Здравствуйте!

Лекция №7

Часть 4

Числовые ряды

Числовые ряды

Определения

Пусть дана последовательность вещественных чисел $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$. Образуем новую последовательность по правилу $A_1 = a_1;$ $A_2 = a_1 + a_2;$ $A_3 = a_1 + a_2 + a_3;$ $\ldots$; $A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Эти величины называются **частными суммами** числового ряда, а слагаемое a_n называют **общим членом** ряда.

Рассмотрим теперь $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Он называется **числовым рядом** и обозначается символом

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Если этот предел **существует и конечен**, то говорят, что числовой ряд **сходится**, а само значение предела, то есть величину A, называют **суммой** числового ряда. Если этот предел **не существует или бесконечен**, то говорят, что числовой ряд **расходится** (так как в данной главе других рядов не будет, то слово «числовой» мы будем опускать).

Обратите внимание на одну деталь: индекс суммирования в знаке бесконечной суммы может быть любым, то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{s=1}^{\infty} a_s = \sum_{r=1}^{\infty} a_r = \sum_{j=1}^{\infty} a_j = \ldots,$$

от этого ничего не меняется. Как говорят, индекс суммирования является **немым индексом,** то есть он может быть обозначен **любой** буквой.

Величина

$$\alpha_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

называется **остатком ряда после *n*-го слагаемого.** Его можно записать и так:

$$\alpha_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} a_k \,.$$

Простейшие свойства сходящихся рядов

1. Если ряд сходится, то сходится любой из его остатков. Наоборот, из сходимости остатка вытекает сходимость исходного ряда.

Доказательство.

Имеем:

$$A_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$$

– частная сумма исходного ряда и

$$A'_m = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}$$

– частная сумма остатка ряда после n-го слагаемого. Очевидно, что между этими величинами имеет место соотношение

$$A'_m = A_{n+m} - A_n$$

Если ряд сходится $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{m\to\infty} A_{n+m} = A$ $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{m\to\infty} A'_m = \alpha_n = A - A_n$ $\Rightarrow$ остаток ряда после n-го слагаемого.

Далее, $A_{n+m} = A'_m + A_n$, и поэтому если сходится остаток ряда после n-го слагаемого $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{m\to\infty} A'_m = \alpha_n$ $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{m\to\infty} A_{n+m} = A = \alpha_n + A_n$ $\Rightarrow$ исходный ряд сходится.

Обратите внимание на важное для дальнейшего соотношение

$$A = A_n + \alpha_n.$$

Следствие. Отбрасывание или изменение **конечного** числа членов ряда не изменяет его сходимости.

2. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Действительно, из соотношения $\alpha_n = A - A_n$ получаем

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = A - \lim_{n\to\infty} A_n = A - A = 0.$$

3. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то его общий член стремится к нулю, то есть $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Действительно, из определения частных сумм легко видеть, что $a_n = A_n - A_{n-1}$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} = A - A = 0.$$

Следствие. **(важно!)** Признак **расходимости** ряда.

Если общий член ряда **не** стремится к нулю, то ряд **расходится.**

4. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c a_k$ тоже сходится и верно соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Действительно, для частных сумм наших рядов имеем

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k ; \quad A'_n = \sum_{k=1}^{n} c a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k = c A_n$$

Делая предельный переход $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} A'_n = \sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

5. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ тоже сходится и верно соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k .$$

Действительно, из определения частных сумм рядов получаем

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k ; \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k ; \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k).$$

Отсюда видно, что между частными суммами рядов верно соотношение

$$C_n = A_n \pm B_n .$$

Делая предельный переход, получаем

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \lim_{n\to\infty} A_n \pm \lim_{n\to\infty} B_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k .$$

Признаки сходимости для рядов с положительными членами.

Как и в случае несобственных интегралов, важнейшим элементом теории числовых рядов является следующий: надо, **не вычисляя ряда**, ответить на вопрос, сходится он или нет. В конце концов, если он сходится, то его можно вычислить численно на ЭВМ, а вот если он расходится – попытки сосчитать его численно ни к чему хорошему не приведут.

В данном разделе будут рассмотрены признаки сходимости рядов с положительными членами. Итак, пусть даны два ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ и выполнено условие $\forall n \;\; a_n \ge 0$ и $b_n \ge 0$.

Теорема 1. Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists L < +\infty \ \ \forall n \ \ A_n \le L.$$

Доказательство. Имеем: $A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \ge A_n$ и поэтому с ростом n $A_n \uparrow$. По теореме о существовании предела монотонно возрастающей последовательности, для существования конечного $\lim_{n\to\infty} A_n$ необходимо и достаточно,

$$\exists L < +\infty \ \ \forall n \ \ A_n \le L.$$

Теорема 2. Пусть даны два ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (ряд А) и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (ряд В) с положительными членами и выполнено условие $\forall n \;\; a_n \le b_n$. Тогда из сходимости ряда В следует сходимость ряда А, а из расходимости ряда А – расходимость ряда В.

