Здравствуйте!

Лекция №5

. **Площадь поверхности**

Наиболее общим методом задания поверхности S является параметрическое описание, когда любая точка $(x, y, z) \in S$ определяется уравнениями

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v),$$

где параметры u, v берутся из некоторой области G.

В дальнейшем большую роль играет матрица

$$\begin{Vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{Vmatrix}. \tag{13}$$

Обозначим ее миноры так:

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем предполагается, что ранг матрицы (13) равен 2, то есть хотя бы одна из величин A, B и C отлична от нуля.

Нам еще будет нужен вектор нормали $\vec{N}$ к поверхности. Заметим, прежде всего, что вектор $\vec{N}$ определен с точностью до постоянного сомножителя. Кроме того, при изменении направления вектор нормали останется нормалью. Мы не будем доказывать, что вектор нормали можно взять в виде

$$\vec{N} = \vec{i}A + \vec{j}B + \vec{k}C.$$

Обозначим через α, β и γ углы, которые вектор нормали $\vec{N}$ образует с осями OX, OY и OZ. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Знак $\pm$ появляется потому, что при смене направления вектор нормали останется нормалью.

Основной для нас в дальнейшем будет формула для площади поверхности, которую мы дадим без вывода:

$$S = \iint\limits_{(G)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv.$$

В частном случае явного задания поверхности в виде $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, считая $u \equiv x$, $v \equiv y$ и обозначая $\partial z / \partial x = p$, $\partial z / \partial y = q$ получаем, что матрица (13)

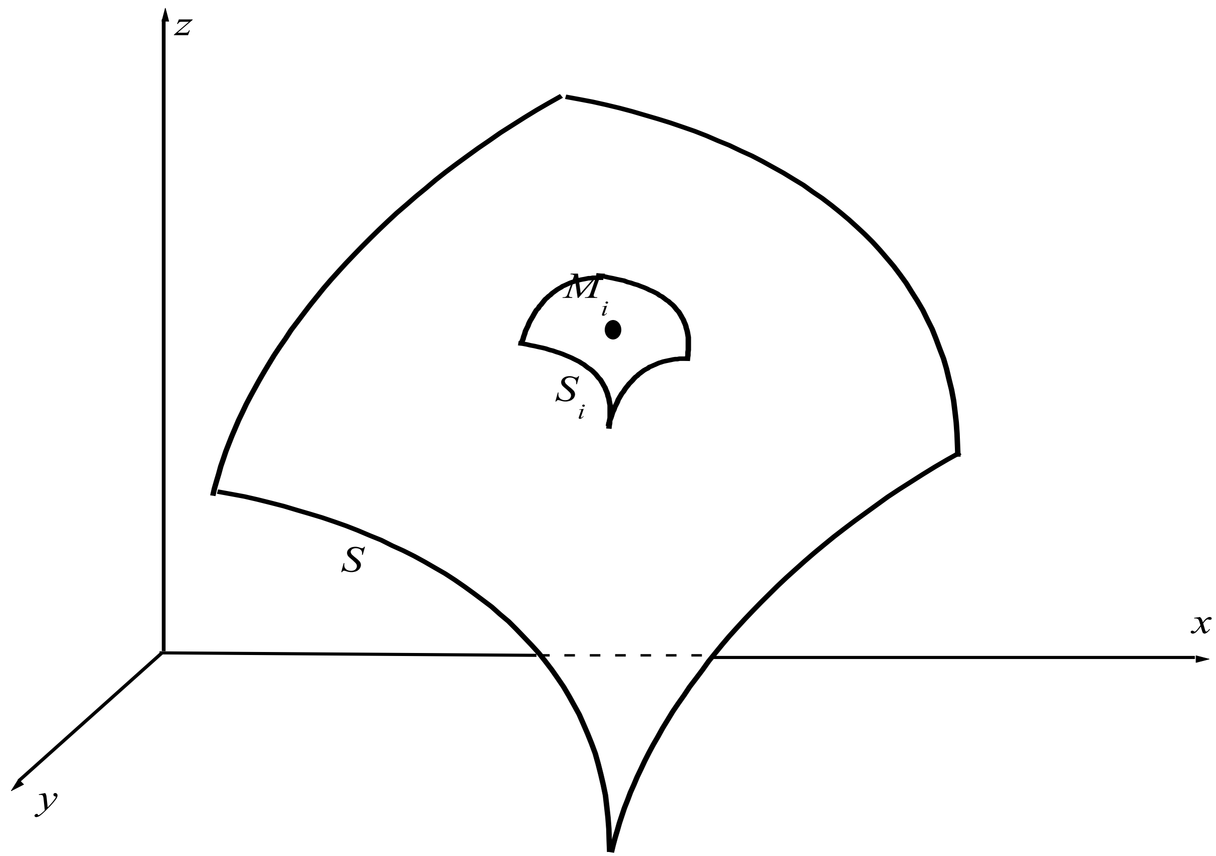
$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{Vmatrix},$$

