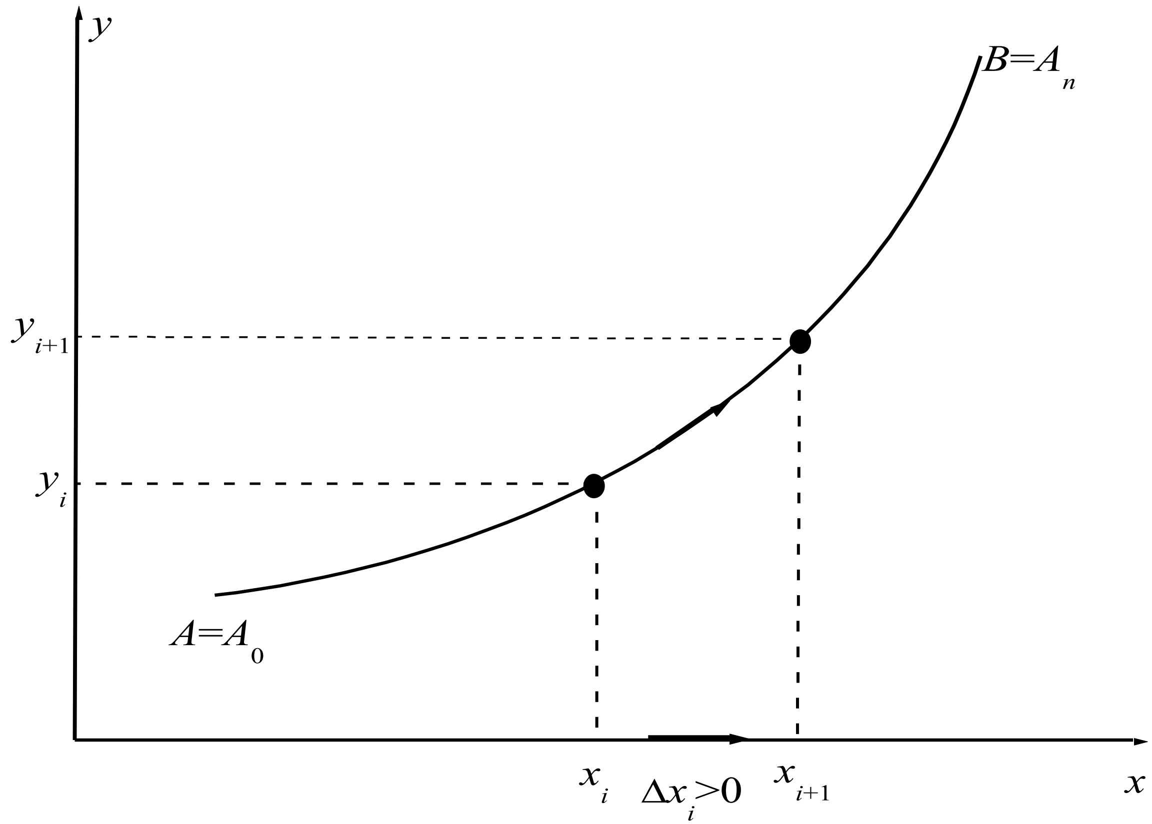
Здравствуйте!

Лекция №2

Криволинейные интегралы второго рода



Пусть снова на плоскости XOY задана кривая AB, которая проходится в направлении от точки A к точке B. Кроме этой кривой на плоскости заданы **две** функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, которые определены по крайней мере на кривой AB.

Снова разобьем кривую AB точками $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ и снова пусть $A = A_0$, $B = A_n$, $\lambda = \max_i \Delta s_i$. Но теперь с дугой A_iA_{i+1} свяжем еще две величины. Пусть (x_i, y_i) есть координаты точки A_i, и (x_{i+1}, y_{i+1}) – координаты точки A_{i+1}. Обозначим через $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ величины проекций дуги A_iA_{i+1} на оси OX и OY. Отметим, что эти проекции имеют знак: если $x_{i+1} > x_i$, то $\Delta x_i > 0$, если же $x_{i+1} < x_i$, то $\Delta x_i < 0$; аналогичное можно сказать и о проекции дуги A_iA_{i+1} на ось OY.

