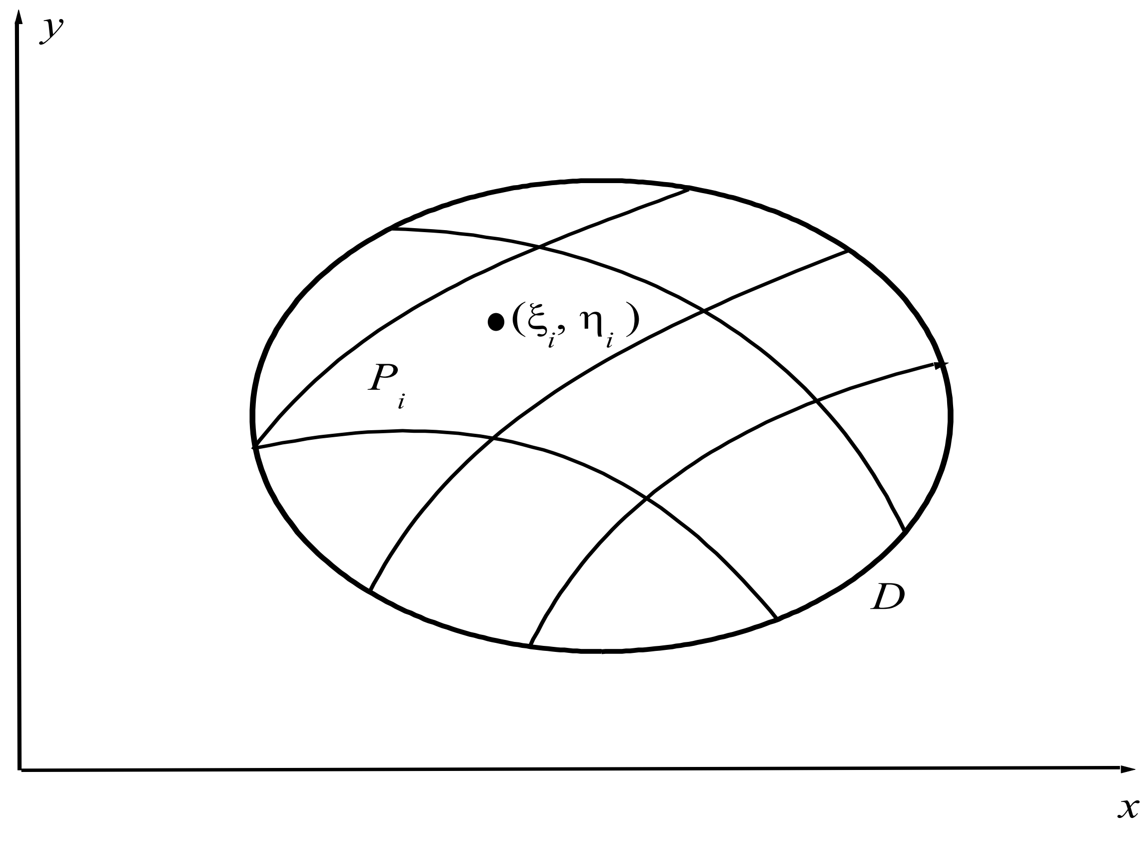
Здравствуйте!

Лекция №3

Двойные интегралы

Пусть на плоскости *XOY* заданы (см. рис.):

1. Некоторая область *D*;
2. Фукция двух переменных $f(x, y)$ определенная, _______________, в области *D*.



1. Разобьем область D на кусочки кривыми, имеющими площадь 0. С каждым кусочком свяжем следующие величины:

а) ____________ P_i i-го кусочка. Сам кусочек будем обозначать (P_i);

б) величину d_i, называемую ______________ i-го кусочка, и определяемую как

$$d_i = \sup_{\substack{(x',y')\in(P_i)\\(x'',y'')\in(P_i)}} \sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}.$$

По сути дела, d_i есть ______________________________ между точками i-го кусочка области D. Наконец, введем величину $\lambda = \max_i d_i$.

2. На каждом кусочке ________________ образом выберем некоторую точку (ξ_i, η_i), которую будем называть ________________, и составим ________________________

$$\sigma = \sum_i f(\xi_i, \eta_i) P_i.$$

3. Сделаем ______________________________ $\lambda \to 0$. Если ______________ $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ и этот предел ____ области D на кусочки и от ______________________________________ средней точки, то он называется ______________________________ интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается так:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy.$$

Сама функция $f(x, y)$ называется в этом случае ________________________ в области D.

Основные свойства двойных интегралов

1. $\iint\limits_{(D)} k \cdot f(x,y)\,dxdy = k \cdot \iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy.$

2. $\iint\limits_{(D)} \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\,dxdy = \iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy \pm \iint\limits_{(D)} g(x,y)\,dxdy.$

3. Если $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ и $D_i \bigcap D_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{(D_i)} f(x,y)\,dxdy.$$

4. Если $f(x,y) \le g(x,y)$, то $\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy \le \iint\limits_{(D)} g(x,y)\,dxdy$

5. $\left|\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint\limits_{(D)} |f(x,y)|\,dxdy.$

6. Если $m \le f(x,y) \le M$, то $mP_D \le \iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy \le MP_D$, где P_D – площадь области D.

7. Если $m \le f(x,y) \le M$, то существует μ, такое, что $m \le \mu \le M$ и $\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \mu P_D$.