откуда $A = -p$, $B = -q$, $C = 1$, так что

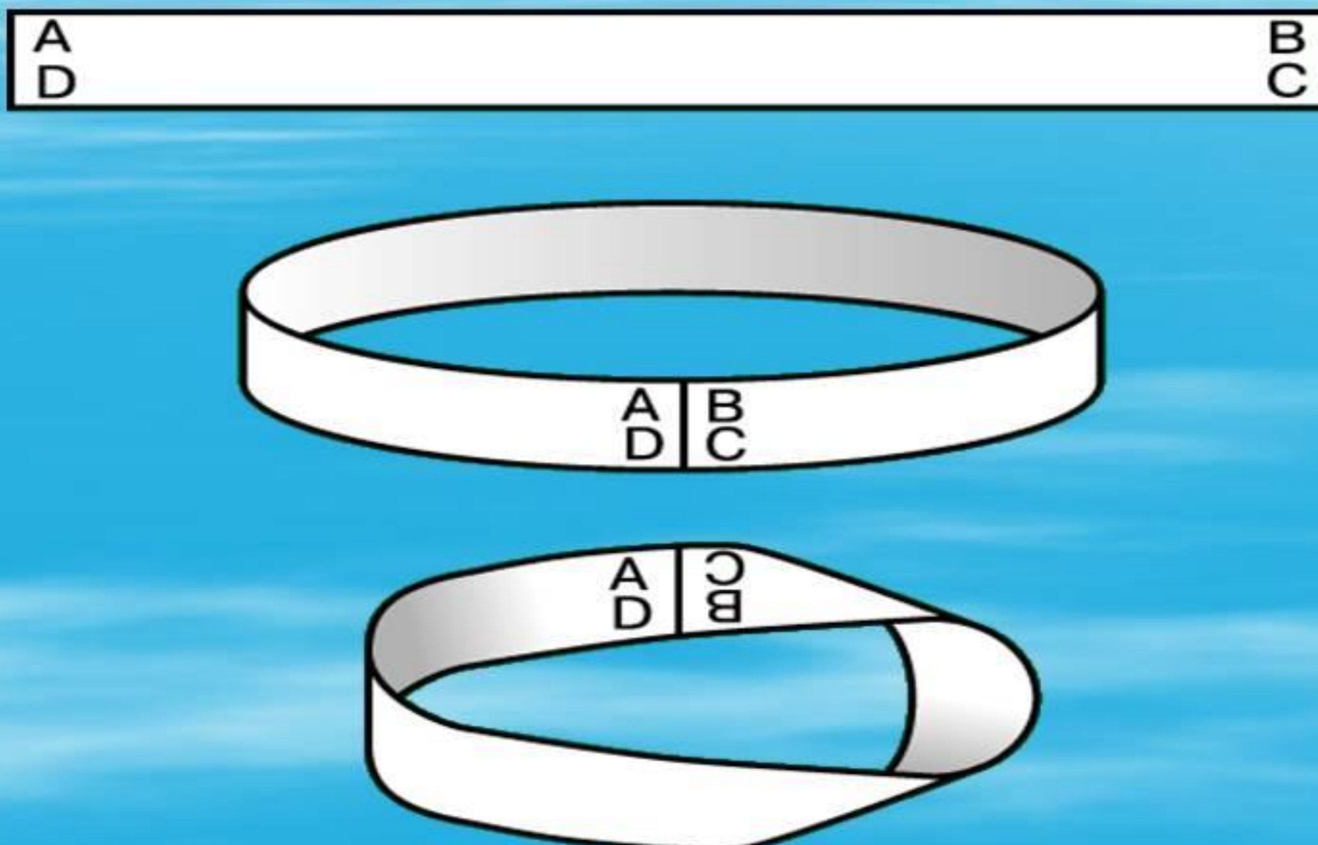
$$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

Поверхностные интегралы первого рода

Пусть в трехмерном пространстве задана некоторая поверхность S и функция $f(x, y, z)$, определенная, по крайней мере, на этой поверхности. (двусторонней)



Изготовление листа Мёбиуса



Как обычно (см. рис.), разобьем всю поверхность S на кусочки; пусть S_i есть площадь i-го кусочка, d_i – его диаметр и $\lambda = \max\limits_i d_i$.