Как и раньше, выберем на кусках кривой A_iA_{i+1} произвольным образом среднюю точку (ξ_i, η_i) и составим интегральные суммы

$$\sigma_1 = \sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i, \quad \sigma_2 = \sum_{i=0}^{n-1} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

Отметьте отличие этих интегральных сумм от интегральной суммы предыдущего раздела: там стояла длина дуги Δs_i, а здесь – проекции этой дуги на оси координат.

Наконец, сделаем предельный переход $\lambda \to 0$; если существуют $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_1$ и $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_2$ и они не зависят от способа дробления кривой AB на части и от способа выбора средней точки, то они называются криволинейными интегралами второго рода

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_1 = \int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx; \quad \lim_{\lambda \to 0} \sigma_2 = \int\limits_{(AB)} Q(x,y)\,dy.$$

Сумма этих двух интегралов называется криволинейным интегралом второго рода общего вида и обозначается символом

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx + \int\limits_{(AB)} Q(x,y)\,dy = \int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Заметим, что если кривую AB пройти в обратном направлении, от точки B к точке A, то все проекции сменят знак; поэтому и интеграл сменит знак

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{(BA)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Вычисление криволинейных интегралов второго рода.

Пусть плоская кривая AB задана в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \le t \le T$. Разбиение этой кривой на кусочки означает разбиение отрезка $[t_0, T]$ на части точками

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T.$$

Тогда $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$, так что

$$\Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\tau_i)\Delta t_i,$$

где $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ и $t_i < \tau_i < t_{i+1}$.

Так как среднюю точку можно выбирать произвольно, то возьмем ее так: $\xi_i = x(\tau_i)$, $\eta_i = y(\tau_i)$. Тогда

$$\sigma_1 = \sum_{i=0}^{n-1} P(x(\tau_i), y(\tau_i))\, x'(\tau_i)\Delta t_i .$$

Предельный переход при $\lambda = \max_i \Delta t_i \to 0$ дает

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_1 = \int_{(AB)} P(x, y)\,dx = \int_{t_0}^{T} P(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt.$$

Аналогично, можно получить, что

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_2 = \int_{(AB)} Q(x, y)\,dy = \int_{t_0}^{T} Q(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt,$$

так что окончательно

$$\int_{(AB)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{t_0}^{T} \left[P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)\right]dt$$

Совершенно аналогично определяется криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

Для него имеет место формула

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} \left[P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t) \right] dt$$

Векторная форма записи.

Рассмотрим криволинейные интегралы второго рода по пространственным кривым

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Введем так называемую **вектор-функцию**

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{i}P(x,y,z) + \vec{j}Q(x,y,z) + \vec{k}R(x,y,z)$$

как трехмерный вектор с компонентами P, Q и R, а также вектор

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz.$$

Тогда комбинация, стоящая под знаком интеграла, $Pdx + Qdy + Rdz$ есть не что иное, как скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$, то есть

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{(AB)} \left(\vec{F}(x,y,z), d\vec{r}\right).$$

Физический смысл

Физически вектор-функция $\vec{F}(x,y,z)$ обычно ассоциируется с **силовым полем**, когда в каждой точке пространства на материальную точку действует сила $\vec{F}(x,y,z)$. Примером такого поля может служить гравитационное поле, электрическое поле, магнитное поле и т.д. Физически скалярное произведение $(\vec{F},d\vec{r})=dA$ имеет смысл **работы**, которую силовое поле $\vec{F}(x,y,z)$ совершает, перемещая материальную точку по вектору $d\vec{r}$. Поэтому, с точки зрения физика, криволинейный интеграл второго рода есть **работа**

$$A=\int\limits_{(AB)}\left(\vec{F}(x,y,z),d\vec{r}\right),$$

которую совершает силовое поле $\vec{F}(x,y,z)$ перемещая материальную точку по кривой AB.

Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода

Обозначим через α, β и γ углы, которые вектор $d\vec{r}$ образует с осями координат OX, OY и OZ. Заметим, что длина вектора $d\vec{r}$