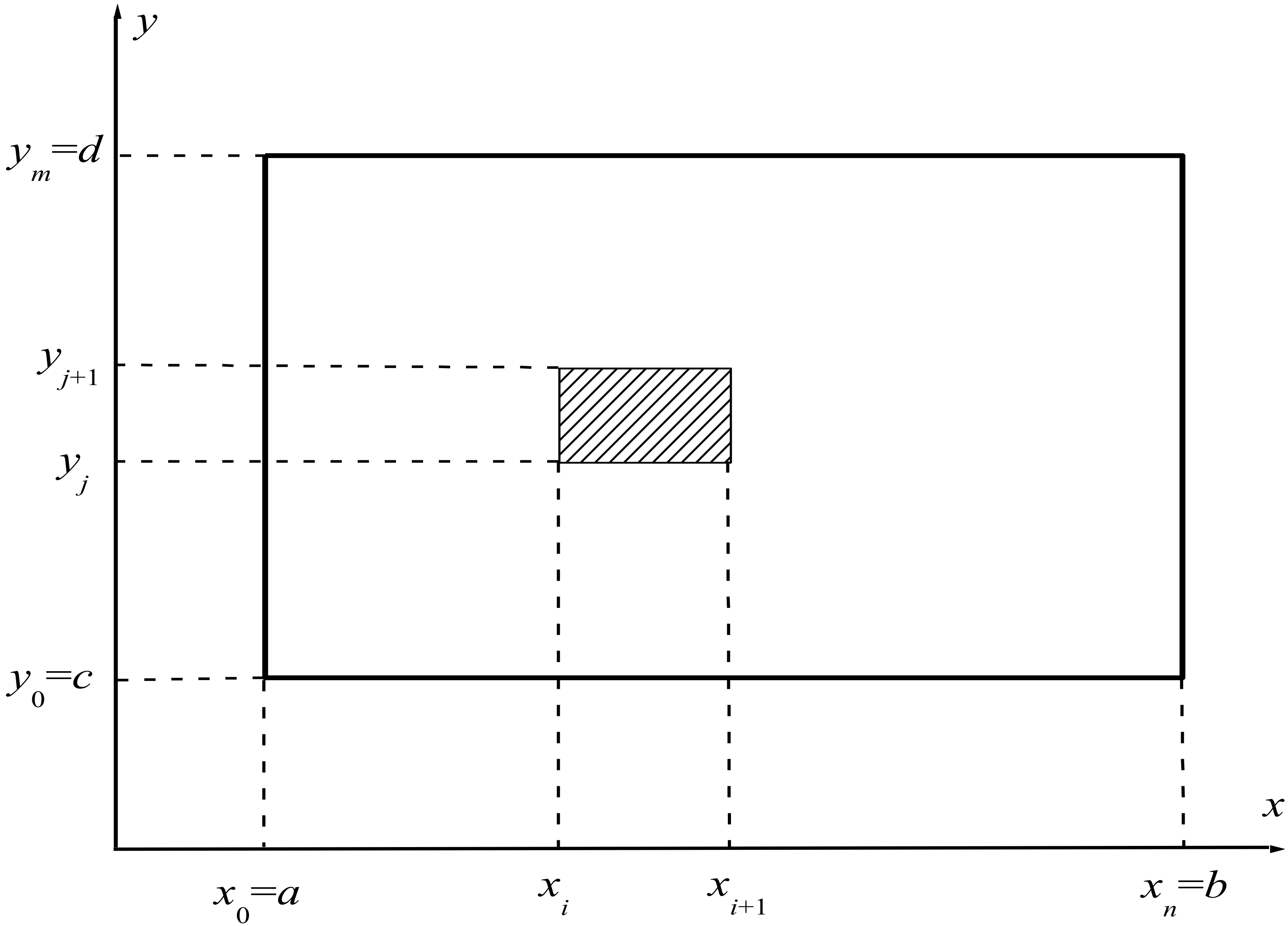
В частности, если $f(x,y)$ непрерывна в области D, то существует точка $(x_0, y_0) \in D$, такая, что $\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = f(x_0, y_0) P_D$.

Вычисление двойных интегралов

Рассмотрим область D в виде прямоугольника $[a, b; c, d]$.

Теорема 1. Если для функции $f(x, y)$ в области $D = [a, b; c, d]$ ________________ $\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy$ и для любого $x \in [a, b]$ __________________ $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$, то ________________ и $\int\limits_a^b dx\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)$ и имеет место равенство

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right).$$



y
$y_m = d$
y_{j+1}
y_j
$y_0 = c$
x
$x_0 = a$
x_i
x_{i+1}
$x_n = b$

Доказательство.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, а отрезок $[c, d]$ на части точками $c = y_0 < y_1 < ... < y_{m-1} < y_m = d$

Тогда весь прямоугольник $D = [a, b; c, d]$ разобьется на ____ прямоугольников

$$(P_{ij}) = [x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$$

площадью $P_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$.

Пусть $m_{ij} = \inf\limits_{(x,y)\in(P_{ij})} f(x, y)$, $M_{ij} = \sup\limits_{(x,y)\in(P_{ij})} f(x, y)$. Тогда имеем

следующую цепочку неравенств:

$$\forall(\xi_i, y) \in (P_{ij}) \quad m_{ij} \le f(\xi_i, y) \le M_{ij}.$$

По свойствам определенных интегралов от функции одной переменной, имеем:

$$m_{ij}\Delta y_j \le \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)dy \le M_{ij}\Delta y_j.$$

Суммируя по j и учитывая, что $\bigcup_{j=0}^{m-1}[y_j, y_{j+1}] = [c, d]$, получим

$$\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\Delta y_j \le \int_c^d f(\xi_i, y)dy \le \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\Delta y_j.$$

Умножая на Δx_i и суммируя по i, получаем

$$s = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \int_c^d f(\xi_i, y)dy \le \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j = S$$

Но слева и справа в этой цепочке стоят __________ и _______ суммы __________ для двойного интеграла. Поэтому, устремляя $\max\limits_{i,j}(\Delta x_i, \Delta y_j)$ к нулю, получим

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy \le \int\limits_a^b dx\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) \le \iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy,$$

что и говорит о том, что ____________ интеграл существует и имеет место равенство

