Глава 1. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В настоящей главе рассматриваются вопросы интегрирования функций нескольких независимых переменных по плоским и пространственным областям и приложение таких интегралов к решению геометрических и физических задач.

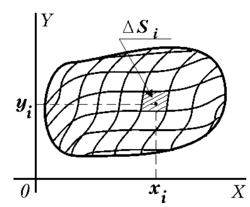
1.1. Двойной интеграл

1.1.1. Понятие и свойства

Двойной интеграл является логическим продолжением понятия определенного интеграла на случай функции двух независимых переменных по плоской области.

Пусть в замкнутой области (D) плоскости XOY определена функция $z = f(x, y)$. Повторим схему, аналогичную схеме построения определенного интеграла.

Разобьем область (D) произвольной сеткой линий на элементарные части $\Delta s_i \quad (i = 1, 2, \dots n)$, вычислим значения функции в произвольной точке каждой элементарной области и составим интегральную сумму.



О п р е д е л е н и е. Интегральной суммой для функции $z = f(x, y)$ по области (D) называется сумма произведений значений функции в выбранных точках на площади соответствующих частичных (элементарных) областей: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\,\Delta\ s_i$.

О п р е д е л е н и е. Двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по области (D) называется предел полученной интегральной суммы при неограниченном увеличении числа разбиений области на части и стремлении площадей всех элементарных участков к нулю.

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\,\Delta\ s_i$$

Область (D) называется областью интегрирования для подынтегральной функции $z = f(x, y)$.

Теорема существования двойного интеграла.
Если подынтегральная функция $f(x, y)$ является непрерывной или кусочно–непрерывной в области (D), то двойной интеграл всегда существует и равен определенному числу.

Геометрический смысл двойного интеграла. Если функция $f(x, y)$ неотрицательна в (D), то двойной интеграл есть объем цилиндрического тела с основанием (D), образующей, параллельной оси Z, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$. $V = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\ ds.$

Если подынтегральная функция в области (D) плоскости XOY тождественно равна единице $f(x, y) \equiv 1$, то двойной интеграл от ds есть площадь области интегрирования (D): $S = \iint\limits_{(D)}\ ds.$

Физический смысл двойного интеграла. Если плоская пластинка, занимающая область (D) в плоскости XOY, имеет переменную поверхностную плотность $\delta(x,\ y)$, то двойной интеграл есть масса этой пластинки. $M = \iint\limits_{(D)} \delta(x, y)\, ds.$

Свойства двойного интеграла во многом повторяют свойства определенного интеграла. Отметим кратко эти свойства.

1. Почленное интегрирование. Двойной интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме итегралов от слагаемых.

$$\iint\limits_{(D)} [\, f(x,\ y)\ \pm\ g(x,\ y)\,]\ ds = \iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\ ds\ \pm\ \iint\limits_{(D)} g(x,\ y)\ ds.$$

2. Вынесение постоянного множителя. Постоянный множитель можно вынести за знак двойного интеграла

$$\iint\limits_{(D)} k \cdot f(x,\ y)\ ds = k \cdot \iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\ ds.$$

3. Разбиение области интегрирования на части. Если область интегрирования разбить на части, то двойной интеграл можно представить в виде суммы интегралов по отдельным частям области

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\ ds = \iint\limits_{(D_1)} f(x, y)\ ds + \iint\limits_{(D_2)} f(x, y)\ ds + \cdots + \iint\limits_{(D_n)} f(x, y)\ ds.$$

4. Оценка двойного интеграла. Если M и m – наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)$ в области (D), то

$$m \cdot S \leq \iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\ ds \leq M \cdot S, \qquad \text{где } S \text{ – площадь области } (D).$$

5. Теорема о среднем для двойного интеграла. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области (D), то справедливо

$\iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\, ds = f(C) \cdot S$, где S– площадь области интегрирования, а C – некоторая точка этой области. Значение функции $f(C)$ называется *средним значением функции в области.* Среднее значение, таким образом, вычисляется по формуле $f(C) = \dfrac{1}{S} \iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\, ds$.

В геометрическом смысле теорема о среднем означает, что объем цилиндрического тела равен объему равновеликого цилиндра с тем же основанием и высотой, равной значению подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования.

1.1.2. Двойной интеграл в прямоугольных координатах

Для вычисления двойного интеграла от данной функции по данной области рекомендуется действовать по следующей схеме.

1) Строится в системе координат XOY область интегрирования.

2) Элементом площади ds является прямоугольник с размерами dx и dy, поэтому $ds = dx\, dy$.

3) Для заданной области (D) выбирается порядок интегрирования в соответствии со схемами 1 или 2, определяются пределы изменения переменных x и y и строится соответствующий повторный (или *двукратный*) интеграл (см. рис. 1 и 2).

Интеграл, стоящий в повторном на первом месте, называется *внешним*, а интеграл, стоящий после внешнего – *внутренним.*

4) Сначала вычисляется внутренний интеграл. При этом одна из переменных x или y, в зависимости от выбранного порядка интегрирования, считается постоянной величиной (в первой из приведенных выше формул такой переменной будет y, во второй – x.)

5) После выполнения внутреннего интегрирования по формуле Ньютона-Лейбница внешний интеграл вычисляется как обычный определенный интеграл.

Схема 1.

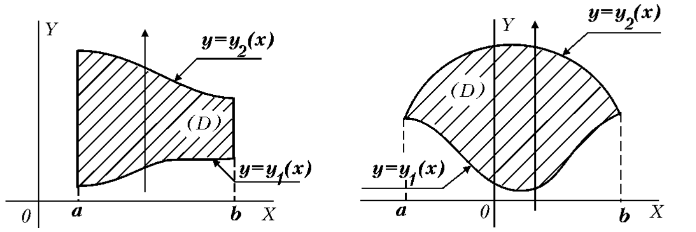


Рис. 1.

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\ ds = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy$$

Схема 2.

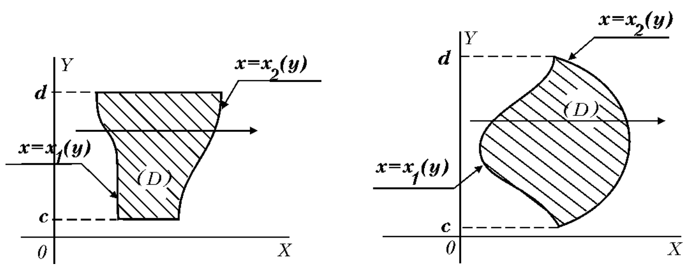


Рис. 2.

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\ ds = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\, dx$$

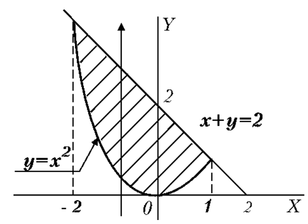
З а м е ч а н и е. Пределы интегрирования во внешнем интеграле всегда постоянны. Ими служат координаты концов отрезка – проекции области (D) на соответствующую координатную ось. Пределы внутреннего интеграла, как правило, переменные. Они представляют собой функции, задающие границы области (D). Лишь в том случае, когда область (D) представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, пределы внутреннего интегрирования также становятся постоянными.

Удобно при расстановке пределов интегрирования использовать "стрелки", пересекающие область снизу вверх параллельно оси OY (для 1-ой схемы расстановки пределов) или слева направо параллельно оси OX (для 2-ой схемы). Те кривые, на которой "стрелки" входят в область, называют линиями *входа*, а те кривые, на которой "стрелки" выходят из области, называют линиями *выхода*.

Задача 1. Записать двойной интеграл по указанной области (D) в виде повторного и расставить пределы интегрирования.

- **1.** Область (D) ограничена линиями $y = x^2$ и $x + y = 2$.

Строим область (D). Из рисунка видно, что область ограничена сверху одной линией – прямой $x + y = 2$, а снизу – другой линией – параболой $y = x^2$, т.е. для данной области удобно расставлять пределы интегрирования в соответствие с 1-ой схемой.



Поэтому спроектируем область на ось OX. Получим отрезок, концами которого являются проекции на ось OX точек пересечения параболы и прямой.
Для нахождения абсцисс крайней левой и крайней правой границ области решаем систему

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x, \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x^2 = 2 - x, \\ x^2 + x - 2 = 0, \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1, \\ x_2 = -2. \end{matrix}$$

Итак, проекцией области на ось OX будет отрезок $[-2;\ 1]$.
Пределы изменения внешней переменной x определены.

Как меняется при этом внутренняя переменная y мы узнаем, выразив ее как функцию x из уравнений, задающих линию входа и линию выхода (при решении системы мы это уже сделали).

Таким образом, для расстановки пределов интегрирования в повторном интеграле мы имеем:

при изменении переменной x в интервале $[-2;\ 1]$ значения переменной y будут находиться в пределах от $y_1(x) = x^2$ (линия входа в область) до $y_2(x) = 2 - x$ (линия выхода). Запишем повторный интеграл

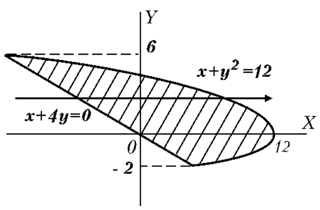
$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

• **2.** Область (D) ограничена линиями: $x+y^2=12$ и $x+4y=0$.

Построим область (D). Она ограничена параболой

$$x+y^2=12 \quad \Rightarrow \quad y^2=-(x-12)$$

с вершиной в точке $O'(12;\ 0)$ и ветвями, направленными влево, и прямой $x+4y=0 \quad \Rightarrow \quad x=-4y$.



Из рисунка видно, что область ограничена слева одной линией –(прямой $x+4y=0$), а справа – другой линией (параболой $x+y^2=12$), т.е. для данной области удобно расставлять пределы интегрирования согласно 2-ой схеме.

Поэтому спроектируем область на ось OY. Получим отрезок, концами которого являются проекции на ось OY точек пересечения параболы и прямой. Для нахождения ординат крайней нижней и крайней верхней точек области решаем систему

$$\begin{cases} x+y^2=12, \\ x+4y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=12-y^2, \\ x=-4y, \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 12-y^2=-4y, \\ y^2-4y-12=0, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1=-2, \\ y_2=6. \end{array}$$

Итак, проекцией области на ось OY будет отрезок $[-2;\ 6]$. Пределы изменения внешней переменной y определены.

Как меняется при этом внутренняя переменная x мы узнаем, выразив ее как функцию y из уравнений, задающих линию входа и линию выхода (при решении системы мы это уже сделали).

Таким образом, для расстановки пределов интегрирования в повторном интеграле мы имеем: при изменении переменной y в интервале $[-2;\ 6]$ значения переменной x будут находиться в пределах от $x_1(y)=-4y$ (линия входа в область) до $x_2(y)=12-y^2$ (линия выхода). Запишем повторный интеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{-2}^{6} dy \int\limits_{-4y}^{12-y^2} f(x,y)\,dx.$$

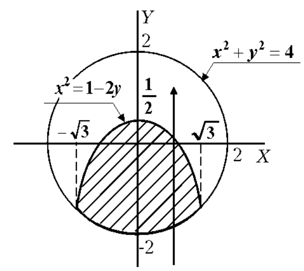
• **3**. Область (D) задана неравенствами: $x^2 + y^2 \le 4; \quad x^2 \le 1 - 2y\}$. Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

Построим область (D). Уравнение $x^2 + y^2 = 4$ – уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 2. Уравнение $x^2 = 1 - 2y-$ уравнение параболы $x^2 = -2(y - 1/2)$ с вершиной в точке $O'(0;\ 1/2)$ и ветвями, направленными вниз.

<u>1-ой способ</u>

Расставляем пределы интегрирования согласно 1-ой схеме.

Спроектируем область на ось OX.



Из рисунка видно, что область ограничена снизу одной линией –(дугой окружности $x^2+y^2 = 4$), а сверху – другой линией (дугой параболы $x^2 = 1 - 2y$). Проекцией области на ось OX будет являться отрезок, концами которого являются проекции на ось OX точек пересечения параболы и окружности.

Для нахождения абсцисс этих точек решаем систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 = 1 - 2y, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y^2 - 2y - 3 = 0, \\ x = \pm\sqrt{1 - 2y}, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y_1 = -1, \quad y_2 = 3, \\ x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = +\sqrt{3}. \end{array}$$

Заметим, что корень $y = 3$ является посторонним.

Итак, проекцией области на ось OX будет отрезок $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$. Пределы изменения переменной x определены.

Для расстановки пределов интегрирования по внутренней переменной y необходимо выразить ее как функцию x из уравнений, задающих линию входа (окружность) и линию выхода (параболу). Из уравнения окружности имеем уравнение нижней границы области интегрирования $y_1(x) = -\sqrt{4 - x^2}$, а из уравнения параболы находим уравнение верхней границы $\quad x^2 = 1 - 2y \ \Rightarrow\ y_2(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)$.

Таким образом, при изменении переменной x в интервале $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$ значения переменной y будут находиться в пределах от

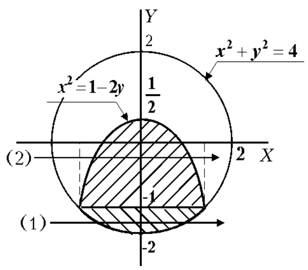
$y_1(x) = -\sqrt{4 - x^2}-$ (линия входа) до $y_2(x) = \frac{1}{2}\,(1-x^2)-$ (линия выхода).

Запишем повторный интеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\ dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}(1-x^2)} f(x,y)\, dy.$$

2-ой способ.

Выберем другой порядок интегрирования и рассмотрим расстановку пределов интегрирования по этой же области по 2-ой схеме. Для этого проектируем область (D) на ось OY. Проекцией, как видно из построения, будет являться отрезок $[-2;\ 1/2]$ на оси OY.



Кроме того, видно, что как левая, так и правая границы фигуры не описываются одним уравнением. (Стрелка (1) пересекает область на левой и правой половинках окружности, а стрелка (2) пересекает область на левой и правой ветвях параболы). Поэтому область интегрирования придется разбить на две части линией $y = -1$.

В первой области переменная y будет изменяться в интервале $[-2;\ -1]$. Пределы изменения переменной x получим, выразив ее из уравнения окружности $x^2 + y^2 = 4$. При этом линией входа будет левая полуокружность $x_1(y) = -\sqrt{4-y^2}$, а линией выхода – правая полуокружность $x_2(y) = +\sqrt{4-y^2}$. Итак, интеграл по 1-ой области

$$\iint\limits_{(D_1)} f(x,y)\ dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\ dx = \int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Во второй области переменная y будет изменяться в интервале $[-1;1/2]$, при этом линией входа будет левая ветвь параболы $x_1(y) = -\sqrt{1-2y}$, а линией выхода – правая ветвь параболы $x_2(y) = +\sqrt{1-2y}$.

Эти уравнения получены выражением переменной x из уравнения параболы $x^2 = 1 - 2y \quad \Rightarrow \quad x(y) = \pm\sqrt{1-2y}$. Таким образом

$$\iint\limits_{(D_2)} f(x,y)\ dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\ dx = \int\limits_{-1}^{1/2} dy \int\limits_{-\sqrt{1-2y}}^{+\sqrt{1-2y}} f(x,y)\,dx.$$

Интеграл по всей области (D) запишется согласно свойству аддитивности в виде суммы двух интегралов

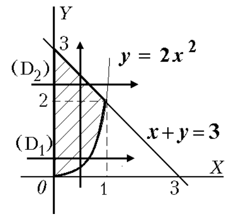
$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\ dx\,dy = \int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-1}^{1/2} dy \int\limits_{-\sqrt{1-2y}}^{+\sqrt{1-2y}} f(x,y)\,dx.$$

Сравнивая два способа, видим, что первый способ для данной области более выгоден, так как в первом случае двойной интеграл записался одним, а не двуми повторными, как во втором.

Задача 2. Изменить порядок интегрирования в интегралах.

• 1. $J = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{y/2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_0^{3-y} f(x,y)\,dx.$

В данном интеграле внешнее интегрирование проводится по y, а внутреннее по x. Поставлена задача сменить порядок интегрирования, т.е провести интегрирование по схеме 1.



С помощью указанных в интеграле пределов восстановим область интегрирования.

Указанные пределы интегрирования в повторных интегралах можно прочесть следующим образом: когда переменная y принимает значения от $y = 0$ до $y = 2$, переменная x изменяется от $x_1(y) = 0-$ (ось OY) до $x_2(y) = \sqrt{y/2}-$ парабола. Когда y принимает значения от $y = 2$ до $y = 3$, то переменная x изменяется от $x_1(y) = 0-$ (ось OY) до $x_2(y) = (3 - y) -$ это прямая линия.

Таким образом, область интегрирования есть криволинейный треугольник (рис. 3.8.)

Проводим через область стрелочку параллельно оси OY и убеждаемся, в том, что область ограничена снизу одной линией (параболой) и одной линией сверху (прямой). Поэтому повторный интеграл в этой ситуации запишется одним, а не двумя повторными, как было в условии задачи.

Внешний интеграл теперь вычисляется по переменной x, которая изменяется от 0 до 1, что легко определяется при подстановке в уравнение прямой $x = 3 - y$ (или параболы $x = \sqrt{y/2}$) значения ординаты точки пересечения этих линий $y = 2$.

