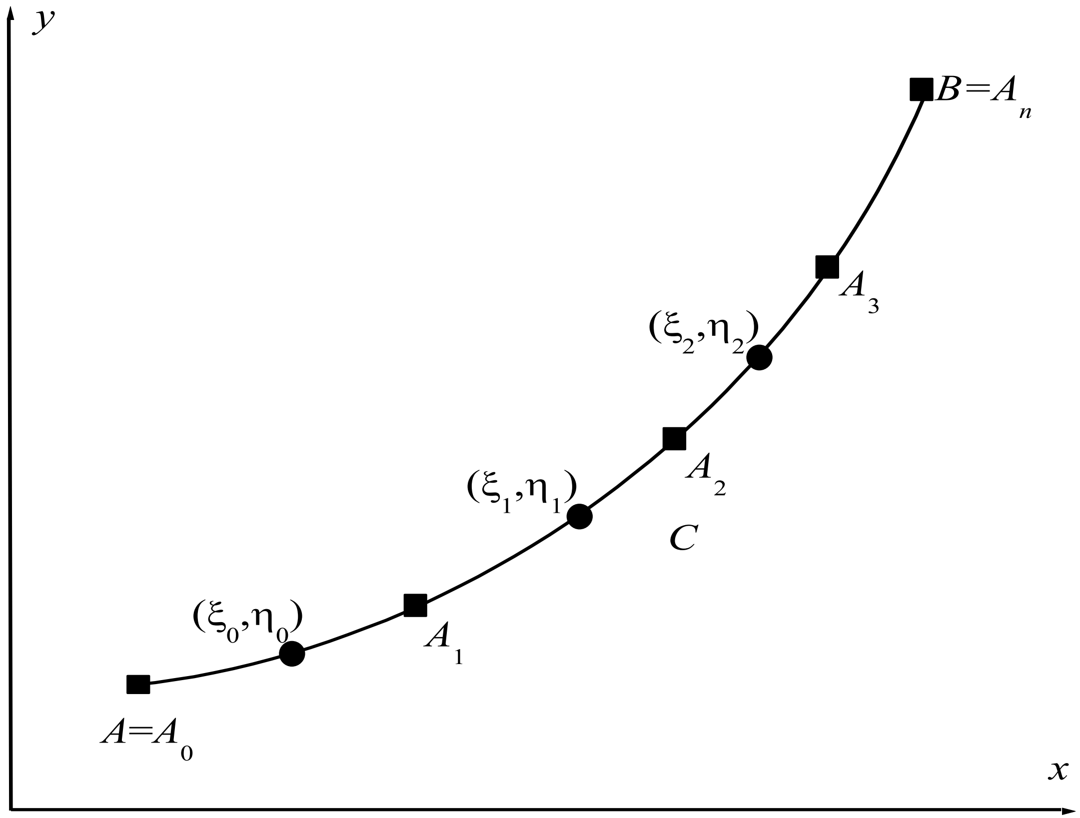
Здравствуйте!

Лекция №1

Криволинейные и кратные интегралы

Криволинейные интегралы первого рода



Пусть на плоскости XOY заданы

1. Некоторая кривая C с граничными точками A и B;
2. Функция двух переменных $f(x,y)$, определенная, по крайней мере, на кривой C;

Проделаем следующую процедуру, которая вскоре станет стандартной.

1. Разобьем всю кривую C на кусочки точками $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ и точку A будем считать точкой A_0, а точку B – точкой A_n.
Пусть Δs_i есть ___________ C между точками A_i и A_{i+1} и $\lambda = \max_i \Delta s_i$.

2. На каждом отрезке кривой C между точками A_i и A_{i+1} выберем произвольным образом некоторую __________________ с координатами (ξ_i, η_i) и составим __________________

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i .$$

3. Сделаем предельный переход $\lambda \to 0$. Если при $\lambda \to 0$ ___________ $\lim \sigma$ и он ______________________ кривой C на кусочки и от способа выбора __________ точки, то он называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y)$ по кривой C и обозначается символом

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_{(AB)} f(x, y)ds.$$

Заметим, что на месте нижнего предела в скобках пишут начальную и конечную точку кривой C, либо сам символ кривой, то есть (C). Заметим также, что

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)\,ds = \int\limits_{(BA)} f(x,y)\,ds.$$

Вычисление криволинейных интегралов первого рода.

Пусть кривая AB задана ________________ уравнениями

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad t_0 \le t \le T,$$

так что точка A получается при $t = t_0$, а точка B – при $t = T$.

Тогда разбиению кривой AB на кусочки соответствует разбиение отрезка $[t_0, T]$

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T.$$

В этом случае

$$\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

По теореме о среднем имеем

$$\Delta s_i = \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2}\,\Delta t_i,$$

где $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ и $t_i < \tau_i < t_{i+1}$.

