定是x的增长对应y的增长，也不一定是x的减小对应y的减小，二者的关系完全取决于函数的单调性），更不会存在两个相同的x与y，还有一个相同的x对应两个y，又或者是一个y，对应两个x，所以

就说**函数单调则必是单射,而单射必有反函数,进而得出,函数单调则必有反函数.**

自然的，以上的证明并不严谨，只是帮助理解，当然也可以使用这个方法来简单证明:原函数是单调函数,设它是单调递增的,由此,y 随着 x 的增大而增大,反函数在图像上交换了 x,y 轴,或是说关于了 y=x 这条直线对称,因此,x 也随着 y 的增大而增大。

下面给出数学意义上的正式证明：

设 f 在其定义域 D 上单调增加,证明其反函数f^{-1}在其定义域 f(D)上也单调增加.

任取y_1,y_2∈f（D）,且y_1<y_2.

根据函数 f 的定义,

对于x_1,y_1:

对y_1在 D 内,存在唯一的原像x_1,使得f（x_1）=y_1,于是 f^{-1}（y_1）=x_1

对于x_2,y_2:

对y_2在 D 内,存在唯一的原像x_2,使得f（x_2）=y_2,于是 f^{-1}（y_2）=x_2

情况一:如果x_1＞x_2则由$f(x)$单调增加,必有y_1>y_2。

情况二:如果$x_1 = x_2$,则显然有$y_1 = y_2$

此二种情况均与题设y_1<y_2冲突，则我们继续讨论第三种情况：

x_1＜x_2，使得y_1<y_2.

即f^{-1}（y_1）＜f^{-1}（y_2），使得y_1<y_2.

反之则证明y_1<y_2.可推出f^{-1}（y_1）＜f^{-1}（y_2），单调递增。

我们再次总结一下刚才的两个知识点，即：

函数单射 ⇔ 反函数存在。

函数单射,且函数是单调函数 ⇔ 反函数存在,且反函数单调,且单调趋势与直接函数相同。

也许有的同学难免发问，我们明明前面的意思不是说单射和单调一个意思吗，为什么这里还要区分？原因在于单射的证明存在于集合领域，而在集合中并未强调连续的概念。那么如果放置到函数中就会出现函数并不连续的情况，那么在这个情况下函数其实谈不上单调了，这也就是我们常说的单调

函数其实不具备第二类间断点，当然现在不了解无所谓，其实也是后面不远的概念，姑且挖个坑在这。

请记住这几个需要记住的恒等式，当然了，如果可以的话，其实也可以去尝试记住推导过程：

$$\sin\sin^{-1}x = \sin(arc\sin x) = x；\ x \in [-1,1]$$

$$\cos\cos^{-1}x = \cos(arc\cos x) = x；\ x \in [-1,1]$$

$$arc\sin(\sin y) = y, y \in [-\frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}]$$

$$arc\cos（\cos y）= y，y \in [0，\pi]$$

其实这些都不难理解，互为反函数嘛，里面的先运算把定义域给转化成了值域，然后外面的再运算，又给运算了回来；需要注意的是下面两个。

$$\sin arc\cos x = \sqrt{1-x^2}，x \in [-1,1]$$

$$\cos arc\sin x = \sqrt{1-x^2}，x \in [-1,1]$$

此处证明如下：

令$t = arc\cos x，x \in [-1,1]$

由反函数的定义我们可以得到：$x = \cos t，t \in [0，\pi]$；

则有$\sin t ＞ 0$，又因为$sin^2 t + cos^2 t = 1$；

将$x = \cos t$带入：

则有：$\sin t = \sqrt{1-x^2}$。

则$\sin arc\cos x = \sqrt{1-x^2}$。

同理亦可证$\cos t = \sqrt{1-x^2}$。

$$arc\sin x + arc\cos x = \frac{\pi}{2}$$

这个式子思索起来还是简单的，即带入三角关系中，我们都知道$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$，$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$，不难理解的，此时的$\frac{1}{2}$替代了$x$，则很容易就能看出来这种关系，当然了$\sin 30°$和$\cos 60°$的关系再一个直角三角形中就很显而易见了，就是一条边嘛，

但是还是不妨碍我们今天仍然需要学习它(还要再没有三角形的情况下)。

我还是担心你没有学明白，所以我还是继续证明下吧，当然，如果你已经学会了还请略过就是。

我们令$x = \sin a = \cos b$；

那么原式$= a + b$；

$$\sqrt{1-x^2} = \cos a = \sin b\,(\textit{上面证明过})$$

$$\sin\ (a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin a$$

$$= x^2 + \ (1-x^2) = 1$$

那么什么角度的正弦是 1 呢？真的是好难猜啊。

由上得证：$a + b = \frac{\pi}{2}$。

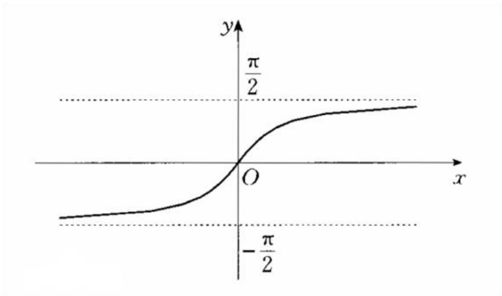
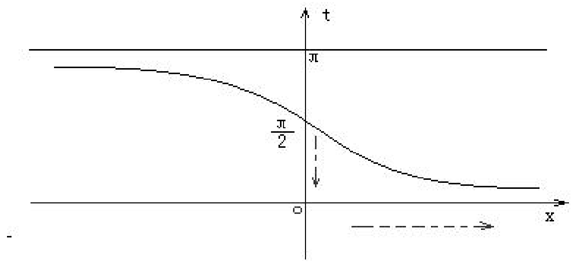
最后，让我们记住几个比较重要的函数值，那么就可以完成这一章反正弦函数与反余弦函数的学习了。

$$\arcsin 0 = \arccos 1 = 0\ ;\ \arcsin\frac{1}{2} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6};$$
$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3};$$
$$\arcsin 1 = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

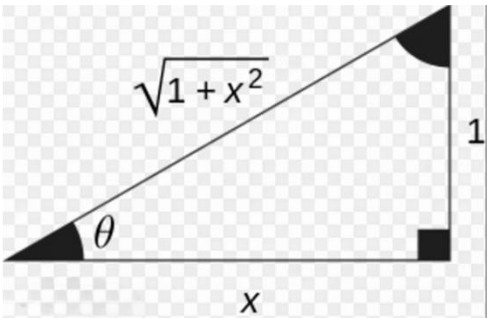
0.3.3 反正切、余切函数

其实这里并不足以作为一章来单独讲，甚至是极少数人愿意将题目出在这里，但是考虑到笔记完整性的缘故，还是简单讲些；话不多说，下面开始学习。

所谓反正切、反余切函数都是相对于正切、余切函数而言的，所以经过上面对于反函数的部分学习，我们其实是可以确定函数的基本图像和值域、定义域之类的，那么给出反正切、余切函数的性质如下：

反正切函数（$\arctan x$）	反余切函数（$\operatorname{arccot} x$）
	
定义域：R	**定义域：R**
值域：（$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$）	**值域：（0，π）**
奇偶性：奇	**奇偶性：非奇非偶**
周期性：并非周期函数	**周期性：并非周期函数**
单调性：（$-\infty$，$+\infty$）单调递增	**单调性：（$-\infty$，$+\infty$）单调递减**

假设存在一个这样的直角三角形，则我们可以更加直观的得到这些三角函数之间的关系：



$$\sin(\operatorname{arccot} x) = \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin(\arctan x) = \cos(\operatorname{arccot} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan(\operatorname{arccot} x) = \cot(\arctan x) = \frac{1}{x}$$

值得一提的，与$arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}$类似，$arc\tan x + arc\cot x = \frac{\pi}{2}$也具备同样的性质，结合上图可以轻易证明，θ与另一个角相加起来是满足这个条件的。

下面是一些特殊的函数值：

$$arc\tan 0 = 0;\ arc\tan\frac{\sqrt{3}}{3} = arc\cot\sqrt{3} = \frac{\pi}{6};\ arc\tan 1 = arc\cot 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$arc\tan\sqrt{3} = arc\cot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3};\ arc\cot 0 = \frac{\pi}{2};$$

注意几个是极限：

$$\lim_{x\to-\infty} arc\tan x = -\frac{\pi}{2};\quad \lim_{x\to+\infty} arc\tan x = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{arc}\cot x = \pi;\quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{arc}\cot x = \pi;$$

这里我们便可以注意到无穷处极限与值域和定义域之间的关系，结合图像其实可以发现它本质上并不代到达某个点，更多的是代表一种趋势，即可望而不可即的过程，在幻想里我们给它一个完美的结果，即等式右半边的数值，而左半边我们则为他套上 limit 的枷锁。

第一章 极限

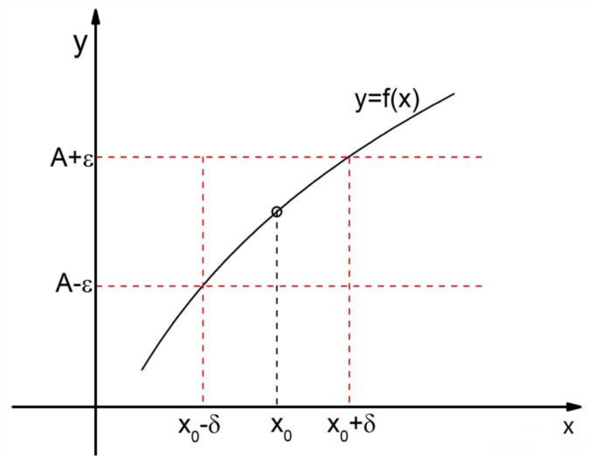
1.1 函数极限

1.1.1 函数极限的定义

其实在写这章之前我还是在不断的再做一些构思，因为常规的高等数学和数学分析的教学方法总是要现在函数极限之中引入一个数列极限的过程，当然了我们不能否认数列极限也的的确确属于是会考察的部分，但是那种学习方法仿佛是更符合数学逻辑，是点到线，线到面的逻辑顺序，那么我们正常人是怎么学习的呢，肯定是先第一眼看见个整体，然后观察它的一些边边角角来找到一些显而易见的规律，最后才会不断地推理这些性质，来和已知的部分做联系寻找规律，然后带着所有的知识重新审视这个东西，最后写出一套满足逻辑推理由大到小（一般是由小到大的）的文字以供他人学习；也正因如此，我们学习起来就很容易不知所云，因为我们连一些最明显的特征都没有见到，然后就被迫要去用积木重新构建这个由现实世界的客观规律搭建起来的城堡，这并不是学习规律的过程，反倒像是改造自己的内部世界使其趋同于整体外界的过程，这个过程中独属于作为人的那一部分不被重视，不过考虑到诸多外界因素，就比如，在体系化的学科中逻辑化是一种性价比极高的基础表达方式，所以满足学生学习兴趣的这个责任也就落到了教导学生的老师身上，往往一个优秀的老师都会创新的找出更合适自己学生的教学顺序，这样当然并不能根本上解决问题，但俗话讲“师傅领进门，修行在个人。”又讲“兴趣是最好的老师。”所以学习时，请你一定不要太过于在乎一时的了解与否，如果前处的知识有什么不理解的，不妨先搁置，往后看看，结合后处再做逆推，有些时候当你在感叹为什么他总能找到一些奇奇怪怪的数来证明某个定理时，请你也不要计较，有可能那个数就耗尽了无数人的一生，就比如哥德巴赫猜想，就整整给欧拉这个老头熬死了，说真的，你只是一个学生，请你豁达一些，没必要因为一两个定理的证明就自我怀疑，所以逻辑上请你严谨，以保证你对科学的崇敬，而现实中请你冷静，以保持你对学习的兴趣。闲话到此结束，我们开始正式的学习。

先来点不是人话的：所谓函数极限，在数学的定义为：

设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义，如果存在常数A，对于任意给定的正数ε（无论它多么小），总存在正数δ，使得当x满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$，那么就说A是函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限，记作$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.



下面来作一下解释，我们可以注意到在点（x_0，A）周围的一定范围都已经被标记出来，大致是x轴上的范围为$[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$，$y$轴上的范围为$[A + \varepsilon, A - \varepsilon]$,那么这样一个范围就可以作为它的邻域了。所谓去心领域，顾名思义，就是将这个区域的最中心的点$(x_0，A)$去掉，至于为什么去掉，就需要考虑到我们平时所谈论一个函数的连续等因素了，在连续的函数中，我们在这个邻域中取极限其实是一个很随意的过程，无关到底是否可望而不可及的问题，但在间断点处，贸然的认为这个范围内是连续的是一种本质上的错误。至于ε、δ到底取多大，大家的解释都是宏观上足够小，微观上足够大，前半句的意思是你的去心邻域要取的符合“邻”的定义，我们算的极限无非就是一个点上的性质，当你超过了这个点周围的范围，把属于其他的点的区域计算了进来，那么这个结果就很难符合预期了，后半句的意思是虽然大家都知道x轴、y轴都是一条实数轴，而实数满足连续性，但是你得认为它是可以断开的，并且在这个断开的范围内，它可以无限大，它足以让每一个靠近它的点都落在这个领域内，以此来帮助你完成计算。

在了解到这些知识后，我们再去理解这句话也就没有那么困难了，下面开始逐行逐字解释：

设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义，如果存在常数A；

x_0和它周围我都要取，取完我得到一个答案A

这里解释起来其实还是简单的，之所以要这么说，其实是数学语言的特色，就比如“设函数 f(x)”，就给出了处理的背景，而“点x_0的某一去心邻域内有定义”的意思类似于免责声明，为后面“存在常数A”做了铺垫，当然也有另外一个作

用，进一步把处理环境划小，引出去心邻域的说法。

对于任意给定的正数ε（无论它多么小），总存在正数δ，使得当x满足不等式

0<$|x-x_0|$<δ时

在x轴上，我限定邻域的范围为$[x_0-\delta, x_0+\delta]$，在y轴上我也限定一个允许的误差

这里，其实就是我们刚才讨论过的去心领域的概念，不过还是要补充一个概念，邻域的本质就是就是区间，而且是开区间，那么为什么我在这里却在使用闭区间呢，原因在于δ、ε，我们刚才说δ、ε是一个在宏观上无限小，微观上无限大的定义，那么δ、ε都是可以取的，因为它们的取值与否根本不足以影响到整个邻域。我们正常情况下也会自然的觉得所谓区间最重要的是它的两端，但是邻域明显关注的是内部的范围，所以我并没有在一开始就告诉你这就是一个区间，防止你一般的认识到它，所以请你见到δ、ε时，请自觉注意到它所包含的范围，而不要过于的去抠无限大和无限小的字眼，那里本就是无关痛痒的地方。

对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，那么就说A是函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$.

