Здравствуйте!

Лекция №6

Интегралы Фруллани

Пусть

1. функция $f(x)$ определена и непрерывна при $x \geq 0$;
2. существует конечный $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(+\infty)$;
3. $0 < a < b$.

Тогда

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \left[f(0) - f(+\infty) \right] \ln \frac{b}{a}$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx.$$

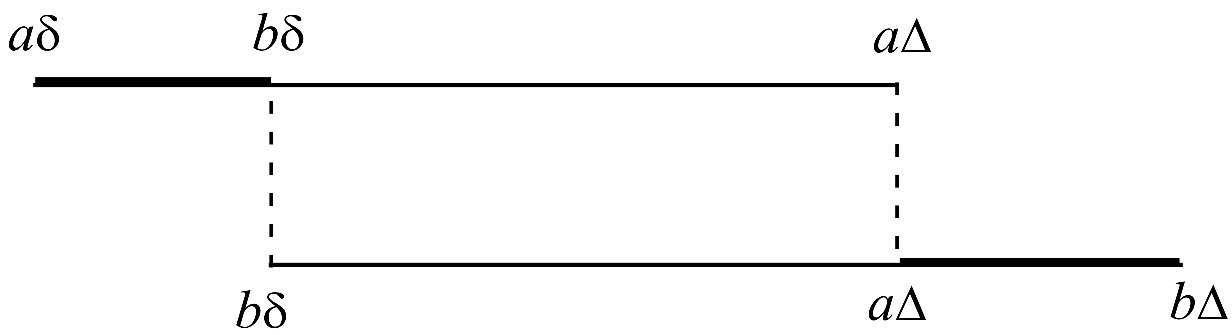
Имеем

$$\int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(bx)}{x} dx =$$

В первом интеграле сделаем замену переменных $z = ax$, во втором – $z = bx$: получаем

$$= \int_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(z)}{z} dz - \int_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz =$$

И теперь – самое интересное. Посмотрите на области интегрирования первого и второго интегралов :



У них есть общая часть – отрезок $[b\delta, a\Delta]$. Подынтегральные функции одинаковы, интегралы вычитаются – следовательно, интегралы по этой области сокращаются. Остается

$$= \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z} dz - \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z} dz =$$

А теперь срабатывает первая теорема о среднем

$$= f(\xi) \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{dz}{z} - f(\eta) \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{dz}{z} = f(\xi) \ln \frac{b}{a} - f(\eta) \ln \frac{b}{a},$$

где $a\delta < \xi < b\delta,\ a\Delta < \eta < b\Delta$.

А теперь сделаем предельный переход при $\delta \to 0$, $\Delta \to +\infty$. Тогда $\xi \to 0$, $\eta \to +\infty$ и мы получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\delta \to 0, \Delta \to +\infty} \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \left[f(0) - f(+\infty) \right] \ln \frac{b}{a}.$$

Интеграл $\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ называется интегралом Фруллани. Полученная формула позволяет легко вычислять их.

Интегральные неравенства

Неравенство Гёльдера.

Выведем одно из важнейших неравенств математического анализа – неравенство Гёльдера.

Пусть p и q – вещественные числа, такие, что

1. $p \geq 1, \quad q \geq 1$:

