

Здравствуйте!

Лекция №3

## Производные от неявных функций

Если явно функция одной переменной  $x$  задается выражением  $y = f(x)$ , то ее неявное задание имеет вид уравнения  $F(x, y) = 0$ , не разрешенного относительно  $y$ .

Аналогично, если  $y$  зависит от  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то неявное задание этой функции имеет вид уравнения

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0,$$

не разрешенного относительно  $y$ .

В общем случае можно сразу задавать  $m$  функций  $y_1, y_2, \dots, y_m$  в виде системы из  $m$  уравнений вида

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0. \end{cases}.$$

Начнем со случая функции одной переменной, задаваемой уравнением  $F(x, y) = 0$ . Представим себе, что мы каким-то образом решили это уравнение и нашли явную зависимость  $y$  от  $x$ :  $y = y(x)$ . Если мы эту зависимость подставим в исходное уравнение, то получим тождество

$$F(x, y(x)) \equiv 0.$$

Продифференцируем это соотношение по  $x$ . Заметим, что в левую часть аргумент  $x$  входит в двух видах: сам по себе и как аргумент  $y = y(x)$ . Так как справа при любых  $x$  стоит 0, то получим

$$F'_x(x, y(x)) + F'_y(x, y(x)) \frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Аналогично, в случае уравнения  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ , если бы нам удалось найти явный вид зависимости  $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и подставить его в исходное уравнение, то мы получили бы тождество

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y(x_1, x_2, \dots, x_n)) \equiv 0.$$

Дифференцируя по  $x_i$ , получим

$$F'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, y) + F'_y(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \frac{\partial y}{\partial x_i} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = - \frac{F'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, y)}{F'_y(x_1, x_2, \dots, x_n, y)}.$$

В случае системы уравнений, определяющих  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , если бы удалось выразить их явно, то есть найти  $y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то, после подстановки их обратно в систему, мы получили бы систему тождеств

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), y_2(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), y_2(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), y_2(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)) = 0. \end{cases}$$

Дифференцируя каждое из тождеств, скажем, по  $x_i$ , с учетом того, что  $x_i$  входит как само по себе, так и через  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial F_m(x, y)}{\partial x_i} + \frac{\partial F_m(x, y)}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \overset{\dots\dots\dots}{\frac{\partial F_m(x, y)}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_i}} + \dots + \frac{\partial F_m(x, y)}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0. \end{array} \right. .$$

Эту систему можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно  $\frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \frac{\partial y_2}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial y_m}{\partial x_i}$ . Решив ее обычными методами, можно найти сразу все частные производные.

## Производные высших порядков

Представим себе, что нам задана, скажем, функция  $u = f(x, y, z)$  от трех переменных  $x, y, z$ . Мы можем вычислить частные производные от этой функции по аргументам  $x, y, z$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Но эти производные сами являются функциями от тех же переменных  $x, y, z$ . И от них снова можно вычислять производные по тем же аргументам, которые уже будут называться производными второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y, z); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y, z); \quad \dots$$

Кроме этих производных есть еще и так называемые **смешанные производные**. Это – производные вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y, z); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y, z).$$

От этих вторых производных можно снова вычислять производные, которые будут называться производными третьего порядка и т.д.

**Теорема.** Пусть у функции  $f(x, y)$  существуют смешанные производные  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  и **они непрерывны** в точке  $(x_0, y_0)$ .

Тогда в этой точке они равны друг другу, то есть  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

В общем случае имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Пусть у функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  существуют все смешанные производные до  $k$ -го порядка включительно, и они непрерывны. Тогда значения всех производных до  $k$ -го порядка не зависят от того, в каком порядке производится дифференцирование

