Здравствуйте!

Лекция №7-8

Гармонический ряд

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots, \quad s > 0,$$

называется **гармоническим рядом**.

Теорема. Гармонический ряд сходится при $s>1$ и расходится при $s\le 1$.

Доказательство.

Рассмотрим варианты.

1. $s=1$.

В этом случае гармонический ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots.$$

Рассмотрим группу слагаемых следующего вида:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Очевидно, что в этой группе всего n слагаемых и самым маленьким является последнее слагаемое. Поэтому

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}\ge n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Теперь в ряде $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ сгруппируем слагаемые следующим образом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{n=2}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{n=4}+\ldots.$$

Группа $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$ соответствует $n=2$, группа $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$ соответствует $n=4$ и т.д. Но тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots>$$

$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=+\infty$$

и поэтому $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ **расходится.**

2. $0 < s < 1$.

Но в этом случае $n^s \le n$, $\dfrac{1}{n^s} \ge \dfrac{1}{n}$ и поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s} \ge \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s} = +\infty$, и поэтому в этом случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ **расходится.**

3. $s > 1$.

В этом случае $s = 1 + \sigma$ и $\sigma > 0$. Рассмотрим группу слагаемых вида

$$\frac{1}{(n+1)^s} + \frac{1}{(n+2)^s} + \ldots + \frac{1}{(2n)^s}.$$

В этой группе n слагаемых и каждое из них меньше $1/n^s$. Поэтому имеем

$$\frac{1}{(n+1)^s} + \frac{1}{(n+2)^s} + \ldots + \frac{1}{(2n)^s} < n \cdot \frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^\sigma}.$$

Теперь сгруппируем в гармоническом ряде слагаемые в группы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \underbrace{\left(\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}\right)}_{n=2} + \underbrace{\left(\frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s}\right)}_{n=4} + \ldots .$$

Группа $\left(\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}\right)$ соответствует $n=2$ и поэтому не превосходит $\frac{1}{2^\sigma}$;

Группа $\left(\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}\right)$ соответствует $n=4$ и поэтому не превосходит $\frac{1}{4^\sigma}=\frac{1}{2^{2\sigma}}$; последующая группа не превосходит $\frac{1}{8^\sigma}=\frac{1}{2^{3\sigma}}$ и т.д.

Окончательно получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}<1+\frac{1}{2^s}+\left(\frac{1}{2^\sigma}+\frac{1}{2^{2\sigma}}+\frac{1}{2^{3\sigma}}+\ldots\right).$$

Но стоящий в скобках ряд есть геометрическая прогрессия с $q=\frac{1}{2^\sigma}<1$; поэтому он сходится и, по теореме 2, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

Следствие. Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} n^s a_n = K,\quad 0 < K < \infty$. Тогда при $s > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $s \le 1$ – расходится.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ с $b_n = \dfrac{1}{n^s}$. Тогда $\dfrac{a_n}{b_n} = n^s a_n$ при выполнении условия $\lim\limits_{n\to\infty} n^s a_n = K,\quad 0 < K < \infty$ сходятся или расходятся одновременно (см. теорему 4).

Заметим, что это не означает, что сходимость любого ряда можно выяснить с помощью этого признака. Например, для ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^s}{\ln n} = +\infty$ при любом $s > 0$ и следствие не работает.

Отсутствие универсального ряда для построения признака сходимости

Итак, мы имеем в данный момент три признака сходимости числовых рядов. Два из них (Коши и Даламбера) основаны на сравнении исследуемого ряда с геометрической прогрессией, последний – на сравнении исследуемого ряда с гармоническим рядом. Однако, все эти признаки не являются универсальными и всегда можно привести пример ряда, вопрос о сходимости или расходимости которого не может быть решен с помощью данного признака.

В чем здесь дело? Ряды выбраны неудачно, или найти универсальный ряд для построения признака сходимости принципиально невозможно? Оказывается, верно последнее.

Теорема 1. Для каждого сходящегося ряда можно построить ряд, который
а) также сходится, но
б) вопрос об его сходимости не может быть решен на основании сравнения с исходным рядом.

Доказательство.

Пусть дан сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Пусть $\alpha_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ есть его остаток после n-го слагаемого.

Построим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ со слагаемыми $b_1 = 0, \quad b_k = \sqrt{\alpha_{k-1}} - \sqrt{\alpha_k}$, $k = \overline{2,\infty}$. Что можно сказать об этом ряде?

а) Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \left(\sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_2}\right) + \left(\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_3}\right) + \ldots + \left(\sqrt{\alpha_{n-1}} - \sqrt{\alpha_n}\right) =$$

$$= \sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\alpha_1},$$

так что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ **сходится. Но**

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{\sqrt{\alpha_{n-1}} - \sqrt{\alpha_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{\alpha_{n-1}} + \sqrt{\alpha_n}\right) = 0$

и поэтому теорема 4 не работает и вопрос о сходимости построенного ряда не может быть решен на основании его сравнения с исходным рядом.

Теорема 2. Для каждого расходящегося ряда можно построить ряд, который
а) также расходится, но
б) вопрос об его расходимости не может быть решен на основании сравнения с исходным рядом.

Доказательство.

Пусть дан расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Обозначим через $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ его частную сумму. Расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ означает, что $\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$ (обозначение: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$).

Построим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ со слагаемыми $b_1 = \sqrt{A_1}$, $b_k = \sqrt{A_k} - \sqrt{A_{k-1}}$, $k = \overline{2,\infty}$. Что можно сказать об этом ряде?

а) Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sqrt{A_1} + \left(\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}\right) + \left(\sqrt{A_3} - \sqrt{A_2}\right) + \ldots + \left(\sqrt{A_n} - \sqrt{A_{n-1}}\right) =$$

$$= \sqrt{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,$$

то есть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$, так что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ **расходится. Но**

б) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{\sqrt{A_n} - \sqrt{A_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{A_n} + \sqrt{A_{n-1}}\right) = +\infty$$

и поэтому теорема 4 не работает и вопрос о расходимости построенного ряда не может быть решен на основании его сравнения с исходным рядом.

Вывод: не существует универсального ряда, из сравнения с которым можно было бы решить вопрос о сходимости или расходимость всех остальных рядов.

Интегральный признак Коши

Пусть функция $f(x)$

1. определена на промежутке $[1,+\infty)$;
2. монотонно убывает и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Рассмотрим ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$, то есть слагаемые этого ряда имеют вид $a_k = f(k)$.

Теорема. При указанных выше ограничениях ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ **сходится одновременно с несобственным интегралом** $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$**.**

Доказательство.

1. Основное неравенство.

Обозначим $F(x)=\int\limits_1^x f(u)du$. Так как $f(x)\ge 0$, то $F(x)\uparrow$. Далее имеем

$$F(k+1)-F(k)=F'(k+\theta)=f(k+\theta).$$

В силу монотонного убывания $f(x)$

$$f(k+1)\le f(k+\theta)\le f(k),$$

и поэтому в данном случае

$$f(k+1)\le F(k+1)-F(k)\le f(k).$$

Это неравенство мы условно будем называть основным неравенством.