我刚才选定的x_0和它周围邻域里的值经过计算后都不会超过A值周围ε的误差，现在我说我取的函数在这个点上的结果就是A。

可能还是有些同学会问，到底在什么时候会用去心邻域，又会在什么情况下用领域，其实这个问题还是比较简单的，在面对可能存在间断的地方使用去心邻域，在不需要面对间断的情况下，使用邻域，就比如我们会在函数极限上使用去心领域，而在后面在考虑函数连续的问题上就会使用邻域，当然你也不必要因为想不明白在什么情况下使用合适的邻域来担心，因为这些只是数学定义，它的本质只是规范化，你在学习这个概念时其实未必理解 Cauchy（柯西）和 Weierstrass（魏尔斯特拉斯）的$\delta-\varepsilon$语言，你只需要记住这幅图就足够了。

极限是一种伟大的思想，本质上包含人类对于终极的思考，所以我更希望我们可以在学习到这种数学定义后可以更进一步地去学习它的根本，我记得很久以前听过的一句话，聪明的人看穿它的形式，智慧的人得到它的本质；明显地，我们对于极限的了解还并不完全，那么不妨来了解一些背景知识，进而更清楚地了解数学与现实的关系：

极限思想的萌芽阶段，我们不得不提到古希腊的阿基米德（Archimedes），中国的惠施（Hui Shi）、刘徽（Liu Hui）、祖冲之（Tsu Chung-Chi）等数学家。

公元前 5 世纪，距离我们今天站立的时代，大约 2500 年，古希腊数学家安蒂丰（Antiphon）提出了“穷竭法”（Method of Exhaustion）。

之后，古希腊数学家欧多克斯（Eudoxus）进一步完善“穷竭法”，使其成为一

种合格的几何方法；再过 100 多年，阿基米德（Archimedes）做了进一步发展，其著作《论球和圆柱》运用“穷竭法”建立命题：

只要边数足够多，圆外切正多边形的面积与内接正多边形的面积之差可以任意小。

以现代数学来看，阿基米德（Archimedes）建立的命题饱含“极限思想”，用无限逼近的方式从有限中认识无限，从近似中认识精确，已经十分贴近于现代对于极限的认识。

但由于毕达哥拉斯学派对于无限（infinite）的厌恶，其原因可能是因为毕达哥拉斯作为早期的算术家，发现了很多基础的数学关系，包括且不限于勾股定理与黄金分割率，他认识到世间的很多规律满足数学间的关系，所以认为数天然的存在于这个世界，与大小，颜色一样，是物质的基本属性，而数的运算又满足相应的规则（毕达哥拉斯所认识到的是数量间关系，并不算完整的数的运算）。所以他坚持用数来认识世界，他用石头摆出三角形和正方形，把数分为三角形数（类似 1，3，6，10 等等能排列出三角形的数，第 n 个三角形数满足$\frac{n（n+1）}{2}$的规律）和正方形数（类似1^2、2^2、3^2、4^2等能排列为正方形的数，所以正方形数又称为平方数），然后他就发现正方形数与三角形数之间的某种关系，正方形沿着对角线打开就是三角形，而对角线居然和两边没有数学关系（毕达哥拉斯认为不满足同一个度量即整数与可数小数的度量便算没有数学关系），对角线的存在对于整个毕达哥拉斯学派来说都是一块严重的绊脚石，他们再也无法直观的通过几何关系来确定数量关系来和现实世界产生关联了，而后来人为了使得算术学和几何学不出现割裂，于是引进了无理数，从而解决了第一次数学危机。

当然了，我们并不能单纯的认为一个$\sqrt{2}$足以打破一个合格的思想家、哲学家、算术家，但是问题就在于毕达哥拉斯坚持要用数来解释整个世界，他认为数量级关系是协调的、美丽的、普适的，宇宙间的一切事物都可以通过数的和谐关系有秩序的建立起来，这里可以看出毕达哥拉斯学派所践行的道德观，即是对于和谐和秩序的不懈追求，具体体现为他们强调城邦不能没有法律,统治者与被统治者要用爱来联结,以及每个市民在国家中要有指定的地位等等，都是贯彻着他们的道德原则的。所以当我们在了解到这些之后其实就不难理解，无限到底代表着什

么，他代表不可知与没有尽头，恰好就是毕达哥拉斯学派所坚持的和谐与秩序所摒弃的，故而并非是他们不能接受这个数和这个概念，而是从他们的世界观出发，是无法根本的理解这些概念，就比如他们可以接受圆，甚至认为圆是最高层次的规律，宇宙的奥秘就隐藏在其中，但是无序到有序的、无限到有限的过程是他们当时的科学水平能够触及的，而百思不得其解的，自然而然就被搁置，他们不能通过正推的方式（即面对无穷的问题），于是提出了使用反推的方法，即归谬法，使用反证的逻辑方式，通过对方的逻辑推论驳倒对方的立论，著名的《以子之矛，攻子之盾》就是这个思想的东方版。

与毕达哥拉斯学派类似的，三教九流中（三教指儒教、佛教、道教三教。九流指先秦至汉初的九大学术流派，儒家者流、阴阳家者流、道家者流、法家者流、农家者流、名家者流、墨家者流、纵横家者流、杂家者流）的九流中有个名家：他们也喜欢搞一点纯粹的论证，只不过他们并不关心数字这种小道，他们更喜欢通过语言的论证，当然，你也可以认为他们的任务主要是当杠精，因为我发现只要是春秋战国时期只要是有一些有名的吵架（他们叫辩论）的地方，总有他们的身影，比如惠施的“濠梁之辩”，公孙龙的“白马论”；当然他们的结果往往也是为历史所扬弃的，原因在于越往后期发展，名家学说抛弃了现实支撑，转而开始专心研究如何语言对敌，也就是从最初邓析创立的重人文，轻自然，穷极事理，对事物进行严肃分析的名家转变为了东方朔的消坚释石，当世无双，专注辩略的名家。

说的远了些，我们言归正传。

名家惠子说过一句话：“至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一。无厚，不可积也，其大千里。天与地卑，山与泽平。日方中方睨，物方生方死。大同而与小同异，此之谓‘小同异’；万物毕同毕异，此之谓‘大同异’。南方无穷而有穷。今日适越而昔来。连环可解也。我知天之中央，燕之北、越之南是也。泛爱万物，天地一体也。”其中的意思便是无穷和有限，极大和极小之间是对立统一的，这句话其实就已经对无穷小的定义给出了描述，无厚，不可积也，只不过这里的不可积的意思不是积分，而是对于有限个无穷小相加的描述，此积非彼积。世人当时多嘲笑他，说他，“卵有毛。鸡有三足。郢有天下。犬可以为羊。马有卵。丁子有尾。火不热。山出口。轮不蹍地。目不见。指不至，至不绝。龟长于

蛇。矩不方，规不可以为圆。凿不围枘。飞鸟之景未尝动也。镞矢之疾，而有不行、不止之时。狗非犬。黄马骊牛三。白狗黑。”觉得他干了指鹿为马的事，而惠子也不恼怒，搬出“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的例子，这里可以算是最早的针对数列极限的描述了，可惜没有更深层次的论述了。此篇出自《庄子•杂篇•天下》。后续其实还有点，但是是庄子说惠子弱于德，强于物，这里也就不引用了。

后来魏晋时期，刘徽使用割圆法给出$\pi = 3.1416$，具体方法为从直径为 2 尺的圆内接正六边形开始割圆，依次得正 12 边形、正 24 边形……直到 3072 边形，得出结论：割得越细，正多边形面积和圆面积之差越小（割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。）

当我们今天重新看待这个问题，可以写下简单的表述

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)\cdot n = \pi$$

经过简单的计算，得到：

$$原式 = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot n$$

取$t = \frac{1}{n}$，则：

$$上式 = \lim_{t\to 0} \sin(t\pi)\cdot\frac{1}{t}$$

取等价无穷小，$x \approx \sin x$，有：

$$上式 = \lim_{t\to 0} t\pi\cdot\frac{1}{t} = \pi$$

也许对于我们而言，这只不过是几步简单的计算，但对于刘徽、祖冲之来说，这就是他们的一生，而对毕达哥拉斯来说，它的毕生追求，最大的和谐和秩序就隐藏在他百思不得其解的无穷之中，人们总是都喜欢把功劳归到做出了突破性贡献的人身上，但正如路易斯•巴斯德（Louis Pasteur）所言：“伟大的科学成就从未凭空产生，而是建立在许多前人的积累之上。”这样的过程，其本质上也是对极限思想下产生的微积分的践行；这何尝又不算是某种意义上的浪漫呢？

由于极限思想的过于晦涩（当时缺乏简明的数学语言用以表达），所以大家都并未系统研究其中的奥秘，直到中世纪结束，文艺复兴时期，由于过多的问题依旧无法为初等数学所能解决，故而不得不出现拿起旧时遗弃的工具，重新开始

面对来自无穷的魔鬼，在此过程中崭新的武器——微积分为牛顿、莱布尼茨所提出，这里的故事我们下次在微积分处再讲，话题再回到极限。

公元十八世纪，一批数学家做出了卓有成效的贡献，使得极限和微积分开始形成密不可分的关系，其中包括：达朗贝尔（D'Alembert），欧拉（Euler）、拉格朗日（Lagrange）等。

期间，达朗贝尔（D'Alembert）定性地给出了极限的定义：“一个变量趋于一个固定量，趋于程度小于任何给定量，且变量永远达不到固定量” 。 除此之外，运用极限思想给出了判定级数（Series）敛散性的达朗贝尔判别法（D'Alembert's Test）： 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数，假设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，结论：① 当$\rho < 1$，级数收敛；② 当$\rho > 1$，级数发散；③ 当$\rho = 1$，级数可能收敛也可能发散。

现代数学中，达朗贝尔判别法（D'Alembert's Test）仍然是级数敛散性判定的重要方法。

期间，欧拉（Euler）极大地推进了微积分涉及到函数和求法，而事实上，牛顿（Newton）和莱布尼茨（Leibniz）只涉及到少量函数及求法。在极限理论发展上，欧拉（Euler）提出了关于无穷小量的不同阶零的理论。

期间，拉格朗日（Lagrange）迷上并专攻数学分析，是数学分析仅次于欧拉的最大开拓者。虽然拉格朗日回避极限概念，但他也承认微分法可以在极限理论的基础上建立起来。

在这一阶段，真正意义上的极限定义得以产生，虽然它仍然过于直观，与数学追求的严密原则相抵触。

十九世纪，捷克数学家波尔查诺（Bolzano）抛弃无穷小量的概念，运用极限的概念定义导数和连续性，并且获得了判别级数收敛的一般准则 —— 柯西准则（Cauchy's Convergence Test）。然而，令人遗憾的是，波尔查诺的工作被长期埋没，没有对当时数学的发展产生影响。

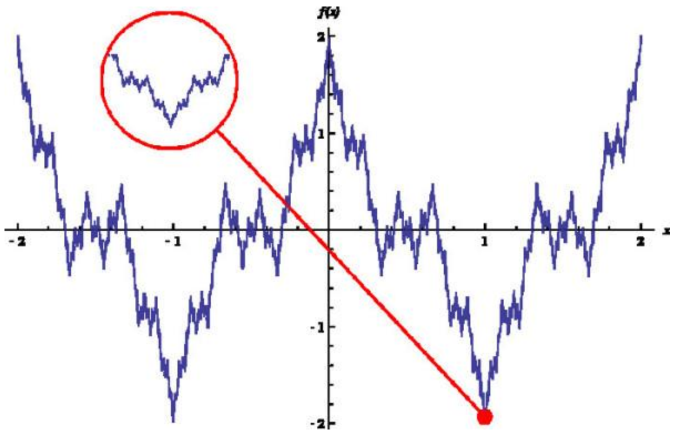
再到后来，法国数学家柯西（Cauchy）发表《分析教程》，独立得到波尔查诺之前证明的基本结论，并以极限为基础，定义无穷小量和微积分学中的基本概念，建立了级数收敛性的一般理论，成为对分析严格化影响最大的数学家。

柯西收敛准则的定义为：对任意给定的正数ε，总存在正整数N，使得当m，$n > N$时，有$|x_n - x_m| < \varepsilon$，则称数列$\{x_n\}$收敛，表现几何含义为：收敛的数

列中，内部元素随着序数的增加会愈发靠近，理论上足够靠后的两项会无比接近。

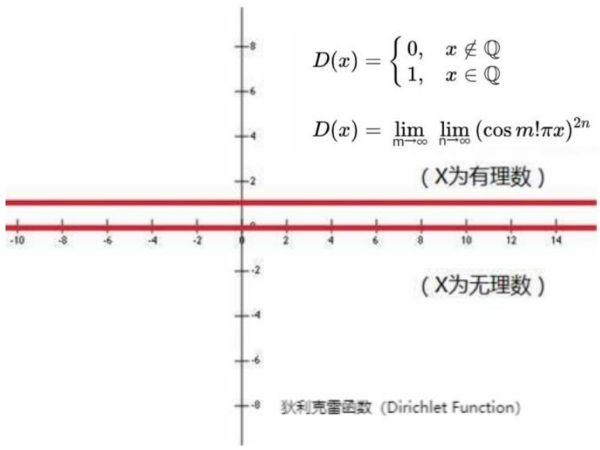
按照现代标准衡量，柯西的分析理论大多基于几何直观，严密性仍然不够。

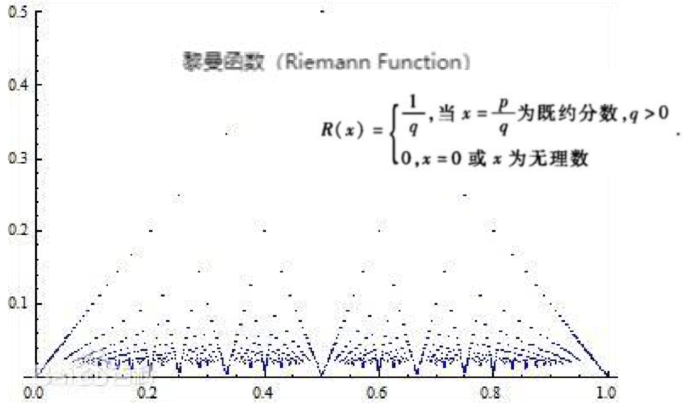
就比如德国数学家魏尔斯特拉斯（Weierstrass）为了反驳上述极限定义，给出了魏尔斯特拉斯函数（Weierstrass Function），一个由无穷级数定义的函数，直观地想象它，是一条连续的锯齿状折线，但锯齿的大小无限地小。



魏尔斯特拉斯函数（Weierstrass Function）

魏尔斯特拉斯函数，否定了数学家认为“除少数特殊点，连续函数处处可导”的观点。随后，狄利克雷函数（Dirichlet Function）、黎曼函数（Riemann Function）和赫维赛德函数（Heaviside Function）等病态函数的例子，充分说明了直观及几何的思考并不可靠。





魏尔斯特拉斯在前面数学家工作的基础上，定量地给出了极限定义，就是现代通用的“$\delta-\varepsilon$定义”：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，$0<|x-x_0|<\delta$，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，记为：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

魏尔斯特拉斯以极限理论为基础严格建立微积分，系统创立实分析和复分析，基本上实现了分析的算术化，克服了数学发展过程中的危机和矛盾，被尊为“现代分析之父”。而这，严格化的微积分也为20世纪数学的发展奠定了基础。

综上就是整个极限思想发展的历史，由于篇幅的原因，我们并不能将整个历史都展现出来，所以只能通过挑选其中重要的节点来方便介绍，本节内容并不复杂，主要介绍的是邻域的概念及$\delta-\varepsilon$的通俗解释，算作是正式开始极限学习前的一点点“开胃菜”吧，希望在此过程中，你能有所收获！

1.1.2 极限的性质

前文中我们了解到了极限的概念，认识到了“可望而不可即”的“悲哀”，现在我们就要开始正式的研究它了，所谓极限，分为数列极限和函数极限，二者大同小异，本质上我们完全可以将数列极限看作是函数极限中的某一部分被单独取出，所以在描述极限性质时，我们将会对照数列极限和函数极限来进行总结。

我们按照他们的共同部分到不同部分进行排列，对二者而言，最为共通的性质，是所有极限均具备的性质，即：

（1）唯一性

顾名思义的，所有的极限如果存在那么只会为一个极限，不会存在在同样情况下出现两个极限的情况。

对于一个数列而言，存在一个这样的定理：

如果数列$\{x_n\}$收敛，则我们说这个数列它的极限唯一。

修改为数学语言则表示为：

$$\lim x_n = A，\ \lim x_n = B$$

$$\Rightarrow A = B$$

这里不难证明，但我们先做理解，数列极限有两部分构成，一部分是数列，一部分是极限，所谓数列，意为由数排列而成，遵循某一规律，使得数与位次产生一一对应的关系，当然也有更为正式的定义：

如果按照某一法则，对每个$n \in N_+$，都对应着一个实数x_n，这些实数按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列：x_1、x_2、x_3、…、x_n、…就叫数列，记作数列$\{x_n\}$。

我们再给出极限（数列）的定义：

设$\{x_n\}$为一个数列，存在一个常数a，$\forall \varepsilon > 0$（ε为给定的正数并且不论它有多么的小），总存在正整数N（足够大），使得当$n > N$时，不等式$|x_n - a| < \varepsilon$都成立，那么则称a是数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于a。

注意到，这里只有$\delta - \varepsilon$语言中的ε，并未包括δ，这是因为相较于函数，数列与数轴之间的关系仅仅停留在 1、2、3、⋯、n、⋯等正整数层面，而取

代 $0<|x-x_0\ |<\delta$中的x_0的是N，这里的N并不指代某一个正整数，他的意思是一个足够大的正整数，用以描述n所代表的大于N的部分，也就是大于x_N的部分，而N又要比任何你知道的数大，比∞小，所以意思就是越往后，越趋近于这个极限。所以也可以表示为：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$又或者$x_n\to a$（$n\to\infty$）。