Внутренний интеграл теперь вычисляется по переменной y, и его пределы будут функциями вида $y = y(x)$, задающими нижнюю и верхнюю границы области (D).

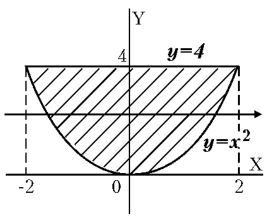
Выражая из уравнения параболы $x = \sqrt{y/2}$ переменную y через x, находим $y = 2x^2$ – линия входа.

Выражая из уравнения прямой $x = 3 - y$ переменную y через x, находим $y = 3 - x$ – линия выхода.

Записываем повторный интеграл $J = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)\,dy.$

• **2.** $J=\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{x^2}^{4}f(x,y)\,dy.$

С помощью указанных в интеграле пределов восстановим область интегрирования. Она ограничена линиями $x=2,\ x=-2$ и $y=x^2,\ \ y=4$. Запишем двойной интеграл по данной области в виде повторного, используя другой порядок интегрирования.



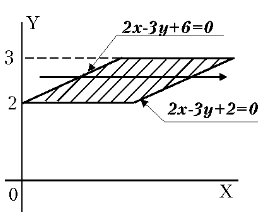
Внешний интеграл вычисляется по переменной y, которая, как видно из рисунка, изменяется от 0 до 4. Внутренний интеграл теперь вычисляется по переменной x, и его пределы будут функциями вида $x=x(y)$, задающими левую и правую границы области (D) (в данном случае – левую и правую ветви параболы).

Выражая из уравнения параболы $y=x^2$ переменную x через y, находим $x=-\sqrt{y}$ – левая граница, $x=\sqrt{y}$ – правая граница.

Записываем повторный интеграл $J=\int\limits_{0}^{4}dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)\,dx.$

Задача 3. Вычислить интеграл от функции $z=f(x,y)$ по области (D), ограниченной указанными линиями.

• **1.** $f(x,y)=x+y,\ (D):\ 2x-3y+6=0,\ 2x-3y+2=0,\ y=2,\ y=3.$



1) Строим область (D).

2) При построении повторного интеграла внутреннее интегрирование целесообразно проводить по переменной x, а внешнее – по y.

3) Для расстановки пределов заметим, что переменная y изменяется от $y=2$ (ордината крайней нижней границы) до $y=3$ (ордината крайней верхней границы). Внутренняя переменная x при этом меняется от $x_1(y)=\frac{3}{2}y-3$ (на входе)– левой границе области до $x_2(y)=\frac{3}{2}y-1$ (на выходе) – правой границе. Эти пределы мы получили, выражая переменную x из уравнений прямых.

4) Записываем интеграл в виде повторного и вычисляем его

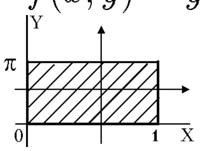
$$\iint\limits_{(D)}(x+y)\;dx\,dy=\int\limits_{2}^{3}dy\int\limits_{\frac{3}{2}y-3}^{\frac{3}{2}y-1}(x+y)\;dx\int\limits_{2}^{3}dy\;\left[\frac{(x+y)^2}{2}\Bigg|_{\frac{3}{2}y-3}^{\frac{3}{2}y-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{3}\left[\left(\frac{3}{2}y-1+y\right)^2-\left(\frac{3}{2}y-3+y\right)^2\right]dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{3}\left(\frac{25}{4}y^2-5y+1-\frac{25}{4}y^2+15y-9\right)\;dy=\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{3}(10y-8)\;dy=$$

$$=\int\limits_{2}^{3}(5y-4)\;dy=\left(\frac{5}{2}y^2-4y\right)\Bigg|_{2}^{3}=\frac{5}{2}(9-4)-4\;(3-2)=\frac{17}{2}=8,5.$$

• 2 $\quad f(x,y)=y\sin(xy),\quad (D):\; y=0,\; y=\pi,\; x=0,\; x=1.$



Область прямоугольная и можно выбрать любой порядок интегрирования. Интегрируя сначала по x, затем по y, получаем:

$$\iint\limits_{(D)}y\;\sin(xy)\,dx\,dy=\int\limits_{0}^{\pi}y\;dy\int\limits_{0}^{1}\sin(xy)dx=-\int\limits_{0}^{\pi}y\;\left[\frac{1}{y}\cos(xy)\;\Big|_0^1\right]\;dy=$$

$$=-\int\limits_{0}^{\pi}(\cos y-1)\,dy=(y-\sin y)\;\Big|_0^{\pi}=\pi.$$

Как уже отмечалось, область интегрирования в данной задаче такова, что выбор порядка интегрирования не имеет никакого принципиального значения. Однако, и именно в данном примере, это не так. Выбрав другой порядок интегрирования, будем иметь:

$$\iint\limits_{(D)}y\sin(xy)\;dx\;dy=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{\pi}y\sin(xy)\;dy=\begin{vmatrix}U=y & dV=\sin(xy)dy\\ dU=dy & V=-\frac{1}{x}\cos(xy)\end{vmatrix}=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}\left[-\frac{y}{x}\cos(xy)\;\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{x}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(xy)dy\right]\;dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}\left[-\frac{\pi\cos(\pi x)}{x}+\frac{1}{x^2}\sin(xy)\Bigg|_0^{\pi}\right]\;dx=-\pi\int\limits_{0}^{1}\frac{\cos(\pi x)}{x}dx+\int\limits_{0}^{1}\frac{\sin(\pi x)}{x^2}dx.$$

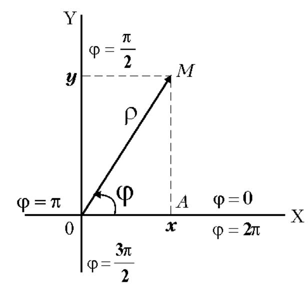
Полученные интегралы являются неберущимися, и их значения не могут быть найдены по формуле Ньютона-Лейбница. Данный пример наглядно показывает, что рациональность выбора порядка интегрирования определяется, вообще говоря, не только видом области (D),
но и видом подынтегральной функции. К вычислению двойных интегралов в декартовой системе координат мы еще вернемся в приложениях двойного интеграла.

1.1.3. Двойной интеграл в полярных координатах

Напомним, что полярная система координат включает в себя полюс (точка O) и полярную ось (выходящий из точки O горизонтальный луч OA). Положение любой точки M на плоскости в полярной системе координат задается двумя числами:

$\rho = |OM|$ – полярный радиус, равный расстоянию от полюса до точки М

$\varphi = \angle AOM$ – полярный угол, измеряемый в радианах в направлении против движения часовой стрелки.



Полярные и декартовы координаты одной и той же точки M на плоскости при совмещении соответствующих систем, как показано на рисунке, связаны равенствами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

При вычислении двойного интеграла в полярной системе координат следует придерживаться следующей схемы.

1) Построить область интегрирования.

2) В подынтегральной функции $f(x, y)$ заменить согласно формулам замены переменных при переходе к полярным координатам

$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$ Тогда $f(x;\ y) = f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi).$

3) Записать элемент площади $ds = dx\,dy = |\ J\ |\ d\rho\,d\varphi$, в полярной системе координат.

Найдем J–якобиан перехода от декартовой системы координат к полярной

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \\ = \rho\cos^2\varphi - (-\rho\sin^2\varphi) = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho.$$

Таким образом, элемент площади $ds = dx\,dy$ в полярной системе координат примет вид

$$\boxed{ds = \rho\,d\rho\,d\varphi}.$$

4) Уравнения линий, ограничивающих область D^*, записываются в полярных координатах (перевод декартовых уравнений в полярные рассматривается ниже).

Таким образом, получим двойной интеграл, записанный в полярной системе координат

$$\boxed{\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(D^*)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi}.$$

Этот интеграл необходимо свести к повторному. Для этого

5) Определяются пределы изменения переменных ρ и φ и строится соответствующий повторный интеграл.

При этом следует иметь ввиду, что уравнения линий в полярных координатах, как правило, имеют вид $\rho = \rho(\varphi)$ (а не $\varphi = \varphi(\rho)$), поэтому внутренний интеграл практически всегда вычисляется по переменной ρ, а внешний – по φ.

Как и в декартовой системе координат при расстановке пределов интегрирования удобно использовать стрелку, пересекающую область. В полярной системе координат стрелка – это луч, выходящий из полюса и пересекающий границы области на линии входа и выхода.

Подавляющее большинство областей интерирования в полярной системе координат можно соотнести с одной из 4-х приведенных на следующей странице схем, где для каждого случая записаны соответствующие повторные интегралы.

6) Полученный повторный интеграл вычисляется по уже известной схеме: сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной ρ, а затем внешний интеграл по переменной φ.

Использование полярной системы координат при вычислении двойных интегралов оказывается удобным в тех случаях, когда граница области интегрирования (D) образована линиями, уравнения которых в полярных координатах имеют более простой аналитический вид, чем в декартовой системе координат, например, различные окружности, либо их части, лемниската Бернулли и др.

В приложении 2 приведены примеры расстановки пределов интегрирования по различным областям в полярной системе координат.

Полюс внутри или на границе области интегрирования

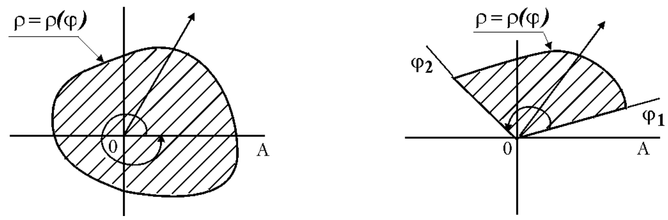


Рис. 3.

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho \qquad \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$$

Полюс вне области интегрирования

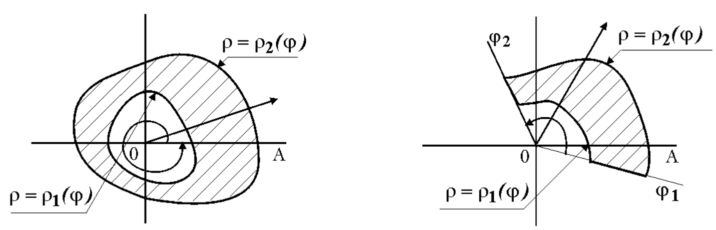


Рис. 4.

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho \qquad \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$$

Примеры преобразования уравнений кривых от декартовых координат к полярным. (Рисунки см. в приложении 2)

1. Окружность радиуса R с центром в начале координат

$$x^2+y^2=R^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} (\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=R^2 \\ \rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=R^2 \\ \rho^2=R^2 \quad \Rightarrow \quad \rho=R \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \rho=R.$$

З а м е т и м, что в полярной системе координат сумма квадратов

$$x^2+y^2=\rho^2,$$

и будем использовать этот результат в других примерах.

2. Окружность радиуса R с центром, смещенным по оси OX в точку $O'(R;0)$

$$\begin{array}{l} x^2+y^2=2Rx \\ (x-R)^2+y^2=R^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \rho^2=2R\rho\cos\varphi \\ \rho=2R\cos\varphi \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \rho=2R\cos\varphi.$$

3. Уравнение прямой, проходящей через начало координат

$$y=k\,x \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \rho\sin\varphi=k\,\rho\cos\varphi \\ \mathrm{tg}\;\varphi=k \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \varphi=\mathrm{arctg}k \text{ и } \varphi=\mathrm{arctg}k+\pi.$$

Итак, прямая $y=k\,x$ имеет два полярных уравнения, которым соответствуют два луча, выходящих из полюса по углами $\varphi=\mathrm{arctg}k$ и $\varphi=\mathrm{arctg}k+\pi$.

Некоторые частные случаи:

4. $y=x \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \rho\sin\varphi=\rho\cos\varphi \\ \mathrm{tg}\;\varphi=1 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \varphi=\pi/4$ и $\varphi=5\pi/4$.

5. $y=-x \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \rho\sin\varphi=-\rho\cos\varphi \\ \mathrm{tg}\;\varphi=-1 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \varphi=-\pi/4$ и $\varphi=3\pi/4$.

6. $y=\sqrt{3}x \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \rho\sin\varphi=\sqrt{3}\rho\cos\varphi \\ \mathrm{tg}\;\varphi=\sqrt{3} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \varphi=\pi/3$ и $\varphi=4\pi/3$.

7. Уравнение прямой

$$x+y=1 \;\Rightarrow\; \left|\, \rho(\sin\varphi+\cos\varphi)=1 \,\right| \;\Rightarrow\; \rho=\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}.$$

8. Уравнение прямой

$$y=2 \;\Rightarrow\; \left|\, \rho\sin\varphi=2 \,\right| \;\Rightarrow\; \rho=\frac{2}{\sin\varphi}.$$

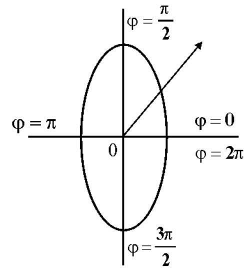
Рассмотрим примеры более сложных кривых, построение которых проще проводить не по декартовым, а по полярным уравнениям.

$$\mathbf{9}.\ (x^2+y^2)^2 = 3x^2+5y^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \rho^4 = 3\rho^2\cos^2\varphi + 5\rho^2\sin^2\varphi \\ \rho^2 = 3\cos^2\varphi + 5\sin^2\varphi \end{array} \right| \quad \Rightarrow$$

$$\rho = \sqrt{3\cos^2\varphi + 5\sin^2\varphi}.$$

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
ρ	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$

При построении учтем, что подкоренное выражение положительно для всех значений φ и кривая расположена во всех четвертях декартовой системы координат. Далее определяем несколько значений ρ.

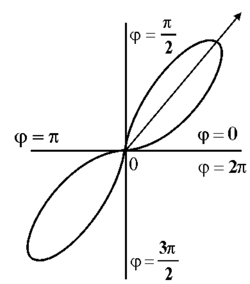


$$\mathbf{10}.\ (x^2+y^2)^{3/2} = xy \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \rho^3 = \rho^2\cos\varphi\sin\varphi \\ \rho = \cos\varphi\ \sin\varphi \end{array} \right| \quad \Rightarrow$$

$$\rho = \cos\varphi\ \sin\varphi.$$

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$
ρ	0	$1/2$	0	0	$1/2$	0

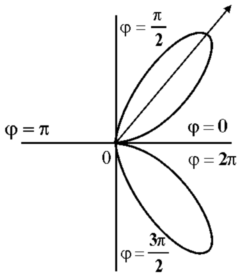
При построении учтем, что величина $\rho \ge 0$, поэтому кривая существует только для тех значений угла φ, для которых произведение $\cos\varphi\ \sin\varphi \ge 0$, а это соответствует I-ой и III-ей четвертям декартовой системы координат. Далее определяем несколько значений ρ.



$$\mathbf{11}.\ (x^2+y^2)^3 = xy^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \rho^6 = \rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi \\ \rho^3 = \cos\varphi\sin^2\varphi \end{array} \right| \quad \Rightarrow$$

$$\rho = \sqrt[3]{\cos\varphi\ \sin^2\varphi}.$$

При построении учтем, что величина $\rho \ge 0$, поэтому кривая существует только для тех значений угла φ, для которых произведение $\cos\varphi\ \sin^2\varphi \ge 0$, так как $\sin^2\varphi \ge 0$ для любых значений φ, то должно выполняться условие $\cos\varphi \ge 0$, а это соответствует I-ой и IV-ой четвертям декартовой системы координат.

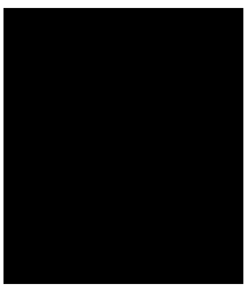


Очевидно, что $\rho = 0$ при $\varphi = 0,\ \pi/2,\ 3\pi/2$ и 2π. Кривая будет состоять из двух замкнутых петель. Максимальные значения ρ будет принимать при некоторых значениях угла φ, но для решения задач по данной теме знать их не требуется.

12. $(x^2 + y^2)^5 = x^4\, y^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \rho^{10} = \rho^6 \cos^4\varphi \sin^2\varphi \\ \rho^4 = \cos^4\varphi \sin^2\varphi \\ \rho = \sqrt[4]{\cos^4\varphi\ \sin^2\varphi} \end{array} \right| \quad \Rightarrow$

$\rho = \mid \cos\varphi \mid\ \sqrt{\mid \sin\varphi \mid}.$

Так как в выражение $\rho^4 = \cos^4\varphi \sin^2\varphi$ функции $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ входят в четных степенях, то правая часть равенства всегда положительна и кривая существут для всех значений полярного угла φ.



Поэтому она будет иметь 4 замкнутых петли, а не две, как в примерах 10 и 11. (Значения $\rho = 0$ получаются при $\varphi = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$).

Отметим еще раз, что для решения задач на вычисление двойного интеграла в полярной системе координат нам будет нужно иметь лишь схематичный рисунок кривой, чтобы правильно определить пределы изменения полярного угла.

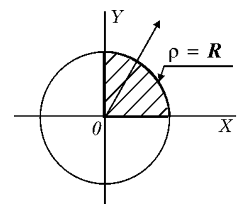
Перейдем к рассмотрению примеров на расстановку пределов интегрирования и вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

• **1.** Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{(D)} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

по области $(D): \{x^2+y^2 \le R^2, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0\}$.