$$\|d\vec{r}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds$$

есть не что иное, как дифференциал длины дуги кривой. Поэтому

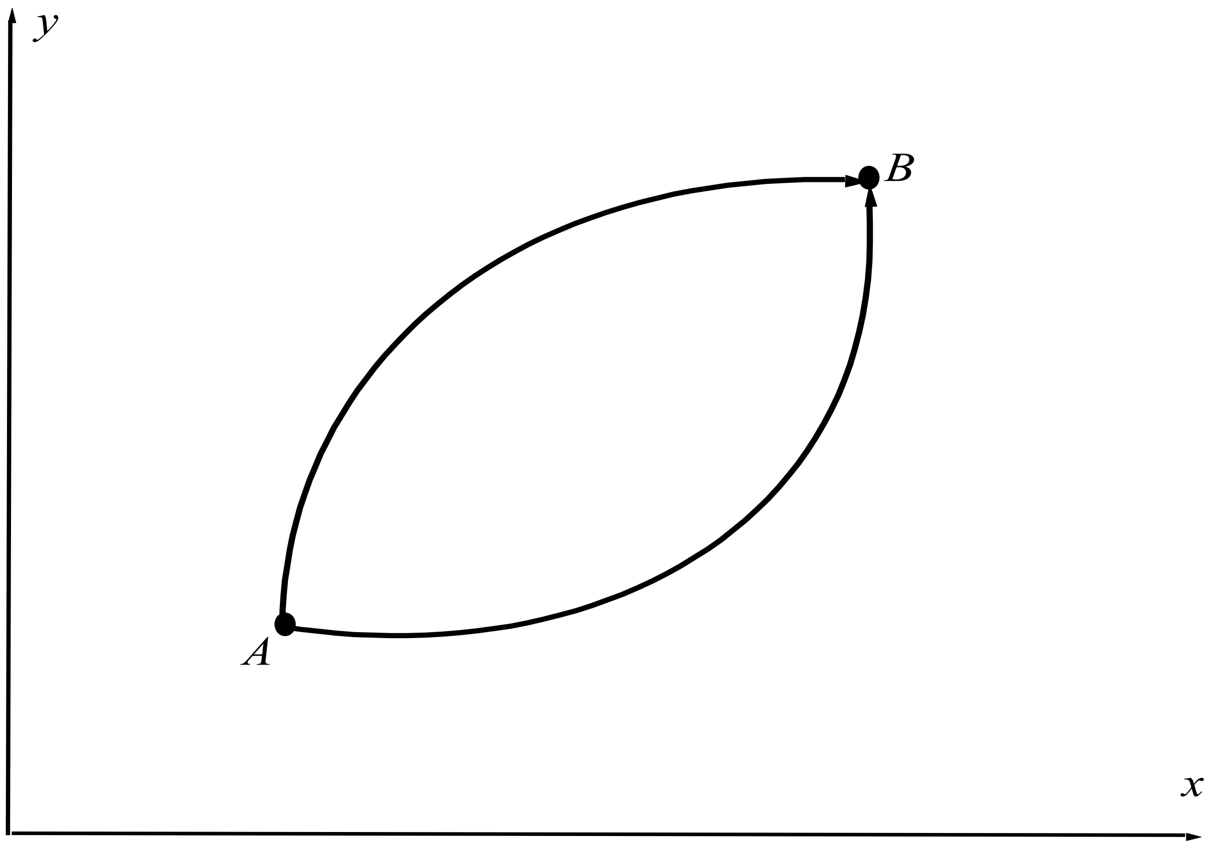
$$dx = ds\cos\alpha,\quad dy = ds\cos\beta,\quad dz = ds\cos\gamma,$$

и мы можем записать

$$\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(AB)} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)ds.$$

Слева стоит криволинейный интеграл второго рода, а справа – интеграл первого рода.

Независимость криволинейного интеграла от пути (плоский случай)



$$I = \int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

Теорема 1. Для того, чтобы $\int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ не зависел от пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $\Phi(x,y)$, что

$$P(x,y) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}, \quad Q(x,y) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}.$$

Это означает, что $Pdx + Qdy = d\Phi$, то есть подынтегральное выражение является полным дифференциалом функции $\Phi(x,y)$.