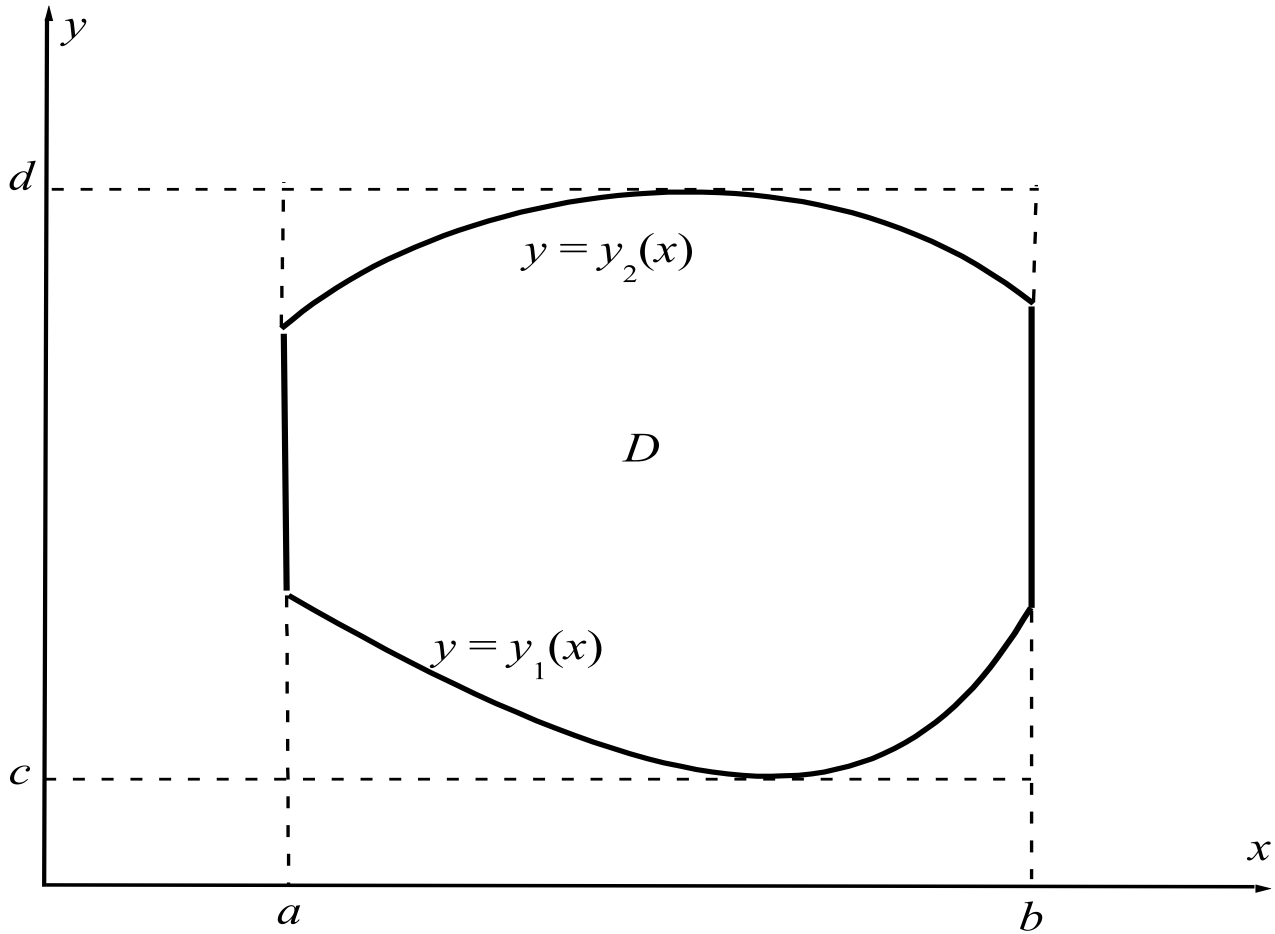
$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если $\forall x \in [a,b]\ \exists \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, то с таким же успехом можно записать

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

Вычисление двойного интеграла по области в виде **криволинейной трапеции**



Криволинейной трапецией называется область

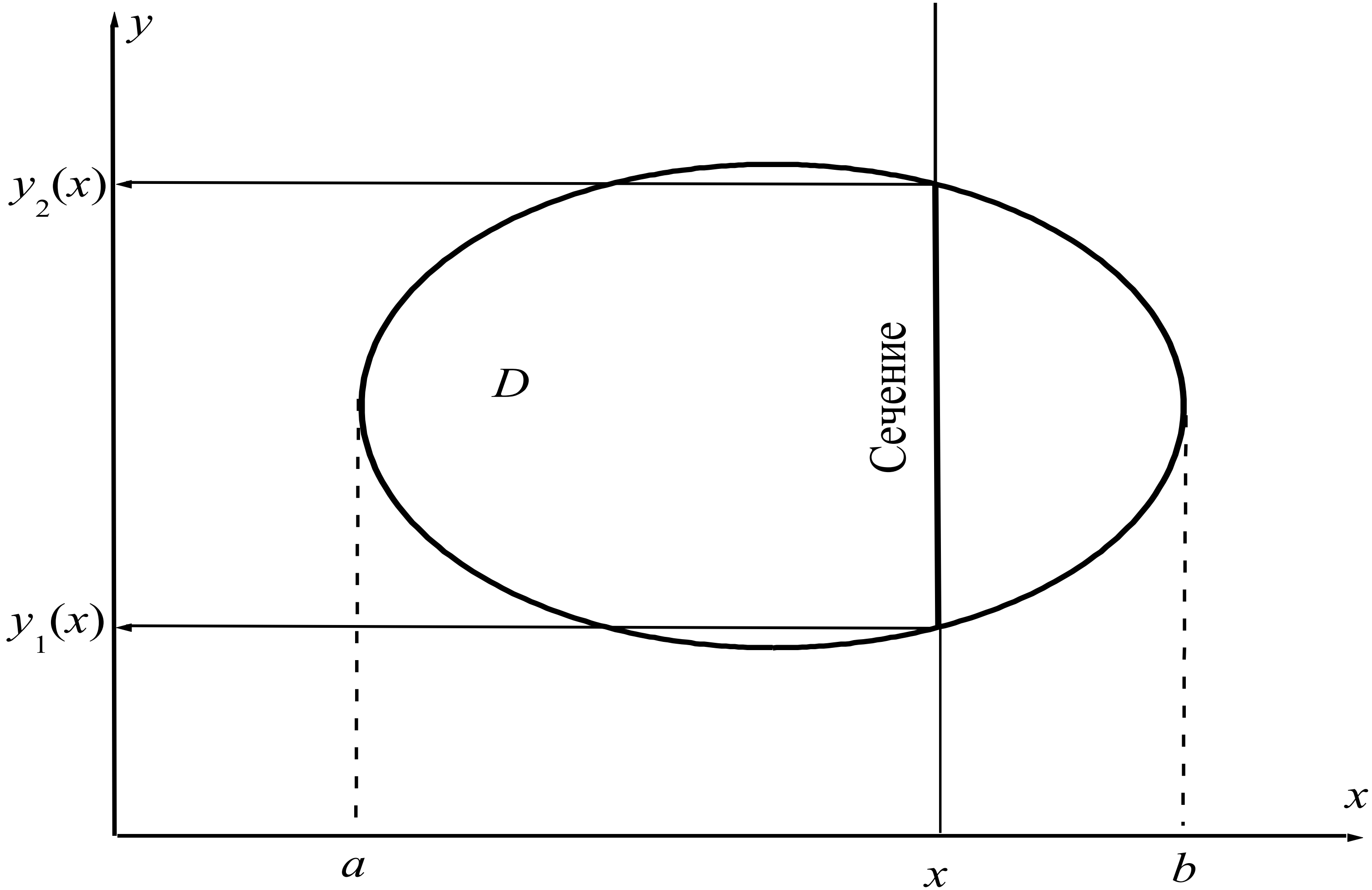
а) ограниченная ______ и _______ прямыми $x = a$ и $x = b$ соответственно;

б) ограниченная _____ и _____ кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ соответственно. Считается, что при $a \le x \le b$ функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны и $y_1(x) < y_2(x)$.