值得一提的，当我们令x_n的项数n不停增加，如果x_n也不停增加时，我们并不能说他是趋于无穷的，而是说他的极限不存在，这其中的原因在于，在定义时，大家就选用了一个有限数（注意前面说的是常数），而非任意的数，当然如果你还是觉得不合理，认为凭什么函数极限可以取到无穷而数列极限不能取无穷的话，我其实还有一个解答，我们都知道所谓的取到无穷，真正的意思其实是逼近无穷，所谓逼近，就需要一个过程，而众所周知，数列极限是一段一段的，那么它在趋近于无穷的过程中，必然有一个点出现在了有限与无穷的边界，那么在这个点，$|x_n-\infty|$的值就不可能任意小，而且在趋近无穷的过程中，越靠后的每个点都比前一个点更趋近无穷，所以$|x_n-x_{n-1}|$的值也不会$<\varepsilon$，所以，对于数列极限而言，定义上就不能存在极限趋于无穷的情况。

而函数极限是连续的，所以哪怕取到无穷，我们仍然只观察领域部分内，所以，函数极限可以取无穷。

同样的，我们仿照刚才数列极限的唯一性，给出函数极限的唯一性定理：

$$\lim_{x\to a} f（x）=A，\lim_{x\to a} f（x）=B$$

$$\Rightarrow A=B$$

下面我们开始证明极限的唯一性：

通过反证法，假设数列$\{x_n\}$收敛，并且存在两个不同的极限，L_1、L_2（即$L_1\neq L_2$），则根据数列极限的定义：

对于任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数N_1，当 $n>N_1$时，$|a_n-L_1|<\varepsilon$。

对于同样的 $\varepsilon>0$，存在正整数N_2，当 $n>N_2$时，$|a_n-L_2|<\varepsilon$。

取$\varepsilon=\frac{|L_1-L_2|}{3}$，因为$L_1\neq L_2$,所以$|L_1-L_2|>0$，此时 $\varepsilon>0$。

由定义知，n可取$\max\left(N_1，N_2\right)$，则有：

$$|a_n - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}，|a_n - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}$$

结合三角不等式：

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - a_n) + (a_n - L_2)| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2|$$

代入结果，有：

$$|L_1 - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{3} + \frac{|L_1 - L_2|}{3} = \frac{2|L_1 - L_2|}{3}$$

左右两边同时除以$|L_1 - L_2|$，可得到 $1 < \frac{2}{3}$，显然不合理。当然也可以直接观察出$|L_1 - L_2| < 0$，与$|L_1 - L_2| > 0$ 矛盾。

故此，假设$L_1 \neq L_2$并不成立，证明极限唯一。

同理，对于函数极限，我们依旧可以使用同样的方法：

假设函数$f(x)$在$x \to a$处存在两个不同的极限L_1、L_2。即：

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1，\lim_{x \to a} f(x) = L_2，并且L_1 \neq L_2。$$

根据函数极限的定义：

对于任意的$\varepsilon > 0$，存在$\sigma_1 > 0$，当 $0< |x - a| < \sigma_1$时，有$|f(x) - L_1| < \varepsilon$。

对于同样的$\varepsilon > 0$，存在$\sigma_2 > 0$，当 $0< |x - a| < \sigma_2$时，有$|f(x) - L_2| < \varepsilon$。

我们同样选取$\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{3}$，并令$\sigma = \min(\sigma_1, \sigma_2)$，当 $0< |x - a| < \sigma$时，同时有：

$$|f(x) - L_1| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}，|f(x) - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{3}$$

再利用三角不等式：

$$|L_1 - L_2| = \left|\left(L_1 - f(x)\right) + (f(x) - L_2)\right| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2|$$

代入上式：

$$|L_1 - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{3} + \frac{|L_1 - L_2|}{3} = \frac{2|L_1 - L_2|}{3}$$

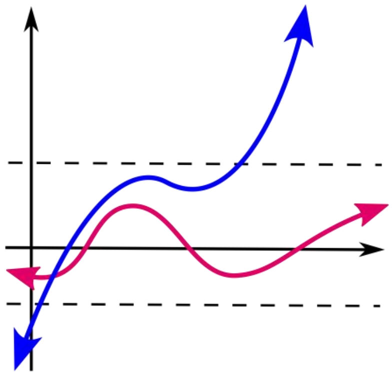
此式与$L_1 \neq L_2$矛盾，故此，假设$L_1 \neq L_2$不成立，函数极限满足唯一性。

注意到，这里我们特地通过选取一个特殊的ε来完成证明，如果你很难直接接受这个从天而降的ε，无法进行下面的思考的话，我希望你能明白，所谓的ε只是为了满足后续的反证法，是先打的靶，后描的框，如果你选用不同的不等式，那么也自然会出现不同的ε，由于ε的任意性，无论在什么样的取值下，都要要求

式子成立，否则就是假设错误，这也就是证明题与计算题的直接区别，证明题往往是给你答案，填写过程，考察你的逻辑链是否严密，计算题就相反，给你开头，让你推论下去，考察你的逻辑链是否连贯。

（2）有界性（数列极限）与局部有界性（函数极限）

大家在课上经常念叨的一句顺口溜：“单调必然有界，而有界未必单调。”当然这里未必说的是一个东西，只是说我们需要引入“界”的概念：



如图所示，我们给出两个函数，注意到，红色的函数一直处在虚线内，所以它就叫有界函数，而蓝色函数并不受虚线也就是“界”的管理，所以便叫它无界函数。另外，我们还注意到虚线有上下两条，上面虚线以及上面的我们就称呼它为上界，下面虚线下面的就称呼它为下界，而两条虚线由于是已经确定了的，所以也就称之为上（下）确界。

我们还是先随便讲讲，下面给出比较正式的定义：

按照函数是一个集合到另一个集合的映射的概念，我们可以给出上下界的定义，设S是实数集合，如果存在实数M，使得集合上的所有$x \in S$,都有$x \leq M$，则我们称M是集合S的**上界**。(注意：只要是大于集合上的每一个x的部分，都可以被称为上界。

同样的情况，我们设T是实数集合，如果存在实数m，使得所有的$x \in T$,都有$x \leq m$，则我们称m为集合T的**下界**。（同样请注意，只要是比x小的部分我们都可以认为是下界。）

上下界概念中还有两个比较重要的概念：

上确界（Supremum）：设S是实数集合，如果S有上界，则上确界（也称为上最小界）是集合S的最小上界，记作$\sup S$。

换句话说，上确界是一个最小的数，它是集合的一个上界，并且没有任何一个比它更小的上界。上确界可能是集合中的一个元素，也可能不是集合中的元素（即它是集合的“极限”上界）。

改为形式化定义：$\sup S = M$，当且仅当：

（1）M是S的上界。

（2）对于任意的小于M的数$m(m < M)$，存在集合S中的元素x，使得$x > m$。（此句话的意思为所有小于上确界的实数，必然会有一个x大于这个数，侧方面印证了最小上界的概念。）

下确界（Infimum）：设T是实数集合，如果T有下界，则下确界（也称为下最大界）是集合T的最大下界，记作$\inf T$。

换句话说，下确界是一个最大的数，它是集合的一个下界，并且没有任何一个比它更大的下界。下确界也可能是集合中的一个元素，或者它不是集合中的元素（即它是集合的“极限”下界）。

同样给出形式化定义：$\inf T = N$，当且仅当：

（1）N是T的下界。

（2）对于任意大于N的数$n(n > N)$,存在集合T中的元素x，使得$x < n$。

在了解了函数的界的定义和概念之后，我们给出针对于极限“有界性”的表述：

数列极限有界性：

如果数列$\{a_n\}$的极限L存在，则此时我们说这个数列是有界的。反过来，如果存在一个常数$M > 0$，使得对于所有的n，都有：$|a_n| \le M$,也就表明此数列的所有项均受到某个常数的限制。

这句话可能是难于理解的，所以我们可以做出一些简化，即：**如果数列$\{x_n\}$收敛，则该数列一定有界。但是反过来说数列$\{x_n\}$有界则不能证明该数列收敛。**比如我们规定一个数列为$\{1，0，-1，1，0，-1，1，......\}$，这个数列就明显有上下界，但不存在极限。

另外，数列的极限有界性意味着，如果数列收敛到 L，那么数列的所有项最终都趋近于L，并且不会无界增大或减小。此话其实也不难理解，根据我们刚才所说的收敛数列一定有界的说法，那么这个数列必然受到它的极限限制，而这个极限就属于是它的上（下）界之一，所以收敛数列的极限和它的上下界是有密切关联的，至于是不是上（下）确界，我只能说大部分时候其实是的。

数列极限有界性证明：

假设数列$\{a_n\}$收敛于L,即：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

根据极限定义，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个正整数N，使得$n>N$时：

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

取$\varepsilon = 1$，则存在一个正整数N_1，使得当$n>N_1$时：

$$|a_n - L| < 1$$

即：

$$L - 1 < a_n < L + 1 \quad \text{对于所有} n > N_1$$

因此，数列$\{a_n\}$中的所有项在$n > N_1$时，全部位于$\left[L-1，L+1\right]$内，这表明数列在此部分内有界。

再考虑之前的N_1项，不难证明，由于有限项总是有界的，所以可以设其最大值为M_1，此时，我们可以选择$\max(M_1, |L|+1)$,使得对于所有的n，都有：

$$|a_n| \le M$$

因此收敛数列$\{a_n\}$是有界的。

函数极限局部有界性：

也许你注意到了，相较于数列极限，函数极限多了“局部”二字，这是因为函数极限的定义所导致的，我们都知道函数极限不同于数列极限，是倾向于函数的某一点而不是观察整个函数的指向，又或者说数列函数由于它天生的不连续性，只能够对$n\to\infty$时进行趋势的观察，其余点位均有具体的值，而函数可以再任意处产生可能的极限，如x^2的极限出现在$\pm\infty$处，$\frac{1}{x}$的极限除去$\pm\infty$还可以出现在 0 处。所以我们在研究函数极限时其实只能确定极限附近的部分，而函数极限也只能证明在自变量趋于某值时，因变量趋于另一某值，并不直接代表函数的变化（函数的变化是导数确立的，导数虽然是极限推论下的产物，但也要注意不要张冠李戴了）。

给出关于函数极限“有界性”的定义：

如果函数$f(x)$在某点a的极限L存在，即：

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

那么我们说函数的极限是有界的，表示存在某个$M > 0$，使得对于所有x足够接近a（即x在某个区间内靠近a）时，都满足：

$$|f(x)| \leq M$$

即函数值不会超过这个范围。

我依旧还是换一句话来说：**如果函数在某一点上有极限，那么我们就认为函数在该点附近有界（局部）**。改为数学语言：

如果$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$，存在常数$M > 0$(界)和$\delta > 0$，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$（局部：该点附近），有$f(x) \leq M$。

函数极限局部有界性证明：

假设函数$f(x)$在$x = a$处极限为L，即：

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

根据极限的定义：对于任意的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta$时：

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

同样选择$\varepsilon = 1$，则存在$\delta_1 > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta_1$时：

$$|f(x) - L| < 1$$

即：

$$L - 1 < f(x) < L + 1\text{，对于 } 0 < |x - a| < \delta_1$$

这表示函数$f(x)$在x靠近a时，其值都被限制在区间$[L - 1, L + 1]$内，也即表明函数$f(x)$在该邻域内是有界的。

（3）保号性与局部保号性

也许你此前并未听过这方面的说法，但我想你对于此性质的应用一定早已开始，所谓保号性，其实就是当极限存在时，你在靠近这个极限的时候就会和这个极限具备相同的正负性。我们拿几个例子来说：

数列极限保号性

考虑数列$a_n = \frac{1}{n}$并取极限：

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

这个数列极限为 0，但是我们可以注意到，该数列的每一项其实都是正数，我们其实可以说这个数列的符号得到了保留。也许还不是很直观，我们换一个数列：

$$b_n = \frac{1}{n} + 1$$

取极限有：

$$\lim_{\mathrm{n} \to \infty} b_{\mathrm{n}} = 1$$

这个数列的极限为 1，同样的，这个数列的每一项都属于正数，那么此时此刻保号性得到了体现。

再考虑数列$a_n =- \frac{1}{n}$并取极限：

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

此时极限依旧为 0，我们同样可以发现，这个数列的每一项都是负数，经过刚才的经验我们知道这个其实还是保号性的表现。同样给出一个数列$\{b_n\}$：

$$b_n =- \left(\frac{1}{n} + 1\right)$$

取极限：

$$\lim_{\mathrm{n} \to \infty} b_{\mathrm{n}} =- 1$$

这个数列的极限为负，而其每一项都属于负数。

考虑极限$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$，我们注意到这个数列属于是正负交替的，但是它的极限依旧存在，取极限：

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

这里我们就注意到，由于数列的项正负性的反复交替，那么它就不属于保号性的定义。

再给出一个$\{b_n\}$：

$$b_n = 1 - \frac{1000}{n}$$

取极限：

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} b_{\mathrm{n}} = 1$$

我们注意到这个例子在前 1000 项取值均为负，只有在 1000 项后才开始取值为正，所以这里引出数列极限保号性的正式定义：

设$\{a_n\}$为一个极限，并令其极限为：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

1、若极限$L > 0$，则：

存在一个正整数$N > 0$，使得所有的$n > N$，都有：

$$a_n > 0$$

此即意味着数列的项随着n的增大，最终会和极限一样，保持正号。

2、若极限$L < 0$，则：

存在一个正整数$N > 0$，使得所有的$n > N$，都有：

$$a_n < 0$$

此意味着数列的项随着n的增大，最终会和极限一样，保持负号。

3、若极限$L = 0$，则：

保号性通常不成立。需考虑数列的项在接近 0 时的符号变化，尤其是正负交替的情况。

总结一下：

1、数列极限的保号性意味着如果数列的极限是正数或负数，那么数列的项最终会保持相同的符号。

2、如果数列的极限是零，则数列项可能在正负之间交替，不能保证符号的保持。

函数极限局部保号性

考虑函数$f(x)=x^2$在$x\to 1$时的极限，即：

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

注意到该函数的所有x均为正，也就可以说函数在$x\to 1$的极限处和极限$\lim_{x\to 1} x^2=1$有着保持着相同的正负属性，符合极限保号性。

再考虑函数$f(x)=-x^2$在$x\to 1$时的极限，即：

$$\lim_{x\to 1} f(x)=-1$$

由注意到该函数的所有x均为负，则也可以证明符合极限保号性。

最后再考虑$f(x)=\sin x$在$x\to 0$处的极限，即：

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

此时此刻虽然极限值为0，但可以发现$\sin x$会随着x的取值产生正负的变化，即$x>0$的部分$\sin x>0$，$x<0$的部分$\sin x<0$。也就是说，在$x\to 0$时，$\sin x$会在正负间变化，也就不具备保号性。

我们依旧给出函数极限局部保号性的数学定义：

假设$f(x)$是一个定义在某个领域内的函数，且：

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

1、若极限$L>0$，则：

存在$\delta>0$，使得当$0<|x-a|<\delta$时，$f(x)>0$，此时则称函数$f(x)$保号。

这意味着当x足够接近a时，$f(x)$将和极限L一样保持正号。

2、若极限$L<0$，则：

存在$\delta>0$，使得当$0<|x-a|<\delta$时，$f(x)<0$，此时则称函数$f(x)$保号。

这意味着当x足够接近a时，$f(x)$将和极限L一样保持负号。

3、若极限$L=0$，则：

保号性通常不成立，需要考虑函数在极限的符号变化，该值可能会在正负间切换，最后趋向0。

总结一下：

1、函数极限的保号性意味着，如果一个函数的极限是正的或者负的，那么在该极限点附近，函数的值会保持与极限相同的符号。

2、如果极限是零，那么保号性通常不成立，函数值可能会在正负之间切换。

再额外加一条：需要注意函数极限和数列极限都要求在靠近极限处，此外通有界性，需要额外注意函数极限的“局部”特性。

极限保号性的证明

这一段其实并不算是重要的步骤，但是考虑到认识问题需要全面，有因有果，方得始终，所以还是给出证明，内容其实与上面大同小异，所以请你随心意选择是否观看。

数列极限保号性的证明过程

设$\{a_n\}$为一个数列，并令其极限为：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

1、若极限$L > 0$，则：

根据极限的定义，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个正整数$N > 0$，使得所有的$n > N$，都满足：

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

选择$\varepsilon = \frac{L}{2}$，可以得到：

$$|a_n - L| < \frac{L}{2}$$

此即意味着对于所有的$n > N$，都有：

$$L - \frac{L}{2} < a_n < L + \frac{L}{2}$$

即：

$$\frac{L}{2} < a_n < \frac{3L}{2}$$

由于$L > 0$，则$\frac{L}{2} > 0$，故此，对于所有的$n > N$，都满足：

$$a_n > 0$$

以上，$L > 0$ 时，保号性得证。

2、若极限$L < 0$，则：

据极限的定义，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个正整数$N > 0$，使得所有的$n > N$，都满足：