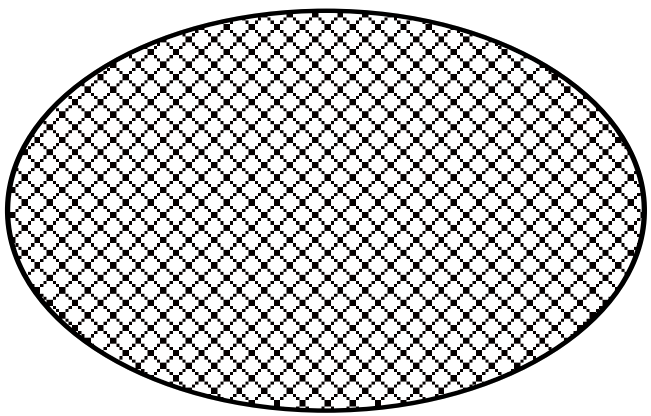
Теорема 2. Если в прямоугольнике [a, b; c, d] существуют и непрерывны $\partial P(x,y)/\partial y$ и $\partial Q(x,y)/\partial x$ то для того, чтобы были выполнены условия теоремы 1, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \qquad (1)$$

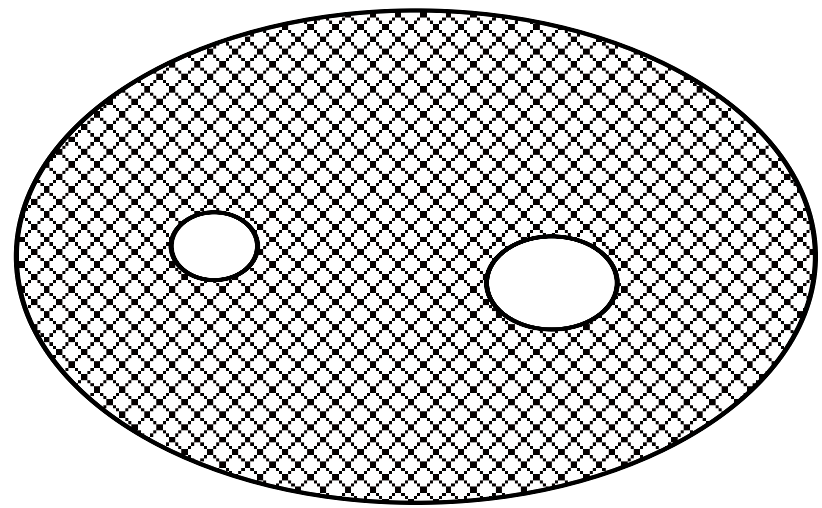
Определение 1. Кривая, у которой начальная и конечная точки совпадают, называется **контуром**.

Определение 2. Контур называется **простым,** если он не самопересекается.

Определение 3. Область D называется **односвязной**, если для любого простого контура, лежащего в ней, вся ограниченная этим контуром область принадлежит D.



Односвязная область



Неодносвязная область

Теорема 3. Если область D односвязная, то условие $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы $\int Pdx+Qdy$ не зависел от пути интегрирования, лежащего в этой области.

Независимость криволинейного интеграла от пути (пространственный случай)

Сформулируем теперь аналогичные теоремы для криволинейных интегралов второго рода по пространственным кривым

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int\limits_{(AB)}\left(\vec{F}(x,y,z),d\vec{r}\right).$$

Теорема 1. Для того, чтобы $\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ не зависел от пути, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $\Phi(x,y,z)$, чтобы

$$P(x,y,z)=\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial x};\quad Q(x,y,z)=\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial y};$$

$$R(x,y,z)=\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial z}. \qquad (3)$$

Комментарий. Функция $\Phi(x,y,z)$ называется **потенциалом** векторного поля. Вводя вектор-функцию $\vec{F}(x,y,z)=\vec{i}P(x,y,z)+\vec{j}Q(x,y,z)+\vec{k}R(x,y,z)$, выражение (3) можно записать в виде

$$\vec{F}(x,y,z)=\operatorname{grad}\Phi(x,y,z),$$

которое в физике является одним из основных соотношений теории поля.

Теорема 2. Если в параллелепипеде $[a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3]$ существуют и непрерывны $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$. Тогда для выполнения условий теоремы 1 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{4}$$

Комментарий. Эти условия обычно пишутся в векторной форме. Для этого, для вектор-функции $\vec{F}(x, y, z)$ вводят операцию, называемую **ротором**

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Тогда условие (4) потенциальности поля записывается в виде