Теорема 2. Если _________ $\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy$ и $\forall x \in [a, b]$ __________ $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$, то __________ $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$ и

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

Простановка пределов в двойном интеграле



1. Нарисовать область D;

2. Спроектировать область D на ось OX и найти граничные точки проекции. Это и будут a и b;

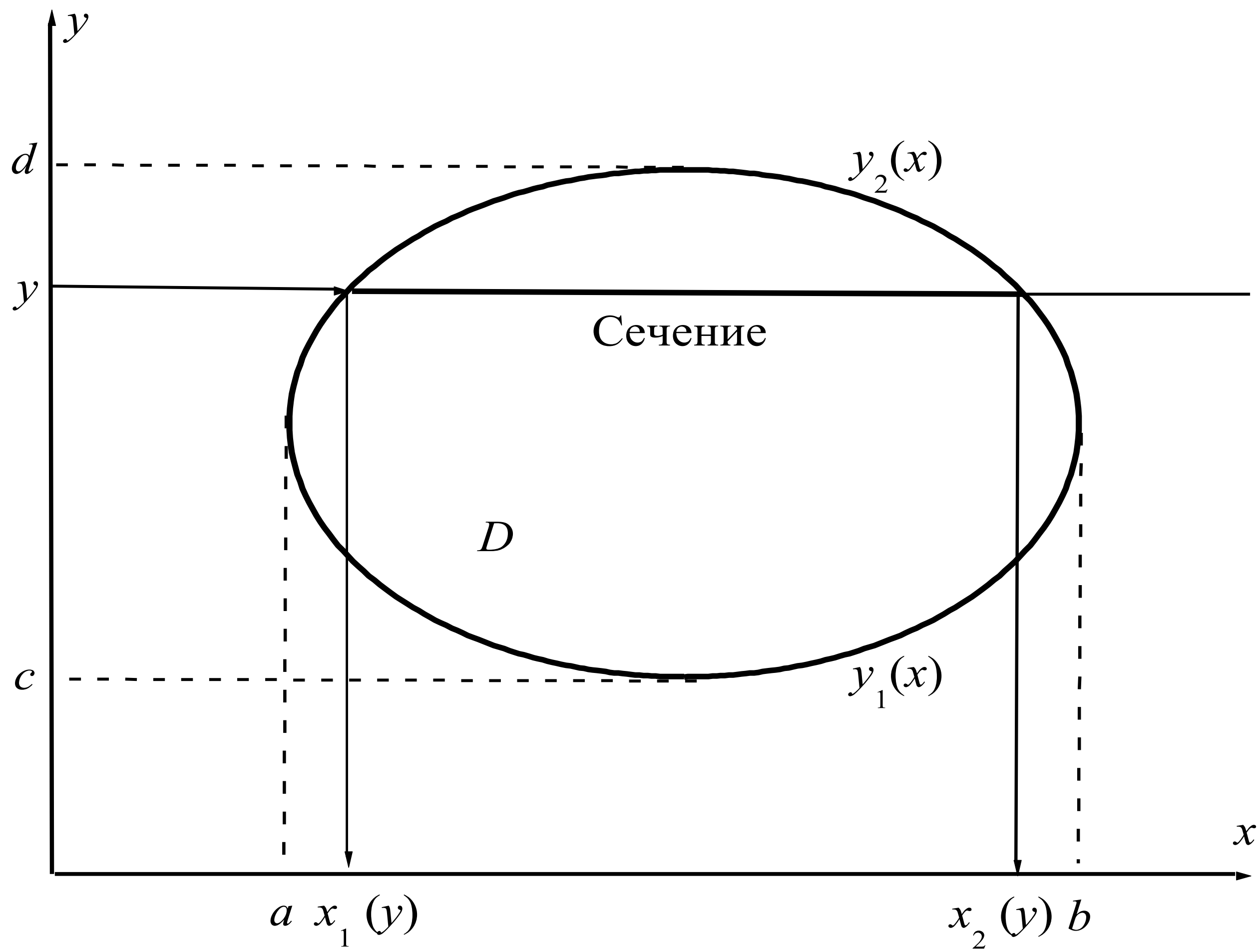
3. Для каждого $x \in [a,b]$ провести прямую, параллельную оси OY и найти координаты ее пересечения с границами области D. Это и будут $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Заметим, что отрезок $[y_1(x), y_2(x)]$ называется **сечением** области D.

4. Вычислить $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$.

Перестановка местами интегралов в повторном интеграле

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_?^? dy \int_?^? f(x,y)\,dx$$



1. В интервале $[a, b]$ построить кривые $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

