Здравствуйте!

Лекция №4

Несобственные интегралы первого рода

Пусть

1. функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,+\infty)$;

2. $\forall A > a$ существует $\int_a^A f(x)dx$.

Произведем теперь предельный переход $A \to +\infty$. Тогда $\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx$ называется **несобственным интегралом первого рода** и обозначается символом $\int_a^\infty f(x)dx$:

$$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx.$$

Если этот предел **существует и конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится** (или: **существует).** Если этот предел равен **бесконечности** или вообще **не существует**, то говорят, что несобственный интеграл **расходится** (или: **не существует).**

Совершенно аналогично определяются и следующие несобственные интегралы первого рода:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{a} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{a} f(x)dx + \lim_{A\to+\infty}\int_{a}^{A} f(x)dx \ (a - \text{любое}).$$

Простейшие свойства несобственных интегралов первого рода

1. Если сходится $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$, то $\forall b > a$ сходится и $\int\limits_b^{\infty} f(x)dx$.

Наоборот, если $\int\limits_b^{\infty} f(x)dx$ сходится и существует $\int\limits_a^{b} f(x)dx$, то сходится и $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$. При этом верно соотношение

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{b} f(x)dx + \int\limits_b^{\infty} f(x)dx.$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $A > b > a$. Тогда имеем

$$\int\limits_a^{A} f(x)dx = \int\limits_a^{b} f(x)dx + \int\limits_b^{A} f(x)dx.$$

Сделаем предельный переход $A \to +\infty$:

$$\lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^{A} f(x)dx = \int\limits_a^{b} f(x)dx + \lim_{A \to +\infty} \int\limits_b^{A} f(x)dx.$$

Так как предел слева существует, то существует и предел справа и $\int_b^\infty f(x)dx$ сходится и соотношение принимает вид

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx.$$

Подумайте сами, что надо изменить в предыдущей фразе, чтобы доказать обратное утверждение.

2. Если $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, то $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_A^{\infty} f(x)dx = 0$

<u>Доказательство</u>.

Согласно предыдущему пункту

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{A} f(x)dx + \int\limits_A^{\infty} f(x)dx$$

Отсюда

$$\int\limits_A^{\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{\infty} f(x)dx - \int\limits_a^{A} f(x)dx.$$

Делая предельный переход $A\to+\infty$, получаем

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_A^{\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{\infty} f(x)dx - \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^{A} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^{\infty} f(x)dx - \int\limits_a^{\infty} f(x)dx = 0.$$

3. Если сходятся $\int_a^\infty f(x)dx$ и $\int_a^\infty g(x)dx$, то сходится также и $\int_a^\infty (f(x)\pm g(x))dx$ и верно соотношение

$$\int_a^\infty (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^\infty f(x)dx\pm\int_a^\infty g(x)dx.$$

<u>Доказательство</u>. Имеем

$$\int_a^A (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^A f(x)dx\pm\int_a^A g(x)dx.$$

Делая предельный переход $A\to+\infty$, получаем

$$\int_a^\infty (f(x)\pm g(x))dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A (f(x)\pm g(x))dx=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx\pm\lim_{A\to+\infty}\int_a^A g(x)dx=\int_a^\infty f(x)dx\pm\int_a^\infty g(x)dx.$$

4. Если сходятся $\int_a^{\infty} f(x)dx$ и c – константа, то сходится и $\int_a^{\infty} cf(x)dx$ и верна формула

$$\int_a^{\infty} cf(x)dx = c\int_a^{\infty} f(x)dx.$$

<u>Доказательство</u>. Имеем

$$\int_a^{A} cf(x)dx = c\int_a^{A} f(x)dx.$$

Делая предельный переход $A \to +\infty$, получаем

$$\int_a^{\infty} cf(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^{A} cf(x)dx = c\cdot\lim_{A\to+\infty}\int_a^{A} f(x)dx = c\int_a^{\infty} f(x)dx.$$

Сходимость несобственных интегралов первого рода от неотрицательных функций

Важнейшим элементом теории несобственных интегралов является следующий: надо, **не вычисляя интеграла**, ответить на вопрос, сходится он или нет. В конце концов, если он сходится, то его можно вычислить численно на ЭВМ, а вот если он расходится – попытки сосчитать его численно ни к чему хорошему не приведут.

В данном разделе мы рассмотрим вопрос о признаках сходимость несобственных интегралов первого рода от неотрицательных функций. В дальнейшем будем предполагать, что $\forall x \in [a, +\infty)$ функции $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$.