Возьмем на каждом кусочке произвольным образом некоторую среднюю точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_i f(x_i, y_i, z_i) S_i .$$

Если существует $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$, который не зависит от способа разбиения поверхности S на кусочки и от способа выбора средней точки, то он называется поверхностным интегралом первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S и обозначается символом

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z) dS .$$

Пусть поверхность S задана параметрически в виде

$$x = x(u,v); \quad y = y(u,v); \quad z = z(u,v), \ (u,v) \in (\Delta).$$

Тогда разбиению поверхности S на кусочки (S_i) соответствует разбиение области (Δ) на кусочки (Δ_i) с площадью Δ_i. В этом случае

$$S_i = \iint\limits_{(\Delta_i)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\Big|_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} \Delta_i.$$

Беря среднюю точку как

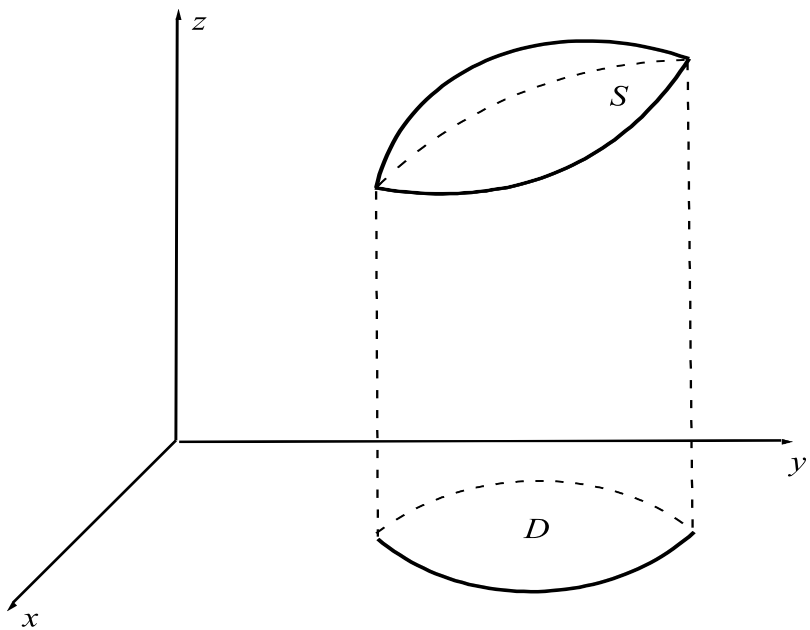
$$\bar{x}_i = x(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \ \bar{y}_i = y(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \ \bar{z}_i = z(\bar{u}_i, \bar{v}_i),$$

получим

$$\sigma = \sum_i f(x(\bar{u}_i, \bar{v}_i), y(\bar{u}_i, \bar{v}_i), z(\bar{u}_i, \bar{v}_i))\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\Big|_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} \Delta_i$$

Переходя к пределу $\lambda \to 0$, получим формулу для вычисления поверхностных интегралов первого рода

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{(\Delta)} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv.$$