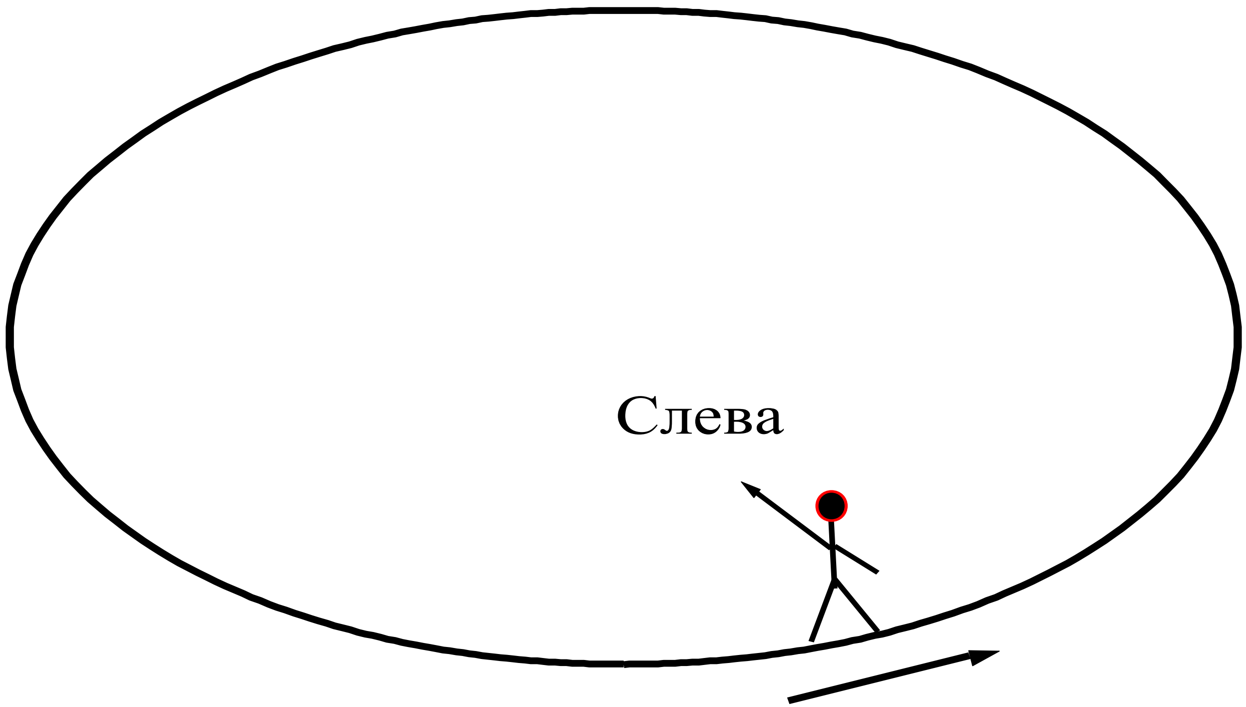
$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z)=0.$$

Криволинейные интегралы по простым контурам

Рассмотрим интегралы вида $\int\limits_{(C)} Pdx + Qdy$ по простым контурам, лежащим на плоскости XOY. Для таких интегралов принято обозначение

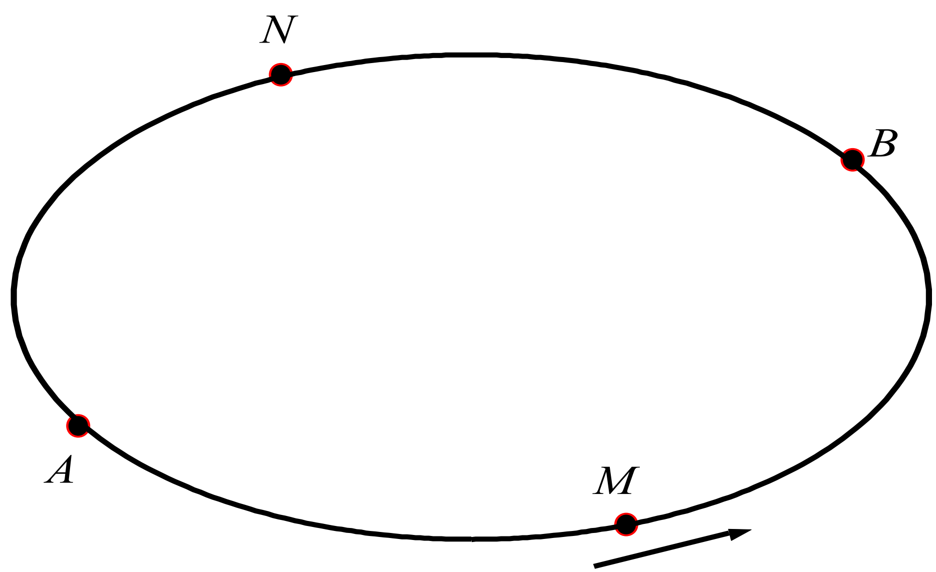
$$\oint\limits_{(C)} Pdx + Qdy,$$

подчеркивающее то, что интеграл вычисляется по контуру.