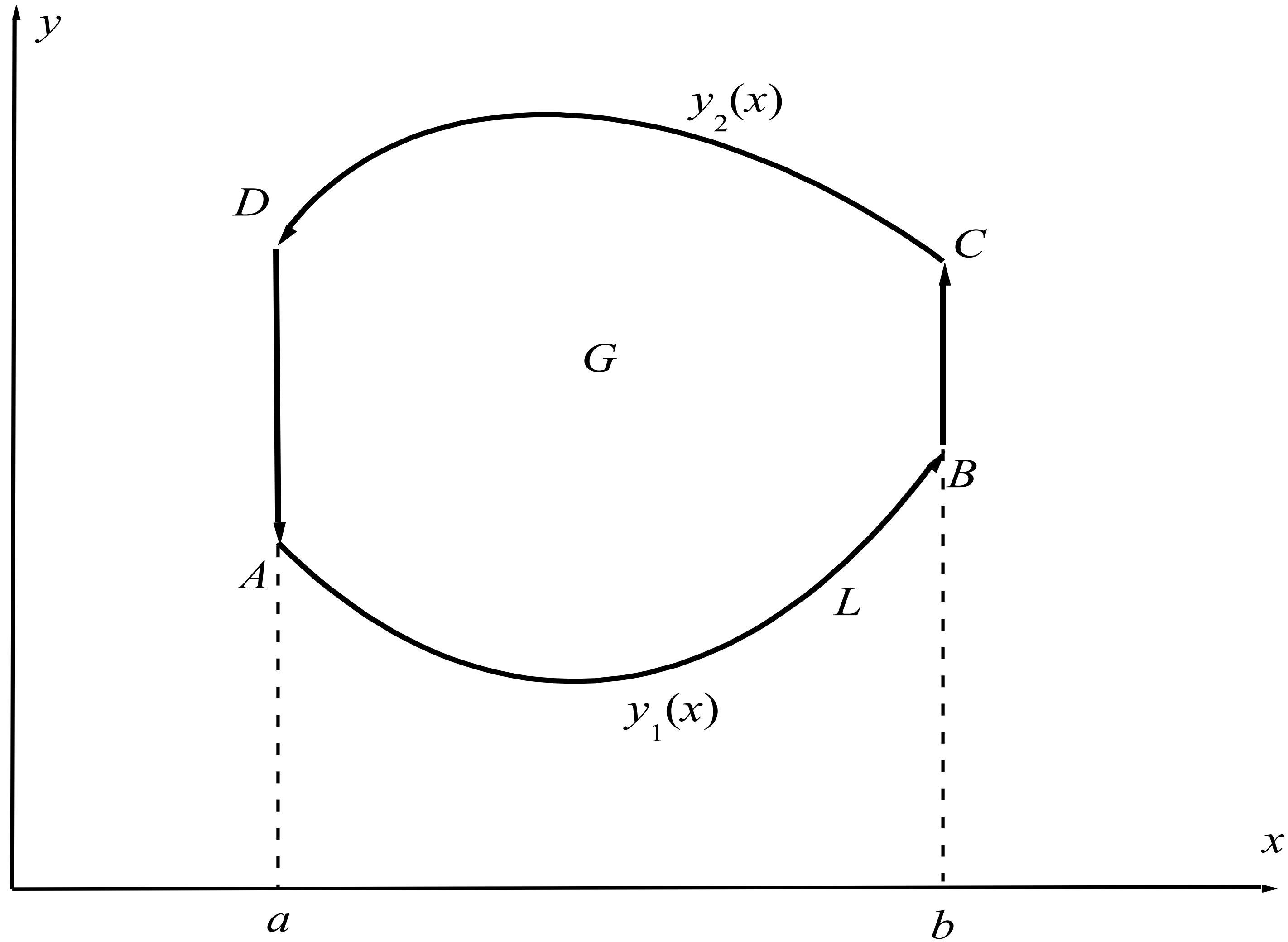
2. Получившуюся область спроектировать на ось OY. Границы проекции будут давать значения c и d.

3. Для любого $y \in [c, d]$ провести прямую, параллельную оси OX (сделать сечение области D), и найти абсциссы ее пересечения с границей области. Это будут $x_1(y)$ (абсцисса точки входа в область) и $x_2(y)$ (абсцисса точки выхода из области).

Тогда

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

Формула Грина



Пусть $P(x,y)$ – непрерывная функция с непрерывной производной $\partial P(x,y)/\partial y$. Тогда мы имеем

$$\iint\limits_G \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy = \int_a^b P(x,y_2(x))dx - \int_a^b P(x,y_1(x))dx.$$

С другой стороны

$$\oint_L P(x,y)dx = \int_{AB} P(x,y)dx + \int_{BC} P(x,y)dx + \int_{CD} P(x,y)dx + \int_{DA} P(x,y)dx =$$

$$= \int_a^b P(x,y_1(x))dx + 0 + \int_b^a P(x,y_2(x))dx + 0 =$$

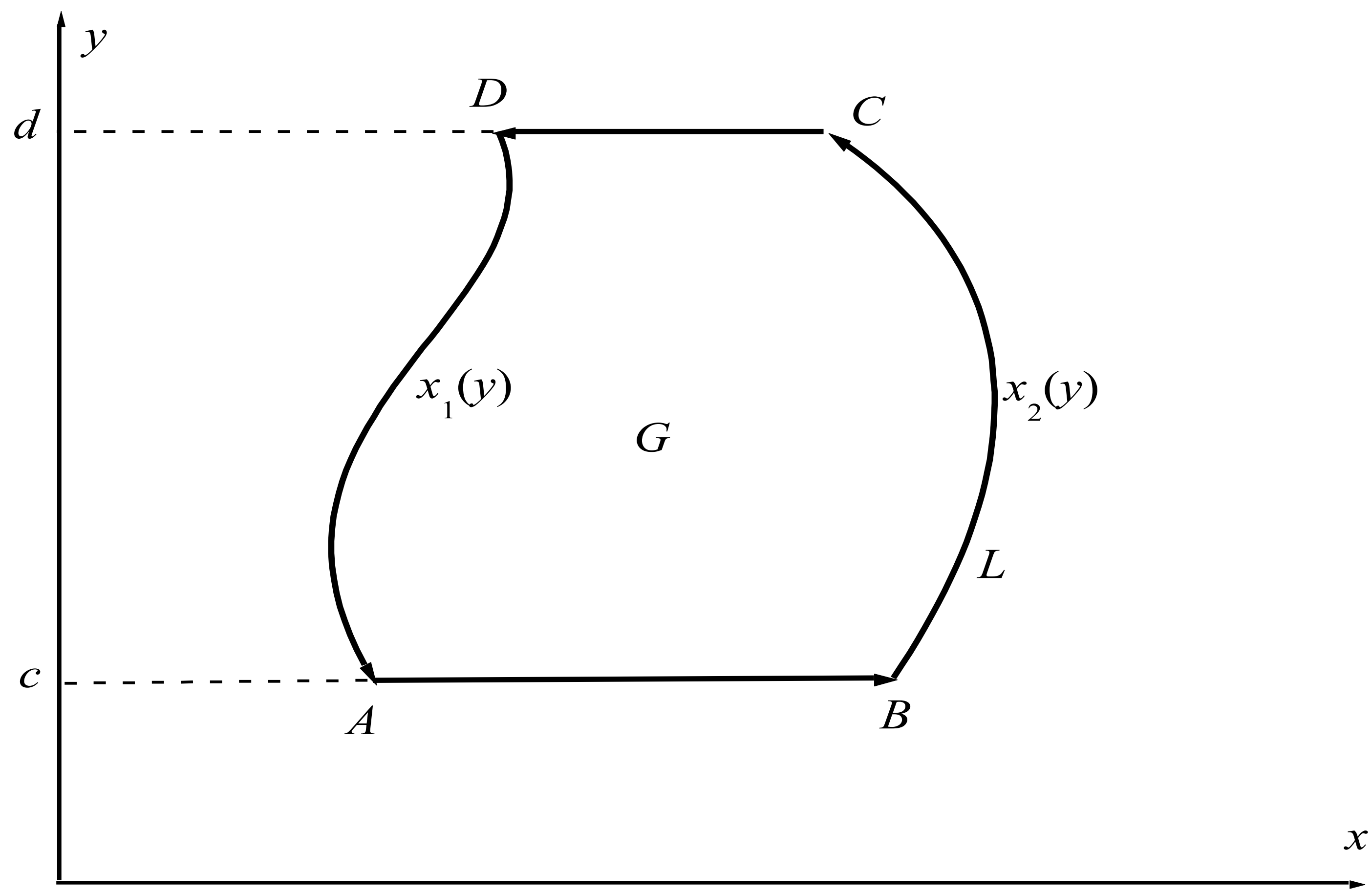
$$= \int_a^b P(x,y_1(x))dx - \int_a^b P(x,y_2(x))dx,$$