1) Строим область (D). Она представляет собой часть круга радиуса R с центром в начале координат и расположенную в 1-ой четверти. Подынтегральная функция содержит сумму квадратов x^2+y^2, поэтому имеет смысл перейти в исходном интеграле к полярным координатам.



2) Элемент площади $ds = dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\varphi$.

3) Подынтегральная функция

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, e^{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{\rho\,\sin\varphi}{\rho\,\cos\varphi}\, e^{\rho^2} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\,\varphi)\, e^{\rho^2} = \varphi\, e^{\rho^2}.$$

4) Уравнение границы области также записываем в полярной системе координат $\quad x^2+y^2=R^2 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = R.$

Переменная φ изменяется в пределах от 0 до $\pi/2$. Переменная ρ внутреннего интеграла изменяется в пределах от $\rho_1 = 0$ (полюс внутри области интегрирования) до $\rho_2 = R$ (линия выхода луча из области).

5) Строим повторный интеграл

$$\iint\limits_{(D)} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, e^{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R} \varphi\, e^{\rho^2}\, \rho\, d\rho = \int\limits_0^{\pi/2} \varphi\, d\varphi \int\limits_0^{R} e^{\rho^2}\, \rho\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \varphi\, d\varphi \int\limits_0^{R} e^{\rho^2}\, d(\rho^2) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \varphi\, \left[e^{\rho^2}\,\Big|_0^R \right] d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \left(e^{R^2}-1\right)\, \varphi\, d\varphi =$$

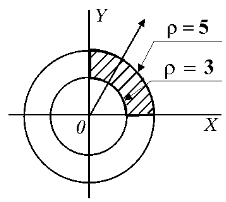
$$= \frac{\left(e^{R^2}-1\right)}{2}\cdot\frac{\varphi^2}{2}\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{e^{R^2}-1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{16}\,\left(e^{R^2}-1\right).$$

З а м е ч а н и е. В данном примере ни подынтегральная функция ни пределы интегрирования во внутреннем интеграле не содержат переменной φ. Поэтому повторный интеграл можно вычислить как произведение двух определенных интегралов (внутреннего и внешнего) независимо один от другого и получим тот же результат

$$\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R} \varphi\, e^{\rho^2}\, \rho\, d\rho = \left(\int\limits_0^{\pi/2} \varphi\, d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^{R} e^{\rho^2}\,\rho\, d\rho\right) = \left(\frac{\varphi^2}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\, e^{\rho^2}\Big|_0^{R}\right).$$

• **2**. Вычислить интеграл $\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2-9}\,dx\,dy$

по области $(D): \{x^2+y^2 \geq 9, \quad x^2+y^2 \leq 25, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$.



1) Строим область (D). Она представляет собой кольцо, образованое двумя окружностями с центром в начале координато и радиусами 3 и 5. Условия $x \geq 0, \quad y \geq 0$ означают, что из кольца остается только часть, лежащая в I-ой четверти.

Подынтегральная функция содержит сумму квадратов x^2+y^2, поэтому имеет смысл перейти в исходном интеграле к полярным координатам.

2) Элемент площади $ds = dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$.

3) Подынтегральная функция $\sqrt{x^2+y^2-9} = \sqrt{\rho^2-9}$.

4) Уравнение границы области также записываем в полярной системе координат

$x^2+y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 9 \ \Rightarrow \quad \rho = 3.$

$x^2+y^2 = 25 \ \ z \Rightarrow \quad \rho^2 = 25 \ \Rightarrow \quad \rho = 5.$

Переменная φ изменяется в пределах от 0 до $\pi/2$.

Так как в данном примере полюс полярной системы координат- вне области интегрирования, то переменная ρ внутреннего интеграла изменяется в пределах от $\rho_1 = 3$ (линия входа луча в область) до $\rho_2 = 5$ (линия выхода луча из области).

5) Строим повторный интеграл

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2-9}\,dx\,dy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_3^5 \sqrt{\rho^2-9}\,\rho\,d\rho =$$

(Здесь так же, как и в предыдущем примере можно вычислить внешний и внутренний интегралы независимо друг от друга и результаты перемножить)

$$= \left(\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_3^5 \sqrt{\rho^2-9}\ \rho\,d\rho\right) = \left(\varphi\ \Big|_0^{\pi/2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\int\limits_3^5 \sqrt{\rho^2-9}\ d(\rho^2-9)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(\rho^2-9)^{3/2}\ \Big|_3^5 = \frac{\pi}{6}\cdot[\ (25-9)^{3/2}-(9-9)^{3/2}\ ] = \frac{\pi}{6}\cdot 16^{3/2} = \frac{32\pi}{3}.$$

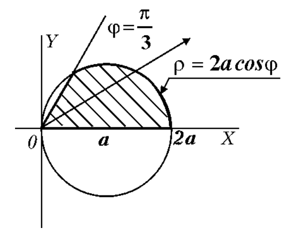
• **3**. Вычислить интеграл $\displaystyle\iint\limits_{(D)} y\,dx\,dy$

по области $(D): \{y \le \sqrt{3}\,x,\ \ y \le \sqrt{2ax-x^2},\ y \ge 0\}$.

1) Строим область (D). Уравнение $y = \sqrt{3}\,x-$ есть уравнение прямой, а уравнение $y = \sqrt{2ax - x^2}$ преобразуем следующим образом

$$y = \sqrt{2ax - x^2} \ \Rightarrow\ y^2 = 2ax - x^2 \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 2ax \ \Rightarrow\ (x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Мы имеем уравнение окружности с центром в точке $O'(a;\ 0)$ и радиусом, равным a. Так как значения переменной y по условию задачи должны быть положительными, то остается только верхняя часть круга. Итак, область интегрирования ограничена прямой и окружностью и находится в первой четверти.



Перейдем к полярным координатам.

2) Элемент площади $ds = dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$.

3) Подынтегральная функция $y = \rho\,\sin\varphi$.

4) Уравнение границы области также записываем в полярной системе координат: $x^2 + y^2 = 2ax \ \Rightarrow\ \rho^2 = 2a\rho\cos\varphi \ \Rightarrow\ \rho = 2a\cos\varphi$.

$$y = \sqrt{3}\,x \ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \ \Rightarrow\ \varphi = \pi/3.$$

Итак, переменная φ внешнего интеграла изменяется в пределах от 0 до $\pi/3$. Так как в данном примере полюс полярной системы координат - на границе области интегрирования, то переменная ρ внутреннего интеграла изменяется в пределах от $\rho_1 = 0$ (вход луча в область) до $\rho_2 = 2a\cos\varphi$ (линия выхода луча из области – окружность).

5) Строим повторный интеграл

$$\iint\limits_{(D)} y\,dx\,dy = \int\limits_0^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho\sin\varphi\,\rho\,d\rho = \int\limits_0^{\pi/3} \sin\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho^2\,d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/3} \sin\varphi\,d\varphi \left[\frac{\rho^3}{3}\,\Bigg|_0^{2a\cos\varphi}\right] = \int\limits_0^{\pi/3} \sin\varphi\,\frac{8a^3\ \cos^3\varphi}{3}\,d\varphi = \frac{8a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/3} \sin\varphi\ \cos^3\varphi\,d\varphi =$$

$$= -\frac{8a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/3} \cos^3\varphi\,d(\cos\varphi) = -\frac{8a^3}{3}\frac{\cos^4\varphi}{4}\,\Big|_0^{\pi/3} = -\frac{2a^3}{3}\left(1 - (1/2)^4\right) = \frac{5a^3}{8}.$$

В данном случае мы не имели права вычислять внешний и внутренний интегралы независимо друг от друга, так как предел интегрирования внутреннего интеграла есть функция переменной внешнего интегрирования.

1.1.4. Приложения двойного интеграла

Прикладные задачи, при решении которых используется двойной интеграл, определены его геометрическим и физическим смыслом. К ним можно отнести задачи на вычисление площади плоской фигуры, объема цилиндрического тела, массы, центра тяжести, момента инерции и т.п. плоской пластины и ряд других задач. Приведем основные формулы.

1. Объем цилиндрического тела $\quad V = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, ds.$

Подынтегральная функция $f(x, y) \geq 0$ в области (D).

2. Площадь плоской области (D) $\quad S = \iint\limits_{(D)} ds.$

(Подынтегральная функция $f(x, y) \equiv 1$ в области (D).)
При этом в декартовой и полярной системах координат будем иметь соответственно

$$S = \iint\limits_{(D)} dx\, dy, \qquad S = \iint\limits_{(D)} \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

3. Масса плоской пластинки $M = \iint\limits_{(D)} \delta(x, y)\ ds.$

Подынтегральная функция $\delta(x, y)$ есть поверхностная плотность пластинки.

4. Статические моменты плоской пластинки

$$M_x = \iint\limits_{(D)} y \cdot \delta(x, y)\ ds, \qquad M_y = \iint\limits_{(D)} x \cdot \delta(x, y)\ ds.$$

5. Моменты инерции пластинки относительно осей координат

$$I_x = \iint\limits_{(D)} y^2 \cdot \delta(x, y)\ ds, \qquad I_y = \iint\limits_{(D)} x^2 \cdot \delta(x, y)\ ds.$$

6. Момент инерции пластинки относительно начала координат

$$I_0 = \iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2) \cdot \delta(x, y)\ ds = I_x + I_y.$$

7. Координаты центра тяжести плоской пластинки

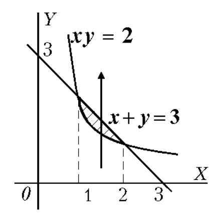
$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint\limits_{(D)} x\cdot\delta(x,y)\ ds}{\iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\ ds}, \qquad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint\limits_{(D)} y\cdot\delta(x,y)\ dS}{\iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\ ds}.$$

Если пластинка однородная, т.е. плотность во всех точках области (D) постоянна, т.е. $\delta(x;y) = const$, то формулы упрощаются

$$x_0 = \frac{\iint\limits_{(D)} x\ ds}{\iint\limits_{(D)}\ ds} = \frac{\iint\limits_{(D)} x\ ds}{S}, \qquad y_0 = \frac{\iint\limits_{(D)} y\ ds}{\iint\limits_{(D)}\ ds} = \frac{\iint\limits_{(D)} y\ ds}{S}.$$

• **1**. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $xy = 2$, $x + y = 3$.

1) Строим область (D), занимаемую указанной фигурой. Площадь фигуры вычисляем в декартовой системе координат по формуле



$$S = \iint\limits_{(D)} ds = \iint\limits_{(D)} dx\,dy.$$

2) При построении повторного интеграла в данном случае порядок интегирования значения не имеет. Выберем 1-ую схему

$$S = \iint\limits_{(D)} dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.$$

3) Для расстановки пределов заметим, что переменная x изменяется $x = 1$ (абсцисса крайней левой точки области) до $x = 2$ (абсцисса крайней правой точки области). Эти значения получаются из совместного решения уравнений

$$xy = 2 \text{ и } x + y = 3, \quad y = 2/x, \quad x + 2/x = 3, \quad x^2 - 3x + 2 = 0.$$

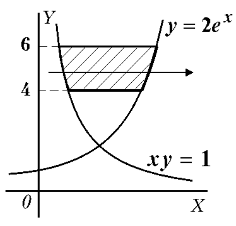
Внутренняя переменная y при этом меняется от $y_1(x) = 2/x$ (линия входа в область) до $y_2(x) = 3 - x$ (линия выхода). Тогда

$$S = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{2/x}^{3-x} dy = \int\limits_1^2 dx\ \left(y\ \Big|_{2/x}^{3-x}\right) = \int\limits_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right)\ dx =$$

$$= \left(3x - \frac{x^2}{2} - 2\ln x\right)\Big|_1^2 = 3\ (2-1) - \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) - 2\ (\ln 2 - \ln 1) = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \approx 0,1.$$

• **2**. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$$xy = 1, \quad y = 2e^x, \quad y = 4, \quad y = 6.$$



1) Строим область (D).

2) Площадь фигуры вычисляем в декартовой системе координат. При составлении повторного интеграла используем 2-ую схему т.к. она в данном случае более удобна.

$$S = \iint\limits_{(D)} ds = \iint\limits_{(D)} dx\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx.$$

3) Во внешнем интеграле переменная y изменяется $y = 4$ до $y = 6$. Эти значения мы имеем непосредственно из условия задачи.
Пределы интегрирования внутреннего интеграла мы получаем, выразив переменную x как функцию y из уравнений
$xy = 1 \quad \Rightarrow x_1(y) = 1/y,$ – (на входе) – левая граница области,
$y = 2e^x \quad \Rightarrow \quad e^x = y/2 \quad \Rightarrow \quad x_2(y) = \ln(y/2)$ – (на выходе) – правая граница. Получим

$$S = \int\limits_4^6 dy \int\limits_{1/y}^{\ln(y/2)} dx = \int\limits_4^6 dy \left(x \Big|_{1/y}^{\ln(y/2)} \right) = \int\limits_4^6 \left(\ln \frac{y}{2} - \frac{1}{y} \right) dy =$$

$$= \int\limits_4^6 \ln \frac{y}{2}\, dy - \int\limits_4^6 \frac{dy}{y} = \int\limits_4^6 \ln \frac{y}{2}\, dy - \ln y \Big|_4^6 =$$

К первому интегралу применим метод интегрирования по частям в определенном интеграле

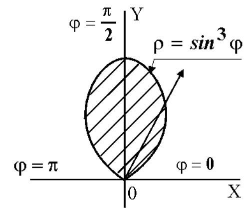
$$= \left| \begin{array}{ll} u = \ln(y/2) & du = \dfrac{1}{y/2} \cdot (1/2)\; dy = \dfrac{dy}{y} \\ dv = dy & v = y \end{array} \right| =$$

$$= \left(y \cdot \ln(y/2) \Big|_4^6 - \int\limits_4^6 y \cdot \frac{dy}{y} \right) - \ln y \Big|_4^6 = y \cdot \ln(y/2) \Big|_4^6 - y \Big|_4^6 - \ln y \Big|_4^6 =$$

$$= 6 \cdot \ln 3 - 4 \cdot \ln 2 - (6 - 4) - (\ln 6 - \ln 4) \approx 1,4.$$

• **3**. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2+y^2)^2 = y^3$.

1) Строим область (D).
Для этого перейдем к полярным координатам.



$(x^2+y^2)^2 = y^3 \qquad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} (\rho^2)^2 = \rho^3 \, \sin^3\varphi \\ \rho^4 = \rho^3 \, \sin^3\varphi \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \rho = \sin^3\varphi$$

Кривая определена для тех тех значений φ, для которых $\sin^3\varphi \geq 0$, или $0 \leq \varphi \leq \pi$. То есть кривая находится в верхней полуплоскости и ρ принимает нулевые значения при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

2) Элемент площади $ds = dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$.

3) Пределы изменения переменной φ определились уже при построении кривой. Пределы изменения ρ также очевидны : на входе в область $\rho = 0$, на выходе $\rho = \sin^3\varphi$. Формула для вычисления площади примет вид

$$S = \iint\limits_{(D)} ds = \iint\limits_{(D)} dx\,dy = \iint\limits_{(D^*)} \rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sin^3\varphi} \rho\,d\rho.$$

Используя симметрию области, можем записать

$$S = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\sin^3\varphi} \rho\,d\rho = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \left(\rho^2 \Big|_0^{\sin^3\varphi} \right) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^6\varphi\,d\varphi.$$

Преобразуем подынтегральную функцию

$$\sin^6\varphi = (\sin^2\varphi)^3 = \frac{1}{8}(1-\cos 2\varphi)^3 = \frac{1}{8}(1 - 3\cos 2\varphi + 3\cos^2\varphi - \cos^3\varphi) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - 3\cos 2\varphi + \frac{3}{2}(1+\cos 4\varphi) - \cos^2\varphi\cos\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - 3\cos 2\varphi + \frac{3}{2}(1+\cos 4\varphi) - (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\right) =$$

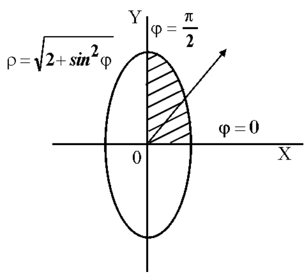
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2} - 3\cos 2\varphi + \frac{3}{2}\cos 4\varphi - \cos\varphi + \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi\right). \quad \text{Тогда}$$

$$S = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^6\varphi\,d\varphi = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{5}{2} - 3\cos 2\varphi + \frac{3}{2}\cos 4\varphi - \cos\varphi + \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi\right)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}\varphi - \frac{3}{2}\sin 2\varphi + \frac{3}{8}\sin 4\varphi - \sin\varphi + \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{5\pi}{32} - \frac{1}{12} \approx 0,4.$$

• **4.** Найти площадь фигуры, ограниченной линией

$$(x^2+y^2)^2 = 2x^2+3y^2.$$



1) Строим область (D).
Для этого перейдем к полярным координатам.
$(x^2+y^2)^2 = 2x^2+3y^2 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad (\rho^2)^2 = \rho^2\,(2\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi)$.

$$\rho = \sqrt{2\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi} = \sqrt{2+\sin^2\varphi}.$$

Кривая определена для всех значений φ.
То есть кривая находится во всех четвертях и ρ принимает наименьшие значения $\rho = 2$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ и наибольшие значения $\rho = 3$ при $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$.