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

选择$\varepsilon = \frac{|L|}{2} = -\frac{L}{2}$，可以得到：

$$|a_n - L| < \frac{|L|}{2} = -\frac{L}{2}$$

此即意味着对于所有的$n > N$，都有：

$$L - \frac{|L|}{2} < a_n < L + \frac{|L|}{2}$$
$$= L - \left(-\frac{L}{2}\right) < a_n < L + \left(-\frac{L}{2}\right)$$

即：

$$\frac{3L}{2} < a_n < \frac{L}{2}$$

由于$L < 0$，则$\frac{3L}{2} < 0$，故此，对于所有的$n > N$，都满足：

$$a_n < 0$$

以上，$L < 0$ 时，保号性得证。

3、极限$L = 0$ 时，考虑特殊情况：如$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$，极限数列虽然为 0，但存在正负交替，所以保号性基本不成立。

函数极限局部保号性的证明

设函数$f(x)$极限为：

$$\lim_{n \to \infty} f(x) = L$$

1、若极限$L > 0$，则：

根据极限的定义，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个正数$\delta > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta$时，都满足：

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

选择$\varepsilon = \frac{L}{2}$，可以得到：

$$|f(x) - L| < \frac{L}{2}$$

此即意味着对于所有满足 $0 < |x - a| < \delta$的x，都有：

$$L - \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2}$$

即：

$$\frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}$$

由于$L > 0$，则$\frac{L}{2} > 0$，故此，所有满足 $0 < |x - a| < \delta$的x，都满足：

$$f(x) > 0$$

以上，$L > 0$ 时，保号性得证。

2、若极限$L < 0$，则：

根据极限的定义，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个正数$\delta > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta$时，都满足：

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

选择$\varepsilon = \frac{|L|}{2} = -\frac{L}{2}$，可以得到：

$$|f(x) - L| < \frac{|L|}{2} = -\frac{L}{2}$$

此即意味着对于所有满足 $0 < |x - a| < \delta$的x，都有：

$$L - \frac{|L|}{2} < f(x) < L + \frac{|L|}{2}$$
$$= L - \left(-\frac{L}{2}\right) < f(x) < L + \left(-\frac{L}{2}\right)$$

即：

$$\frac{3L}{2} < f(x) < \frac{L}{2}$$

由于$L < 0$，则$\frac{3L}{2} < 0$，故此，所有满足 $0 < |x - a| < \delta$的x，都满足：

$$f(x) < 0$$

以上，$L < 0$ 时，保号性得证。

3、极限$L = 0$ 时，考虑特殊情况：$f(x) = \sin x$，函数值会出现正负变化，最后趋于 0，所以保号性也基本不成立。

（4）保序性与局部保序性

有一说一，这个性质是很少列出来的，但是如果不去谈论这个性质，那么在我们学习夹逼定理时就可能出现一些理解上的问题，所以还是拎出来讲讲，所谓保序性，本质上就是对于保号性的推广，二者殊途同归，当然保序性自然也可以推广，那也就是下面的保不等式性了。

数列极限保序性及其证明

假设存在两个数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$，并且它们的极限分别为L_1、L_2,并且$L_1 > L_2$，则在靠近极限的过程中存在一个正整数$N > 0$,使得$n > N$时，有$a_n > b_n$。

也就是说当两个数列极限确定后，极限大的数列越往后的项比极限小的数列越往后的项大。

这里进一步体现了极限对于整个数列的限制作用，下面给出完整的证明：

假设：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_1 \quad \lim_{n\to\infty} b_n = L_2$$

且$L_1 > L_2$，则根据极限定义，有：

根据极限的定义，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个正整数$N > 0$，使得所有的$n > N$，都满足：

$$|a_n - L_1| < \varepsilon$$

也就是：

$$L_1 - \varepsilon < a_n < L_1 + \varepsilon$$

同理，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个正整数$N > 0$，使得所有的$n > N$，都满足：

$$|b_n - L_2| < \varepsilon$$

即：

$$L_2 - \varepsilon < b_n < L_2 + \varepsilon$$

由于$L_1 > L_2$，则对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个正整数$N > 0$，使得所有的$n > N$，都满足：

$$L_2 - \varepsilon < b_n \leq a_n < L_1 + \varepsilon$$

综上，保序性可证。

反之，假设存在两个数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$，在靠近极限的过程中存在一个正整数$N > 0$,使得$n > N$时，有$a_n > b_n$时，亦可证明$L_1 > L_2$。

函数极限局部保序性及其证明

假设有两个函数$f(x)$、$g(x)$，且均于$x = a$处存在极限：

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \quad \lim_{x \to a} g(x) = L_2$$

并且满足$L_1 > L_2$，则在靠近极限过程中，在$x = a$处附近（存在一个正整数δ，使得当 $0 < |x - a| < \delta$时），有：

$$f(x) > g(x)$$

也就是说在对于同一个x取相同的极限时，极限大的函数在极限附近比极限小的函数在极限附近的函数大。

具体证明过程如下：

假设：

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \quad \lim_{x \to a} g(x) = L_2$$

且$L_1 > L_2$，则根据极限定义，有：

根据极限的定义，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个正数$\delta > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta$时，都满足：

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon$$

也就是：

$$L_1 - \varepsilon < f(x) < L_1 + \varepsilon$$

同理，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个正数$\delta > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta$时，都满足：

$$|g(x) - L_2| < \varepsilon$$

即：

$$L_2 - \varepsilon < b_n < L_2 + \varepsilon$$

由于$L_1 > L_2$，则对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个正数$\delta > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta$时，都满足：

$$L_2 - \varepsilon < g(x) \leq f(x) < L_1 + \varepsilon$$

综上，保序性可证。

反之，假设存在两个函数$f(x)$、$g(x)$，在靠近极限的过程中存在一个正数$\delta > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta$时，有$f(x) > g(x)$时，亦可证明$L_1 > L_2$。

保序性和保号性的特殊关系：

对于数列极限而言，保序性需要两个数列，即$\{a_n\}$、$\{b_n\}$，并且需要他们有极限L_1、L_2，当$L_1 > L_2$时（当$L_1 < L_2$时），即可证明在靠近极限过程中，$a_n > b_n$（$a_n < b_n$）。

当$b_n = 0$时，原定义改为：存在数列极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$，当$L_1 > 0$时（当$L_1 < 0$时），即证明在靠近极限过程中，$a_n > 0$（$a_n < 0$）。此即为数列极限保号性的描述。

对于函数极限而言同样，需要两个函数：$f(x)$、$g(x)$，并且均于同一x处存在极限C_1、C_2，当$C_1 > C_2$时（当$C_1 < C_2$时）即可证明在靠近极限过程中，$f(x) > g(x)$（$f(x) < g(x)$）。

我们同样令$g(x) = 0$，则定义变为：存在函数极限$\lim\limits_{x\to a} f(x) = C_1$，当$C_1 > 0$时（当$C_1 < 0$时），即证明在靠近极限过程中，$f(x) > 0$（$f(x) < 0$）。此即为数列极限保号性的描述。

我们刚开始说保序性其实是保号性的推论，其实不妨说保号性就是保序性的一种特殊情况，二者均体现了极限在趋近过程中对于函数（数列）的限制。

（5）保不等式性与局部保不等式性

顾名思义，保不等式性描述了数列和函数趋于某个值时，其极限将会保有原有的不等式关系，也即适才保序性描述的反向论述，具体的证明过程参见上处，此处给出结论：

对于数列极限而言：$\{x_n\} > \{y_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，$A > B$。

对于函数极限而言：若$\exists\delta > 0$，$\forall x \in \dot{U}(a，\delta)$（以$a$为中心，$\delta$为范围的去心邻域），$\lim\limits_{x\to a} f(x) = C$,$\lim\limits_{x\to a} g(x) = D$,有$f(x) > g(x)$，则$C > D$。

简单来说就是原来大的，它的极限也就越大，这里体现了函数（数列）对极限的反向约束。

以上就是数列和函数极限所共有的性质，接下来展示它们各自独有的，先从数列极限开始。

数列极限独有的性质

1）数列极限归并性

这个名字听起来唬人，但是相当简单，符合逻辑，一句话就可以解释：**收敛数列的任一子数列收敛于同一极限。**

同样给出比较正式的定义：

如果一个数列$\{a_n\}$收敛到A（极限为A），即：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

那么所有的子列$\{a_{n_k}\}$也收敛，其极限与原数列的极限相同，即：

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = A$$

这里体现了数列极限的传递性，需要注意的：**数列收敛⇒子列收敛，子列收敛⇏数列收敛**。

如数列$b_n = (-1)^n$，其展开形式为$\{-1，1，\ -1，1，\ldots\}$，我们知道数列b_n不存在极限，但取其中的奇数子列，取极限得-1，取其中的偶数子列，取极限为 1，可见子列收敛并不代表数列收敛。

也许你可能会想子列收敛到一个数，数列收敛到另一个数会发生吗？答案是不会，因为这样就违背了归并性，归并性要求所有收敛数列的子列都必须无条件的服从收敛数列，所以数列可以不收敛，一旦收敛，那么所有子列必须服从。

归并性的证明：

假设：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

则意味着对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个正整数$N > 0$，使得所有的$n > N$，都满足：

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

取$\{a_n\}$中按照一定规则提取出的一个新数列，命名为$\{a_{n_k}\}$。

对于子列$\{a_{n_k}\}$，由于$n \to \infty$，则$n_k \to \infty$，那么可以找到一个K(对应于$n_k > N$)使得当$k > K$时：

$$n_k > N$$

此即意味着，当任意$k>K$时，子列的下标n_k满足母数列的收敛条件$n>N$。

由此可知：对于任意的$k>K$，有：

$$\left|a_{n_k}-A\right|=|a_n-A|<\varepsilon$$

由此可见，对于任意子列$\left\{a_{n_k}\right\}$，均满足：

$$\lim_{n_k\to\infty}a_{n_k}=A$$

2）数列极限合并性

严格来说，这不足以作为一个性质来单独列出，它更适合作为归并性的推论存在，但考虑到奇偶数列在子列的特殊地位，需要掌握的熟练程度，还是讲讲为好。

前面我们提到了归并性的说明：**收敛数列的任一子数列收敛于同一极限。**那么我们此时便可以思考，是否可以换个说法：它要求收敛数列的任意子列都收敛到同一个极限，那么我们就说一个数列的所有子列均收敛到同一个极限，是否可以证明他自己也收敛。答案是显然的，因为我们在对子列的定义里也包括了自己。所以直接给出合并性的性质：当一个数列其奇偶子列均收敛于同一极限，其本身也收敛于该极限。

数学语言描述如下：

$$\lim_{k\to\infty}x_{2k-1}=A\text{且}\lim_{k\to\infty}x_{2k}=A\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=A$$

具体证明十分简单，先给出奇偶数列的极限的$\delta-\varepsilon$数学定义，然后证明$2k-1$（奇数列）和$2k$（偶数列）共同完整的构成了n（整个数列），最后合并奇偶数列的$\delta-\varepsilon$数学定义，就可以完成证明。

3）数列极限的计算法则

假设：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$：

a. 加减法则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n=A\pm B$$

b. 乘法法则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = A \cdot B$$

c. 数乘法则

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot x_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c \cdot A$$

d. 除法法则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{A}{B} \ \ (\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0, B \neq 0)$$

数列极限运算法则的证明过程：

对于**加减法则**：

由于$\lim_{n\to\infty} x_n = A$，则知对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个正整数$N_1 > 0$，使得所有的$n > N_1$，都满足：

$$|x_n - A| < \varepsilon$$

又由于$\lim_{n\to\infty} y_n = B$，则知对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个正整数$N_2 > 0$，使得所有的$n > N_2$，都满足：

$$|y_n - B| < \varepsilon$$

由于ε的任意性，可取ε为原来的一半，即$\frac{\varepsilon}{2}$，此时上式变为：

$$|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

考虑$x_n + y_n$，此时对于$n > \max(N_1，N_2)$,同时满足：

$$|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

两式相加，有：

$$|(x_n - A) + (y_n - B)| = |(x_n + y_n) - (A + B)|$$

根据三角不等式：

$$|(x_n - A) + (y_n - B)| < |x_n - A| + |y_n - B|$$

又$|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$，$|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$，代入式中，可知：

$$|(x_n - A) + (y_n - B)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

故有：

$$|(x_n+y_n)-(A+B)|<\varepsilon$$

即：

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n=A+B$$

减法只需将$|(x_n-A)+(y_n-B)|$变更为$|(x_n-A)-(y_n-B)|$，此时有：

$$|(x_n-y_n)-(A-B)|<\varepsilon$$

即：

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n-\lim_{n\to\infty}y_n=A-B$$

对于**乘法法则**：

由于$\lim_{n\to\infty}c_n=A$，则知对于任意的$\varepsilon_1>0$，存在一个正整数$N_1>0$，使得所有的$n>N_1$，都满足：

$$|c_n-A|<\varepsilon_1$$

又由于$\lim_{n\to\infty}d_n=B$，则知对于任意的$\varepsilon_2>0$，存在一个正整数$N_2>0$，使得所有的$n>N_2$，都满足：

$$|d_n-B|<\varepsilon_2$$

先证明乘法引理，即：

若$A=B=0$，则$\lim_{n\to\infty}(c_n\cdot d_n)=0$。

此时，由于$\lim_{n\to\infty}c_n=0$，则知对于任意的$\varepsilon>0$，存在一个正整数$N>0$，使得所有的$n>N_1$，都满足：

$$|c_n-0|<\sqrt{\varepsilon}$$

又由于$\lim_{n\to\infty}d_n=0$，则知对于任意的$\varepsilon>0$，存在一个正整数$N>0$，使得所有的$n>N_2$，都满足：

$$|d_n-0|<\sqrt{\varepsilon}$$

直接相乘有：

$$|c_n-0|\cdot|d_n-0|=|c_n\cdot d_n|<\varepsilon$$

可化为：

$$|c_n \cdot d_n - 0| < \varepsilon$$

即，当$A = B = 0$ 时：

$$\lim_{n\to\infty} (c_n \cdot d_n) = 0$$

当完成乘法引理的证明后，我们就可以开始正式的乘法运算规则的证明：

设：$S_n = x_n - a$，$T_n = y_n - b$；且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，即：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - a) \ ， \quad \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} (y_n - b)$$

利用加减运算得：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - a) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} a = a - a = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} (y_n - b) = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} b = b - b = 0$$