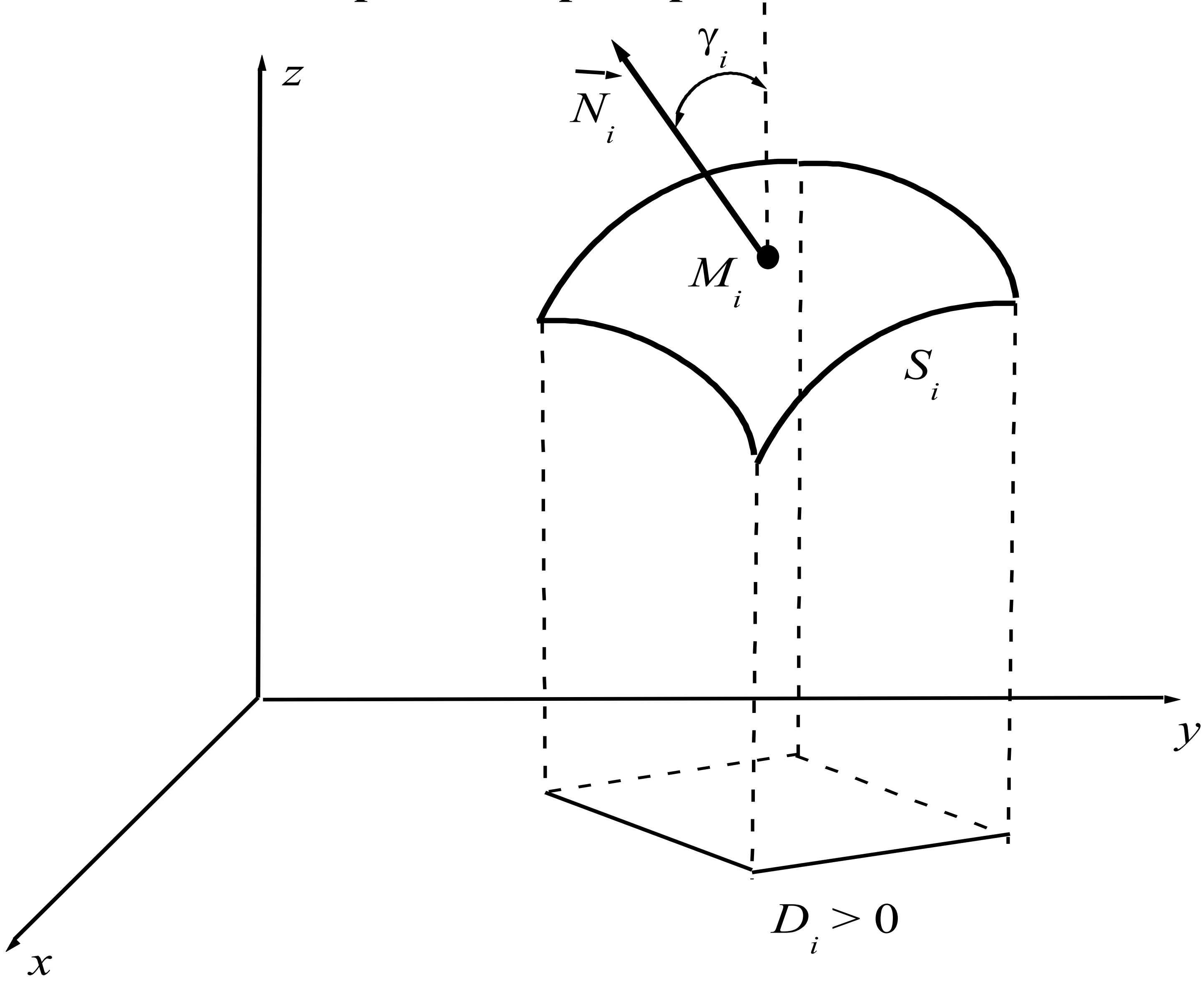
В частном случае явного задания поверхности $z = z(x, y)$ (см. рис.), имеем

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS =$$

$$= \iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy,$$

где область D есть проекция поверхности S на плоскость XOY, $p = \partial z / \partial x$, $q = \partial z / \partial y$.

Поверхностные интегралы второго рода



Пусть в трехмерном пространстве задана поверхность S и функция $R(x,y,z)$. Снова разобьем всю поверхность на кусочки и на каждом кусочке выберем среднюю точку. Но интегральную сумму будем строить по-другому. Вместо площади S_i i-го кусочка в качестве сомножителя будем брать **площадь проекции** D_i этого кусочка на плоскость XOY. Причем будем считать эту площадь $D_i > 0$ если угол γ между вектором нормали и осью OZ острый, и $D_i < 0$ если угол γ тупой. Это можно выразить единой формулой, считая $D_i = S_i \cos\gamma_i$.

Итак, возьмем интегральную сумму в виде

$$\sigma = \sum_i R(x_i, y_i, z_i) D_i.$$

Переходя к пределу $\lambda \to 0$, получим поверхностный интеграл второго рода

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \iint_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy \qquad \text{(нет } dz\text{)}.$$

Аналогично определяются $\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz$ (проекция параллельно оси OX на плоскость YOZ, в интеграле нет dx), и $\iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdz$ (проекция параллельно оси OY на плоскость YOZ, в интеграле нет dy). Их сумма дает поверхностный интеграл второго рода общего вида, который обозначается так:

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy.$$

Введем вектор-функцию

$$\vec{F}(x,y,z)=\vec{i}P(x,y,z)+\vec{j}Q(x,y,z)+\vec{k}R(x,y,z).$$

С кусочком (dS) также свяжем вектор $d\vec{S}$, длина которого равна площади этого кусочка dS и который направлен по нормали к этому кусочку. Тогда

$$d\vec{S}=\vec{i}\,dydz+\vec{j}\,dxdz+\vec{k}\,dxdy,$$

и в векторном виде можно записать:

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{(S)}\left(\vec{F}(x,y,z),d\vec{S}\right)=\iint\limits_{(S)}F_n(x,y,z)dS.$$

В последнем интеграле (он уже является поверхностным интегралом первого рода) $F_n(x,y,z)$ означает проекцию вектора $\vec{F}(x,y,z)$ на направление нормали $\vec{N}$ к поверхности.