2) Элемент площади $ds = dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$.

3) Пределы изменения переменной φ определились уже при построении кривой. Пределы изменения ρ также очевидны: на входе в область $\rho = 0$, на выходе $\rho = \sqrt{2+\sin^2\varphi}$. И формула для вычисления площади

$$S = \iint\limits_{(D^*)} \rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2+\sin^2\varphi}} \rho\,d\rho.$$

Используя симметрию области, можем записать

$$S = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2+\sin^2\varphi}} \rho\,d\rho = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2}\,\Bigg|_0^{\sqrt{2+\sin^2\varphi}}\right) = 2\int\limits_0^{\pi/2} (2+\sin^2\varphi)\,d\varphi.$$

Преобразуем подынтегральную функцию

$$2+\sin^2\varphi = 2+\frac{1}{2}\,(1-\cos 2\varphi) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi = \frac{1}{2}\,(5-\cos 2\varphi).$$

Подставляем в интеграл

$$S = 2\int\limits_0^{\pi/2} (2+\sin^2\varphi)\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} (5-\cos 2\varphi)\,d\varphi =$$

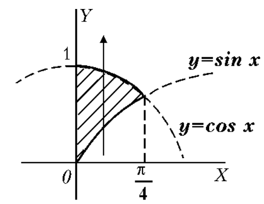
$$= \left(5\,\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\,\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{5\pi}{2} \approx 7,85.$$

• **5**. Вычислить массу плоской пластинки, занимающей область, ограниченную линиями

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0, \quad x \le \pi/4,$$

и имеющую переменную плотность $\delta(x, y) = x \cdot y$.

1) Строим область (D), занимаемую пластинкой.



2) Массу пластинки вычисляем по формуле в декартовой системе координат
$M = \iint\limits_{(D)} \delta(x, y)\ ds = \iint\limits_{(D)} \delta(x, y)\, dx\, dy.$

2) При построении повторного интеграла возьмем 1-ую схему

$$M = \iint\limits_{(D)} x \cdot y\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} x \cdot y\, dy.$$

3) Внешняя переменная x изменяется от $x = 0$ (абсцисса крайней левой точки области) до $x = \pi/4$ (абсцисса крайней правой точки области). Эти значения получаются из условия задачи и совместного решения уравнений $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

$\sin x = \cos x, \qquad \mathrm{tg}\ x = 1, \qquad x = \pi/4.$

Внутренняя переменная y при этом меняется от $y_1(x) = \sin x$ (на входе) – нижняя граница области, до $y_2(x) = \cos x$ (на выходе) – верхняя граница.

$$M = \int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_{\sin x}^{\cos x} x \cdot y\, dy = \int\limits_0^{\pi/4} x\, dx \int\limits_{\sin x}^{\cos x} y\, dy =$$

4) Вычисляем сначала внутренний, а затем внешний интегралы

$$= \int\limits_0^{\pi/4} x\, dx \ \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{\sin x}^{\cos x} \right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} x \cdot \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\ dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} x \cdot \cos 2x\, dx =$$

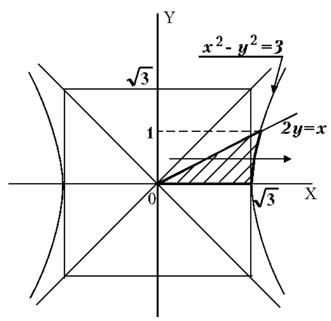
Получили определенный интеграл от функции одной переменной, который берем по частям $= \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos 2x\, dx & v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{2}\left(x \cdot \frac{1}{2}\ \sin 2x \Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} \sin 2x\, dx \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\pi/4}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cdot \cos 0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}(\pi - 2).$$

• **6**. Вычислить массу плоской пластинки, занимающей область

$$(D):\{x^2-y^2\le 3,\quad 2y\le x,\quad y=0,\quad (x>0,\quad y>0)\},$$

и имеющую переменную плотность $\delta(x,y)=y$.



1) Строим область (D), занимаемую пластинкой.

2) Область ограничена гиперболой $x^2-y^2=3$ или $x^2/3-y^2/3=1$, прямой $2y=x$ и осью OX $(y=0)$.

3) Массу пластинки вычисляем в декартовой системе координат и при построении повторного интеграла используем 2-ую схему

$$M=\iint\limits_{(D)}\delta(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(D)}y\,dx\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)}y\,dx.$$

3) Внешняя переменная y изменяется от $y=0$ до $y=1$. Эти значения получаются из условия задачи и совместного решения уравнений

$x^2-y^2=3$ и $2y=x$.

$(2y)^2-y^2=3\ \ 4y^2-y^2=3,\quad 3y^2=3\ \ y^2=1,\quad y=1.$

Отметим, что $y=-1$ – посторонний корень для нашей области. Внутренняя переменная x при этом меняется от $x_1(y)=2y$ (на входе) – левая граница области, до $x_2(y)=\sqrt{3+y^2}$ (на выходе) – правая граница. (Положительное значение корня соответствует правой половине гиперболы)

$$M=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2y}^{\sqrt{3+y^2}}y\,dx=\int\limits_0^1 y\,dy\int\limits_{2y}^{\sqrt{3+y^2}}dx=\int\limits_0^1 y\,dy\left(x\,\Big|_{2y}^{\sqrt{3+y^2}}\right)=$$

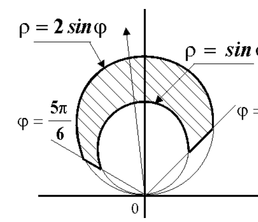
$$=\int\limits_0^1 y\left(\sqrt{3+y^2}-2y\right)\,dy=\int\limits_0^1 y\cdot\sqrt{3+y^2}\,dy-\int\limits_0^1 2y^2\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(3+y^2)^{1/2}\,d(3+y^2)-2\int\limits_0^1 y^2\,dy=\frac{1}{2}\,\frac{(3+y^2)^{3/2}}{3/2}\,\Big|_0^1-2\,\frac{y^3}{3}\,\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}\,\left[(3+y^2)^{3/2}-2y^3\right]\,\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(4^{3/2}-3^{3/2}-2\right)=\frac{1}{3}\left(8-3\sqrt{3}-2\right)=$$

$$=2-\sqrt{3}\approx 0,3.$$

• **7**. Найти массу плоской пластины, занимающей область D: $\{x^2+y^2 \geq y; \quad x^2+y^2 \leq 2y; \quad y \geq -x/\sqrt{3}, \ y \geq x\ \}$ и имеющей плотность $\delta(x,y)=(2-y)$.



1) Область, которую занимает пластина, ограничена двумя окружностями
$x^2+y^2=y \ \Rightarrow \ x^2+(y-1/2)^2=1/4,$
$x^2+y^2=2y \ \Rightarrow \ x^2+(y-1)^2=1$
и двумя прямыми, вырезающими из полученной области сектор. Имеет смысл перейти к полярным координатам.
2) Элемент площади $\quad ds=dx\,dy \ \Rightarrow \ \rho\, d\rho\, d\varphi.$
Подынтегральная функция $\quad f(x;y)=2-y \quad \Rightarrow \ 2-\rho\,\sin\varphi.$
3) Записываем границы области в полярной системе координат

$$x^2+y^2=y \ \Rightarrow \ \rho^2=\rho\sin\varphi \ \Rightarrow \ \rho=\sin\varphi,$$
$$x^2+y^2=2y \ \Rightarrow \ \rho^2=2\rho\sin\varphi \ \Rightarrow \ \rho=2\sin\varphi,$$
$$y=x \ \Rightarrow \ \operatorname{tg}\varphi=1 \ \Rightarrow \ \varphi=\pi/4,$$
$$y=-x/\sqrt{3} \ \Rightarrow \ \operatorname{tg}\varphi=-1/\sqrt{3} \ \Rightarrow \ \varphi=5\pi/6.$$

4) Строим повторный интеграл

$$M=\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} (2-\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho = \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} (2\rho-\rho^2\sin\varphi)\,d\rho =$$

$$=\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6} d\varphi\left(\rho^2-\sin\varphi\,\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi} = \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6}\left(3\sin^2\varphi-\frac{7}{3}\,\sin^4\varphi\right)\,d\varphi =$$

Преобразуем подынтегральную функцию

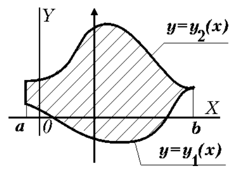
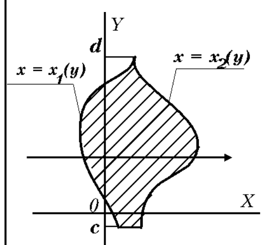
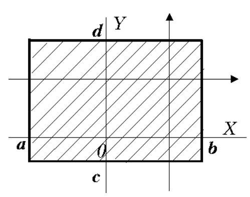
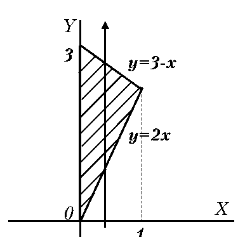
$$3\sin^2\varphi-\frac{7}{3}\,\sin^4\varphi=\frac{3}{2}\,(1-\cos 2\varphi)-\frac{7}{12}\,(1-\cos 2\varphi)^2=$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\,\cos 2\varphi-\frac{7}{12}\,(1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)=$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\,\cos 2\varphi-\frac{7}{12}+\frac{7}{6}\cos 2\varphi-\frac{7}{24}(1+\cos 4\varphi)=\frac{43}{24}-\frac{2}{6}\,\cos 2\varphi-\frac{7}{24}\cos 4\varphi.$$

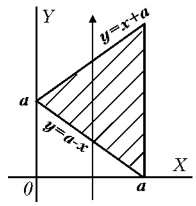
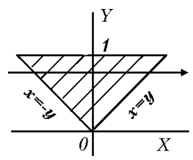
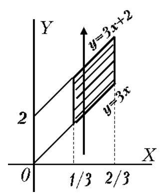
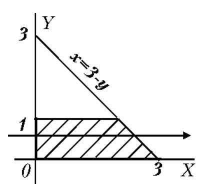
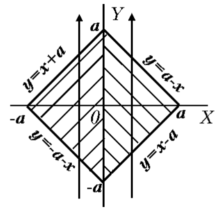
Подставляем в интеграл

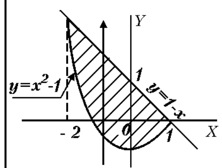
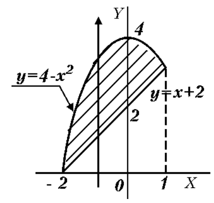
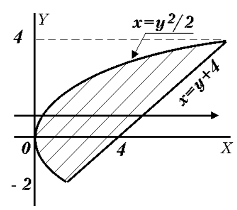
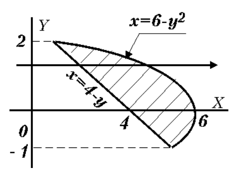
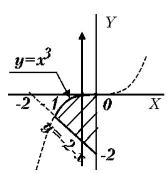
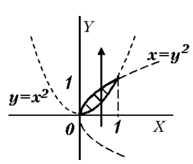
$$=\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6}\left(\frac{43}{24}-\frac{2}{6}\,\cos 2\varphi-\frac{7}{24}\cos 4\varphi\right)\,d\varphi=\left(\frac{43}{24}\,\varphi-\frac{1}{6}\,\sin 2\varphi-\frac{7}{96}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{\pi/4}^{5\pi/6}=$$
$$=\frac{43}{24}\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{6}\left(\sin\frac{5\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\right)-\frac{7}{96}\left(\sin\frac{10\pi}{3}-\sin\pi\right)=$$
$$=\frac{43}{24}\,\frac{7\pi}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{7}{96}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)\approx 6,6.$$

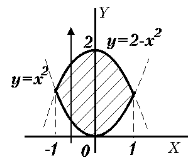
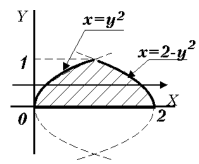
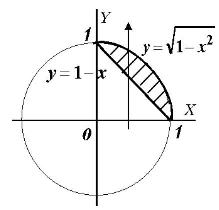
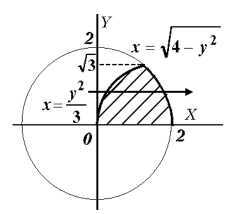
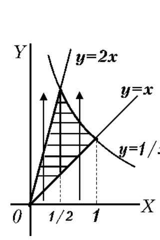
Приложение 1.

Двойной интеграл в прямоугольных координатах

	Уравнения границ	Рисунок	Повторный интеграл
1.	$\begin{cases} x=a, \\ x=b, \\ y=y_1(x), \\ y=y_2(x) \end{cases}$		$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$
2.	$\begin{cases} y=c, \\ y=d, \\ x=x_1(y), \\ x=x_2(y) \end{cases}$		$\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$
3.	$\begin{cases} x=a, \\ x=b, \\ y=c, \\ y=d \end{cases}$		$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$
4.	$\begin{cases} x+y=3, \\ 2x-y=0, \\ x\geq 0 \end{cases}$		$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3-x} f(x,y)\,dy$

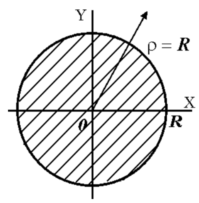
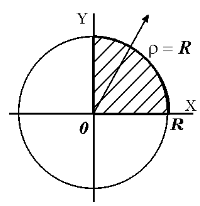
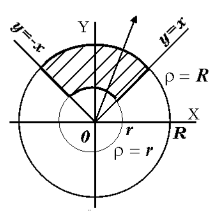
5.	$\begin{cases} x+y=a, \\ y-x=a, \\ x=a, \\ (a>0) \end{cases}$		$\int\limits_0^a dx \int\limits_{a-x}^{a+x} f(x,y)\,dy$
6.	$\begin{cases} y=-x, \\ y=x, \\ y=1, \\ (y>0) \end{cases}$		$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{y} f(x,y)\,dy$
7.	$\begin{cases} y=3x, \\ y=3x+2, \\ x=1/3, \\ x=2/3 \end{cases}$		$\int\limits_{1/3}^{2/3} dx \int\limits_{3x}^{3x+2} f(x,y)\,dy$
8.	$\begin{cases} x+y=3, \\ y=1 \\ x=0, \\ y=0 \end{cases}$		$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{3-y} f(x,y)\,dx$
9.	$\begin{cases} x+y=a, \\ x-y=a, \\ x+y=-a, \\ x-y=-a \end{cases}$		$\int\limits_{-a}^{0} dx \int\limits_{-a-x}^{x+a} f(x,y)\,dy +$ $+\int\limits_0^a dx \int\limits_{x-a}^{a-x} f(x,y)\,dy$

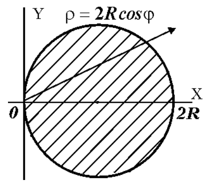
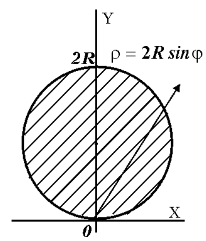
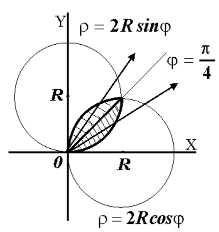
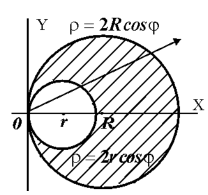
10.	$\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ x + y = 1 \end{cases}$		$\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2-1}^{1-x} f(x,y)\,dy$
11.	$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$		$\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x+2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy$
12.	$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ x - y = 4 \end{cases}$		$\int\limits_{-2}^{4} dy \int\limits_{y^2/2}^{y+4} f(x,y)\,dx$
13.	$\begin{cases} x = 6 - y^2, \\ x = 4 - y \end{cases}$		$\int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{4-y}^{6-y^2} f(x,y)\,dx$
14.	$\begin{cases} y = x^3, \\ y + x + 2 = 0, \\ x = 0, \\ (x < 0) \end{cases}$		$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-2-x}^{x^3} f(x,y)\,dy$
15.	$\begin{cases} x = y^2, \\ y = x^2 \end{cases}$		$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$

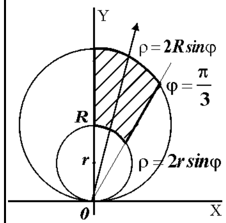
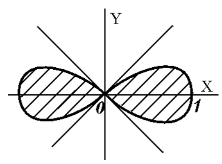
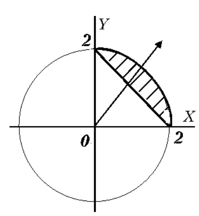
16.	$\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = x^2 \end{cases}$		$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)\,dy$
17.	$\begin{cases} x = y^2, \\ x - 2 = y^2, \\ y = 0, \\ (y \geq 0) \end{cases}$		$\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{2-y^2} f(x,y)\,dx$
18.	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y + x = 1, \\ (y > 0) \end{cases}$		$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$
19.	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y^2 = 3x, \\ y \geq 0, \\ (x > 0), \end{cases}$		$\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{y^2/3}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dy$
20.	$\begin{cases} xy = 1, \\ y = x, \\ y = 2x, \\ (x > 0), \\ (y > 0) \end{cases}$		$\int\limits_{0}^{1/2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)\,dy + {}$ $+ \int\limits_{1/2}^{1} dx \int\limits_{x}^{1/x} f(x,y)\,dy$

Приложение 2.