由于乘法引理：$\lim\limits_{n\to\infty} (S_n \cdot T_n) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} [(S_n + a) \cdot (T_n + b)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} (S_n \cdot T_n + a \cdot T_n + b \cdot S_n + a \cdot b)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (S_n \cdot T_n) + \lim_{n\to\infty} (a \cdot T_n) + \lim_{n\to\infty} (b \cdot S_n) + \lim_{n\to\infty} (a \cdot b)$$

$$= 0 + 0 + 0 + a \cdot b = a \cdot b$$

由此可证乘法法则成立。

对于**数乘法则**：

由于$\lim\limits_{n\to\infty} d_n = A$，则知对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个正整数$N_1 > 0$，使得所有的$n > N_1$，都满足：

$$|d_n - A| < \varepsilon$$

考虑 $c \cdot d_n$，则式子变为：

$$|c \cdot (d_n - A)| = |c \cdot d_n - c \cdot A|$$

由于ε的任意性，可令ε变为之前的$\frac{1}{c}$，则原式变为：

$$|d_n - A| < \frac{\varepsilon}{c}$$

在等式的左右两边同时乘上c：

$$|c\cdot(d_n-A)|=|c\cdot d_n-c\cdot A|<\varepsilon$$

由此可证：

$$\lim_{n\to\infty}c\cdot d_n=c\cdot\lim_{n\to\infty}d_n$$

对于**除法法则**：

设存在极限：$\lim_{n\to\infty}e_n=P,\lim_{n\to\infty}h_n=Q$，$Q\neq 0$：

此时对于$\lim_{n\to\infty}\frac{e_n}{h_n}$的运算来说需要满足下列条件：

因为$\lim_{n\to\infty}h_n=Q$，

所以给定任意的正数ε_0，总存在正整数N，当 n＞N 时，均有：$|h_n-Q|<\varepsilon_0$成立，又有绝对值不等式：

$$|Q|-|h_n|\le|h_n-Q|<\varepsilon_0$$

则：

$$|h_n|>|Q|-\varepsilon_0$$

又因为$Q\neq 0$，取$\varepsilon_0=\frac{|Q|}{3}>0$，即：

$$|h_n|>|Q|-\varepsilon_0=\frac{2|Q|}{3}>0$$

由此知$h_n\neq 0$，此时：$\lim_{n\to\infty}\frac{e_n}{h_n}$才有意义。

$$|h_n|>\frac{2|Q|}{3}$$

则：

$$\frac{1}{|h_n|}<\frac{3}{2|Q|}$$

又因为：

$$\lim_{n\to\infty}e_n=P\quad,\quad\lim_{n\to\infty}h_n=Q$$

所以给定任意的正数ε，总存在正整数N，当 n＞N 时，均有：

$$|e_n-P|<\frac{|Q|}{3}\varepsilon$$

给定任意的正数ε，总存在正整数N，当 n＞N 时，均有：

$$|h_n - Q| < \frac{|Q|^2}{3|P|}\varepsilon$$

(值得注意的：此时不论是e_n的$\frac{|Q|}{3}\varepsilon$，还是h_n的$\frac{|Q|^2}{3|P|}\varepsilon$，都是基于ε的任意性，目的是便于计算，当然你也可以尝试按照乘法法则证明的方式证明$\frac{1}{h_n}$与e_n的乘法，这里使用其他的方法。)

$$\left|\frac{e_n}{h_n} - \frac{P}{Q}\right| = \left|\frac{Q\cdot e_n - P\cdot h_n}{Q\cdot h_n}\right| = \left|\frac{Q\cdot e_n - PQ - P\cdot h_n + PQ}{Q\cdot h_n}\right|$$

$$= \left|\frac{Q(e_n - P) - P(h_n - Q)}{Q\cdot h_n}\right|$$

根据绝对值不等式，有：

$$\left|\frac{Q(e_n - P) - P(h_n - Q)}{Q\cdot h_n}\right| \le \frac{|Q|\cdot|e_n - P| - |P|\cdot|(h_n - Q)|}{|Q\cdot h_n|}$$

$$= \frac{1}{|h_n|}\cdot\frac{|Q|\cdot|e_n - P| - |P|\cdot|(h_n - Q)|}{|Q|}$$

带入$\frac{1}{|h_n|} < \frac{3}{2|Q|}$:

$$\frac{1}{|h_n|}\cdot\frac{|Q|\cdot|e_n - P| - |P|\cdot|(h_n - Q)|}{|Q|} < \frac{3}{2|Q|}\cdot\frac{|Q|\cdot|e_n - P| - |P|\cdot|(h_n - Q)|}{|Q|}$$

$$= \frac{3}{2|Q|}\cdot|e_n - P| + \frac{3|P|}{2|Q|^2}\cdot|(h_n - Q)|$$

将$|e_n - P| < \frac{|Q|}{3}\varepsilon$与$|h_n - Q| < \frac{|Q|^2}{3|P|}\varepsilon$带入：

$$\frac{3}{2|Q|}\cdot|e_n - P| + \frac{3|P|}{2|Q|^2}\cdot|(h_n - Q)| < \frac{3}{2|Q|}\cdot\frac{|Q|}{3}\varepsilon + \frac{3|P|}{2|Q|^2}\cdot\frac{|Q|^2}{3|P|}\varepsilon$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

即：

$$\left|\frac{e_n}{h_n} - \frac{P}{Q}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

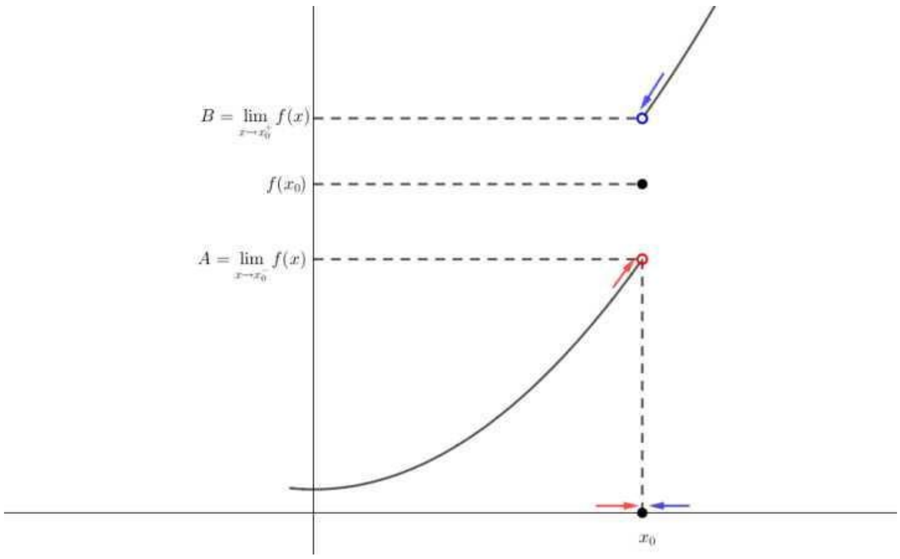
由此可证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{A}{B}\ \ (B \ne 0)$$

函数极限的独有性质

下面我们单独来学习函数极限的一些性质，注意要与上面的数列极限做一些区分，由上面的学习，我们知道函数极限的定义：即自变量靠近某点时，因变量相应的取值。但你是否考虑过一个 x 值上可能存在两个完全不同的极限值，你可能要回答：由于极限的唯一性，这是不可能的！当然，你的回答是正确的，但这种情况也确实存在，于是我们引入左右极限的概念，但是考虑到这个点的完整性，我们就只能说这个点的极限不存在。

函数极限的左右极限



以此极限为例，我们套用之前的$\delta-\varepsilon$定义就不难发现，整个领域被x_0点划分为了左右两个邻域，左领域的值最后表现为A，右领域的值最后表现为B，此时旧的定义确实不再满足实际情况，则需要做一些补充：

假设$f(x)$是定义在x_0区间附近的函数，若存在常数A：

使得一切满足$\delta > x - x_0 > 0$ 又或者 $0 < x_0 - x < \delta$的x，均有$|f(x) - A| < \varepsilon$,那么此时称A为$f(x)$趋于x_0时的**左极限**，记作：

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{或} f(x-) = A$$

读作：当x从左侧趋近x_0时，$f(x)$收敛于极限A。

同样的，我们可以仿照上面的给出右极限的定义：

假设$f(x)$是定义在x_0区间附近的函数，若存在常数B：

使得一切满足 $0 < x - x_0 < \delta$的x，均有$|f(x) - B| < \varepsilon$,那么此时称B为$f(x)$趋

于x_0时的右**极限**，记作：

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x+) = A$$

读作：当x从右侧趋近x_0时，$f(x)$收敛于极限A。

需要考虑左右极限的类型：

1、分段函数的分段点：

例如：

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax},\ x < 0 \\ b(1-x)^2,\ x \geq 0 \end{cases}$$

此函数就很明显是以 0 为分段点，在 0 处表现处两个完全不同的性质。

2、含有绝对值的函数：

与上面类似的，凡是绝对值的函数都可以转换为以 0 为分段点的函数：

$$|x| = \begin{cases} -x,\ x < 0 \\ x,\ x \geq 0 \end{cases}$$

3、涉及到无穷的函数：

大部分的取无穷的写法其实并不规范，正常情况下还是应该标明是正无穷还是负去穷，不过也不能排除想两边都取的想法，这些都可以归结为∞作为一个超实数所特有的性质，可以直接取数轴的两端，当然，我们取的时候还是要注意一些，毕竟有些函数两端就容易出现极大的差异性，如：

$$e^{\infty} = \begin{cases} e^{+\infty} \to +\infty \\ e^{-\infty} \to 0 \end{cases}$$

$$arc\tan \infty = \begin{cases} arc\tan +\infty \to \dfrac{\pi}{2} \\ arc\tan \infty \to -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

推论 1：

极限存在⇔左右极限存在且相等

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x-) = f(x+) = A$$

这个问题我们刚刚其实探讨过，因为极限要存在就要满足唯一性，所以左右极限不相等，那么在这个邻域内就很难存在一个常数A，所以定义上也说不过去。另外就是左右极限的取值范围，很明显的，$0 < x_0 - x < \delta$与$0 < x - x_0 < \delta$，都

能满足的情况下，就符合极限的取值范围：$0 < |x - x_0| < \delta$，所以这个命题是显然的。

推论 2：

连续⇔极限存在

我们可以观察连续的的两个定义：

1、设f是一个从实数集的子集 $I \subset R$ 射到 $J \subset R$ 的函数：$f: I \to J$。f在 I 中的某个点 c 处是连续的当且仅当以下的两个条件满足：

（1）. f在点 c 上有定义。

（2）. c 是 I 中的一个聚点，并且无论自变量x在 I 中以什么方式接近 c，$f(x)$的极限都存在且等于$f(c)$。

我们称函数到处连续或处处连续，或者简单的称为连续，如果它在其定义域中的任意一点处都连续。更一般地，当一个函数在定义域中的某个子集的每一点处都连续时，就说这个函数在这个子集上是连续的。

2、仍然考虑函数$f: I \to J$。假设 c 是f的定义域中的元素。函数f被称为是在 c 点连续当且仅当以下条件成立：

对于任意的正实数$\varepsilon > 0$，存在一个正实数$\delta > 0$使得对于任意定义域中的$x \in I$，只要x满足$c - \delta < x < c + \delta$，就有$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$成立。

连续性的“$\delta - \varepsilon$定义”由柯西首先给出。

更直观地，函数f是连续的当且仅当任意取一个 J 中的点$f(c)$的邻域Ω，都可以在其定义域 I 中选取点x的足够小的邻域，使得x的邻域在函数f上的映射下都会落在点$f(c)$的邻域Ω之内。

可以注意到两种表述方法其实都是基于极限的概念，也就是在任意一个足够小的邻域内，只要能保证这个点的左右极限相等，那么就能证明这个点是没有间断的，所以在这个范围内它就是连续的。

函数极限的运算法则

假设：$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \lim_{x \to x_0} g(x) = B$

a. 加减法则

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$$

b. 乘法法则

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$$

c. 数乘法则

$$\lim_{x\to x_0}c\cdot f(x)=c\cdot\lim_{x\to x_0}f(x)=c\cdot A$$

d. 除法法则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B}\ \ (\lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0,B\neq 0)$$

与之前数列极限的证明类似的，你也可以选择使用定义来证明，这里我并不打算依旧使用旧的方法来完成证明，所以具体的证明过程将在完成下面的章节后单独给出。

无穷小

还记得曾经极为经典的$\frac{1}{3}\cdot 3=1$吗？在高中数学课上老师告诉我们 $1-\frac{1}{3}\cdot 3=0.000\ldots01$ 这个经典的命题引发了第二次数学危机，但其实这就和爱因斯坦说 $1+1=6$ 一样，是为了方便引起读者阅读兴趣的宣传手法，但是其中所表述的无穷的概念却是实实在在的，也正是因为右这方面的思考，才有了整个微积分的框架，也就是说其实只有当你真正开始理解和思考无穷时，你的微积分才算正式入门。

通俗来讲，大家喜欢将极限为零的函数称作无穷小，但实际上还是要注意区分什么是真正的 0，什么是极限为 0，所以数学定义上给出补充：

函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义，如果存在常数A，对于任意给定的正数ε（无论它多么小），总存在正数δ，使得当x满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-0|<\varepsilon$，那么就说 0 是函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，称作$f(x)$是$x\to x_0$时或者$x\to\infty$时的无穷小。

注意到，极限其实强调的是一个趋近的过程，所以它可以允许无穷大和无穷小这样的超实数存在，而无穷大和无穷小与其说是一个数，倒不如更容易被理解

为一个在极小x取值内的变化趋势，而它们也是确确实实体现在了数轴之上。

给出一个比较有趣的定义：我们假定存在两个极限：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = B$$

令$B = A + a$，由于极限存在且由于极限的唯一性，则意味着在x_0的邻域内，$a = 0$，即：

$$\lim_{x \to x_0} a = 0$$

则称a是$x \to x_0$时的无穷小量，由于极限的运算法则$\lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} a = A + a$，则有：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + a。$$

（此方法是一个比较重要的方法，很多地方可能会使用到，此方法的主要思想在于无穷小在于运算时的与 0 相近的性质，又或者说是 0 本身就是一种特殊的无穷小。）

函数极限运算法则的证明

a. 加减法则

存在函数极限：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

我们使用刚才的方法，即：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + a$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = B \Leftrightarrow g(x) = B + b$$

则：

$$f(x) \pm g(x) = (A + B) + (a + b) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} [g(x) \pm f(x)\} = A + B$$

b. 乘法法则

存在函数极限：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

有：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + a$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = B \Leftrightarrow g(x) = B + b$$

则：

$$f(x) \cdot g(x) = A \cdot B + (a \cdot B + A \cdot b + a \cdot b) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = A \cdot B$$

c. 数乘法则

存在函数极限：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

有：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + a$$

则：

$$c \cdot f(x) = c \cdot A + c \cdot a \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = c \cdot A$$

d. 除法法则

存在函数极限：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

有：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + a$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = B \Leftrightarrow g(x) = B + b$$

则：

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A + a}{B + b} = \frac{A}{B + b} + \frac{a}{B + b} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \ \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0, B \neq 0\right)$$

无穷小的性质

（1）有限个无穷小的和依旧是无穷小。

这个其实极为容易证明，$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$，$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$，$\lim_{x \to x_0} h(x) = 0$，……，$\lim_{x \to x_0} z(x) = 0$ 根据极限运算的规律，只要是能数的清的，再多的无穷小相加也无非是：

$\lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) + \lim_{x \to x_0} h(x) + \dots + \lim_{x \to x_0} z(x) = 0 + 0 + 0 + \dots\dots + 0 = 0$。

（2）有界函数与无穷小的乘积依旧为无穷小。

回忆有界函数的定义，即有界函数都不会出现无限增长的情况，考虑两种两种情况：

首先是有界函数极限存在的情况下，那么就存在两个极限：$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$，$\lim_{x \to x_0} g(x) = c\big(\mathrm{c}\text{ 为常数}\big)$，它们的乘积为：

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = \mathrm{c} \cdot 0 = 0 \text{ 。}$$

最后是有界函数不存在的情况下，有界函数的定义中要求存在常数m与M，并且 $\mathrm{m} < g(x) < \mathrm{M}$，此时方称$g(x)$为在定义内的有界函数，也就是说只要是不论如何取值，$g(x)$都不会超出 m 与 M 这两个常数的限制，假定存在两个函数极限分别为：$\lim_{x \to x_0} s(x) = m$、$\lim_{x \to x_0} t(x) = M$，可仿照夹逼准则完成证明，即：

$$\lim_{x \to x_0} [s(x) \cdot f(x)] = \lim_{x \to x_0} s(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = m \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} [t(x) \cdot f(x)] = \lim_{x \to x_0} t(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = M \cdot 0 = 0$$

由于 $\mathrm{m} < g(x) < \mathrm{M}$，可由局部保序性推出$s(x) < g(x) < t(x)$。

$$\because f(x) \geq 0$$

$$\therefore s(x) \cdot f(x) \leq g(x) \cdot f(x) \leq t(x) \cdot f(x)$$

又：

$$\lim_{x \to x_0} [s(x) \cdot f(x)] = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} [t(x) \cdot f(x)] = 0$$

可证：

$$\lim_{x \to x_0} [g(x) \cdot f(x)] = 0$$

（3）有限个无穷小的乘积依旧是无穷小。

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^n = A^n\big(n\text{为常数}\big)$$

将$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ 的值带入即可完成证明，这里就不多费笔墨了。

无穷小的比阶：

我们常常听说等价无穷小的说法，与之对应的，等价无穷小还有高阶无穷小和低阶无穷小，就比如在物理这种不太需要精确运算的运算中我们常常会忽略高阶小量，用以保证式子的美观，这些行为当然都是基于各种阶的无穷小的性质来使用的，并不能说随便给出两个相差比较大的量，我们就说小的那个是大的那个的高阶无穷小量，一切还要遵循以下的规定：