так как интегралы по CB и DA равны нулю и

$$\int_b^a P(x,y_2(x))dx = -\int_a^b P(x,y_2(x))dx.$$

Сравнивая эти два результата, получаем

$$\iint\limits_G \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = -\oint\limits_L P(x,y)dx. \qquad (6)$$



Пусть $Q(x,y)$ – непрерывная функция с непрерывной производной $\partial Q(x,y)/\partial x$.

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dx = \int_c^d Q(x_2(y),y)dy - \int_c^d Q(x_1(y),y)dy.$$

С другой стороны

$$\oint_L Q(x,y)dy = \int_{AB} Q(x,y)dy + \int_{BC} Q(x,y)dy + \int_{CD} Q(x,y)dy + \int_{DA} Q(x,y)dy =$$

$$= 0 + \int_c^d Q(x_2(y),y)dy + 0 + \int_d^c Q(x_1(y),y)dy =$$

$$= \int_c^d Q(x_2(y),y)dy - \int_c^d Q(x_1(y),y)dy,$$

так как интегралы по AB и CD равны нулю и

$$\int_d^c Q(x_1(y),y)dy = -\int_c^d Q(x_1(y),y)dy$$

Сравнивая эти выражения, получаем

$$\iint_G \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x,y)\,dy. \tag{7}$$

Наконец, вычитая (6) из (7) получаем знаменитую формулу Грина

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy, \tag{8}$$

связывающую криволинейный и двойной интегралы.

Замена переменных в двойных интегралах

Общие замечания.

Пусть нам необходимо вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ по некоторой области D. Для возможного упрощения вычислений, сделаем замену переменных

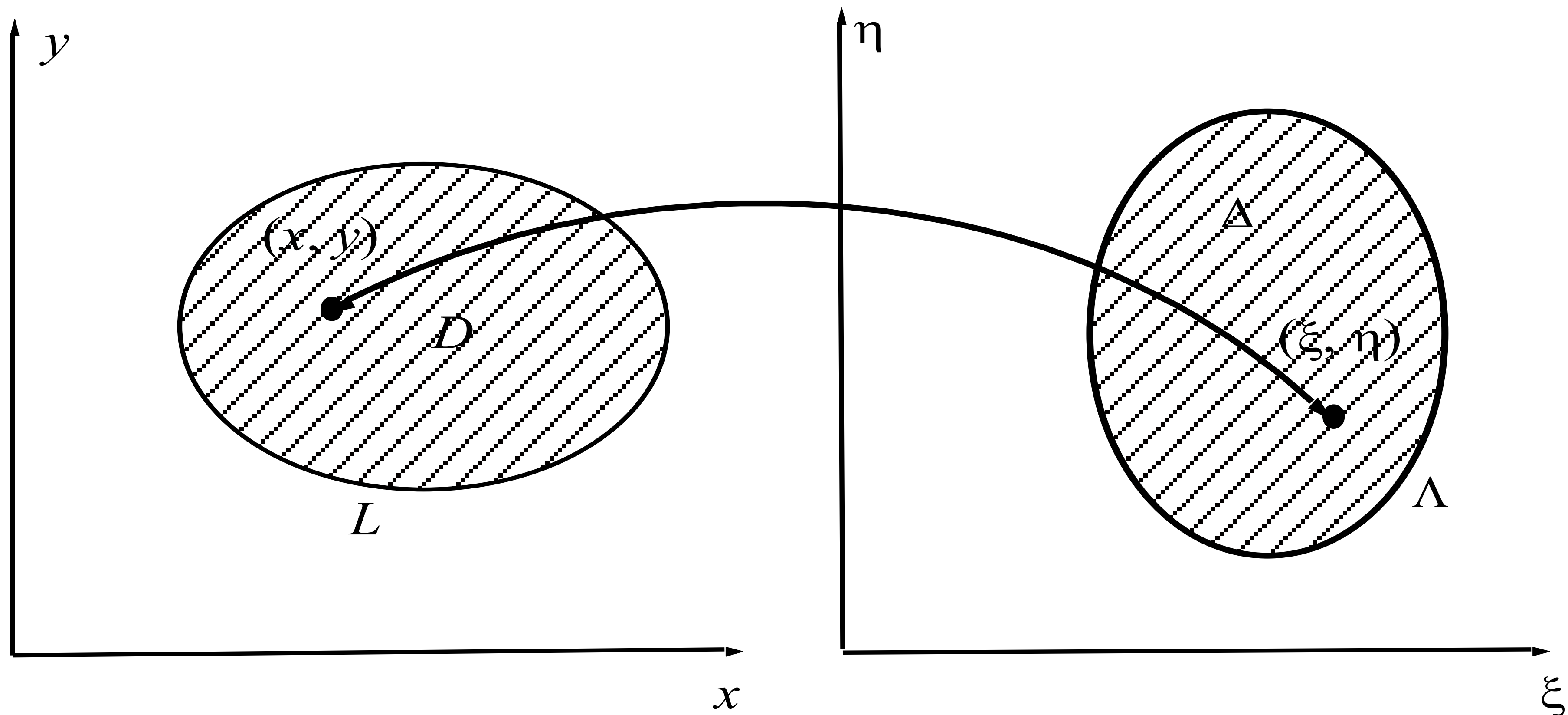
$$x = x(\xi,\eta), \quad y = y(\xi,\eta), \tag{9}$$

переходя от «старых» переменных x, y к «новым» переменным ξ, η.

В дальнейшем будем предполагать, что $x = x(\xi,\eta)$ и $y = y(\xi,\eta)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по ξ и η. Кроме того, будем предполагать, что система (9) может быть однозначно разрешена относительно ξ и η

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y),$$

то есть что соответствие $(x,y) \Leftrightarrow (\xi,\eta)$ взаимно однозначное.



y
x
(x, y)
D
L
η
ξ
Δ
(ξ, η)
Λ

Коэффициент деформации площади

Площади областей D и Δ различны. Найдем соотношение между ними.