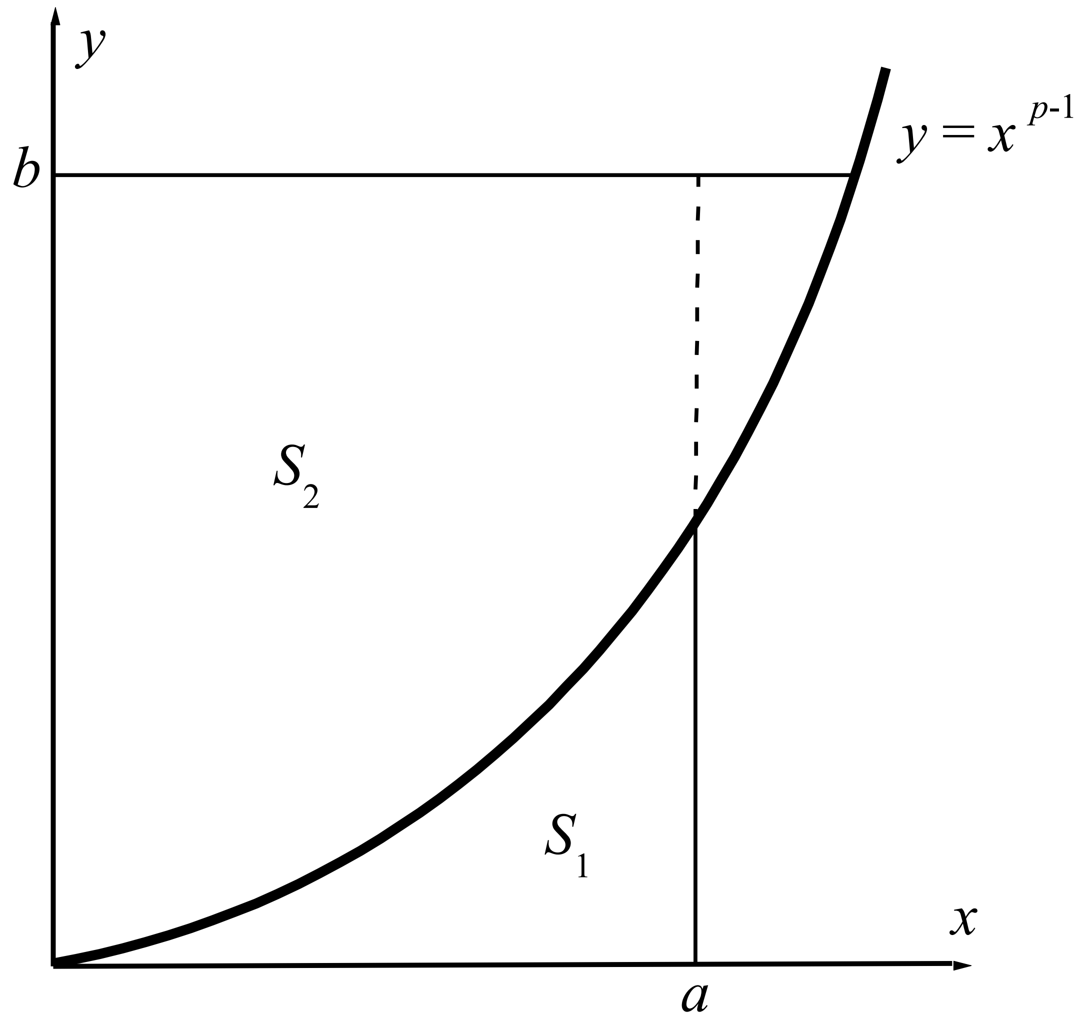
2. (самое главное) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Прежде, чем выводить само неравенство, выведем некоторые промежуточные формулы, чтобы потом не отвлекаться. Имеем

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}; \; (p-1)q = p; \quad q = \frac{p}{p-1}; \quad q-1 = \frac{p}{p-1} - 1 = \frac{1}{p-1}.$$

Неравенство Гёльдера в простейшей форме

Рассмотрим график функции $y = x^{p-1}$



Сосчитаем площади областей, указанных на рисунке. Имеем

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}.$$

Из уравнения $y = x^{p-1}$, следует, что $x = y^{1/(p-1)} = y^{q-1}$ (см. вспомогательные формулы) и поэтому

$$S_2 = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}.$$

Но, как видно из рисунка, $S_1 + S_2 \geq ab$, и поэтому

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

При выводе этой формулы неявно предполагалось, что $a \geq 0$ и $b \geq 0$. Для произвольных a и b это неравенство можно записать в виде

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

Это и есть знаменитое **неравенство Гёльдера**.

Неравенство Гёльдера для сумм

Пусть даны два набора чисел – $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$. Возьмем в неравенстве Гёльдера

$$a = \frac{|x_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}} \text{ и } b = \frac{|y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}}.$$

Тогда неравенство Гёльдера даёт

$$\frac{|x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}} \le \frac{|x_i|^p}{p\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \frac{|y_i|^q}{q\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}.$$

Складывая все эти неравенства, получим

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}} \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

откуда

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\right| \le \sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q},$$

что и представляет собой неравенство Гёльдера для сумм.

В случае $p = 2$ также и $q = 2$ неравенство Гёльдера принимает вид

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\right| \le \sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}y_i^2}\,.$$

Неравенство Гёльдера для интегралов

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две функции, интегрируемые на $[a,b]$. Возьмем в неравенстве Гёльдера

$$a=\frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}} \text{ и } b=\frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}}.$$

Тогда неравенство Гёльдера даёт

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}}\le\frac{|f(x)|^p}{p\int_a^b |f(x)|^p\,dx}+\frac{|g(x)|^q}{q\int_a^b |g(x)|^q\,dx}.$$

Интегрируя это неравенство, получим

$$\frac{\int_a^b | f(x)g(x) | dx}{\left(\int_a^b | f(x) |^p \, dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b | g(x) |^q \, dx\right)^{1/q}} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

откуда получаем

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \int_a^b | f(x)g(x) | dx \le \left(\int_a^b | f(x) |^p \, dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b | g(x) |^q \, dx\right)^{1/q}$$

что и представляет собой неравенство Гёльдера для интегралов.