设在自变量的同一变化过程中，$\lim \alpha(x) = 0$，$\lim \beta(x) = 0$。

1、倘若$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$，我们就称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的高阶无穷小，记作：

$$\alpha(x) = o\big(\beta(x)\big)$$

此时发现出现了$\frac{0}{0} = 0$ 的特殊情况，我们假定$\beta(x)$在该点的值为 0.00…01，那么就可以知道$\alpha(x)$在该点的值为 $0 \times 0.00\ldots1 = 0$，大家都知道极限是可望而不可及的，但是在同一个点上$\alpha(x)$明显比$\beta(x)$**更早**的到达了 0 点，而它到底领先了多少了，答案按照比值就说一个无穷小，就好像 0.00…01 大家都知道是无穷小，尽管你已经无限接近于它，但是只要你们俩在同一个点上，你就永远不能超越它，你永远是 0.000…1，而它永远是 0。

2、倘若$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$，我们便称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的低阶无穷小。

这就和刚才反过来了此时此刻$\beta(x)$变为了 0，$\alpha(x)$变为了 0.00…01，只要是面对同一个点$\alpha(x)$永远比$\beta(x)$慢，有和无的隔膜不能被轻易突破，其中夹杂的就是名为无限的障壁。

3、倘若$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c(c \neq 0)$，我们便称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的同阶无穷小。

我们令$\beta(x)$变为 0.00…01，则$\alpha(x)$变为$c \cdot 0.00\ldots01$，我们俩之间仅仅只是速度的问题，我们的性质是一样的，都可以是有，也可以是无，我们其实还是属于同一个世界，只是一个在另一个的前头。

4、倘若$\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = c(c \neq 0)$，我们便称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的 k 阶无穷小。

这是归属在同阶无穷小内的特殊情况，可以发现其实也就是$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c^k$，大家将此式子单独取出的目的是为了区别于等价无穷小，我们称$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ 的两

个极限互相为对方的等价无穷小，而$c^0 = 1$，所以不论是等价无穷小还是 k 阶无穷小，本质上其实都是同阶无穷小的一类情况。

5、倘若$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，我们便称呼这两个$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小，记作：

$$\alpha(x) \sim \beta(x)$$

常见的等价无穷小$(x \to 0)$包括：

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$$

$$a^x - 1 \sim \ln a \cdot x$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax$$

$$x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2 \sim 1 - \cos x$$

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3 \sim \arcsin x - x$$

$$x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3 \sim \tan x - x$$

拓展：

$$1 - \cos^a x \sim \frac{a}{2}x^2$$

$$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3 \sim \arcsin x - \arctan x$$

不常见的：

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \sim x$$

注意，以上的x都可以使用一定意义上的函数块替代，例如：

$$\log_a\left(1 + \frac{\sqrt{\tan x}}{2x^n}\right) \sim \frac{\frac{\sqrt{\tan x}}{2x^n}}{\ln a}$$

这里x就被$\frac{\sqrt{\tan x}}{2x^n}$所替代，但是等价的效果是一样的，所以在计算的时候还请灵活运用。

关于等价无穷小的一些问题解答：

（1）关于等价无穷小为什么可以相互替换和等价的无穷大是否可以替换。

先来解答第一个问题，为什么等价无穷小可以替换，我们取一个极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(x+1)}{x}$$

这个极限我们其实可以一眼看出来，就是等于 1，但是如果不运用等价无穷小，直接代换的话就是一个很经典的$\frac{0}{0}$了，当然，你可能想到使用洛必达法则，当然可以，但是求极限用导数的更多的意义在于降次幂，放到这里明显就有些大材小用了，我们依旧给出洛完的结果：

$$\lim_{x\to 0}\cos x\cdot(x+1)+\sin x=1\cdot 1+0=1$$

现在我们换一种做法，在其背后乘上一个 1：

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(x+1)}{x}\cdot 1$$

运用我们所知道的极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

则式子可以改为：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(x+1)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$$

由于极限的运算规则：

$$上式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(x+1)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}x+1=1$$

由这里，想必你就已经明白了所谓的等价的概念，我们拿一个简单的函数作为例子：

$$(x-a)^n与x^n$$

当$x\to a$时，存在极限：

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^n}{x^n}$$

这里你就能明显发现依旧是一个$\frac{0}{0}$型的式子，你可以使用洛必达求 n 次导，但那样如果你没有记过求 n 次导的公式的话会很难，所以你只能换一种方法。

我们可以令$t=(x-a)$，那么$x\to a$，其实也就意味着$t\to 0$，所以原式也就

转变为了:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^n}{(t+a)^n}$$

现在你便可以大胆的使用等价无穷小了，当然，这里未必用得到，我主要想告诉你的是，任何的等价，你都可以尝试转换为等价无穷小来计算，老师主要讲等价无穷小，其实你可以用的并不只有等价无穷小，等价无穷大也可以，等价有限数，其实也可以，拿$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^n}{x^n}$来说，你完全可以参考下面的过程，来证明它的等价，并且运用这个等价，而大家更喜欢称呼这个等价为一个技巧，称之为抓大头（对于$\frac{0}{0}$型，只看它的最高次幂，小的次幂可以忽略）：

对分母提公因式t^n：

$$(t+a)^n=\frac{(t+a)^n\cdot t^n}{t^n}$$
$$=t^n\cdot\left(\frac{t+a}{t}\right)^n$$
$$=t^n\cdot\left(1+\frac{a}{t}\right)^n$$

带入原式：

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^n}{(t+a)^n}=\lim_{t\to 0}\frac{t^n}{t^n\cdot\left(1+\frac{a}{t}\right)^n}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\left(1+\frac{a}{t}\right)^n}$$

$t\to 0$ 时，$\frac{a}{t}=0$，则：

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^n}{(t+a)^n}=\frac{1}{1}=1$$

则$t\to 0$ 时，$(t+a)^n\sim t^n$，相应的，$x\to a$时，$(x-a)^n\sim x^n$。

这里其实也给出了等价无穷大的概念，一般情况下，大家都会说 0 并不能做除数，但是极限就是为了应对这个一般情况而生的，众所周知：$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$，当然，你也可以说你并不知道，所以我给出一个很有趣的证明：

上面的式子完全可以看作是$\frac{1}{0}$，所以我们做一个转换：

0 的任意次方都等于 0，即：

$$0^x=0$$

任何数的 0 次方都是 1：

所以上式转化为：

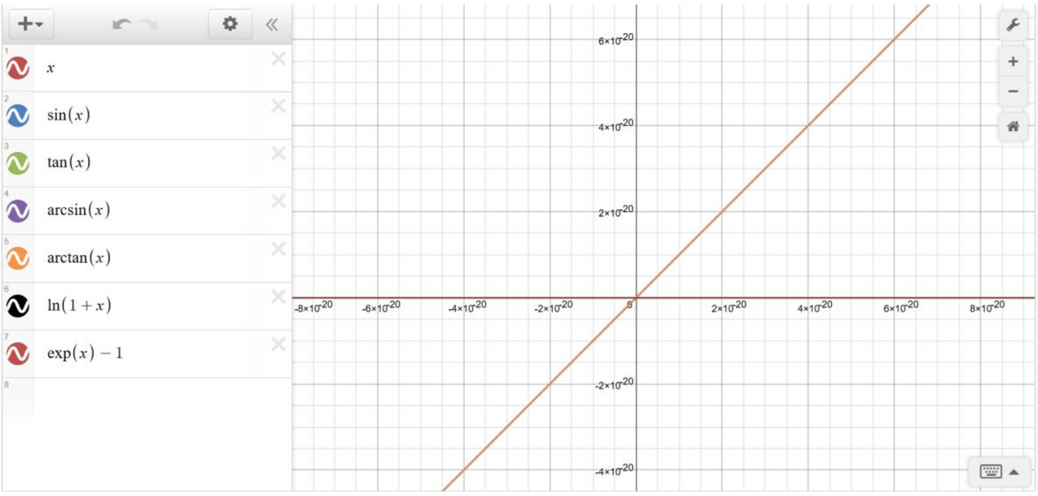
$$\frac{0^0}{0^x} = 0^{-x}$$

$0^x \cdot 0^{-x} = 1$ 明显是反常识的，0^{-x}结果明显只能是 0，（这里说明 0 的 0 次方明显是不一定为 1 的，故很多时候都认为它无意义，具体情况需要分类讨论），所以我们对它取对数：

$$\ln\frac{0^0}{0^x} = 0 \cdot \ln 0 - x \cdot \ln 0 = -x$$

所以此时要求$0^{-x} = 0 = e^{-x}$，由于$e^{-\infty} \to 0$，所以可以证明，只有$x \to \infty$时，$\frac{1}{x} = 0$ 才会成立，相反的，也只有：$x \to 0$ 时，$\frac{1}{x} = \infty$，所以无穷大和无穷小其实是倒数关系，故而等价无穷大也存在，可以通过转换倒代换转化为等价无穷小进行计算。

(2) 这些等价无穷小到底是如何证明的。

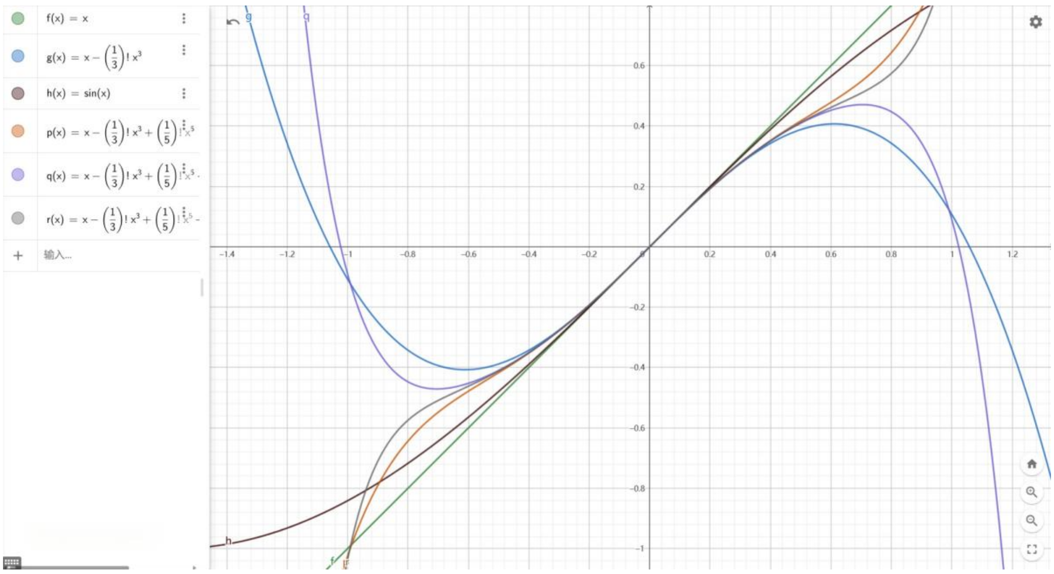


通过以上两张图我们可以发现，在 x → 0 时，这些等价无穷小哪怕在极其微小的间距内都很难用观察来看出不同，所以我们采用泰勒展开来看看他们到底有什么相似之处：

所谓泰勒展开，我们之后会给出完全体的概念，这里先做一个简要描述：

泰勒公式是将一个在原本的函数通过多项式的多次逼近来进行还原的方法，拿$\sin x$来说，它的展开公式为：

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^{2m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + o(x^{2m-1})$$



如图所示，随着矫正项的不断增加，函数也变得不断贴合$\sin x$，下面给出常见的几个等价无穷小的麦克劳林公式（$x \to 0$ 时的泰勒展开）：

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$$
$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$
$$ln\,(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$
$$e^x - 1 = x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$$

结果相当的明显，所有与x等价的函数，在展开的第一项都是x，也就是说在$x \to 0$时，他们的误差将会极小，侧面印证了他们相互替换的合理性。

需要提出来的是，等价无穷小只能应用于乘除法，而在加减法时，需要再三斟酌，原因是明显的，$x - sin\,x$是与$\frac{1}{6}x^3$等价，而非 0。

再补充$\cos x$与$(1+x)^a$的麦克劳林公式：

$$\cos x = 1 - x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$$
$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

这里也就不难证明为什么$(1+x)^a - 1 \sim ax$与$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$了。

无穷之间的运算法则

设：m、n 为正整数（计算无穷大时取负），则有：

1、加减法运算

无穷小的加减法运算中，低价无穷小会吸收高阶无穷小（依旧是抓大头的逻辑）：

$$o(x^m) \pm o(x^n) = o\left(x^l\right), l = \min\{m, n\}$$

无穷大的加减法运算中，高阶无穷大会吸收低阶无穷大，即：

$$o(x^{-m}) \pm o(x^{-n}) = o\left(x^{-l}\right), l = \max\{m, n\}$$

当然，你会发现如果直接把括号里的 m，n 改为-m，-n 也是一样的意思，那也是没有问题的，这里主要是为了方便观察变化，提醒你抓大头。

2、乘法运算

无穷小的乘法运算中，无穷小之间的阶数将会累加（无穷大也亦然）：

$$o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}),$$

3、常数运算

在常数与无穷之间的运算中，常数对于无穷的影响有限，并不会影响到无穷的阶数。

$$o(x^m) = o(kx^m) = k \cdot o(x^m)$$

这里的逻辑不难理解，因为无穷本身是一个趋势，你可以直接看作变化率，所以对整体求导：x^m的导数为 $\mathrm{m} \cdot \mathrm{x}^{\mathrm{m}-1}$，常数 k 的导数为 0，所以最后的整体变化率为：$\mathrm{m} \cdot \mathrm{x}^{\mathrm{m}-1} \cdot \mathrm{k}$，则意味着 x 冲向无穷的速率依旧是$x^m$作为主体，只是在此基础上乘上了有限倍，但是这里的有限倍在乘方的运算中也就无足轻重了。

（补充）无穷大的定义与性质

一如我们上面所提到的说法：无穷大与无穷小本身就是倒数的关系，所以了解了无穷小也就了解了无穷大，仿照无穷小给出无穷大的定义如下：

函数$\mathrm{f}(\mathrm{x})$在点x_0的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数ω（无论它多么大），总存在正数δ，使得当 x 满足不等式 $0 < |\mathrm{x} - \mathrm{x}_0| < \delta$ 时，对应的函数值 $\mathrm{f}(\mathrm{x})$都满足不等式$|\mathrm{f}(\mathrm{x}) - 0| < \omega$，那么就说$\infty$是函数 $\mathrm{f}(\mathrm{x})$当 $\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0$时的极限，记作$\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \infty$，称作$\mathrm{f}(\mathrm{x})$是 $\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0$时或者 $\mathrm{x} \to \infty$时的无穷大。

那么无穷大也会具备同样的性质：

（1）有限个无穷大的和仍然是无穷大，差则未必。

以特例$(\infty + 1)$与∞来说，其相加结果为 $2 \cdot \infty + 1$；但相减结果为 1，所以无穷大间的相减结果是未定，需要具体判断。

（2）有界函数与无穷大的乘积仍然为无穷大（无穷大除以任何有界函数均保持无限大，有界函数除以无穷大本质上是有界函数与无穷小的乘积，结果为无穷小）。

（3）有限个无穷大的乘积还是无限大，除则未必。

同样的特例$(\infty + 1)$与∞，其相乘结果为$\infty^2 + \infty$，但相除结果为 1，所以无穷大之间从除法的结果也是未定，需要依照不同结果而定。

最后再整理一下，无穷之间的运算结果（这里的无穷大统一指正无穷大，负无穷大标记为$-$无穷大）：

$$无穷大+无穷大=无穷大；无穷小+无穷小=无穷小$$

$$无穷小-无穷小=无穷小；无穷大-无穷大=不定式$$

$$无穷小\times无穷小=无穷小；无穷大\times无穷大=无穷大（一般是）$$

$$\frac{无穷小}{无穷小}=不定式；\frac{无穷大}{无穷大}=不定式$$

$$常数\cdot无穷小=无穷小；常数\cdot无穷大=无穷大$$

$$无穷大\cdot无穷小=不定式$$

以上的所有不定式均需要具体情况具体分析，下面给出七个常见的不定式型：

$$\frac{0}{0}，\frac{\infty}{\infty}，0\cdot\infty，\infty-\infty，\infty^0，0^0，1^\infty$$

前四个我们是提及了的，着重讲后面的，∞^0可以转化为$\ln e^{\infty\cdot 0}$，再转化可以为$\ln e^{\frac{0}{0}}$，0^0可以转化为$\ln e^{0\cdot 0}$，再转化可以为$\ln e^{\frac{0}{\infty}}$，现在你也就不难理解这它们之间的关系了，它们本质上都是阶数之间的对抗导致的不定，当然上面全部都是，只是有些表现的直接，有些表现的隐晦一些了。