Пусть α, β и γ есть углы, которые вектор нормали $\vec{N}$ с осями OX, OY и OZ. Тогда

$$F_n = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma = \pm\frac{PA+QB+RC}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

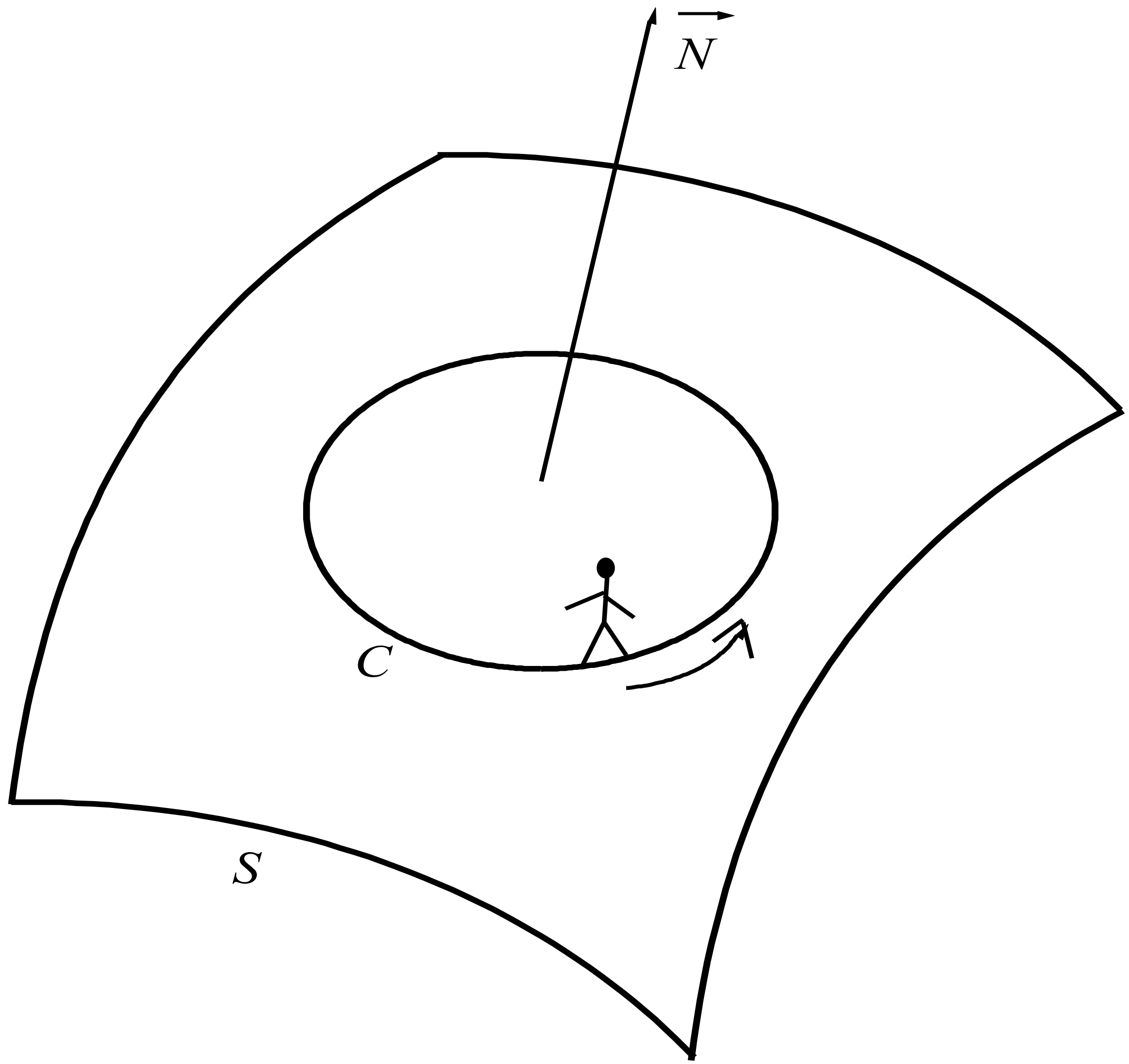
Знак $\pm$ возник потому, что вектор нормали можно направить и в обратную сторону. Тогда