Двойной интеграл в полярных координатах

	Уравнения границ	Рисунок	Повторный интеграл
1.	$x^2 + y^2 = R^2$ $\rho = R$		$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$
2.	$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = R, \\ \varphi = 0, \quad \varphi = \pi/2 \end{cases}$		$\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^R f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$
3.	$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 = r^2, \\ y = x, \quad y = -x, \\ y > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = R, \quad \rho = r, \\ \varphi = \pi/4, \\ \varphi = 3\pi/4 \end{cases}$		$\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_r^R f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$

4.	$x^2+y^2=2Rx$ $\rho = 2R\cos\varphi$		$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2R\cos\varphi} f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$
5.	$x^2+y^2=2Ry$ $\rho = 2R\sin\varphi$		$\int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{2R\sin\varphi} f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$
6.	$\begin{cases} x^2+y^2=2Rx, \\ x^2+y^2=2Ry \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = 2R\cos\varphi, \\ \rho = 2R\sin\varphi \end{cases}$		$\int\limits_{0}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{2R\sin\varphi} f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho +$ $+ \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2R\cos\varphi} f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$
7.	$\begin{cases} x^2+y^2=2rx, \\ x^2+y^2=2Rx \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = 2r\cos\varphi, \\ \rho = 2R\cos\varphi \end{cases}$		$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{2r\cos\varphi}^{2R\cos\varphi} f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$

8.	$\begin{cases} x^2+y^2=2ry, \\ x^2+y^2=2Ry, \\ x=0,\ y=x\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \rho=2r\sin\varphi, \\ \rho=2R\sin\varphi, \\ \varphi=\dfrac{\pi}{3},\ \varphi=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$		$\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{2r\sin\varphi}^{2R\sin\varphi} f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$
9.	$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ $\rho=\sqrt{\lvert\cos 2\varphi\rvert}$		$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{\lvert\cos 2\varphi\rvert}} f(\rho,\varphi)\rho\ d\rho+$ $+\int\limits_{3\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{\lvert\cos 2\varphi\rvert}} f(\rho,\varphi)\rho\ d\rho$
10.	$\begin{cases} x+y=2, \\ x^2+y^2=4, \\ x>0, \quad y>0 \end{cases}$ $\begin{cases} \rho_1(\varphi)= \\ =\dfrac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi}, \\ \rho_2(\varphi)=2 \end{cases}$		$\int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{2} f(\rho,\varphi)\rho\ d\rho$

1.2. Тройной интеграл

1.2.1. Понятие и свойства

Тройной интеграл является логическим продолжением понятия интеграла на случай функции трех независимых переменных по пространственной области.

Пусть в замкнутой области (V) трехмерного пространства с выбранной прямоугольной системой координат $OXYZ$ определена функция $u = f(x, y, z)$. Повторим схему, аналогичную схеме построения двойного интеграла.

Разобьем область (V) произвольной сеткой поверхностей на элементарные части (элементарные объемы) $\Delta v_i \quad (i = 1, 2, \ldots n)$, вычислим значения функции в произвольной точке каждой элементарной области и составим интегральную сумму.

О п р е д е л е н и е. Интегральной суммой для функции $u = f(x, y, z)$ по области (V) называется сумма произведений значений функции в выбранных точках на объемы соответствующих частичных (элементарных) областей Δv_i : $\quad \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \, \Delta \, v_i.$

О п р е д е л е н и е. Тройным интегралом от функции $u = f(x, y, z)$ по области (V) называется предел полученной интегральной суммы при неограниченном увеличении числа разбиений области на части и стремлении объемов всех элементарных областей к нулю

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) \, dv = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \, \Delta \, v_i.$$

Область (V) называется областью интегрирования для подынтегральной функции $u = f(x, y, z)$.

Теорема существования тройного интеграла.
Если подынтегральная функция $f(x, y, z)$ является непрерывной, или кусочно–непрерывной в области (V), то тройной интеграл всегда существует и равен определенному числу.

Геометрический смысл тройного интеграла. Если функция $f(x, y, z) \equiv 1$ во всех точках области (V), то тройной интеграл есть объем тела, занимающего область интегрирования. $\iint\limits_{(D)} dv = V.$

Если подынтегральная функция отлична от единицы в области интегрирования, то интеграл геометрического смысла не имеет.

Физический смысл тройного интеграла. Если тело, занимающее область (V), имеет переменную объемную плотность $\delta(x,y,z)$, то тройной интеграл от плотности есть масса тела: $\iiint\limits_{(V)}\delta(x,y,z)\,dv=M.$

Свойства тройного интеграла практически повторяют свойства двойного. Отметим кратко эти свойства.

1. Почленное интегрирование. Тройной интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме итегралов от слагаемых.

2. Вынос постоянного множителя . Постоянный множитель можно вынести за знак тройного интеграла.

3. Разбиение области интегрирования на части. Если область интегрирования разбить на части, то тройной интеграл можно представить в виде суммы интегралов по отдельным частям области.

4. Оценка тройного интеграла. Если M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y,z)$ в области (V), то величина тройного интеграла не меньше $m \cdot V$ и не больше $M \cdot V$, где V – объем области (V).

5. Теорема о среднем для тройного интеграла. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области (V), то справедливо равенство

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\;dv = f(C)\cdot V,$$

где V– объем области интегрирования, а $f(C)$ – значение подынтегральной функции в некоторой точке C этой области. В физическом смысле теорема о среднем для тройного интеграла означает, что масса тела, имеющего переменную объемную плотность, равна произведению объема тела на величину плотности в некоторой точке C этой области (значение $\delta(C)=\delta_{\text{ср.}}$– средняя плотность тела.)

О п р е д е л е н и е. Средним значением функции $f(x,y,z)$ в области V называется величина

$$f(C)=\frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\;dv.$$

1.2.2. Тройной интеграл в прямоугольных координатах

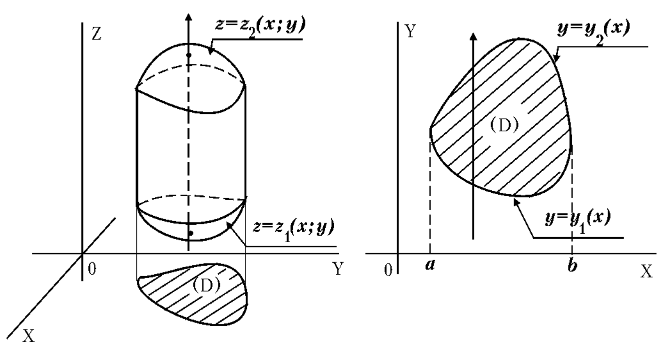
Для вычисления тройного интеграла от данной функции $u = f(x, y, z)$ по указанной области (V) рекомендуется действовать по следующей схеме.

1) Строим в системе координат $OXYZ$ область интегрирования.

2) Элемент объема dv заменяем произведением $dv = dx\,dy\,dz$. (Элементарный объем выбирается в виде "кирпичика" с размерами dx, dy, dz).

3) Выбираем порядок интегрирования, который, в основном, диктуется видом самой области интегрирования. Область (V) проецируется на одну из трех координатных плоскостей. В результате мы определяем проекцию области (V)– плоскую область (D), и уравнения поверхностей, которые ограничивают область (V).

4) Выносим, для удобства, проекцию – область (D) на отдельный рисунок и дальнейшую расстановку пределов осуществляем как в двойном интеграле.



5) В результате такой подготовительной работы мы определяем пределы изменения для каждой из трех переменных x, y, z. Если последовательность интегрирования выбрана в таком порядке: внутреннее по z, $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, промежуточное по y, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, а внешнее по x, $a \le x \le b$, то тройной интеграл в виде повторного запишется

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Сначала вычисляется внутренний интеграл. При этом учитывается, что все переменные, кроме той, по которой проводится внутреннее интегрирование, считаются постоянными (в данном случае это переменные x и y).

После выполнения внутреннего интегрирования по формуле Ньютона-Лейбница мы приходим к двойному интегралу, от функции двух переменных x и y, который вычисляем далее по уже известной схеме.

Как и при вычислении двойного интеграла, удобно при расстановке пределов интегрирования использовать"стрелки", пересекающие тело, чтобы определить *линии и поверхности входа и выхода* из области.

З а м е ч а н и е. Мы привели один из вариантов сведения тройного интеграла к трехкратному. Внутренний интеграл в тройном интеграле не обязательно должен быть всегда по переменной z, он может быть также по переменным x или y. Аналогично, при расстановке пределов по области (D) можно внешнее интегрирование проводить по переменной y, а внутреннее - по x. Поэтому способов сведения тройного интеграла к трехкратному можно записать несколько (в общем случае таких способов шесть). Надо иметь в виду, что рациональность выбора порядка интегрирования в тройном интеграле, также как и в двойном, определяется тем, чтобы при вычислении обойтись по возможности меньшим количеством повторных интегралов.
В приложении 3 приведены примеры на расстановку пределов интегрирования в тройном интеграле в декартовой системе координат.

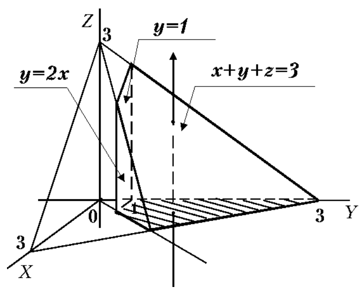
Задача 4. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dv$ по указанным областям.

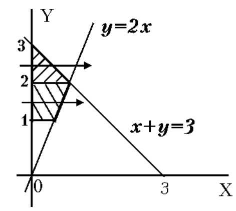
• **1**. $(V):\{x=0,\quad y=1,\quad y=2x,\quad x+y+z=3,\quad x\geq 0,\quad z\geq 0\}.$

Следуем рекомендованной схеме.

1) Строим область интегрирования. Она ограничена плоскостями координат YOZ и XOY, плоскостью $y=1$, параллельной координатной плоскости XOZ, плоскостью $y=2x$, проходящей через ось OZ, и плоскостью $x+y+z=3$, отсекающей на осях координат отрезки, равные 3.

2) Спроектируем эту область на плоскость XOY. Проекция показана на рисунке. Область (D) ограничена прямыми
$x = 0,\ y = 1,\ y = 2x,\ x + y = 3$ Последнее уравнение получено как линия пересечения плоскостей $x + y + z = 3$ и $z = 0$.





3) Пересечем тело стрелкой, параллельной оси OZ. Тогда при любых значениях переменных (x, y) из области (D) стрелка входит в область на поверхности входа $z_{\text{вх}} = 0$ (плоскость XOY) и выходит на поверхности выхода $x+y+z = 3$. Таким образом, переменная z меняется от своего значения на нижней границе $z_1 = 0$ до $z_2(x; y) = (3 - x - y)$ –значения на верхней границе области (V). Следовательно, отделяя внутренний интеграл по z, будем иметь

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(D)} dx\, dy \int\limits_0^{3-x-y} f(x, y, z)\, dz.$$

4) Расставляем пределы интегрирования в двойном интеграле по области (D), проектируя ее на ось OY. При этом область необходимо разбить на две часть прямой $y = 2$. Значение $y = 2$ получено из решения системы уравнений $\{x + y = 3, \quad y = 2x\}$ Для двойного интеграла будем иметь

$$\iint\limits_{(D)} dx\, dy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{y/2} dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_0^{3-y} dx.$$

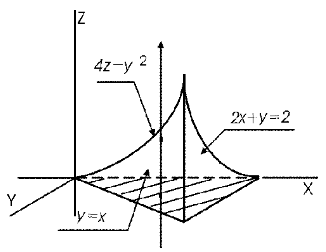
Тройной интеграл также будет являться суммой двух тройных интегралов

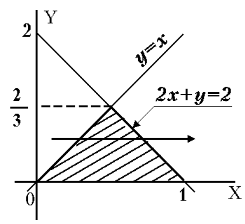
$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dv = \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{y/2} dx \int\limits_0^{3-x-y} f(x, y, z)\, dz + \int\limits_2^3 dy \int\limits_0^{3-y} dx \int\limits_0^{3-x-y} f(x, y, z)\, dz.$$

• **2**. $(V): \quad \{4z = y^2, \ \ 2x + y = 2, \ \ y = x, \ \ y \geq 0, \ \ z \geq 0\}.$

1) Строим область интегрирования. Она ограничена плоскостями координат XOZ и XOY, плоскостями: $y = x$, (проходящей через ось OZ) и $2x + y = 2$, (параллельной оси OZ), и параболическим цилиндром $4z = y^2$ с образующей, параллельной оси OX.

2) Проецируем эту область на плоскость XOY. Область (D) ограничена прямыми $y = x, \ \ 2x + y = 2, \ \ y = 0$.





3) Пересечем тело стрелкой, параллельной оси OZ. Тогда при любых значениях переменных (x, y) из области (D) стрелка входит в область на поверхности входа $z_{\text{вх}} = 0$ и выходит на поверхности выхода $z_{\text{вых}} = y^2/4$. Итак, переменная z меняется от $z_1(x, y) = 0$ до $z_2(x, y) = y^2/4$. Следовательно, отделяя внутренний интеграл по z, будем иметь

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(D)} dx\,dy \int\limits_0^{y^2/4} f(x, y, z)\,dz.$$

4) Расставляем пределы интегрирования в двойном интеграле по области (D), проектируя ее на ось OY. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ y = x, \end{cases} \qquad\qquad y = 2/3,$$

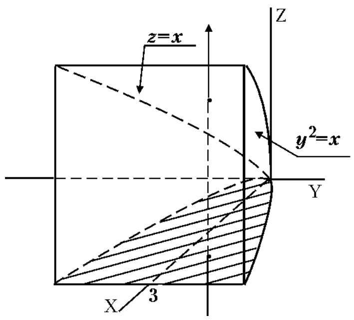
найдем ординату точки пересечения прямых и получим пределы изменения переменной y. Таким образом, расставив пределы интегрирования в двойном интеграле

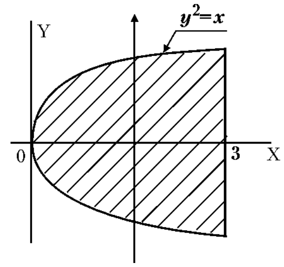
$$\iint\limits_{(D)} dx\,dy = \int\limits_0^{2/3} dy \int\limits_y^{(2-y)/2} dx, \qquad \text{получим окончательно}$$

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2/3} dy \int\limits_y^{(2-y)/2} dx \int\limits_0^{y^2/4} f(x, y, z)\,dz.$$

• **3.** $(V):\qquad \{z=x,\ \ y^2=x,\ \ x=3,\ \ z\ge 0\}.$

Область интегрирования ограничена снизу координатной плоскостью XOY, сверху плоскостью $z=x$, проходящей через ось OY, и с боков параболическим цилиндром $y^2=x$ с образующей, параллельной оси OZ, и плоскостью $x=3$, параллельной координатной плоскости YOZ. Строим эту областьи ее проекцию (D) на плоскость XOY. Область (D) ограничена параболой $y^2=x$ и прямой $x=3$.





Пересечем тело стрелкой, параллельной оси OZ. Тогда при любых значениях переменных (x,y) из области (D) стрелка входит в область на поверхности входа
$z_{\text{вх}}=0$ и выходит на поверхности выхода $z_{\text{вых}}=x$.
Таким образом, переменная z меняется от $z_1=0$ до $z_2=x$.
Отделяя внутренний интеграл по z, будем иметь

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(D)} dx\,dy\int\limits_0^x f(x,y,z)\,dz.$$

Расставляем пределы интегрирования в двойном интеграле по области (D), проектируя ее на ось OX. Переменная x изменяется в пределах от 0 до 3, пределы изменения переменной y получим, выразив ее из уравнения параболы $y^2=x\ \Rightarrow\ \ y=\pm\sqrt{x}$.
Таким образом, расставив пределы интегрирования в двойном интеграле

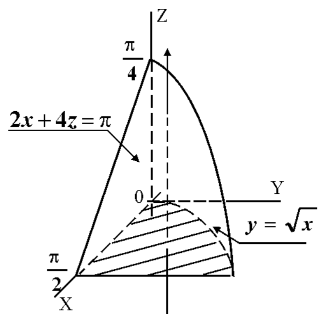
$$\iint\limits_{(D)} dx\,dy=\int\limits_0^3 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{+\sqrt{x}} dy,$$

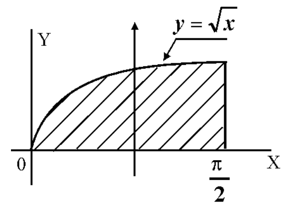
получим окончательно

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dx\,dy\,dz=\int\limits_0^3 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\int\limits_0^x f(x,y,z)\,dz.$$

• **4.** Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} y\cos(x+2z)dx\,dy\,dz$ по области V, ограниченной поверхностями $y \le \sqrt{x}$, $2x+4z \le \pi$, $z \ge 0$.