Слева

Теорема 1. Для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от пути, необходимо и достаточно, чтобы интегралы по всем простым контурам были равны нулю.

Доказательство. Чтобы не загромождать вывод, мы не будем писать выражение $Pdx + Qdy$ под знаком интеграла.

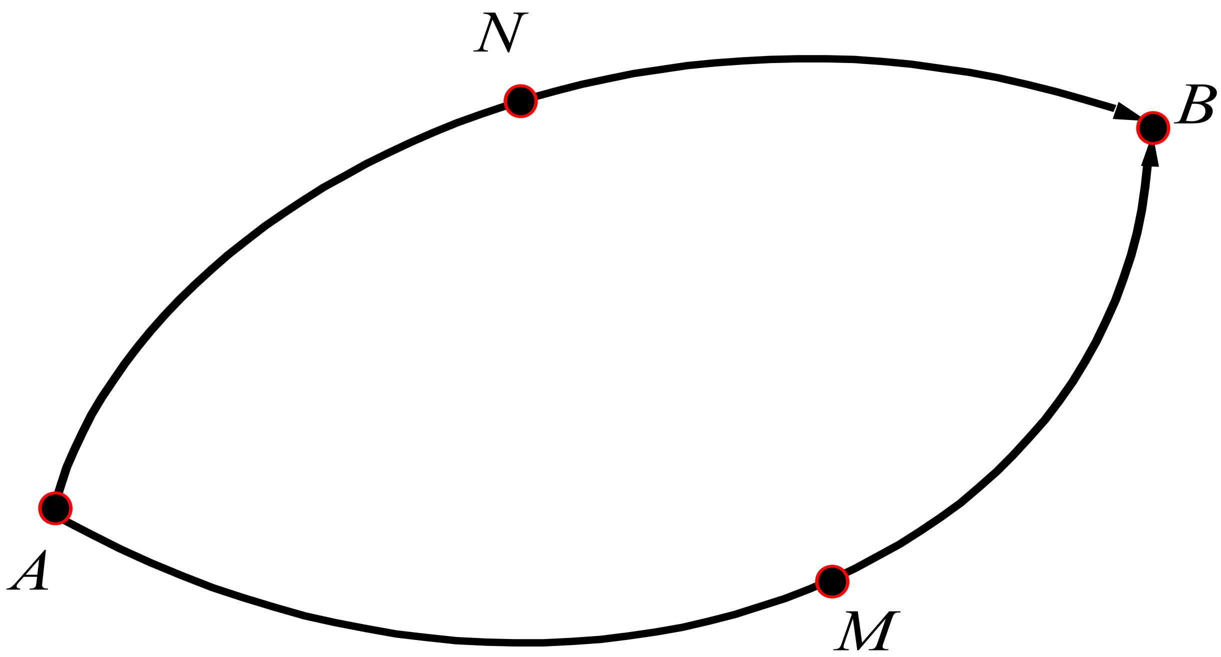


Необходимость. Пусть интеграл не зависит от пути. Возьмем простой контур и выделим на нем две точки A и B, и точки M и N, лежащие между A и B на разных сторонах контура (см. рис.). Тогда

$$\int_{AMB} = \int_{ANB} .$$

Но так как $\int_{BNA} = -\int_{ANB}$, то

$$\oint_{C} = \int_{AMB} + \int_{BNA} = \int_{AMB} - \int_{ANB} = 0.$$


N
B
A
M

Пусть интеграл по любому простому контуру равен нулю. Возьмем две точки A и B и соединим их двумя разными путями (см рис.). Тогда