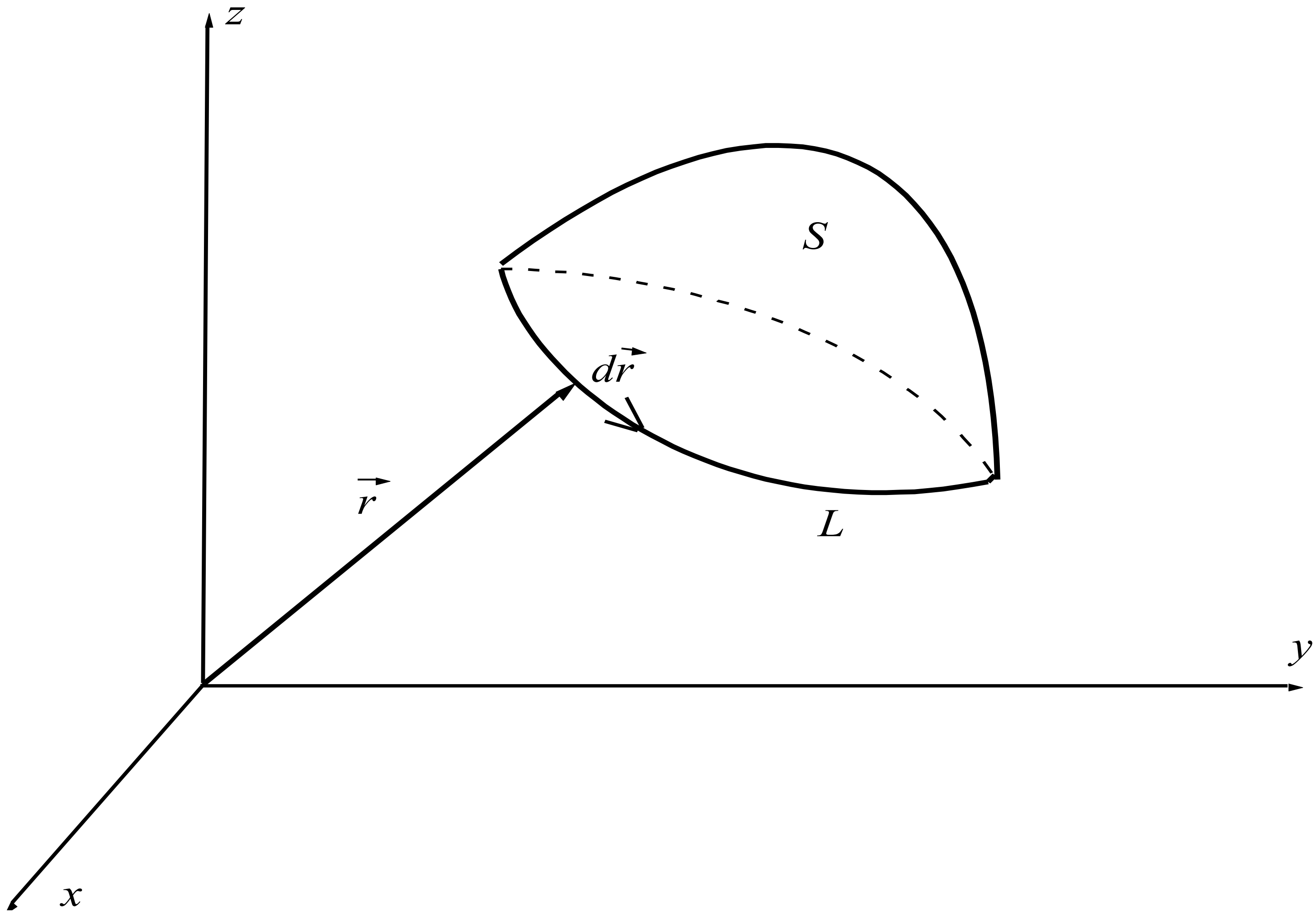
$$\iint\limits_{(S)}(\vec{F}, d\vec{S}) = \iint\limits_{(S)} F_n dS = \pm\iint\limits_{(\Delta)}\frac{PA+QB+RC}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv =$$

$$= \pm\iint\limits_{(\Delta)}(PA+QB+RC)\,dudv,$$

что и дает явную формулу вычисления поверхностного интеграла второго рода при параметрическом задании поверхности.

Формула Стокса





z
S
dr
r
L
y
x

Пусть теперь имеется векторное поле $\vec{F}=\vec{i}\,P+\vec{j}\,Q+\vec{k}R$. Рассмотрим некоторую поверхность (S), ограниченную контуром (L). Вводя векторы