Проецируем область интегрирования на плоскость XOY, строим область (D)





Пересечем тело стрелкой, параллельной оси OZ. Тогда при любых значениях переменных (x, y) из области (D) стрелка входит в область на поверхности входа $z_{\text{вх}} = 0$ (плоскость XOY) и выходит на поверхности выхода $2x + 4z_{\text{вых}} = \pi$. Таким образом, переменная z меняется от $z_1 = 0$ до $z_2(x, y) = (\pi - 2x)/4$.
Следовательно, отделяя внутренний интеграл по z, будем иметь

$$\iiint\limits_{(V)} y\cos(x+2z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(D)} dx\,dy \int\limits_0^{(\pi-2x)/4} y\ \cos(x+2z)\,dz.$$

Расставляя пределы изменения переменных x и y по области (D), получаем трехкратный интеграл

$$\iint\limits_{(D)} dx\,dy \int\limits_0^{(\pi-2x)/4} y\ \cos(x+2z)\,dz = \int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} y\,dy \int\limits_0^{(\pi-2x)/4} \cos(x+2z)\,dz.$$

При вычислении внутреннего интеграла по z переменные x и y считаем постоянными. Имеем

$$\int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} ydy \int\limits_0^{(\pi-2x)/4} \cos(x+2z)dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} y \left(\sin(x+2z)\Big|_0^{(\pi-2x)/4}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} y\ \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin x\right)\ dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin x)dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} y\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin x)\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{x}}\right)\ dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin x)\,x\,dx = \frac{1}{4}\left(\int\limits_0^{\pi/2} x\,dx - \int\limits_0^{\pi/2} x\sin x\,dx\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right).$$

Второй интеграл найден методом интегрирования по частям.

1.2.3. Замена переменных в тройном интеграле

В тех случаях, когда вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат оказывается затруднительным (неудобная для расстановки пределов область, сложная подынтегральная функция), имеет смысл перейти к новым координатам, позволяющим упростить работу с данным интегралом. Замена переменных в тройном интеграле осуществляется точно так же, как и в двойном.

Пусть новые переменные u, v, w связаны с декартовыми координатами x, y, z соотношениями

$$\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w), \end{cases}$$

где функции $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ и $z(u,v,w)$ имеют непрерывные частные производные в области (V^*) изменения переменных u, v, w.

Формула замены переменных в тройном интеграле имеет вид

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\;dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(V^*)} F(u,v,w)\;\mid J \mid\;du\,dv\,dw,$$

где J– якобиан перехода $\quad J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$

Согласно этой формуле при преобразовании тройного интеграла от декартовых координат к новым криволинейным u, v, w необходимо

1) В подынтегральной функции $f(x,y,z)$ перейти к переменным u, v, w по формулам перехода.

2) Вычислить якобиан перехода J.

3) Границы области интегрирования записать в новых переменных u, v, w.

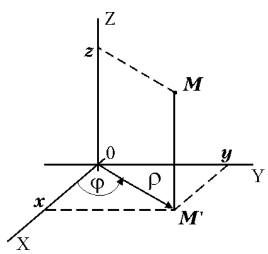
4) Установить границы изменения новых переменных.

5) Записать исходный интеграл в новых координатах, перейти к повторному и вычислить далее по уже известной схеме.

1.2.4. Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Наиболее часто при вычислении тройных интегралов используется переход от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим.

Цилиндрическая система координат представляет собой обобщение полярной системы координат на пространственный случай.



Здесь (ρ, φ) – полярные координаты проекции точки M на плоскость XOY,
z – аппликата точки M.
Формулы перехода от декартовых координат точки M к цилиндрическим и обратно имеют вид:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\,\varphi = y/x, \\ z = z. \end{cases}$$

При переходе к цилиндрическим координатам для вычислении тройного интеграла необходимо следовать пунктам изложенной выше схемы перехода к новым координатам.

1) В подынтегральной функции перейти к цилиндрическим координатам по указанным формулам $f(x,y,z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$.

2) Элемент объема $dv = \mid J \mid \, d\rho\, d\varphi\, dz$.

Якобиан перехода J от декартовой системы координат к цилиндрической равен

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Таким образом, элемент объема $dV = dx\,dy\,dz$ в цилиндрической системе координат примет вид

$$\boxed{dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}.$$

3) Уравнения поверхностей, ограничивающих область (V) снизу и сверху, переводим в цилиндрические координаты $z = z(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)$.

4) Строится ортогональная проекция области (V) на плоскость XOY – область (D) и дальнейшие действия аналогичны тем, которые проводятся при переходе в двойном интеграле от декартовых ко-

ординат к полярным. Уравнения линий, ограничивающих область (D), записываются в полярных координатах в виде $\rho = \rho(\varphi)$. Далее:

5) Определяются пределы изменения переменных ρ и φ, после чего исходный интеграл записывается в виде повторного:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\,d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz.$$

6) По известной схеме осуществляется вычисление повторного интеграла.

В некоторых случаях, когда область (V) удобнее проектировать на на другие плоскости – XOZ или YOZ, следует использовать другие варианты совмещения цилиндрической и декартовой систем координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = y, \\ z = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x = x, \\ y = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Отметим, что использование цилиндрических координат эффективно в тех случаях, когда область (V) ограничена параболоидами, цилиндрами, конусами и их сочетаниями с другими поверхностями.

Примеры преобразований уравнений поверхностей при переходе от декартовых координат к цилиндрическим.

1. Параболоид $z = x^2 + y^2$

$$z = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad z = \rho^2.$$

2. Параболоид $2z = 3 - x^2 - y^2$

$$2z = 3 - (x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad z = \tfrac{1}{2}\,(3 - \rho^2).$$

3. Параболоид $x^2 + y^2 = 5 - z$

$$x^2 + y^2 = 5 - z \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 5 - z \quad \Rightarrow \quad z = 5 - \rho^2.$$

4. Параболоид $\quad z = 1 - 2x^2 - 2y^2$

$$z = 1 - 2(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad z = 1 - 2\rho^2.$$

5. Параболоид $\quad y = x^2 + z^2$

$$y = x^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = y \\ z = \rho\sin\varphi \\ x^2 + z^2 = \rho^2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad y = \rho^2.$$

6. Параболоид $\quad x^2 + z^2 = 3 - y$

$$x^2 + z^2 = 3 - y \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = y \\ z = \rho\sin\varphi \end{array} \right| \Rightarrow \rho^2 = 3 - y \quad \Rightarrow \quad y = 3 - \rho^2.$$

7. Параболоид $\quad x = y^2 + z^2$

$$x = y^2 + z^2 \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = x \\ y = \rho\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \\ y^2 + z^2 = \rho^2 \end{array} \right| \Rightarrow \; x = \rho^2.$$

8. Параболоид $\quad y^2 + z^2 = 2 - x$

$$y^2 + z^2 = 2 - x \;\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = x \\ y = \rho\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \end{array} \right| \Rightarrow \; \rho^2 = 2 - x \;\Rightarrow\; x = 2 - \rho^2.$$

9. Конус $\quad x^2 + y^2 = z^2$

$$x^2 + y^2 = z^2 \;\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right| \Rightarrow \; \rho^2 = z^2 \;\Rightarrow\; z = \pm\rho.$$

10. Конус $\quad z = 4\sqrt{x^2 + y^2} \quad$ (верхняя часть)

$$z = 4\sqrt{x^2 + y^2} \;\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right| \Rightarrow \; z = 4\sqrt{\rho^2} \;\Rightarrow\; z = 4\rho.$$

11. Конус $\quad x^2 + z^2 = y^2$

$$x^2 + z^2 = y^2 \;\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = y \\ z = \rho\sin\varphi \end{array} \right| \Rightarrow \; \rho^2 = y^2 \;\Rightarrow\; y = \pm\rho.$$

12. Конус $\quad y^2+z^2=x^2$

$$y^2+z^2=x^2 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=x \\ y=\rho\cos\varphi \\ z=\rho\sin\varphi \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho^2=x^2 \;\Rightarrow\; x=\pm\rho.$$

13. Сфера $\quad x^2+y^2+z^2=R^2$

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho^2+z^2=R^2 \;\Rightarrow\; z=\pm\sqrt{R^2-\rho^2}.$$

14. Цилиндр $\quad x^2+y^2=R^2$

$$x^2+y^2=R^2 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho^2=R^2 \;\Rightarrow\; \rho=R.$$

15. Цилиндр $\quad x^2+z^2=R^2$

$$x^2+z^2=R^2 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=y \\ z=\rho\sin\varphi \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho^2=R^2 \;\Rightarrow\; \rho=R.$$

16. Цилиндр $\quad y^2+z^2=R^2$

$$y^2+z^2=R^2 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=x \\ y=\rho\cos\varphi \\ z=\rho\sin\varphi \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho^2=R^2 \;\Rightarrow\; \rho=R.$$

17. Цилиндр $\quad x^2+y^2=2Rx$

$$x^2+y^2=2Rx \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho^2=2R\rho\cos\varphi \;\Rightarrow\; \rho=2R\cos\varphi.$$

18. Плоскость $\quad y=x$

$$y=x \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{array}\right| \Rightarrow \rho\sin\varphi=\cos\varphi \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\varphi=1 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} \varphi=\pi/4, \\ \varphi=5\pi/4 \end{array}.$$

19. Плоскость $\quad y+z=2$

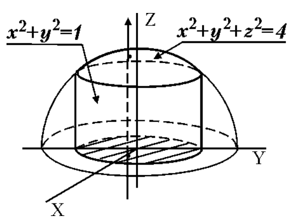
$$y+z=2 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho\sin\varphi+z=2 \;\Rightarrow\; z=2-\rho\sin\varphi.$$

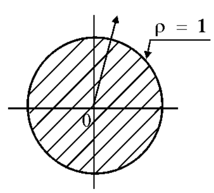
Задача 5. Перейти в тройном интеграле $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ к цилиндрическим координатам и расставить пределы интегрирования по заданным областям (V).

• **1**. $(V):\{x^2+y^2+z^2=4,\ \ x^2+y^2=1,\ \ z\ge 0\}$ (внутри цилиндра).

1) Строим область интегрирования. Она ограничена снизу плоскостью $z=0$, сверху – сферической поверхностью $x^2+y^2+z^2=4$, с боков – цилиндрической поверхностью $x^2+y^2=1$.

Проведем стрелку, параллельную оси OZ и пересекающую данное тело. Тогда $z=0$ – поверхность входа, $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ – поверхность выхода.





Перейдем к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\\ z=z. \end{cases}$$

2) Проецируем эту область на плоскость XOY. Получим круг радиуса 1.

3) Запишем уравнения границ в цилиндрической системе координат

$$z_{\text{вх}}=0,\qquad x^2+y^2+z^2=4\ \Rightarrow\ \ z_{\text{вых}}=+\sqrt{4-\rho^2}.$$

Пределы изменения переменных ρ и φ определяем по проекции (в полярных координатах) $\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le\rho\le 1.$

4) Элемент объема $\ dx\,dy\,dz=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$

5) Записываем интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho\,d\rho\int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,dz=$$

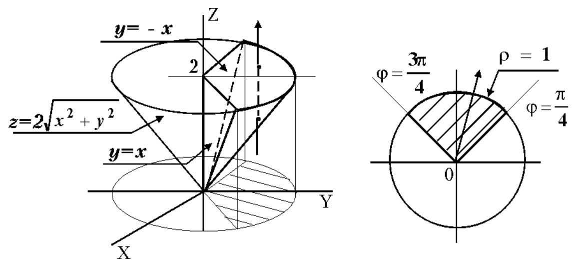
$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\,d\rho\int\limits_0^{\sqrt{4-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,dz.$$

• **2**. $(V): \quad \{z = 2\sqrt{x^2+y^2}, \;\; z=2, \;\; y \ge x, \quad y \ge -x\}.$

1) Область интегрирования ограничена снизу конической поверхностью $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ – поверхность входа, сверху – плоскостью $z = 2$ – поверхность выхода, с боков – плоскостями $y = x, \quad y = -x$.

Перейдем к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$



2) Проецируем эту область на плоскость XOY.
Получим круг, уравнение границы которого определим ниже из условия пересечения конуса и плоскости.

3) Запишем уравнения границ в цилиндрической системе координат

$$z_{\text{вх}} = 2\sqrt{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; z_{\text{вх}} = 2\rho, \quad z_{\text{вых}} = 2.$$

Пределы изменения переменных ρ и φ определяем по проекции (в полярных координатах). Радиус круга получим из решения системы

$\{z = 2\rho, \quad z = 2\} \;\Rightarrow\; \rho = 1.$

$y = x \;\Rightarrow\; \varphi = \pi/4, \;\; y = -x \;\Rightarrow\; \varphi = 3\pi/4$

$\pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4, \qquad 0 \le \rho \le 1.$

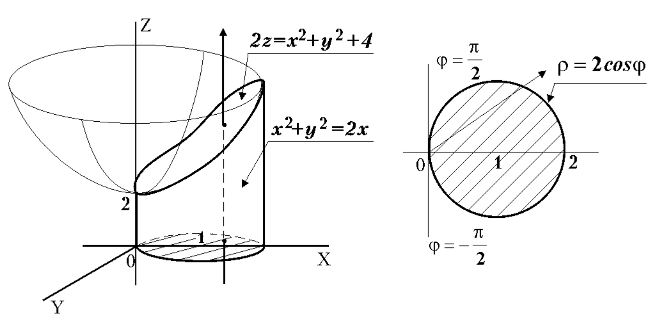
4) Элемент объема $\; dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$

5) Записываем интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\,d\rho \int\limits_{2\rho}^{2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,dz.$$

• **3**. $(V): \quad \{2z = x^2+y^2+4, \;\; x^2+y^2 = 2x, \; z \ge 0\}.$

1) Область интегрирования ограничена снизу плоскостью $z = 0$ –поверхность входа, сверху – параболоидом $2z = x^2+y^2+4$ – поверхность выхода, с боков – цилиндрической поверхностью $\; x^2+y^2 = 2x.$



Перейдем к цилиндрическим координатам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$

2) Проецируем эту область на плоскость XOY. Получим круг

$$(x-1)^2 + y^2 \le 1.$$

3) Запишем уравнения границ в цилиндрической системе координат

$$z_{\text{вх}} = 0, \quad 2z = x^2 + y^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad z_{\text{вых}} = (\rho^2/2) + 2.$$

Пределы изменения переменных ρ и φ определяем по проекции (в полярных координатах).

$$x^2 + y^2 = 2x \;\Rightarrow\; \rho = 2\cos\varphi.$$

$$-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2, \qquad 0 \le \rho \le 2\cos\varphi.$$

4) Элемент объема $dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$.

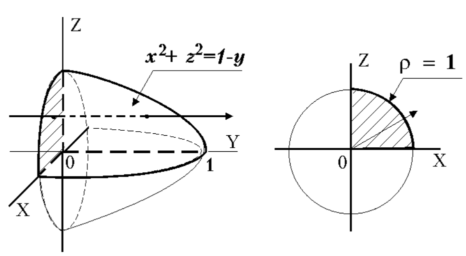
5) Записываем интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} \rho\,d\rho \int\limits_{0}^{(\rho^2/2)+2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,dz.$$

• **4.** $(V):\quad \{x^2 + z^2 = 1 - y,\ \ y = 0,\quad z \ge 0,\quad z \ge 0\}.$

1) Строим область интегрирования. Она ограничена справа параболоидом $x^2 + z^2 = 1 - y$, слева плоскостью $y = 0$, а также плоскостями $x = 0$, $z = 0$. Проведем стрелку, параллельную оси OY и персекающую данное тело. Тогда $y = 0$ – поверхность входа, $y = 1 - x^2 - y^2$ – поверхность выхода. Перейдем к цилиндрическим координатам. В данном случае удобнее использовать такую ориентацию цилиндрической системы координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = y, \\ z = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$



2) Проецируем эту область на плоскость XOZ. Получим четверть круга: при $y = 0:\quad x^2 + z^2 \le 1,\quad x \ge 0,\quad z \ge 0.$

3) Запишем уравнения границ в цилиндрической системе координат

$$y_{\text{вх}} = 0, \quad x^2 + z^2 = 1 - y \quad \Rightarrow \quad y_{\text{вых}} = \quad 1 - \rho^2.$$

Пределы изменения переменных ρ и φ определяем по проекции (в полярных координатах).

$$x^2 + z^2 = 1 \;\Rightarrow\; \rho = 1, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2, \qquad 0 \le \rho \le 1.$$

4) Элемент объема $\quad dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dy.$

5) Записываем интеграл

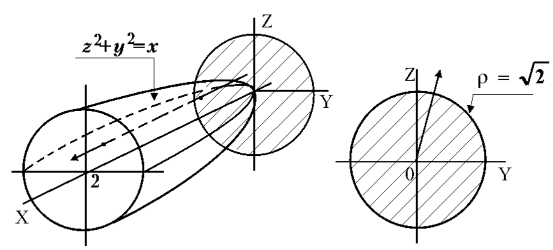
$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\,d\rho \int\limits_0^{1-\rho^2} f(\rho\cos\varphi, y, \rho\sin\varphi)\,dy.$$

• **5**. $\quad (V): \quad \{y^2 + z^2 = x, \;\; x = 2\}.$

1) Область интегрирования ограничена параболоидом $y^2 + z^2 = x$ и плоскостью $x = 2$.