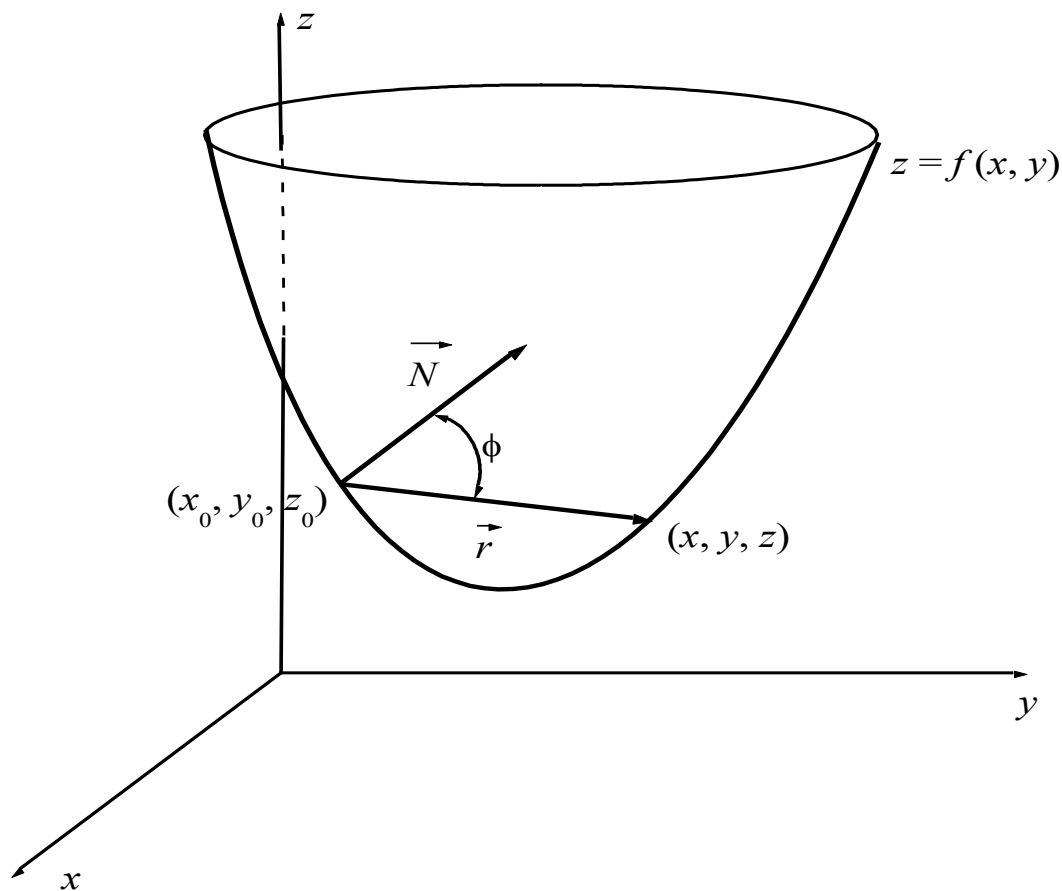
Теперь можно окончательно установить форму записи для смешанных производных. Пусть у функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  дифференцирование по  $x_1$  производилось  $k_1$  раз, по  $x_2$  —  $k_2$  раз, ..., по  $x_n$  —  $k_n$  раз, так что  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ . Тогда соответствующая производная записывается в виде

$$\frac{\partial^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}$$



## Нормаль к поверхности

Рассмотрим сначала поверхность в трехмерном пространстве, заданную в явном виде уравнением  $z = f(x, y)$



Пусть  $M_0$  – некоторая точка этой поверхности с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ , где  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . Пусть  $\vec{N}$  – некоторый вектор, проведенный из этой точки.

Сместимся из точки  $M_0$  в точку  $M$  с координатами  $(x, y, z)$ , лежащую на этой же поверхности, то есть  $z = f(x, y)$ . Две эти точки будет соединять вектор  $\vec{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ . Пусть  $\varphi$  есть угол между векторами  $\vec{N}$  и  $\vec{r}$ .

**Определение.** Вектор  $\vec{N}$  называется **вектором нормали** к поверхности  $z = f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , если  $\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi = \pi/2$ , когда точка  $M$  приближается к точке  $M_0$ .

Другими словами это означает, что вектор  $\vec{N}$  становится перпендикулярным вектору  $\vec{r}$  независимо от того, с какой стороны точка  $M$  приближается к точке  $M_0$ . Поэтому условие того, что  $\vec{N}$  – вектор нормали в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  можно переписать в виде

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{(\vec{r}, \vec{N})}{\|\vec{r}\|} = 0$$

**Теорема.** Если  $f(x, y)$  дифференцируема в точке  $(x_0, y_0)$ , то вектор нормали имеет компоненты

$$(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1).$$

*Доказательство.*

Рассмотрим вектор  $\vec{N} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$ . Смещаясь по поверхности в точку  $(x, y)$ , мы получим

$$z - z_0 = \Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho),$$

где  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$ ,  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ , так что вектор  $\vec{r}$  имеет компоненты

$$\vec{r} = (\Delta x, \Delta y, f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho)).$$

Тогда получим

$$\frac{(\vec{r}, \vec{N})}{\|\vec{r}\|} = \frac{f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y - o(\rho)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho))^2}}$$

Сокращая слагаемые в числителе и деля на  $\rho$ , получим

$$\frac{(\vec{r}, \vec{N})}{\|\vec{r}\|} = \frac{-o(\rho)/\rho}{\sqrt{1 + \left( f'_x(x_0, y_0) \frac{\Delta x}{\rho} + f'_y(x_0, y_0) \frac{\Delta y}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho} \right)^2}}.$$

Числитель этого выражения стремится к нулю при  $\rho \rightarrow 0$ , а знаменатель в любом случае больше 1. Поэтому

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(\vec{r}, \vec{N})}{\|\vec{r}\|} = 0,$$

что и доказывает, что вектор  $\vec{N}$  есть вектор нормали к поверхности в точке  $((x_0, y_0, f(x_0, y_0)))$ .

Пусть теперь поверхность задана неявно уравнением  $F(x, y, z) = 0$ . Заметим, что полученное выше выражение для нормали можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right).$$

Но, по правилу нахождения производных от неявных функций,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

то есть

$$\vec{N} = \left( -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, -1 \right).$$

Умножим все компоненты этого вектора на  $(-F'_z(x_0, y_0, z_0))$ . Это изменит длину вектора  $\vec{N}$  и (может быть) его направление, но не изменит факта перпендикулярности вектору  $\vec{r}$  при  $M \rightarrow M_0$ . Поэтому в данном случае вектором нормали является вектор с компонентами

$$\vec{N} = (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)).$$