Используя формулу Грина можно получить, что площадь P_D области D

$$P_D = \iint\limits_D dxdy = \oint\limits_L xdy.$$

Пусть контур Λ описывается параметрически

$$\xi = \xi(t),\ \ \eta = \eta(t),\ \ \alpha \le t < \beta.$$

Тогда контур L имеет уравнение

$$x = x(\xi(t), \eta(t)), \quad y = y(\xi(t), \eta(t)),$$

и поэтому

$$P_D = \oint\limits_L xdy = \int\limits_\alpha^\beta x(\xi(t), \eta(t))\left[\frac{\partial y}{\partial \xi}\xi'(t) + \frac{\partial y}{\partial \eta}\eta'(t)\right]dt.$$

Возвращаясь обратно к криволинейному интегралу, но уже по контуру Λ, можно записать

$$P_D = \pm \oint_{\Lambda} \left[x \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + x \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \right]. \qquad (10)$$

Знак ± появился потому, что мы не знаем, какому направлению обхода контура Λ – положительному или отрицательному – соответствует положительное направление контура L.

Вновь воспользуемся формулой Грина, но уже в приложении к выражению (10). В данном случае

$$P = x \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad Q = x \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

и

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}-\frac{\partial P}{\partial \eta}=\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}+x\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}-x\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}=$$

$$=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}=J(\xi,\eta). \qquad (11)$$

Выражение (11) для $J(\xi,\eta)$ называется **якобианом перехода** от переменных x, y к переменным ξ, η. Тогда

$$P_D=\pm\iint\limits_{\Delta} J(\xi,\eta)\,d\xi d\eta. \qquad (12)$$

Так как площадь не может быть отрицательной, то P_D надо записать так

$$P_D=\iint\limits_{\Delta} |J(\xi,\eta)|\,d\xi d\eta.$$

Выражение $|J(\xi,\eta)|$ называется **коэффициентом искажения (деформации) площади**.

Замена переменных в двойном интеграле

Разобьем область (D) на части (D_i); тогда область (Δ) также разобьется на части (Δ_i). Пусть D_i есть площадь (D_i), а Δ_i – площадь (Δ_i). Тогда

$$D_i = \iint\limits_{(\Delta_i)} |J(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta = |J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)|\, \Delta_i,$$

где мы воспользовались теоремой о среднем

Выбирая в области (D_i) среднюю точку в виде

$$\bar{x}_i = x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i),\ \bar{y}_i = y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i),$$

получим следующее выражение для интегральной суммы

$$\sigma = \sum_i f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) D_i = \sum_i f(x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i), y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i))\, |J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)|\, \Delta_i .$$

Переходя к пределу $\lambda \to 0$, получим соотношение

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))\, |J(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta,$$

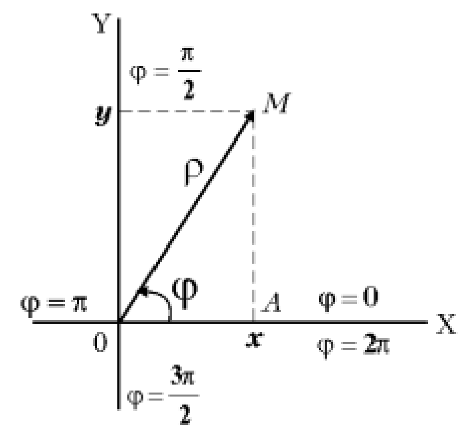
что и дает формулу для замены переменных в двойном интеграле.

1.1.3. Двойной интеграл в полярных координатах

Напомним, что полярная система координат включает в себя полюс (точка O) и полярную ось (выходящий из точки O горизонтальный луч OA). Положение любой точки M на плоскости в полярной системе координат задается двумя числами:

$\rho = |OM|$ – полярный радиус, равный расстоянию от полюса до точки M

$\varphi = \angle AOM$ – полярный угол, измеряемый в радианах в направлении против движения часовой стрелки.



Полярные и декартовы координаты одной и той же точки M на плоскости при совмещении соответствующих систем, как показано на рисунке, связаны равенствами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

При вычислении двойного интеграла в полярной системе координат следует придерживаться следующей схемы.

1) Построить область интегрирования.

2) В подынтегральной функции $f(x, y)$ заменить согласно формулам замены переменных при переходе к полярным координатам

$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$ Тогда $f(x;\ y) = f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi).$

3) Записать элемент площади $ds = dx\,dy = |\ J\ |\ d\rho\,d\varphi$, в полярной системе координат.

Найдем J–якобиан перехода от декартовой системы координат к полярной

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho\cos^2\varphi - (-\rho\sin^2\varphi) = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho.$$

Таким образом, элемент площади $ds = dx\,dy$ в полярной системе координат примет вид

$$\boxed{ds = \rho\,d\rho\,d\varphi}.$$

4) Уравнения линий, ограничивающих область D^*, записываются в полярных координатах (перевод декартовых уравнений в полярные рассматривается ниже).

Таким образом, получим двойной интеграл, записанный в полярной системе координат

$$\boxed{\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{(D^*)} f(\rho \cos\varphi,\ \rho \sin\varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi}.$$

Этот интеграл необходимо свести к повторному. Для этого

5) Определяются пределы изменения переменных ρ и φ и строится соответствующий повторный интеграл.

При этом следует иметь ввиду, что уравнения линий в полярных координатах, как правило, имеют вид $\rho = \rho(\varphi)$ (а не $\varphi = \varphi(\rho)$), поэтому внутренний интеграл практически всегда вычисляется по переменной ρ, а внешний – по φ.

Как и в декартовой системе координат при расстановке пределов интегрирования удобно использовать стрелку, пересекающую область. В полярной системе координат стрелка – это луч, выходящий из полюса и пересекающий границы области на линии входа и выхода.

Подавляющее большинство областей интерирования в полярной системе координат можно соотнести с одной из 4-х приведенных на следующей странице схем, где для каждого случая записаны соответствующие повторные интегралы.

6) Полученный повторный интеграл вычисляется по уже известной схеме: сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной ρ, а затем внешний интеграл по переменной φ.