Проведем стрелку, параллельную оси OX и персекающую данное тело. Тогда $x = y^2 + z^2$– поверхность входа, $x = 2$ – поверхность выхода. В данном случае удобнее использовать такую ориентацию цилиндрической системы координат:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$



2) Проецируем эту область на плоскость YOZ.

Получим круг:
при $x = 2: \quad y^2 + z^2 \le 2.$

3) Запишем уравнения границ в цилиндрической системе координат

$$y^2 + z^2 = x, \;\Rightarrow\; x_{\text{вх}} = \rho^2, \qquad x_{\text{вых}} = 2.$$

Пределы изменения переменных ρ и φ определяем по проекции (в полярных координатах).

$$y^2 + z^2 = 2 \;\Rightarrow\; \rho = \sqrt{2}, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le \rho \le \sqrt{2}.$$

4) Элемент объема $\quad dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dx.$

5) Записываем интеграл

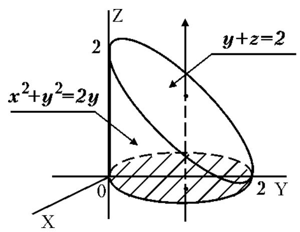
$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho\,d\rho \int\limits_{\rho^2}^{2} f(x, \rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,dx.$$

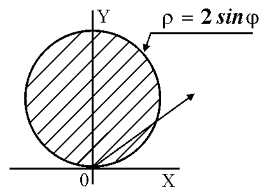
• **6**. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$

по области $\quad (V): \quad \{x^2+y^2=2y, \quad y+z=2, \quad z\geq 0\}$.

1) Строим область интегрирования. Она ограничена снизу плоскостью $z=0$ – поверхность входа, сверху – плоскостью $y+z=2-$ поверхность выхода $z=2-y$, с боков – цилиндрической поверхностью $x^2+y^2=2y$.

Перейдем к цилиндрическим координатам





$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z. \end{cases}$$

2) Проецируем эту область на плоскость XOY.

Получим круг $x^2+(y-1)^2\leq 1$.

3) Запишем уравнения границ в цилиндрической системе координат

$$z_{\text{вх}}=0, \qquad y+z=2 \;\Rightarrow\; z_{\text{вых}}=2-y \quad\Rightarrow\; z_{\text{вых}}=2-\rho\sin\varphi.$$

Пределы изменения переменных ρ и φ определяем по проекции (в полярных координатах)

$$0\leq\varphi\leq\pi, \qquad x^2+y^2\leq 2y \;\Rightarrow\; 0\leq\rho\leq 2\sin\varphi.$$

4) Элемент объема $\quad dx\,dy\,dz=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$.

Подынтегральная функция $\quad \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{\rho}$.

5) Записываем интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \rho\,d\rho \int\limits_0^{2-\rho\sin\varphi} \frac{dz}{\rho} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} d\rho \int\limits_0^{2-\rho\sin\varphi} dz = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} d\rho \left(z\,\Big|_0^{2-\rho\sin\varphi} \right) =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} (2-\rho\sin\varphi)\;d\rho = \int\limits_0^{\pi} d\varphi\;\left(2\rho-\frac{\rho^2}{2}\sin\varphi\right)\;\Big|_0^{2\sin\varphi} =$$

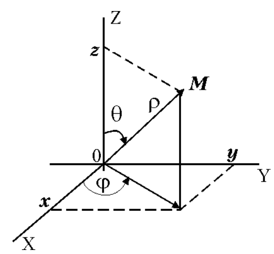
$$= \int\limits_0^{\pi} \left(4\sin\varphi-2\sin^3\varphi\right)\;d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \left(4-2\sin^2\varphi\right)\;\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= -\int\limits_0^{\pi} \left(4-2(1-\cos^2\varphi)\right)\;d(\cos\varphi) = -\int\limits_0^{\pi} \left(2+2\cos^2\varphi\right)\;d(\cos\varphi) =$$

$$= -\left(2\cos\varphi+\frac{2}{3}\cos^3\varphi\right)\;\Big|_0^{\pi} = -\left(-2-2-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right) = 4+\frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

1.2.5. Тройной интеграл в сферических координатах

Положение точки M в сферической системе координат определяется тремя числами $M(\rho, \varphi, \theta)$
$\rho = \mid OM \mid$ – сферический радиус,
$\theta, \quad \varphi$ – сферические углы, изменяющиеся в пределах: $0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. При соответствующем совмещении прямоугольной и сферической систем координат формулы перехода имеют вид



$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta. \end{cases}$$

Переход и вычисление тройного интеграла в сферических координатах рекомендуется проводить по следующей схеме.

1) Элемент объема записывается в сферических координатах

$$dV = \mid J \mid \ d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

Можно показать, что якобиан перехода J от декартовой системы координат к сферической равен

$$J = \rho^2 \sin\theta.$$

Таким образом, элемент объема $dV = dxdydz$ в сферической системе координат примет вид

$$\boxed{dV = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi}\ .$$

2) Осуществляется переход к сферическим координатам в подынтегральной функции

$$f(x, y, z) = f(\rho \sin\theta \cos\varphi,\ \rho \sin\theta \sin\varphi,\ \rho \cos\theta) = F(\rho,\ \theta,\ \varphi).$$

3) Уравнения границ области интегрирования записываются в сферических координатах

$$\rho = \rho_1(\theta, \varphi), \quad \rho = \rho_2(\theta, \varphi).$$

4) Определяются пределы изменения переменных $\rho,\ \theta$ и φ. (При этом удобно использовать стрелку, выходящую из начала координат и пересекающую область в пространстве).

5) Тройной интеграл записывается в виде повторного, причем в качестве внешних переменных интегрирования, как правило, выступают сферические углы

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta\, d\theta \int\limits_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)} F(\rho;\ \theta;\ \varphi)\, \rho^2\, d\rho.$$

6) Составленный интеграл вычисляется стандартным образом.

Примеры преобразований уравнений поверхностей при переходе от декартовых координат к сферическим.

Использование сферических координат эффективно в тех случаях, когда область интегрирования ограничена сферическими и коническими поверхностями.

Отметим, что в сферической системе координат сумма квадратов всех трех переменных дает ρ^2 :

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\theta =$$

$$= \rho^2\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + \rho^2\cos^2\theta = \rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta =$$

$$= \rho^2\,(\sin^2\theta+\cos^2\theta) = \rho^2.$$

1. Сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$. $\quad\Rightarrow\quad \rho^2=R^2 \;\Rightarrow\; \rho=R.$

2. Конус $x^2+y^2=z^2$.

$$x^2+y^2=z^2 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=\rho\cos\theta \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho^2\sin^2\theta=\rho^2\cos^2\theta \Rightarrow\; \mathrm{tg}\theta=\pm1.$$

Уравнение конуса в сферической системе координат:
$\theta=\pi/4$ – верхняя половина конуса, $\quad\theta=3\pi/4$ – нижняя половина конуса.

3. Уравнения плоскостей вида $y=kx$ имеют такой же вид, как и в цилиндрической системе координат $\varphi=const$.

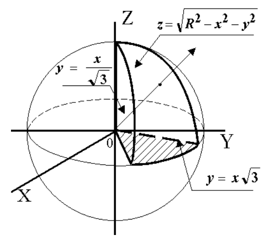
Задача 6. Перейти в тройном интеграле $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dx\,dy\,dz$ к сферическим координатам и расставить пределы интегрирования по областям.

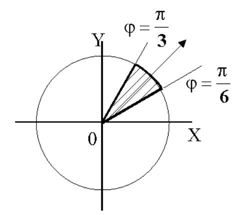
• **1**. $(V):\{z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\ x/\sqrt{3}\le y\le x\sqrt{3},\ x>0,\ y>0,\ z\ge 0\}$.

1) Строим область интегрирования. Она ограничена снизу плоскостью $z=0$, сверху – сферической поверхностью $x^2+y^2+z^2=R^2$, $(z>0)$, с боков – вертикальными плоскостями $y=\ x/\sqrt{3}$, $\ y=x\sqrt{3}$.

Перейдем к сферическим координатам

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\\ z=\rho\cos\theta. \end{cases}$$





Пересечем тело лучом, выходящим из полюса (начала координат). Вход луча в область – в полюсе, выход – на поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, уравнение которой в сферической системе координат $\ x^2+y^2+z^2=R^2\ \Rightarrow\ \rho=R$ и, следовательно, $0\le\rho\le R$.

Границы изменения угла θ получим, исходя из того, что он отсчитывается от положительного направления оси OZ и все тело расположено в верхней полуплоскости $\ 0\le\theta\le\pi/2$.

2) Спроецируем эту область на плоскость XOY. Получим круг радиуса R, из которого прямые $y=\ x/\sqrt{3}$, $y=x\sqrt{3}$ вырезают сектор. Эти прямые имеют уравнения

$$\operatorname{tg}\varphi=1/\sqrt{3},\ \ \varphi=\pi/6,\qquad \operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3},\ \ \varphi=\pi/3.$$

Таким образом, угол φ изменяется в пределах $\quad\pi/6\le\varphi\le\pi/3$.

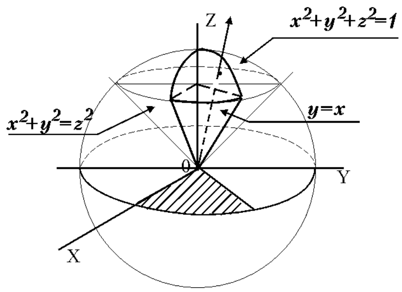
3) Элемент объема $\quad dx\,dy\,dz=\rho^2\ \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$.

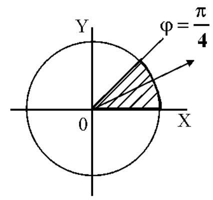
4) Записываем интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\ dy\ dz=$$

$$=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\ d\theta\int\limits_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)}F(\rho,\theta,\varphi)\ \rho^2\ d\rho=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin\theta\ d\theta\int\limits_{0}^{R}F(\rho,\theta,\varphi)\ \rho^2\ d\rho.$$

• **2** $(V): \quad \{x^2+y^2+z^2 \le 1, \ \ x^2+y^2 \le z^2, \ \ 0 \le y \le x, \ \ z>0\}.$





Область интегрирования ограничена снизу конической поверхностью

$$z^2 = x^2+y^2, \quad (z>0),$$

что при переходе к сферическим координатам даст

$$\theta = \pi/4, \quad 0 \le \theta \le \pi/4,$$

сверху – сферической поверхностью $\quad x^2+y^2+z^2=1, \qquad (\rho=1),$

с боков вертикальными плоскостями

$$y=0 \Rightarrow \varphi=0, \quad y=x \Rightarrow \varphi=\pi/4.$$

Элемент объема $\quad dx\,dy\,dz = \rho^2 \, \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi.$

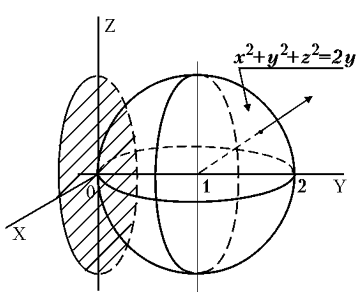
Записываем интеграл

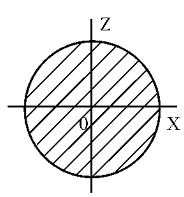
$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^1 F(\rho,\theta,\varphi)\,\rho^2\,d\rho.$$

• **3**. $(V): \{x^2+y^2+z^2 \le 2y\}.$

Область интегрирования ограничена сферой, центр которой смещен по оси OY на 1 и радиусом также $R=1$. Перейдем к сферическим координатам (полюс системы поместим не в начало координат, а в центр сферы $O(0,1,0)$).

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi + 1, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$





Пределы изменения сферических координат будут стандартными ((V) – полная сфера).

$$0 \le \rho \le 1,$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi,$$
$$0 \le \theta \le \pi.$$

Окончательно, $\quad \displaystyle\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^1 F(\rho,\theta,\varphi)\,\rho^2\,d\rho.$

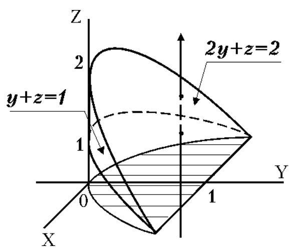
1.2.6. Приложения тройного интеграла

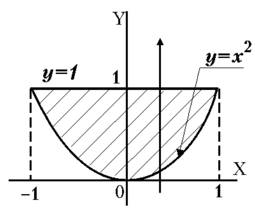
Задача 7. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями.

Объем тела, занимающего данную область (V), можно вычислить с помощью тройного интеграла $\quad V = \iiint\limits_{(V)} dv.$

• **1**. $(V): \quad \{2y + z = 2, \quad y + z = 1, \quad x^2 = y\}.$

Тело ограничено снизу и сверху плоскостями $y + z = 1, \;\; 2y + z = 2$, а с боков – параболическим цилиндром $y = x^2$. Проекцией тела на плоскость XOY служит параболический сегмент.





Решаем задачу в декартовой системе координат.
По рисунку легко записать пределы изменения переменных. Для всех значений $-1 \le x \le 1$ переменная y изменяется в пределах от параболы $y = x^2$ до прямой $y = 1$, а переменная z при этом изменяется от нижней плоскости $z = 1 - y$ и до верхней $z = 2 - 2y$.

Элемент объема в декартовой системе координат $\quad dv = dx\,dy\,dz$. Итак, объем данного тела

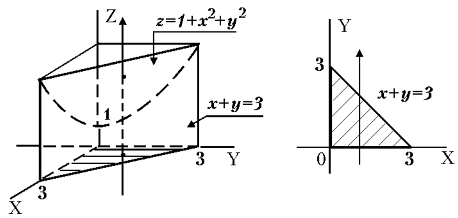
$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} dy \int\limits_{1-y}^{2-2y} dz =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} dy \, \left(z \Big|_{1-y}^{2-2y} \right) = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} \left((2-2y) - (1-y) \right) dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (1-y)\,dy = -\frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} dx (1-y)^2 \, \Big|_{x^2}^{1} = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \left(1 - 2x^2 + x^4\right) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^{1} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} (\text{куб.ед.})$$

• **2**. $(V): \quad \{x^2+y^2+1=z, \quad x+y=3, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\}.$



Данное тело представляет собой вертикальную треугольную призму, которая ограничена снизу плоскостью $z=0$, а сверху поверхностью параболоида $z=1+x^2+y^2$.

Отметим пределы изменения переменных

$$0 \leq x \leq 3, \qquad 0 \leq y \leq 3-x, \qquad 0 \leq z \leq 1+x^2+y^2.$$

Объем тела запишется

$$V=\iiint\limits_{(V)} dv=\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz=\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} dy \int\limits_0^{1+x^2+y^2} dz.$$

Вычисляем интеграл

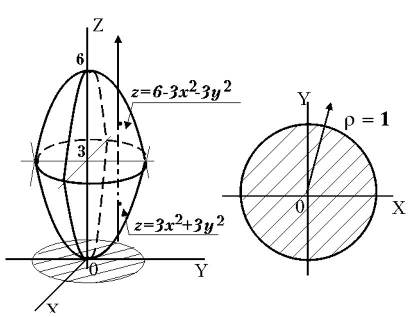
$$V=\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} dy \left(z\Big|_0^{1+x^2+y^2}\right)=\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x}\left(x^2+y^2+1\right) dy=$$

$$=\int\limits_0^3 dx\left(x^2y+\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_0^{3-x}=\int\limits_0^3\left(x^2(3-x)+\frac{(3-x)^3}{3}+(3-x)\right) dx=$$

$$=\int\limits_0^3\left(12-\frac{4}{3}x^3+6x^2-10x\right) dx=\left(12x-\frac{1}{4}x^4+2x^3-5x^2\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=36-27+54-45=18 \text{ (куб.ед.)}$$

• **3**. $(V): \quad \{z=3x^2+3y^2, \quad z=6-3x^2-3y^2\}.$



Тело занимает пространство между двумя встречными параболоидами и проецируется на плоскость XOY в виде круга радиусом $R=1$. Вычисление обьема удобнее вести в цилиндрических координатах.

Формулы перехода от декартовых координат к цилиндрическим

$$\{x=\rho\cos\varphi, \qquad y=\rho\sin\varphi, \qquad z=z\}.$$

И уравнения поверхностей

$$z=3x^2+3y^2 \Rightarrow z=3\rho^2, \qquad z=6-(3x^2+3y^2) \quad \Rightarrow \quad z=6-3\rho^2.$$

Пределы изменения цилиндрических переменных

$$0 \leq \rho \leq 1, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \qquad 3\rho^2 \leq z \leq 6-3\rho^2.$$

Элемент объема в цилиндрических координатах $\quad dv=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$

Объем тела в цилиндрических координатах

$$V = \iiint\limits_{(V)} dv = \iiint\limits_{(V)} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

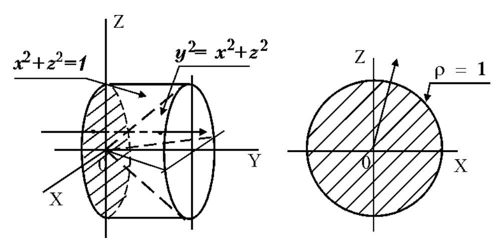
$$V = \iiint\limits_{(V)} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho \int\limits_{3\rho^2}^{6-3\rho^2} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho \left(z \Big|_{3\rho^2}^{6-3\rho^2} \right) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho(6-3\rho^2-3\rho^2)\, d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (6\rho - 6\rho^3)\, d\rho = \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \cdot \left(3\rho^2 - \frac{3}{2}\rho^4 \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 2\pi \cdot \left(3 - \frac{3}{2} \right) = 3\pi \quad \text{(куб.ед.)}$$

• **4.** $(V): \quad \{y^2 = x^2 + z^2, \ \ x^2 + z^2 = 1, \quad y \geq 0\}.$

Данное тело представляет собой цилиндр с выточенным в нем коническим углублением. Осью цилиндра и конуса служит ось OY.