1^∞ 作为一个一个未定式的主要原因在于此时的 1，并不是一个真正的 1，它的意思是在极限运算中，一个趋近于 1 的数的无穷次幂，但是我们都知道 0 和无穷小的 0 是差距的，二者相差一个 0.00…1，也就是说实数 1 和极限为 1 其实也是不同的；所以在普通运算中，一个完整的 1 它的无穷次方就会是 1，但是在极限为 1 的不完整的 1 中，有限的运算它相差的就是有限个 0.00…1，而在无穷的运算里无穷个无穷小相乘，也就变成了0^∞，这个结果就很明显，它是一个未定式。

（补充）函数连续情况下的间断点的区分：

前面在左右极限的概念里，我们捎带一起学习了连续的定义，并且作了一些解释，但并未讲完，所以这里还是重新补充一下：

我们对于函数是否连续的定义为：

连续⇔左右极限存在且相等

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x-) = f(x+) = A$$

依照以上定义，我们就可以把极限分类为左右两侧极限都存在但是不相等的一类间断点和左右极限至少有一个不存在的二类间断点。

（当然，一般情况下除去一类间断点的间断我们都称作二类间断点。）

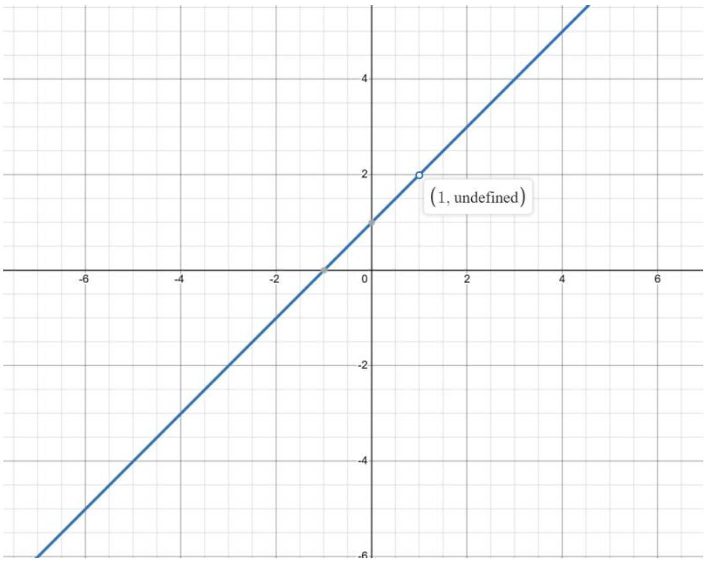
一类间断点：

一类间断点也称有限间断点，类型包括可去间断点与跳跃间断点。

可去间断点：

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) \neq A$$

意为，左右极限存在且相等，但不等于函数值，也就是函数在这个点上无定义，但因为间断点并不影响整体计算，一般意义上讲的间断也并不指它，所以称之为可去，如下图：

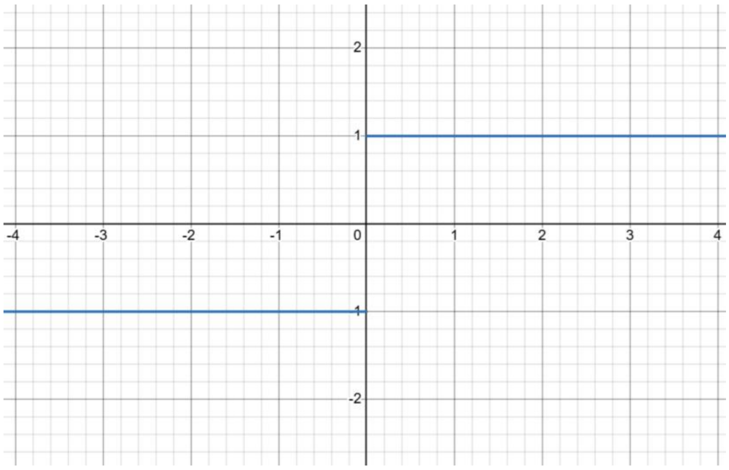


函数$y = \frac{(x^2-1)}{x-1}$在$x = 1$ 处便不存在定义。

跳跃间断点：

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-} f(x)$$

这个间断点就很纯粹了，由于该间断点的特性，就像是函数突然跳了一下，所以得名跳跃间断点，跳跃间断点所产生的原因只有一个，即左右两侧极限都存在但不相等。



如函数$y=\frac{|x|}{x}$在 x = 0 处左侧极限为-1，右侧极限为 1，此时在 x = 0 处展现的就是跳跃间断点。

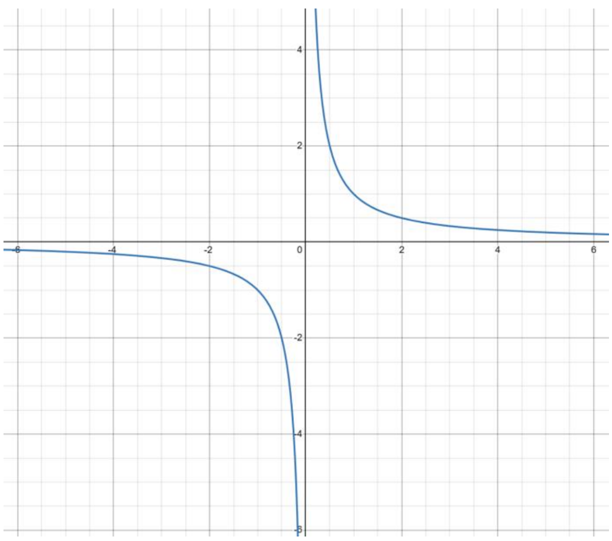
二类间断点：

与一类间断点相对应的，二类间断点主要包括极限出现无穷的无穷间断点和极限不存在的振荡间断点。

无穷间断点：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty 或 \lim_{x\to x_0+} f(x)=\infty 或 \lim_{x\to x_0-} f(x)=\infty$$

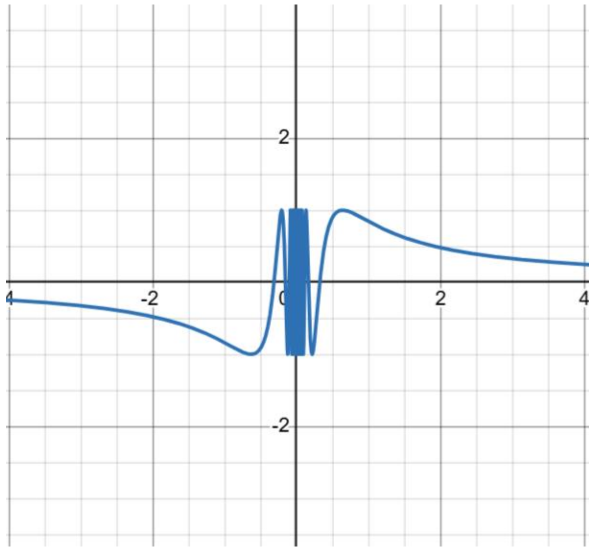
即存在至少一侧极限为∞的间断点，如下图：



对于函数$y=\frac{1}{x}$而言，$x=0$ 即为该函数的无穷间断点。

振荡间断点：

该点无定义，或者说再自变量趋近那个点的地方，左右两个极限出现变动多次，此时我们说左右极限均不存在。



$y = sin\frac{1}{x}$时，当 $\mathrm{x} \to 0$，y在$(-1，1)$之间存在变动无限多次，此时我们说 $\mathrm{x}=0$ 为该函数的振荡间断点。

拓展：无穷与有限，实无穷与潜无穷

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

不论你是否怀疑过这个极限，你都应该熟悉这个极限，它是两个重要极限之一，另一个是$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$；这两个重要极限一个解释了无穷极限与有限之间的联系，另一个则表明了无穷与无穷之间的关联，所以无论你是否真正理解了这些，你都要记住它（考试会考的，不记不给分）。

我记得我在最开始的学习时就有一个很大的疑问：这个极限明显就是一个 1 的无穷多次，怎么还会趋向于 2 点几，还是一个常值，那时候的我就是典型的没有想明白极限为 1 和取值为 1 的区别。

回到我们之前讲的1^∞的问题，那么很容易就发现，这其实就是一个极为典型的1^∞，当时我们说这是由于无穷多个无穷小相加导致的，所以我们可以尝试将这个函数中的正整数取出，化为数列：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

通过二项式展开：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \dots + C_n^n\frac{1}{n^n}$$

$$\text{上式} = 1 + \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + 1 \cdot \frac{1}{n^n}$$

此时我们就已经足够观察出这个极限它必然会接近某一个数，而且不会超过 3，不过根据单调有界数列才会必有极限的原则，我们还需要分别证明它有界和单调：

先证明单调：

取 $n+1$ 时的结果：

此时可以发现其任意一项都会大于之前的项（1 除外）：

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2!} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{2!} \cdot \frac{1}{n+1} > \frac{n-1}{2!} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2}$$

再看最后一项：

$$\frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)^n} = \frac{1}{(n+1)^{n-1}} > \frac{1}{n^n}$$

由此可证，该数列单调递增。

再证明有界：

注意到有：$\frac{n \cdot (n-1)}{2!}$，我们可以将其放大为$\frac{n^2}{2!}$，此时第三项就被改为了$\frac{n^2}{2!} \cdot \frac{1}{n^2}$，以此类推，则可将原式放大为:

$$1 + 1 + \frac{n^2}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n^3}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

由于时找上界，而不是上确界，所以我们完全可以想放多大放到多大，目前虽然消去了乘方的部分，但是阶乘的部分计算起来还是没有那么容易，所以我们索性直接将阶乘全部去掉$\left(\frac{1}{n!} < \frac{1}{n}\right)$，即：

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

很明显，这个式子永远不可能大于 3，所以对应的$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$也不会大于 3，此时此刻根据单调有界数列必定收敛的原则，我们判定它有极限，通过计算机的计算可以得出它趋近于一个无限不循环小数，我们为了方便记录他，也就称呼它为自然对数 e。

n	(1 + 1/n)^n
1	2
2	2.25
3	2.37
5	2.488
10	2.5937
100	2.7048
1,000	2.7169
10,000	2.71814
100,000	2.718268
1,000,000	2.7182804
...	

可能到现在为止，你依旧接受并且理解了这个问题，但还是让我回忆一下，我一直所强调的，我在无穷小和无穷大的定义中，都反复强调了，无穷，他是一种趋势，那么为什么明明是趋势，却可以参与运算并且可以得到一个常数呢？这就牵扯到了一个概念，即无穷的哲学属性——实无穷与潜无穷。

一般的微积分运算中潜无穷的定义被大家所广泛承认，因为大家在处理无穷的时候都是承认了它其实是一种向前的无限延生，这是一种直观的感受。当年，亚里士多德在定义无穷的时候就采用了一个定义，不过，要说明的是，按照现在的定义，亚里士多德说的应该是无限，并不完全代表无穷。

站在潜无穷的逻辑推论下，再怎么多个向内无穷坍缩的点都不会呈现出一个整体的性质，因为这是违反其无限延申的本质的，但是在日常生活中，这个逻辑明显站不住脚。

还是经典的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，站在惠子的角度上，那明显的，这块木头我爱怎么取怎么取，只要我有能力，我就永远取不完它，由此，我们便能看出实无穷的意思，即无穷小也好，无穷大也好，它们本身都可以作为运算的结果，也就是数轴上一个完整存在的点。

实无穷的推演也似乎很有道理，但是问题是，它既然是一个和其他数都一样的点，那么为什么必须要使用极限的运算方式来规避掉它，这明显就不符合一个数域的运算封闭特征。

潜实之争，自古皆有，像很多伟大的数学家其实是反对实无穷的定义的，因为在它们看来，实无穷的定义是严重违反数学逻辑的，数学逻辑要求事物具备完整的推断性，可供推理和证明。一旦要求实无穷存在，那么就需要将他纳入某个

集合，自然的就出现了一种狂论，即极限是可以达到的，只是因为某种条件困扰，但这种条件明显是不存在的。

最后我们其实不难发现，最初的 $0.99...9=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$ 的问题其实还是没有解决，极限的存在只是用潜无穷的定义将其搁置了，每个数学数之间仍然具备无穷的差距。

但思考中，我们不能有悬而未决的事情，所以我也只能强行解释：按照我们熟悉的说法，每段时间中均有无数的的时刻，这并不是说每个时刻无关，相反的每个时刻都在连续的大前提之下，所以看似每个无穷是独立的，但是按照考虑连续，也就是左右极限的概念情况下，他就可以被观察，被探知，这也是符合量子物理的薛定谔的猫的假设的。原因就在于数学也好，一切也好，凡是考虑到逻辑的有始有终性质，就需要考虑参照点，以常数的角度来看，无穷大、无穷小都是超越实际的情况，但是站在无穷的角度上来看，每一个无穷才是真正稀松平常的，0.00...1 旁边是另一个 0.00......1，就好像我在学习广义相对论时所遇到的平坦时空，当所有的时空都是平坦时空的时候，你便感受不到它的存在，因为它的值为 1，而遇到引力影响的时候，它便凸显出来，作为分母。我们感觉到无穷的定义奇特是因为我们一直能够观测到的是由于叠加、计算产生的常值，而相较之下更加难以比较的无穷也就被隐藏。

所以在我的认识里，潜无穷代表了无穷运动的性质，实无穷则代表了无穷静止的性质，不过没有绝对静止的无穷，所以偶尔相对静止的无穷性质也会在代表运动的运算中显露出来。

计算极限时常用的方法

1.洛必达法则

相较于其他的法则的通用性，我们在使用洛必达的时候就一定要想明白使用洛必达的前提，只有在$\frac{0}{0}$又或者$\frac{\infty}{\infty}$的情况下可以使用洛必达，这个原因其实也是显然的，无穷是一种趋势，所以再无穷的比阶里往往就是比谁趋向的快，而导数的定义就很明确，是对事物变化速率的描述，那么在这个基础上，我们的的确确可以随意的将无穷间的对比改变为它们在该点的导数的对比，由此：得到洛必达

法则的完整表述如下：

第一步：

当$x \to a$（或$x \to \infty$）时，函数$f(x)$与$F(x)$均趋于 0 或者∞；

第二步：

$f'(x)$及$F'(x)$在点a的某去心邻域内（或当$|x| > X$，此时X为充分大的正数）存在，且$F'(x) \neq 0$；

第三步：

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}\left(或 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}\right)$存在或为无限大，则：

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}\left(或 \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}\right)$$

也许你注意到了，倘若我求完之后的导数依旧是$\frac{0}{0}$或者$\frac{\infty}{\infty}$，那应该怎么办，答案更简单了，接着洛就好了，原因在于可能部分无穷间的比阶在一阶变化率的计算下并不能完成，所以需要二阶乃至多阶，直到算出真正结果为止（实在算不出来咱就换个方法，别死磕，和自己过不去）。

因此其实上面的式子符合条件的话可以继续拓展：

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{F''(x)}\left(或 \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f''(x)}{F''(x)}\right)$$

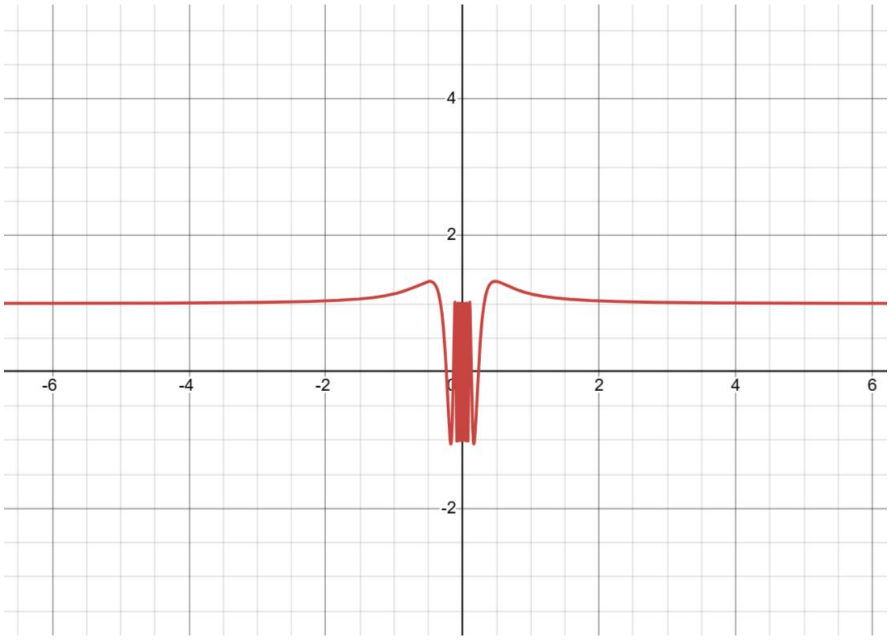
那么如果我计算导数的极限后发现极限不存在也不为∞呢，我能不能说原来极限就不存在？答案是不行的，原因在于你的确可以把无穷间的比阶认为是趋向速度的对比，但是二者的趋向速度不能相互比较不足以作为原极限不存在的证明。还记得极限存在的定义吗，必须是左右极限不存在或者不相等才能够推出，而可能拥有同一个变化趋势的函数会有很多，你并不可以以偏概全，如极限：