В случае $p = 2$ также и $q = 2$ и неравенство Гёльдера принимает вид

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \int_a^b | f(x)g(x) | dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx}.$$

Это неравенство называется неравенством Буняковского–Коши–Шварца.

Неравенство Минковского

Неравенство Минковского для сумм.

Пусть даны два набора чисел – $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$. Тогда имеем

$$\left(|x_i| + |y_i|\right)^p = \left(|x_i| + |y_i|\right) \cdot \left(|x_i| + |y_i|\right)^{p-1} =$$

$$= |x_i| \cdot \left(|x_i| + |y_i|\right)^{p-1} + |y_i| \cdot \left(|x_i| + |y_i|\right)^{p-1}.$$

Просуммируем эти выражения и к каждой сумме в правой части применим неравенство Гёльдера. Тогда получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left(|x_i| + |y_i|\right)^p \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(|x_i| + |y_i|\right)^{(p-1)q}\right)^{1/q} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(|x_i| + |y_i|\right)^{(p-1)q}\right)^{1/q}.$$

Но (см. вспомогательные формулы) $(p-1)q = p$, и мы получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|+|y_i|\right)^p \le \left[\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|+|y_i|\right)^p\right)^{1/q}$$

Деля обе части неравенства на $\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|+|y_i|\right)^p\right)^{1/q}$ и учитывая, что $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, получим неравенство

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i+y_i|\right)^p\right]^{1/p} \le \left[\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|+|y_i|\right)^p\right]^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}$$

которое и носит название **неравенства Минковского.** В частном случае $p = 2$ оно принимает вид

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2},$$

которое Вы знаете еще со школы (длина стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон).

Неравенство Минковского для интегралов.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две функции, интегрируемые на $[a,b]$. Имеем, аналогично предыдущему,

$$\left(|f(x)|+|g(x)|\right)^p = |f(x)|\cdot\left(|f(x)|+|g(x)|\right)^{p-1} + |g(x)|\cdot\left(|f(x)|+|g(x)|\right)^{p-1}$$

Интегрируя и применяя к каждому интегралу в правой части неравенство Гёльдера для интегралов, получаем

$$\int_a^b \left(|f(x)|+|g(x)|\right)^p dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b \left(|f(x)|+|g(x)|\right)^{(p-1)q} dx\right)^{1/q} +$$

$$+\left(\int_a^b |g(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b \left(|f(x)|+|g(x)|\right)^{(p-1)q} dx\right)^{1/q}.$$

Принимая снова во внимание, что $(p-1)q = p$ будем иметь

$$\int_a^b \left(| f(x)| + | g(x)|\right)^p dx \le$$

$$\le \left[\left(\int_a^b | f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b | g(x)|^p \, dx\right)^{1/p}\right] \cdot \left(\int_a^b \left(| f(x)| + | g(x)|\right)^p dx\right)^{1/q}$$

Деля на $\left(\int_a^b \left(| f(x)| + | g(x)|\right)^p dx\right)^{1/q}$ и снова учитывая, что $1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$,

получим неравенство

$$\left[\int_a^b | f(x) + g(x)|^p \, dx\right]^{1/p} \le \left[\int_a^b \left(| f(x)| + | g(x)|\right)^p dx\right]^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int_a^b | f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b | g(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

которое также носит название **неравенства Минковского.**

В частном случае $p = 2$ оно принимает вид

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx} \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

Неравенство Иенсена

Это неравенство мы выведем не очень строго.

Пусть

1. $f(x)$ есть выпуклая на $[a,b]$ функция:
2. $p(x) \geq 0$ и $\int_a^b p(x)dx = 1$;
3. $\varphi(x)$ непрерывная функция.

Вспомним теперь неравенство Иенсена

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

и сделаем в нем следующие замены:

$\lambda_i = p(x_i)\Delta x_i$, а x_i заменим на $\varphi(x_i)$. Тогда неравенство Иенсена примет вид

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\,p(x_i)\Delta x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\Delta x_i\, f(\varphi(x_i)).$$

Сделаем теперь в этом неравенстве предельный переход $\max_i \Delta x_i \to 0.$

Тогда суммы перейдут в интегралы, и мы получим неравенство

$$f\left(\int_a^b \varphi(x)\,p(x)dx\right)\le\int_a^b f(\varphi(x))\,p(x)dx.$$

Это неравенство и называется неравенством Иенсена в интегральной форме.

Конец третьей части