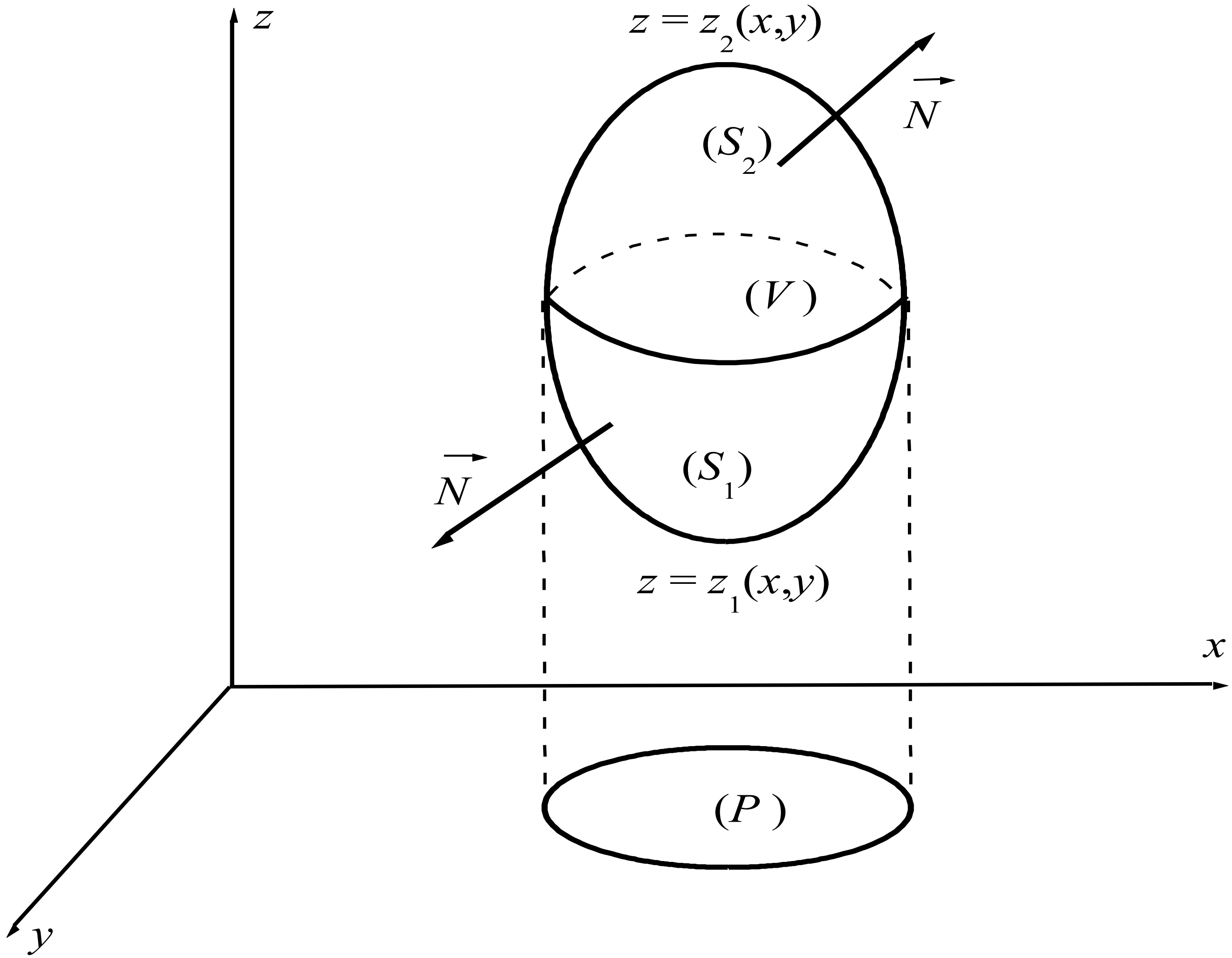
$$d\vec{r}=\vec{i}\,dx+\vec{j}\,dy+\vec{k}dz,$$

$$d\vec{S}=\vec{i}\,dydz+\vec{j}\,dxdz+\vec{k}dxdy,$$

имеем следующую **формулу Стокса**

$$\oint\limits_{(L)}(\vec{F},d\vec{r})=\iint\limits_{(S)}(\operatorname{rot}\vec{F},d\vec{S}).$$

Формула Остроградского-Гаусса



Пусть $R(x, y, z)$ есть некоторая функция, у которой существует $\partial R/\partial z$. Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{(P)} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_{(P)} R(x, y, z_2(x, y))dxdy - \iint\limits_{(P)} R(x, y, z_1(x, y))dxdy. \qquad (14)$$

С другой стороны, для поверхностного интеграла второго рода имеем

$$\iint\limits_{(S)} R(x, y, z)dxdy = \iint\limits_{(S_2)} R(x, y, z)dxdy + \iint\limits_{(S_1)} R(x, y, z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(P)} R(x, y, z_2(x, y))dxdy - \iint\limits_{(P)} R(x, y, z_1(x, y))dxdy, \qquad (15)$$

где знак «–» перед вторым интегралом появился потому, что для нижней части поверхности угол γ между нормалью $\vec{N}$ и осью OZ тупой, так что $\cos\gamma < 0$.