Полюс внутри или на границе области интегрирования

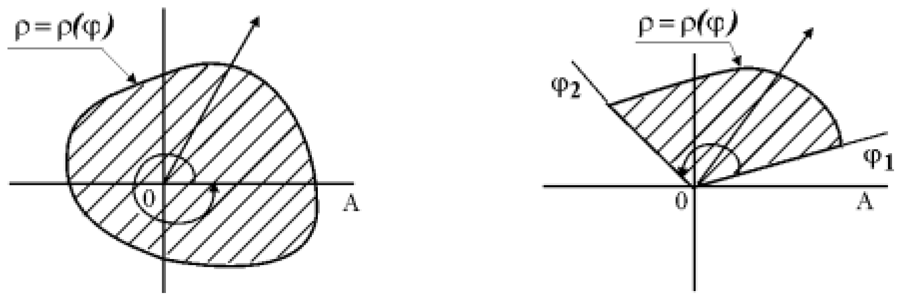


Рис. 3.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho \qquad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$$

Полюс вне области интегрирования

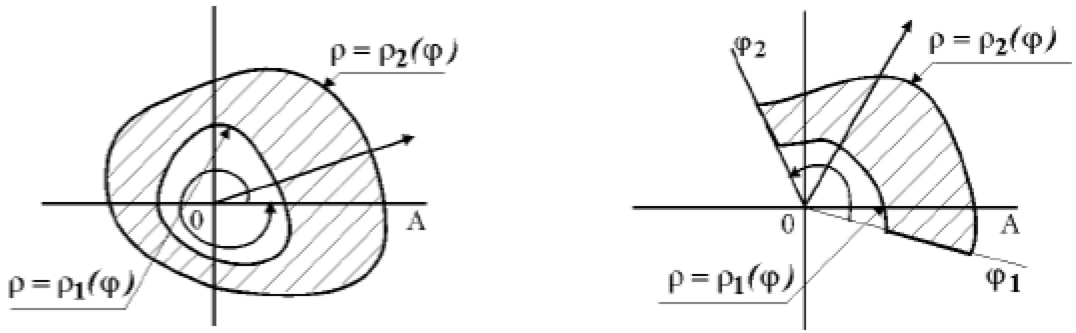
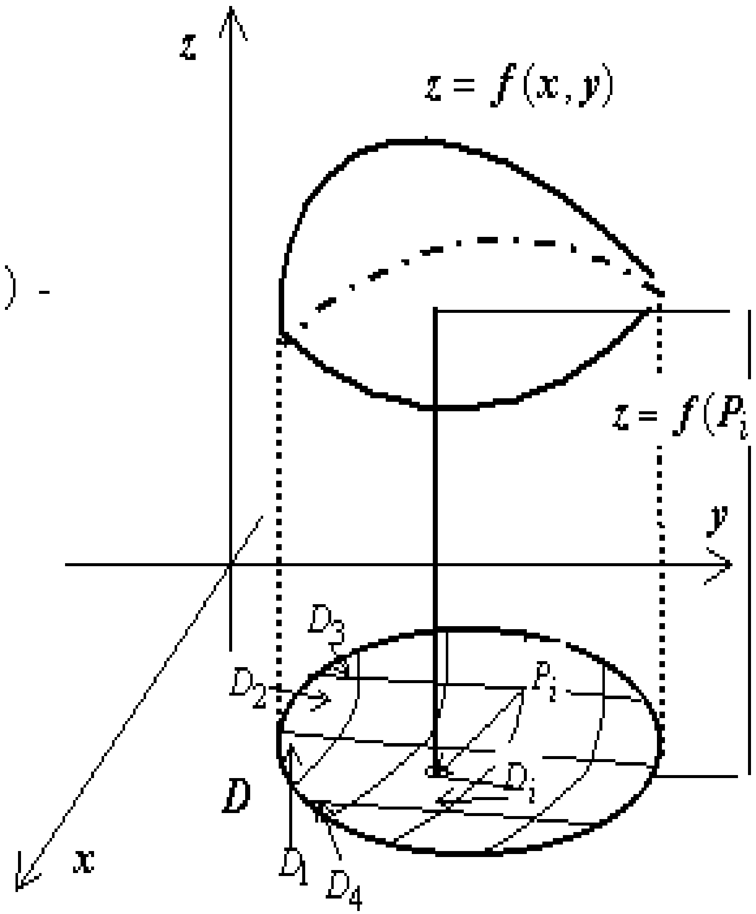


Рис. 4.

$$\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho \qquad \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$$

Геометрический смысл каждого слагаемого интегральной суммы: если $f(x,y) \ge 0$, то $f(P_i)\cdot s(D_i)$ - объём прямого цилиндра с основанием D_i высоты $f(P_i)$; вся интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot s(D_i)$ - сумма объёмов таких цилиндров, т.е. объём некоторого ступенчатого тела (высота ступеньки, расположенной над подобластью D_i, равна $f(P_i)$).



Когда $d = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \operatorname{diam}(D_i) \to 0$,

это ступенчатое тело становится всё ближе к изображенному на рисунке телу, ограниченному снизу областью D, сверху - поверхностью $z = f(x,y)$, с цилиндрической боковой поверхностью, направляющей которой является граница области D, а образующие параллельны оси Oz. Двойной интеграл $\iint\limits_D f(P)ds$ равен объёму этого тела.

Приложения двойного интеграла

Прикладные задачи, при решении которых используется двойной интеграл, определены его геометрическим и физическим смыслом. К ним можно отнести задачи на вычисление площади плоской фигуры, объема цилиндрического тела, массы, центра тяжести, момента инерции и т.п. плоской пластины и ряд других задач. Приведем основные формулы.

1. Объем цилиндрического тела $\quad V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)\,ds.$

Подынтегральная функция $f(x,y) \geq 0$ в области (D).

2. Площадь плоской области (D) $\quad S = \iint\limits_{(D)} ds.$

(Подынтегральная функция $f(x,y) \equiv 1$ в области (D).)
При этом в декартовой и полярной системах координат будем иметь соответственно

$$S = \iint\limits_{(D)} dx\,dy, \qquad S = \iint\limits_{(D)} \rho\,d\rho\,d\varphi.$$

3. Масса плоской пластинки $M = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\ ds$.

Подынтегральная функция $\delta(x,y)$ есть поверхностная плотность пластинки.

4. Статические моменты плоской пластинки

$$M_x = \iint\limits_{(D)} y \cdot \delta(x,y)\ ds, \qquad M_y = \iint\limits_{(D)} x \cdot \delta(x,y)\ ds.$$

5. Моменты инерции пластинки относительно осей координат

$$I_x = \iint\limits_{(D)} y^2 \cdot \delta(x,y)\ ds, \qquad I_y = \iint\limits_{(D)} x^2 \cdot \delta(x,y)\ ds.$$

6. Момент инерции пластинки относительно начала координат

$$I_0 = \iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2) \cdot \delta(x,y)\ ds = I_x + I_y.$$