Доказательство.

1. Пусть ряд В сходится $\Rightarrow \exists L < +\infty \;\; \forall n \;\; B_n \le L$. Но $A_n \le B_n \le L \Rightarrow$ ряд А сходится.

2. Пусть ряд А расходится. Так как в этом случае $A_n \uparrow$, то это означает, что $\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$. Но так как $B_n \ge A_n$, то $\lim_{n\to\infty} B_n \ge \lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$ и поэтому $\lim_{n\to\infty} B_n = +\infty$ и ряд В расходится.

Замечание. Так как отбрасывание или изменение **конечного** числа членов ряда не изменяет его сходимости, то условие $a_n \le b_n$ может выполняться лишь $\forall n > N$.

Признак сходимости Коши.

Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = c$**. Тогда**

если ***c*** **< 1, то ряд** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

если ***c*** **> 1, то ряд** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;

если ***c*** **= 1, то вопрос о сходимости или расходимости ряда** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ не может быть решен на основании данного признака.

Этот признак сходимости носит название признака Коши.

Прежде, чем доказывать признак Коши рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$, который называется **геометрической прогрессией.** Его частные суммы равны

$$Q_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}.$$

Рассмотрим теперь возможные варианты.

1. Пусть $|q| < 1$. Тогда $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ и поэтому $\lim_{n\to\infty} Q_n = \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ **сходится.**

2. Пусть $|q| \ge 1$. Тогда общий член ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ не стремится к нулю и, по признаку расходимости, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ **расходится.**

Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \ge 1$.

Доказательство.

Прежде всего заметим, что существование $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=c$ означает, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \ \forall n>N\ \ c-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<c+\varepsilon.$$

А теперь – варианты.

1. Пусть $c<1$. Возьмем ε настолько малым, чтобы было $c+\varepsilon=q<1$. Но тогда имеем

$$\exists N\ \ \forall n>N\ \ \sqrt[n]{a_n}<c+\varepsilon=q\ \Rightarrow\ a_n<q^n.$$

Но, так как $q<1$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}q^k$ сходится, и, по теореме 2, сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$.

2. Пусть $c > 1$. Возьмем ε настолько малым, чтобы было $c - \varepsilon = q > 1$. Но тогда имеем

$$\exists N \ \ \forall n > N \ \ \sqrt[n]{a_n} > c - \varepsilon = q \ \Rightarrow \ a_n > q^n.$$

Но, так как $q > 1$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ расходится, и, по теореме 2, расходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Теорема 3. Если $\forall n$ выполнено условие $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$, то из сходимости ряда B следует сходимость ряда A, а из расходимости ряда A – расходимость ряда B.

Доказательство.

Имеем следующую цепочку неравенств

$$\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1};\ \frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2};\ \frac{a_4}{a_3} \le \frac{b_4}{b_3};\ \dots\ \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Перемножая эти неравенства, получаем

$$\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1}, \text{ или } a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n.$$

Ссылка на теорему 2 и доказывает эту теорему.

Признак Даламбера

Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=D$**. Тогда**

если *D* < 1, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ **сходится;**

если *D* > 1, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ **расходится;**

если *D* = 1, то вопрос о сходимости или расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ не может быть решен на основании данного признака.

Доказательство.

Прежде всего заметим, что существование $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = D$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; D - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon.$$

1. Пусть $D < 1.$ Возьмем ε настолько малым, чтобы было $D + \varepsilon = q < 1.$ Но тогда имеем

$$\exists N \;\; \forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon = \frac{(D+\varepsilon)^{n+1}}{(D+\varepsilon)^n} = \frac{q^{n+1}}{q^n}.$$

Но, так как $q < 1$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится, и, по теореме 3, сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. Пусть $D>1$. Возьмем ε настолько малым, чтобы было $D-\varepsilon=q>1$. Но тогда имеем

$$\exists N \ \ \forall n>N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}>D-\varepsilon=\frac{(D-\varepsilon)^{n+1}}{(D-\varepsilon)^n}=\frac{q^{n+1}}{q^n}.$$

Но, так как $q>1$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ расходится, и, по теореме 3, расходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Теорема 4. Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=K$ и $0<K<+\infty$. Тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство.

1. Прежде всего отметим, что существование $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=K$ означает, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \ \forall n>N\quad K-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<K+\varepsilon.$$

2. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Но тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(K+\varepsilon)b_k$ также сходится, и, так как $a_n < (K+\varepsilon)b_n$, то, по теореме 2, сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

3. Так как $K > 0$, то всегда можно взять ε настолько малым, чтобы было $K - \varepsilon > 0$. Пусть теперь ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Но тогда сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{K-\varepsilon}$ и, так как $b_n < \frac{a_n}{K-\varepsilon}$, то, по теореме 2, сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.