Теорема 1. Для того, чтобы $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists L < +\infty \ \forall A > a \ \int_a^{A} f(x)dx \leq L.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию $F(A) = \int_a^{A} f(x)dx$. В силу того, что $f(x) \geq 0$ эта функция монотонно возрастает с ростом A, так как с ростом A промежуток интегрирования увеличивается. Но вспомним теорему о существовании предела монотонно возрастающей функции. Согласно этой теореме, для того, чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{A \to +\infty} F(A)$ необходимо и достаточно, чтобы эта функция была ограничена сверху, то есть, чтобы было выполнено условие

$$\exists L < +\infty \ \forall A > a \ \ F(A) \leq L.$$

Но если заменить $F(A)$ его явным выражением мы как раз и получим условие нашей теоремы.

Теорема 2. Пусть $\forall x \in [a,+\infty) \quad f(x) \le g(x)$**. Тогда**

А) из сходимости $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ **следует сходимость** $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$;

Б) из расходимости $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ **следует расходимость** $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$.

Доказательство.

А) Пусть $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ сходится. Тогда, согласно теореме 1,

$$\exists L < +\infty \ \forall A > a \ \int\limits_a^{A} g(x)dx \le L.$$

Но $\forall x \in [a,+\infty) \quad f(x) \le g(x)$ и поэтому

$$\forall A > a \quad \int\limits_a^{A} f(x)dx \le \int\limits_a^{A} g(x)dx \le L,$$

и, согласно той же теореме 1, $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходится.

Б) Пусть $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ расходится. Так как $f(x) \geq 0$, то это означает, что $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx = +\infty$. Но, так как $g(x) \geq f(x)$, то $\int\limits_a^A g(x)dx \geq \int\limits_a^A f(x)dx$, и поэтому

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A g(x)dx \geq \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = +\infty,$$

что и означает, что $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A g(x)dx = +\infty$, то есть $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ расходится.

Теорема 3. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$**,** $0 < K < +\infty$**. Тогда интегралы** $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ **и** $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ **сходятся или расходятся одновременно.**

Доказательство.

1. В формулировке теоремы сказано, что $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$**.** Согласно определению предела это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b \ \forall x > b \quad K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon. \qquad (*)$$

2. Пусть $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится. В (*) рассмотрим вторую половину неравенства, которую запишем в виде $f(x) < (K+\varepsilon)g(x)$. Тогда имеем следующую цепочку следований (сообразите сами, где идет ссылка на свойства несобственных интегралов и где на теорему 2):

$$\int\limits_a^\infty g(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int\limits_b^\infty g(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int\limits_b^\infty (K+\varepsilon)g(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow$$

$$\int\limits_b^\infty f(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int\limits_a^\infty f(x)dx \text{ сходится.}$$

3. Пусть теперь $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится. Возьмем ε настолько малым, чтобы было $K-\varepsilon>0$. Тогда из левого неравенства в (*) следует, что $g(x)<f(x)/(K-\varepsilon)$ и мы имеем следующую цепочку следований (и снова сообразите сами, где идет ссылка на свойства несобственных интегралов и где на теорему 2):

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int\limits_b^\infty f(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int\limits_b^\infty \frac{f(x)}{K-\varepsilon}dx \text{ сходится} \Rightarrow$$

$$\int\limits_b^\infty g(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int\limits_a^\infty g(x)dx \text{ сходится.}$$

Практический признак сходимости.

Пусть $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\lambda} f(x) = K$**,** $K \neq 0, \ +\infty$**. Тогда** $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ **сходится при** $\lambda > 1$ **и расходится при** $\lambda \leq 1$**.**

(Заметим, что вопрос о том, как же находить λ, остается на данном этапе открытым).

Доказательство.

Возьмем функцию $g(x)$ в виде $g(x) = \dfrac{1}{x^{\lambda}}$. Тогда условие теоремы 3 примет вид $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\lambda} f(x) = K$**,** $K \neq 0, \ +\infty$ и $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходится или расходится одновременно с интегралом $\int\limits_a^{\infty} \dfrac{dx}{x^{\lambda}}$**.** Рассмотрим поэтому вопрос о сходимости этого интеграла.

1. Пусть $\lambda \neq 1$. Тогда

$$\int_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = \left.\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right|_a^A = \frac{A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$

Будут два варианта:

а) $\lambda > 1$. В этом случае $1-\lambda < 0$, поэтому $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{1-\lambda} = 0$ и

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda - 1},$$

так что $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$ сходится.

б) $\lambda < 1$. В этом случае $1-\lambda > 0$, поэтому $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{1-\lambda} = +\infty$ и

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = +\infty,$$

так что $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$ расходится.

2. $\lambda = 1$. Тогда

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \to +\infty} \int_a^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A \to +\infty} (\ln A - \ln a) = +\infty,$$

так что $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x}$ расходится.

Таким образом, $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$ сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda \le 1$. По теореме 3 $\int_a^{\infty} f(x)dx$ также сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda \le 1$.

Все упирается в нахождение величины λ. Как это делать – будет разобрано на практике.