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$$

但要是对它继续求导，式子则变为了：

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0}\left(2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$$

函数图像如下，此时极限显然不存在。



洛必达法则的证明

大部分对于洛必达法则的证明都是基于柯西中值定理，即：

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

而柯西中值定理也不难理解，类似于我们最开始了解到的$y=kx$的斜率k的定义，也就是函数某点的导数其实就是该点的切线斜率。

说回洛必达法则，基于此式子下可以得出证明过程：

于区间$(c，x)$上使用柯西中值定理$(c\to x)$，于是有：

$$\exists\xi\in(c，x)，\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}$$

由于$c\to x$，则$\xi\to x$，取极限：

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}$$

令$f(c)=g(c)$，则：

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

这样的证明方式好处是很方便，但是坏处是柯西中值定理我们还没有学，所以我们换一种最朴素的证明。

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$x \to a$时：

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}[g(x+\Delta x)-g(x)]}$$

简化一下式子：

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)-f(a)]}{[g(x+\Delta x)-g(a)]}$$

令$f(a)=g(a)=0$，则：

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}$$

由于$\Delta x \to 0$，则$x+\Delta x$仍然处于x的邻域内，则可表示为：

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

而要求里的$g(a)=f(a)=0$ 与$x \to a$，均表示$g(x)\to 0$，$f(x)\to 0$。而在化为倒数的情况下$\frac{1}{g(x)}\to\infty$，$\frac{1}{f(x)}\to\infty$，又由于$f(x)$与$g(x)$的任意性，则表明在$f(x)\to\infty$，$g(x)\to\infty$时同样适用。

冷知识：洛必达法则的发现者是约翰·伯努利。

事实上，洛必达并不是什么大数学家。洛必达法则也不是他搞出来的，而是他花钱买来的。洛必达是一个贵族，业余时间喜欢搞一些数学，几乎到了上瘾的地步。甚至不惜花重金请当时的大数学家贝努利兄弟给他做长期辅导。可惜他的才气远远不如他的财气。虽然十分用功，但他在数学上仍然没有什么建树。贝努利兄弟当时正与莱布尼茨这样的大数学家交流合作，又正赶上微积分的初创时期，所以总有最新成果教给洛必达。这些最新成果严重地打击了他的自信心。一些他自己感到很得意，废寝忘食搞出来的结果，与贝努利兄弟教给他的最新结果比起来只能算是一些简单练习题，没有丝毫创意。另一方面，这些新结果又更激起了他对数学的着迷。他继续请贝努利兄弟辅导。甚至当他们离开巴黎回到瑞士以后，他还继续通过通信方式请他们辅导。如此持续了一段时间，他的"练习题"中仍没有什么可以发表扬名的东西。他内心深处越来越丧气，却又不甘心。心想，我对数学如此热心，一定要想办法在数学上留下一点东西让人记住我的名字。

终于有一天，他给贝努利兄弟之一的约翰写了一封信，信中说："很清楚，

我们互相都有对方所需要的东西。我能在财力上帮助你，你能在才智上帮助我。因此我提议我们做如下交易：我今年给你三百个里弗尔(注：一里弗尔相当于一磅银子)。并且外加两百个里弗尔作为以前你给我寄的资料的报答。这个数量以后还会增加。作为回报，我要求你从现在起定期抽出时间来研究一些固定问题，并把一切新发现告诉我。并且，这些结果不能告诉任何别的人，更不能寄给别人或发表.约翰收到这封信开始感到很吃惊，但这三百里弗尔确实很吸引人。他当时刚结婚，正是需要用钱的时候，而且帮助洛必达，还可以增加打入上流社会的机会。

约翰以为洛必达最多不过就是拿这些结果到他的朋友那里去炫耀一下，也没什么大不了的。心里算盘打下来，觉得这笔交易还是比较划算的。于是，他定期给洛必达寄去一些研究结果，洛必达都细心地研究它们，并把它们整理起来。一年后，洛必达出了一本书，题目叫《无穷小量分析》(就是现在的微积分)。其中除了他的“练习题”外，大多数重要结果都是从约翰寄来的那些资料中整理出来的。并且他还用了一些莱布尼兹的结果。他很聪明地在前言中写到：我书中的许多结果都得益于约翰·贝努利和莱布尼兹，如果他们要来认领这本书里的任何一个结果，我都悉听尊便。贝努利拿了人家的钱当然不好意思再出来认领这些定理。这书中就包括了学生们最喜爱的定理洛必达法则。贝努利眼睁睁看着自己的结果被别人冒用，而自己因与人有约在先而无法向世人自己的成就。

结果就是洛必达花钱买了个青史留名，这比后来的人花钱到克莱敦大学买个学位划算多了。当然贝努利不愿就此罢了。洛必达死后他就把那封信拿了出来，企图重认那越来越重要的洛必达法则。现在大多数人都承认这个定理是他先证明的了。可是人们心中先入为主的定理名字恐再也变不回来了。

现在百度上对于洛必达的介绍是这样的：洛必达(Marquis de l'Hôpital,1661-1704)法国数学家.1661 年出生于法国的贵族家庭,1704 年 2 月 2 日卒于巴黎.他最重要的著作是《阐明曲线的无穷小于分析》(1696)，这本书是世界上第一本系统的微积分学教科书。但其实他的那本微积分课本是他买来的。

提醒：由于无穷大与无穷小之间的倒数关系，其实可以通过它们间的相互转化来改变一些未定式的形式，如 $0\cdot\infty$的形式，就可以转化为$\frac{0}{0}$的形式，就可以尝

试进行洛必达，当然具体情况下还要具体讨论，做题的方式也不止一种，要发挥自己的聪明才智哦。

2. 泰勒展开

常见的几个泰勒展开公式我们之前也是提到了的，今天主要还是提一下完整情况下的泰勒公式。

1712 年，英国数学家布鲁克·泰勒在他的一封信里首次叙述了泰勒公式，但并不严谨，所以真正的泰勒公式需要等到 1797 年拉格朗日来提出，这也就是很多情况下，泰勒展开最后都会有一种余项被称之为拉格朗日余项的原因。

下面我们给出$f(x)$于x_0处带有拉格朗日余项的泰勒展开公式，并对其进行解释：

$$f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中：$R_n(x)$=$f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$为拉格朗日余项。

这么说你肯定是不能理解这个公式的，所以我们引入一个我们熟知的公式：

$$v=v_0+at$$

这个公式就很明确了。速度等于初速度加上加速度和时间的乘积。我们都知道a就是v的导数，而由于该公式是匀变速运动的展开公式，所以a也就是一个常数，之后的导数也就是 0，这个公式也就不用继续展开。

对比着看，v中存在着一个初速度v_0，意为自它开始，那么$f(x_0)$的意思也很明显就是从$f(x_0)$开始变动，导数的定义我们继续将它请出来：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

那么$f'(x_0)$也就不难理解，即为x在x_0处的切线斜率，那么而后面的$(x-x_0)$的意思就更加明确，就是Δx，所以一来一回，式子的真正含义就是 $\mathrm{y}=\mathrm{y}_0+\Delta y$，当然只有一阶的还原显然是不完全的，大家都知道，导数就是一条该点上的切线，如果只是采用一阶导数乘一次函数的方法，那么得到的函数显然会是一条直线，这不符合现实。

那么就没有一个新的办法吗？答案是有的，我们可以拿之前的一阶校正后的值$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$重新作为一个起点，然后再进行一次线性拟合，就得到

泰勒公式的二阶项，那么在计算时，就需要求导，得：

$$[f(x_0)+f'(x_0)x-f'(x_0)x_0]'=f'(x_0)+f''(x_0)x-f''(x_0)x_0-f'(x_0)$$

整理得：

$$[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]'=f''(x_0)(x-x_0)$$

然后乘以$\Delta x=x-x_0$，式子变为：

$$f''(x_0)(x-x_0)^2$$

但是你就会发现：欸？怎么和上面写的不一样，原因主要是由下面引起的：

$$f''(x_0)=\frac{d^2y}{dx^2}$$

这个式子乍一看也没什么，你也认为$(x-x_0)^2$不就是dx^2，那么这个式子得到的不就是Δ^2y 嘛。

但这样就大错特错了，你首先应该明确的是$dx\cdot dx$的结果是$(dx)^2$，而根本不是dx^2，不信你完全可以拿导数来试试：

$$\mathrm{x}'\cdot\mathrm{x}'=1\cdot1=1$$

$$(x^2)'=2x$$

所以上面的式子：

$$f''(x_0)(x-x_0)^2$$

的含义根本不是d^2y，而是$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx\cdot dx$，那么想要保证$d^2y$可以完整的出现正确的式子就应该是$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx^2$。

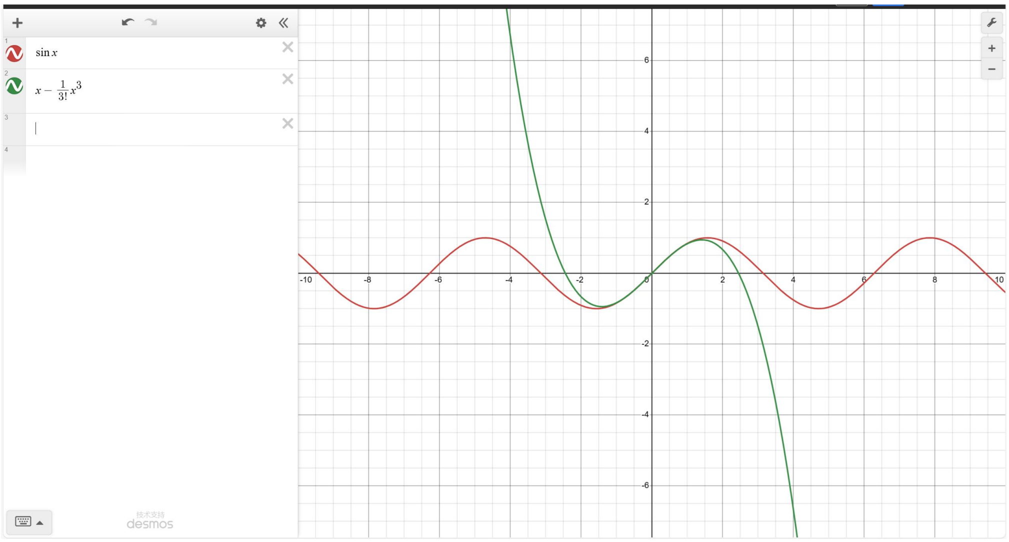
我们知道$(x-x_0)^2$如果认为x_0是一个常值就是x^2的函数，所以直接求导就可以：

$$[(x-x_0)^2]'=2(x-x_0)$$

那么回到我们最开始得到的式子：

$$[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]'=f''(x_0)(x-x_0)$$

此时，这个式子的意义为求出拟合函数的变化趋势等于是x_0点处的二阶导数乘上我的变化区间，也就是说如果我不修正，我的拟合函数在一次变化完成之后仍然和真正的该点位的变化存在差距，而且随着离这个点的距离越远，误差就会表现的越大，我们拿$\sin x$作为一个例子，观察后发现确实是如此。



所以必须要针对二阶乃至更高阶的变化率继续修正，也就是将等式右边的式子彻底转变为对应的$f^{(n)}(x_0)$。

让我们先从二阶导开始，再完成一阶修正之后，y也被拟合为了$y_0+\Delta y$，但刚刚证明接下去的方向不对，所以需要进行再修正：也即使得$y\approx y_0+\Delta y+\Delta\Delta y$，而$\Delta\Delta y$必须是沿用之前的思路在$y_0+\Delta y$的方向上继续修正。好在我们刚才理解了$f''(x_0)$的含义，可以根据它来接着完成拟合：

$$\Delta\Delta y=f''(x_0)\cdot\Delta x^2$$

将$dx^2=[(x-x_0)^2]'=2(x-x_0)$带入：

$$\frac{\Delta\Delta y}{2(x-x_0)}=f''(x_0)$$

需要注意，此时的$f''(x_0)$是真正的$f(x_0)$的二阶变化率，而不是拟合函数的。同时给出拟合函数的二阶变化率：

$$[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]'=f''(x_0)(x-x_0)$$

化简这个式子：

$$[y_0+\Delta y]'=f''(x_0)(x-x_0)$$
$$\frac{[y_0+\Delta y]'}{(x-x_0)}\approx f''(x_0)$$

将$\frac{\Delta\Delta y}{2(x-x_0)}=f''(x_0)$带入：

$$\frac{\Delta\Delta y}{2(x-x_0)}=f''(x_0)\approx\frac{[y_0+\Delta y]'}{(x-x_0)}$$

计算得：

$$\Delta\Delta y=\frac{[y_0+\Delta y]'}{(x-x_0)}\cdot 2(x-x_0)$$
$$=2[y_0+\Delta y]'=2f''(x_0)(x-x_0)$$

当你这样计算之后发现，欸？为什么计算的又和泰勒写的不一样，这是因为此时此刻这个等式两侧的$f''(x_0)$根本不是同一个$f''(x_0)$，$\frac{\Delta\Delta y}{2(x-x_0)}$是$f(x)$在$f(x_0)$处的二阶导数，也就是真正的二阶导数，而右侧是拟合之后的二阶导数，它们本质上其实不是一个东西，也许你细心的发现了我给所有的$f''(x_0) \approx \frac{[y_0+\Delta y]'}{(x-x_0)}$用的都是约等于，而$[y_0+\Delta y]' = f''(x_0)(x-x_0)$用的都是等于，这也是由于泰勒是默认多项式的形式的，而我为了表现的更加直观，能够解释$f^{(n)}(x_0)$与$(x-x_0)^n$以及$n!$之间的关系，并没有打算直接套用多项式 $\mathrm{p}(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$的定义。所以请你理解，这样子的表现其实也是为了表现$f''(x_0)$的两重性，它既是$f(x)$直接作为整体变化时候的二阶导数，其实也是从$f(x_0)$从起始点逐步开始变化后的一个提供方向的因素。

所以正确的做法其实就是通过理解$\Delta\Delta y$与$f''(x_0)$之间的关系，然后修改右侧拟合曲线的式子，使得$\frac{\Delta\Delta y}{2(x-x_0)}$与$\frac{[y_0+\Delta y]'}{(x-x_0)}$愈发相近，而不是直接作出替换。

将拟合曲线的$f''(x_0)$的分母进行修改：

$$f''_{右}(x_0) \approx \frac{[y_0+\Delta y]'}{2(x-x_0)} = \frac{f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)}$$

此时整个式子就从$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{\Delta\Delta y}{\Delta x}$转变为了$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{\Delta\Delta y}{\Delta x^2}$。

那么只需要最后再乘上上所变化的长度即可，Δx^2相对应的变化长度便是$(x-x_0)^2$，这是由于它们本身就是微分与积分的关系，所以完整式子如下：

$$\Delta\Delta y = \frac{f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)} \cdot (x-x_0)^2 = \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}$$

运用同样的方法，我们可以计算出$\Delta\Delta\Delta y$乃至$\Delta\Delta\Delta\ldots\Delta\Delta y$，然后不难发现每一项其实都遵循:

$$\Delta^n y = \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

至于你问我刚才为什么直接就可以用Δx^2与x^2（广义上的x）相乘，那我只能说因为我默认你还没有学过积分，所以不能使用积分运算，于是我只能将Δx^2、x^2当作线性运算，就是类似$v = v_0 + at$的运算，而我们一直的逻辑都是将Δx^2看作一条直线，而x^2看作一个代表开头和结尾的数值，也许这样的方式并不严谨，但是根本逻辑就是如此的，所以这一章节与其说是证明倒不如说是原理剖析，而正

式的证明可以等到微积分彻底学习完成后，有了充足的工具后再行证明。

当然，你还注意到这样无穷尽的Δy补偿，并不适合计算机的处理和人的计算，但其实你并不需要完全的贴合曲线，当精度达到你想要的部分后，你完全可以使用我们之前学过的无穷小量来代表接下去的运算，尤其是在极限对比中，我们经常使用抓大头的方法，所以后面的无穷小量是无足轻重的。