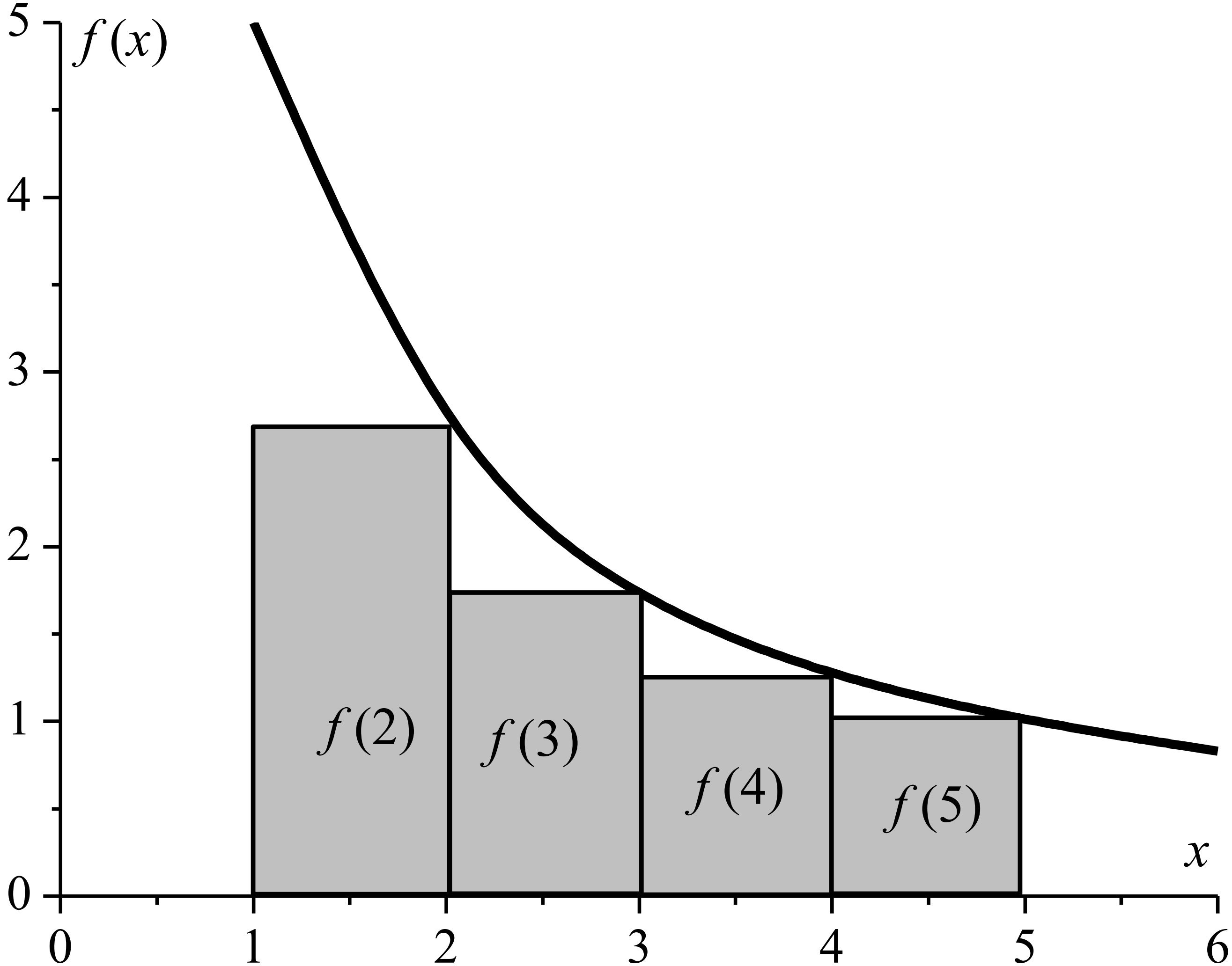
2. Пусть интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится. Это значит, что $\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) < +\infty$. Но тогда имеем

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) = \sum_{s=2}^{n+1} f(s) \le \sum_{k=1}^{n} \left[F(k+1) - F(k)\right] =$$
$$= \big(F(2)-F(1)\big) + \big(F(3)-F(2)\big) + \big(F(4)-F(3)\big) + \ldots + \big(F(n+1)-F(n)\big) =$$
$$= F(n+1) - F(1).$$

Переходя к пределу $n \to \infty$, получаем, что

$$\sum_{s=2}^{\infty} f(s) \le F(+\infty) - F(1) = \int_1^{\infty} f(u)du,$$

откуда и следует, что ряд $\sum_{s=2}^{\infty} f(s)$ сходится.



5
4
3
2
1
0
f(x)
f(2)
f(3)
f(4)
f(5)
x
0
1
2
3
4
5
6

3. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится.