Так как среднюю точку можно выбирать ____________________, то возьмем ее так: $\xi_i = x(\tau_i)$, $\eta_i = y(\tau_i)$. Тогда

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\tau_i), y(\tau_i))\sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2}\,\Delta t_i.$$

Предельный переход при $\lambda = \max\limits_i \Delta t_i \to 0$ дает

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \int\limits_{(AB)} f(x,y)\,ds = \int_{t_0}^{T} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt,$$

что и дает рабочую формулу для вычисления криволинейного интеграла первого рода.

Частные случаи.

1. ________ *задание кривой.*

Пусть кривая *AB* задана ________ уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$. Тогда, беря в качестве параметра *t* переменную *x*, получим

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx.$$

2. *Кривая в* ___________ *координатах.*

Пусть в ___________ координатах кривая задана уравнением $r = r(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$. Так как $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,d\theta.$$

3. *Пространственная кривая*.

Криволинейный интеграл первого рода по пространственной кривой определяется совершенно аналогично криволинейному интегралу по плоской кривой. Если пространственная кривая задана параметрически

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ t_0 \le t \le T,$$

то

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)ds = \int\limits_{t_0}^{T} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

Криволинейные интегралы первого рода

Геометрический смысл: криволинейный интеграл первого рода по модулю равен площади цилиндрической поверхности, которая ограничена сверху поверхностью $z = f(x, y)$, ограничена снизу плоскостью $z = 0$, имеет направляющую кривую $L = AB$ и вертикальную образующую (т.е. поверхность параллельна оси z).

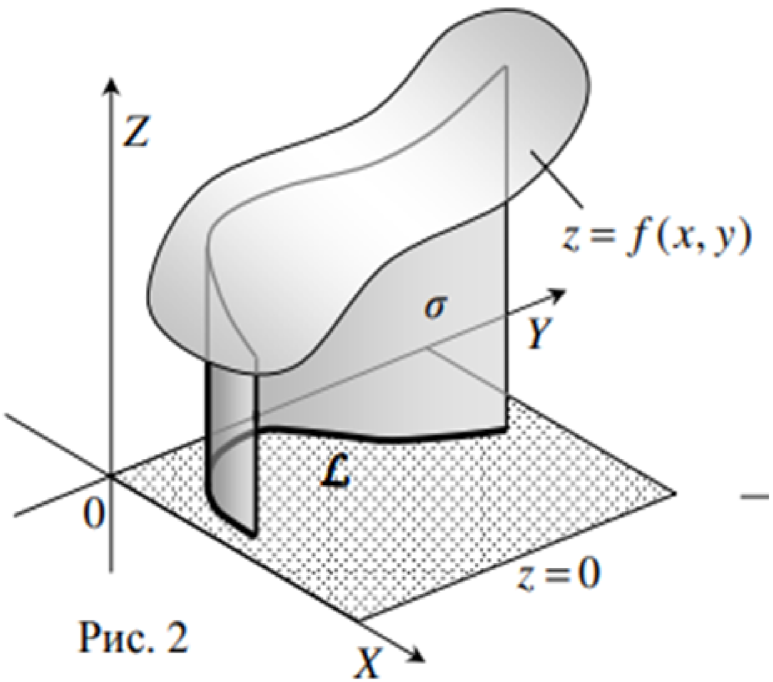


Рис. 2

Криволинейный интеграл первого рода

Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Линия задана уравнением	Элемент дуги *ds*	Переход от криволинейного интеграла к определенному
$y = y(x)$, $a \le x \le b$	$ds = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$	$\int\limits_{(l)} f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$
$x = x(y)$, $c \le y \le d$	$ds = \sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy$	$\int\limits_{(l)} f(x,y)ds = \int\limits_c^d f(x(y),y)\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy$
$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$ $t_1 \le t \le t_2$	$ds = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$	$\int\limits_{(l)} f(x,y,z)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$
$r = r(\varphi)$ $\alpha \le \varphi \le \beta$	$ds = \sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi$	$\int\limits_{(l)} f(x,y)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(x(r,\varphi),y(r,\varphi))\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi$

Приложения криволинейного интеграла первого рода

1. Длина кривой l: $L = \int\limits_l ds$

2. Масса кривой l: $m = \int\limits_l \rho(x, y, z)ds$, где $\rho(x, y, z)$ - линейная плотность кривой.

3. Координаты центра масс кривой

$$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_l x\rho(x, y, z)ds, \quad y_c = \frac{1}{m}\int\limits_l y\rho(x, y, z)ds, \quad z_c = \frac{1}{m}\int\limits_l z\rho(x, y, z)ds,$$