$$\oint\limits_{AMBNA} = \int\limits_{AMB} + \int\limits_{BNA} = 0.$$

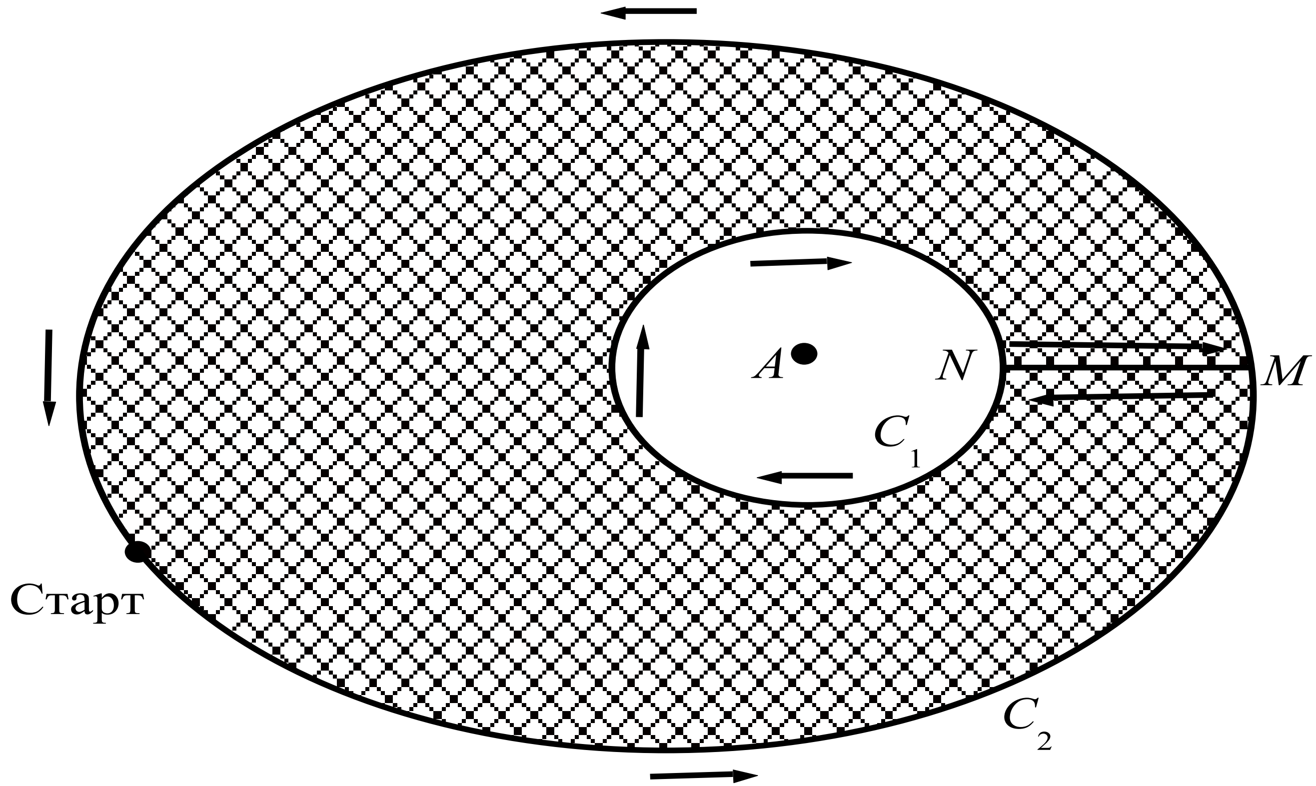
Отсюда

$$\int\limits_{AMB} = -\int\limits_{BNA} = \int\limits_{ANB},$$

и поэтому интеграл не зависит от пути.

Определение. Точка A называется **особой точкой,** если в ней функции $P(x,y)$ или $Q(x,y)$ не являются непрерывными, или в ней нарушено условие $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

Теорема 2. Интегралы по любым простым контурам, окружающим особую точку, равны между собой.



Пусть A – особая точка и C_1 и C_2 – два окружающих ее простых контура (см. рис.). Соединим их перемычкой MN и обойдем так, как показано на рисунке. Тогда внутренняя часть того контура, который мы обошли, не содержит особых точек, и поэтому интеграл по пройденному нами пути должен быть равен нулю:

$$\oint_{C_2} + \int_{MN} + \oint_{C_1^-} + \int_{NM} = 0$$

Здесь знак C_1^- означает, что контур C_1 проходится в противоположном направлении. Но

$$\int_{MN} + \int_{NM} = 0,$$

и поэтому

$$\oint_{C_2} = -\oint_{C_1^-} = \oint_{C_1} ,$$

что и доказывает теорему. ■

Замечание. Как следует из этой теоремы, интеграл по любому простому контуру, окружающему особую точку, является **характеристикой точки**, а не контура.