Сравнивая (14) и (15), получаем

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{(S)} Rdxdy$$

Аналогично можно получить

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{(S)} Pdydz,$$

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{(S)} Qdxdz.$$

Складывая эти три формулы, получим

$$\iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz. \qquad (16)$$

Пусть

$$\vec{F} = \vec{i}\,P + \vec{j}Q + \vec{k}R$$

есть вектор-функция. Комбинация

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{F}$$

называется **дивергенцией** функции $\vec{F}$ и обозначается как $\operatorname{div} \vec{F}$. Заметим, что $\operatorname{div} \vec{F}$ есть скалярная функция.

Вводя вектор $d\vec{S} = \vec{i}\,dydz + \vec{j}\,dxdz + \vec{k}dxdy$, запишем (16) в виде

$$\iint\limits_{(S)} (\vec{F}, d\vec{S}) = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dxdydz.$$

Эта формула и называется формулой Остроградского-Гаусса. Она связывает поверхностный интеграл второго рода по замкнутой поверхности с тройным интегралом по объему, ограниченному этой поверхностью.

Полевые операции

Пусть в трехмерном пространстве задана функция $\varphi(x, y, z)$. В физике такая ситуация называется **скалярным полем**.

Пусть в трехмерном пространстве задана вектор-функция

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{i}P(x, y, z) + \vec{j}Q(x, y, z) + \vec{k}R(x, y, z).$$

В физике такая ситуация называется **векторным полем**.

Введем еще **оператор**

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z},$$

где у производных стоят пустые позиции, в которые будут подставляться некоторые функции. Символ ∇ читается «набла».

Полевые операции.

1. $$\operatorname{grad}\varphi=\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\vec{\nabla}\varphi;$$

2. $$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\left(\vec{\nabla},\vec{F}\right);$$

3. $$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left[\vec{\nabla},\vec{F}\right].$$

Операция	Тип аргумента	Тип результата	Выражение через ∇
grad φ	скаляр	вектор	$\vec{\nabla}\varphi$
div $\vec{F}$	вектор	скаляр	$\left(\vec{\nabla}, \vec{F}\right)$
rot $\vec{F}$	вектор	вектор	$\left[\vec{\nabla}, \vec{F}\right]$

Теорема о градиенте

Запишем в полной форме уравнение Остроградского-Гаусса

$$\iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz. \qquad (18)$$

Возьмем $P = \varphi$, $Q = R = 0$. Подставляя это в (18), получим:

$$\iint\limits_{(S)} \varphi dydz = \iiint\limits_{(V)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dxdydz.$$

Возьмем $Q = \varphi$, $P = R = 0$. Подставляя это в (18), получим:

$$\iint\limits_{(S)} \varphi dzdx = \iiint\limits_{(V)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dxdydz.$$

Возьмем $R = \varphi$, $P = Q = 0$. Подставляя это в (18), получим:

$$\iint\limits_{(S)} \varphi dxdy = \iiint\limits_{(V)} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dxdydz.$$

Умножая первое соотношение на $\vec{i}$, второе – на $\vec{j}$, третье – на $\vec{k}$ и складывая, получим соотношение, которое называется теоремой о градиенте:

$$\iint\limits_{(S)} \varphi d\vec{S} = \iiint\limits_{(V)} \mathrm{grad}\varphi \, dxdydz.$$

Теорема о роторе.

Рассмотрим интеграл $\iint\limits_{(S)}\left[\vec{F},d\vec{S}\right]$ и сведем его к тройному интегралу используя формулу Остроградского-Гаусса. Имеем

$$\left[\vec{F},d\vec{S}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ P & Q & R\\ dydz & dzdx & dxdy\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(Qdxdy-Rdzdx\right)+\vec{j}\left(Rdydz-Pdxdy\right)+\vec{k}\left(Pdzdx-Qdydz\right).$$

Поэтому

$$\iint\limits_{(S)}\left[\vec{F},d\vec{S}\right]=\vec{i}\iint\limits_{(S)}Qdxdy-Rdzdx+\vec{j}\iint\limits_{(S)}Rdydz-Pdxdy+\vec{k}\iint\limits_{(S)}Pdzdx-Qdydz.$$

Применяя к каждому слагаемому формулу Остроградского-Гаусса, получим

$$\iint\limits_{(S)}\left[\vec{F},d\vec{S}\,\right]=\iiint\limits_{(V)}\left[\,\vec{i}\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]dxdydz.$$

Сравнивая подынтегральное выражение с явным выражением для ротора (17), окончательно получаем соотношение

$$\iint\limits_{(S)}\left[\vec{F},d\vec{S}\,\right]=-\iiint\limits_{(V)}\operatorname{rot}\vec{F}dxdydz,$$

которое и называется теоремой о роторе.