Тогда имеем

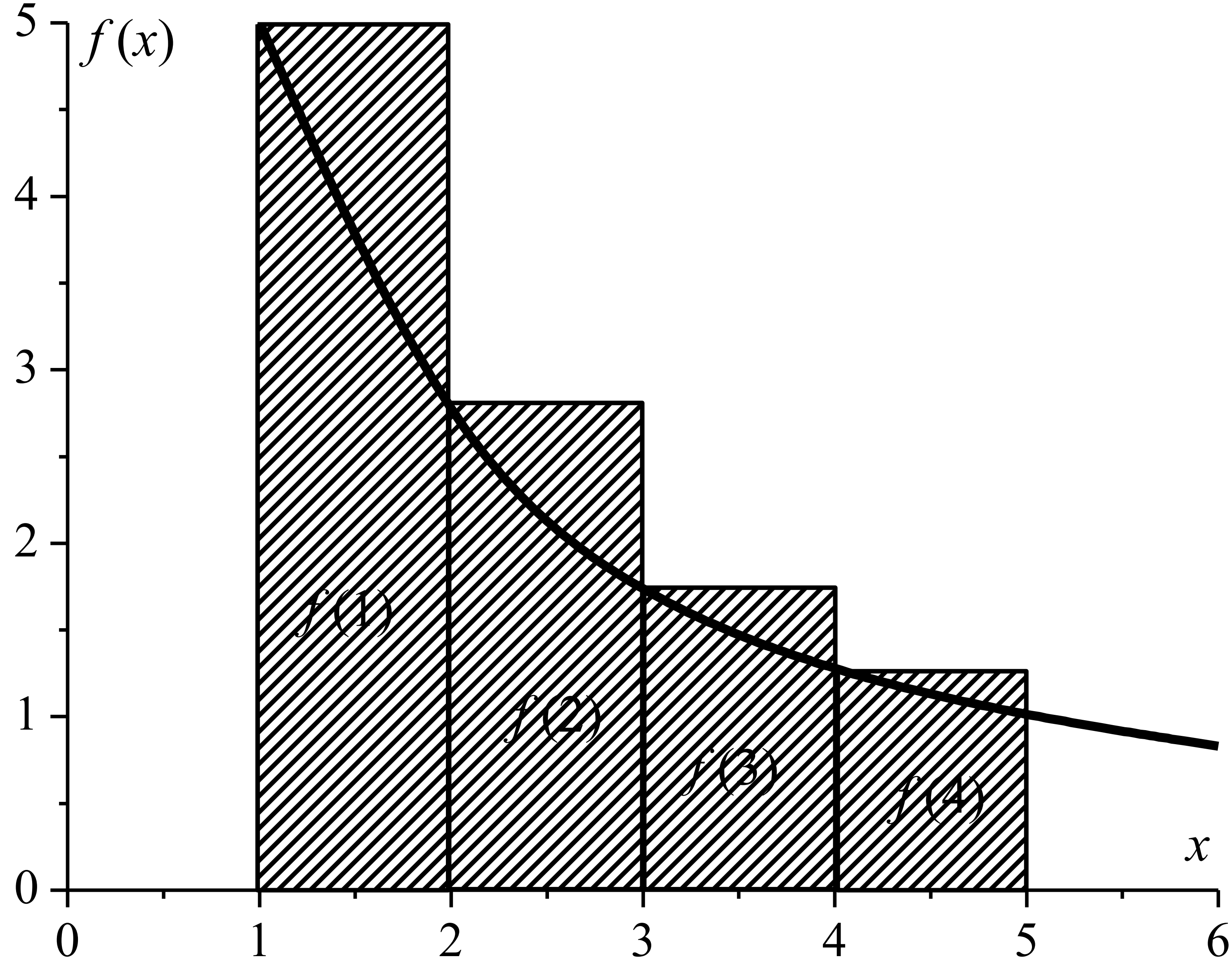
$$\sum_{k=1}^{n}\left[F(k+1)-F(k)\right]=F(n+1)-F(1)\le\sum_{k=1}^{n} f(k),$$

то есть $F(n+1)-F(1)\le\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Переходя к пределу $n\to\infty$, получаем, что

$$F(+\infty)-F(1)=\int_{1}^{\infty} f(u)du\le\sum_{s=1}^{\infty} f(s),$$

откуда и следует, что интеграл $\int_{1}^{\infty} f(u)du$ сходится.



f (x)
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
x
f (1)
f (2)
f (3)
f (4)

Оценка остатка сходящегося ряда

При нахождении суммы ряда на ЭВМ, конечно, невозможно просуммировать бесконечное число слагаемых, всегда приходится ограничиваться какой-то частной суммой. Но при этом необходимо иметь какую-то оценку погрешности, то есть оценку остатка сходящегося ряда. Ниже будет получена одна из таких оценок.

Вспомним основное неравенство предыдущей теоремы:

$$f(k+1) \le F(k+1) - F(k) \le f(k).$$

Тогда имеем

$$\sum_{k=n}^{N} f(k+1) = \sum_{s=n+1}^{N+1} f(s) \le \sum_{k=n}^{N} \left[F(k+1) - F(k)\right] = F(N+1) - F(n)$$

Переходя к пределу $N \to \infty$, получаем

$$\alpha_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{s=n+1}^{N+1} f(s) \le F(+\infty) - F(n) = \int_n^{\infty} f(u)du.$$

С другой стороны получаем

$$\sum_{k=n+1}^{N}\left[F(k+1)-F(k)\right]=F(N+1)-F(n+1)\le\sum_{k=n+1}^{N}f(k)$$

Переходя к пределу $N\to\infty$, получаем

$$F(+\infty)-F(n+1)=\int_{n+1}^{\infty}f(u)du\le\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}f(k)=\alpha_n.$$

Объединяя эти два неравенства, получаем окончательно

$$\int_{n+1}^{\infty}f(u)du\le\alpha_n\le\int_{n}^{\infty}f(u)du.$$

Это и дает искомую оценку остатка сходящегося ряда.