Решаем задачу в цилиндрических координатах, связанных с прямоугольными формулами

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = y, \\ z = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Уравнения ограничивающих поверхностей

$$y^2 = x^2 + z^2 \ \Rightarrow \ y^2 = \rho^2, \quad \Rightarrow \ y = \rho, \qquad x^2 + z^2 = 1 \ \Rightarrow \ \rho = 1, \ \ y \geq 0.$$

Ясно, что пределы изменения переменных

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq \rho.$$

Запишем выражение для объема тела и вычислим его

$$V = \iiint\limits_{(V)} dv = \iiint\limits_{(V)} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho \int\limits_0^{\rho} dy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho \left(y \Big|_0^{\rho} \right) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\,(\rho)\, d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\, d\rho =$$

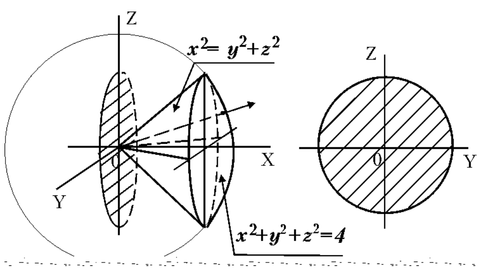
$$= \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{3} = 2\pi/3 \quad \text{(куб.ед.)}$$

• **5**. $(V) : \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 = y^2 + z^2, \quad x \geq 0\}$.

Тело, объем которого требуется вычислить, занимает область, которая ограничена конусом

$$x^2 = y^2 + z^2, \quad (x > 0) \quad \text{и сферой} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Осью конуса служит ось OX. Вычисления удобно проводить в



сферических координата, отсчитывая сферический угол θ от положительного направления оси OX. Тело проецируем на плоскость YOZ. Формулы перехода будут

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta, \\ y = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ z = \rho \sin\theta \sin\varphi. \end{cases}$$

Определимся с пределами изменения переменных.

Сферический угол φ, судя по проекции тела, следует менять в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Угол θ – от направления оси OX : $\theta = 0$, и до поверхности конуса:

$$\theta = \pi/4 \quad (\text{так как} \quad x^2 = y^2 + z^2 \;\Rightarrow\; \rho^2 \cos^2\theta = \rho^2 \sin^2\theta, \quad \mathrm{tg}\theta = 1).$$

Сферический радиус изменяется от $\rho = 0$ до поверхности сферы

$$\rho = 2 \quad (\text{так как} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 4.)$$

Элемент объема $dV = \rho^2 \sin\theta d\varphi\, d\rho\, d\theta$.

Объем тела в сферической системе координат

$$V = \iiint\limits_{(V)} dv = \iiint\limits_{(V)} \rho^2 \sin\theta d\varphi\, d\rho\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \int\limits_0^2 \rho^2\, d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_0^2 \right) = \frac{8}{3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(-\cos\theta \Big|_0^{\pi/4} \right) = \frac{16\pi}{3} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Задача 8. Вычислить массу тела, занимающего данную область (V), если объемная плотность $\delta = \delta(x, y, z)$.

Напомним, что масса тела при заданной функции объемной плотности вычисляется по формуле

$$M = \iiint\limits_{(V)} \delta(x, y, z)\, dv.$$

В зависимости от выбранной системы координат масса тела вычисляется по формулам:

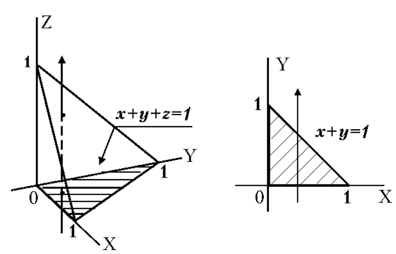
в прямоугольной $M = \iiint\limits_{(V)} \delta(x, y, z)\ dx\ dy\ dz,$

в цилиндрической $M = \iiint\limits_{(V)} \delta(\rho, \varphi, z)\ \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz,$

в сферической $M = \iiint\limits_{(V)} \delta(\rho, \varphi, \theta)\ \rho^2 \sin\theta\ d\rho\ d\varphi\ d\theta.$

• **1**. $(V):\ \{x + y + z = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\},\ \delta = \dfrac{1}{(x + y + z + 1)^3}.$

Тело занимает часть трехгранного координатного угла и проецируется на плоскость XOY в треугольник. Пределы изменения прямоугольных координат



$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x,$
$0 \leq z \leq 1 - x - y.$

Масса тела $M = \iiint\limits_{(V)} \delta(x, y, z)\ dx\ dy\ dz = \iiint\limits_{(V)} \dfrac{dx\ dy\ dz}{(x + y + z + 1)^3} =$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x + y + z + 1)^3} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \left(\frac{-1/2}{(x + y + z + 1)^2} \Bigg|_0^{1-x-y} \right) =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1/2}{(x + y + 1)^2} \right)\ dy = \int\limits_0^1 dx\ \left(-\frac{1}{8} \cdot y - \frac{1/2}{x + y + 1} \right)\ \Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{8}\ (x - 1) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ \frac{1}{x + 1} \right)\ dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{8}\ x - \frac{3}{8} + \frac{1}{2(x + 1)} \right)\ dx =$$

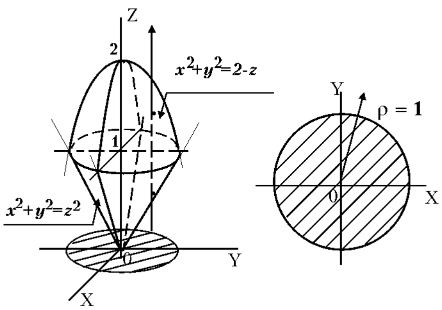
$$= \left(\frac{1}{16}\ x^2 - \frac{3}{8}\ x + \frac{1}{2}\ \ln|x + 1| \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\ \ln 2 =$$

$$= -\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\ \ln 2 \approx -0,313 + \frac{1}{2}\ 0,692 \approx 0,033 \text{ (ед.массы)}.$$

• **2**. $(V):\ \{x^2+y^2=2-z,\ x^2+y^2=z^2,\quad z>0\},\ \delta=\sqrt{(x^2+y^2)^3}$.

Данное тело занимает внутренность вертикального конуса и сверху ограничено параболоидом. Пересечение поверхностей дает окружность радиуса 1.

$$\begin{cases} x^2+y^2=2-z, \\ x^2+y^2=z^2, \end{cases} \Rightarrow z^2+z-2=0 \quad \Rightarrow \quad z=1 \Rightarrow \quad x^2+y^2=1$$



Используем цилиндрические координаты

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z. \end{cases}$$

Уравнения границ в цилиндрической системе координат:

конус $\quad x^2+y^2=z^2 \Rightarrow z=\rho=z_{\text{вх}}$,

параболоид $\quad x^2+y^2=2-z \Rightarrow z-2-\rho^2=z_{\text{вых}}$

Выражение для плотности $\ \delta=\sqrt{(x^2+y^2)^3} \quad \Rightarrow \quad \delta=\rho^3$.

Пределы изменения переменных ρ и φ

$$0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\rho\le 1.$$

Элемент объема $\quad dx\,dy\,dz=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$.

Масса тела $\quad M=\iiint\limits_{(V)}\rho^3\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^4\,d\rho\int\limits_\rho^{2-\rho^2}dz=$

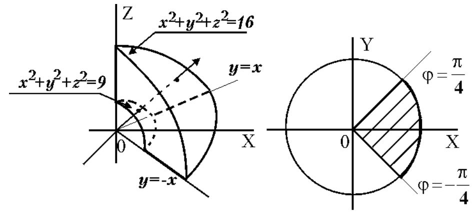
$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^4\,d\rho\left(z\Big|_\rho^{2-\rho^2}\right)=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^4\left(2-\rho^2-\rho\right)d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(2\rho^4-\rho^6-\rho^5)\,d\rho=\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\rho^5-\frac{\rho^7}{7}-\frac{\rho^6}{6}\right)\Big|_0^1=$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{7}-\frac{2}{6}\right)=\frac{19}{105}\pi.\ \text{(ед.массы)}$$

• **3**. $(V): \{9 \le x^2+y^2+z^2 \le 16,\ -x \le y \le x,\ z \ge 0,\ x \ge 0$ — часть сферического слоя$\}$, $\delta(x;y;z) = x\ z$.

Используем сферические координаты



$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$

Запишем уравнения границ в сферических координатах:

$$x^2+y^2+z^2 = 9 \ \Rightarrow\ \rho = 3, \ \text{ и } \ x^2+y^2+z^2 = 16 \ \Rightarrow\ \rho = 4.$$

Так как все тело расположено в верхней полуплоскости

$$z \ge 0, \quad \text{то} \quad 0 \le \theta \le \pi/2.$$

Уравнения боковых стенок

$$y = x \ \Rightarrow\ \varphi = \pi/4 \ \text{ и } \ y = -x \ \Rightarrow\ \varphi = -\pi/4.$$

Таким образом, угол φ изменяется в пределах $-\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$.

Элемент объема $dx\,dy\,dz = \rho^2\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$.

Функция плотности

$$\delta = x\ z = \rho\sin\theta\cos\varphi\cdot\rho\cos\theta = \rho^2\ \sin\theta\ \cos\theta\ \cos\varphi.$$

Окончательно, масса тела

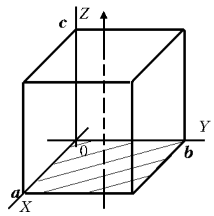
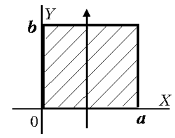
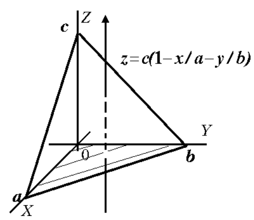
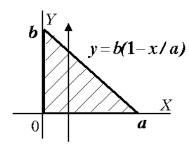
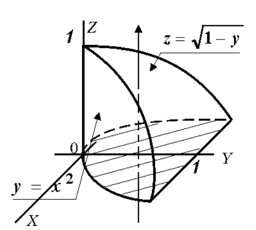
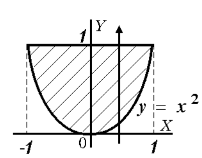
$$M = \iiint\limits_{(V)} \delta(\rho,\theta,\varphi)\,dv = \iiint\limits_{(V)} \rho^2\ \sin\theta\ \cos\theta\ \cos\varphi\ \rho^2\ \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\varphi\,d\varphi \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2\theta\ \cos\theta\,d\theta \int\limits_{3}^{4} \rho^4\,d\rho =$$

$$= \left(\sin\varphi\ \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}\right)\cdot\left(\frac{\sin^3\theta}{3}\ \Big|_{0}^{\pi/2}\right)\cdot\left(\frac{\rho^5}{5}\ \Big|_{3}^{4}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{4^5}{5} - \frac{3^5}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}\cdot 781}{15} \approx 73 \text{ (ед.массы)}.$$

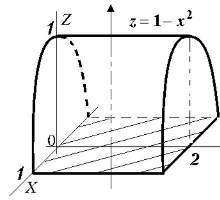
Приложение 3.
Тройной интеграл в прямоугольных координатах

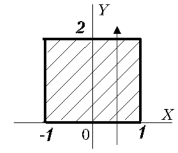
	Область интегрирования	Рисунок Повторный интеграл
1.	$\begin{cases} x=0, \quad x=a, \\ y=0, \quad y=b, \\ z=0, \quad z=c \end{cases}$	  $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy \int\limits_0^c f(x,y,z)\,dz$
2.	$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1, \\ x=0, \\ y=0, \\ z=0 \end{cases}$	  $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b(1-x/a)} dy \int\limits_0^{c(1-x/a-y/b)} f(x,y,z)\,dz$
3.	$\begin{cases} z=\sqrt{1-y}, \\ y=x^2, \\ z\geq 0 \end{cases}$	  $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y,z)\,dz$

<table>
<tr>
<td>4.</td>
<td>

$$\begin{cases} z = 1 - x^2, \\ y = 0,\ y = 2, \\ z \ge 0 \end{cases}$$

</td>
<td>



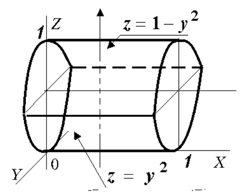


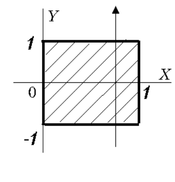
$$\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{2} dy \int_{0}^{1-x^2} f(x,y,z)\ dz$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>5.</td>
<td>

$$\begin{cases} z = 1 - y^2, \\ z = y^2, \\ x = 0, \quad x = 1 \end{cases}$$

</td>
<td>



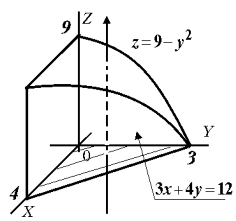


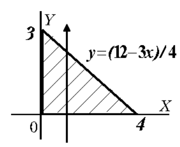
$$\int_{0}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1-y^2} f(x,y,z)\ dz$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>6.</td>
<td>

$$\begin{cases} z = 9 - y^2, \\ 3x + 4y = 12, \\ x \ge 0,\ y \ge 0, \\ z \ge 0 \end{cases}$$

</td>
<td>



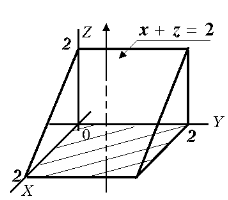


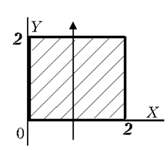
$$\int_{0}^{4} dx \int_{0}^{3-3/4x} dy \int_{0}^{9-y^2} f(x,y,z)\ dz$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>7.</td>
<td>

$$\begin{cases} x + z = 2, \\ y = 0, \quad y = 2, \\ x \ge 0, \quad z \ge 0 \end{cases}$$

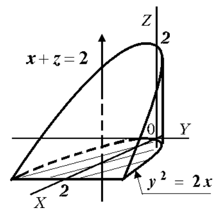
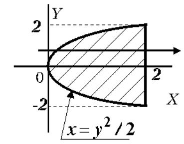
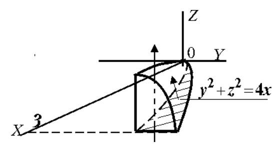
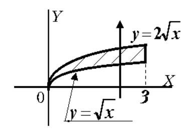
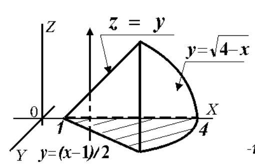
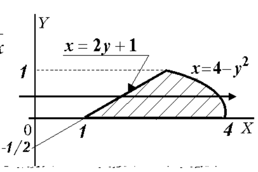
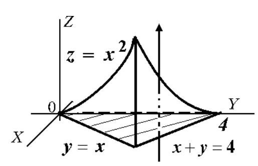
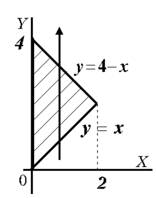
</td>
<td>





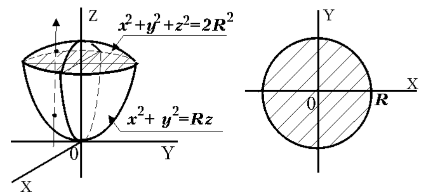
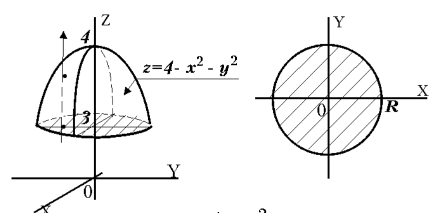
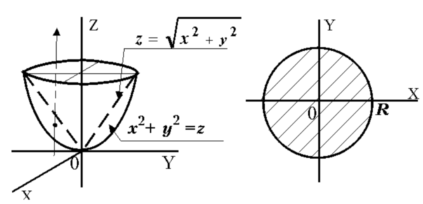
$$\int_{0}^{2} dx \int_{0}^{2} dy \int_{0}^{2-x} f(x,y,z)\ dz$$

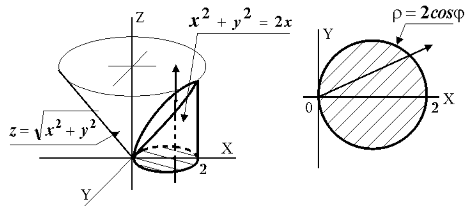
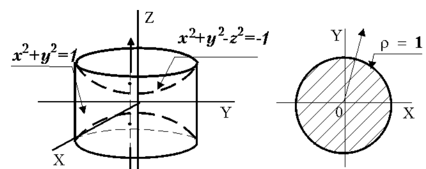
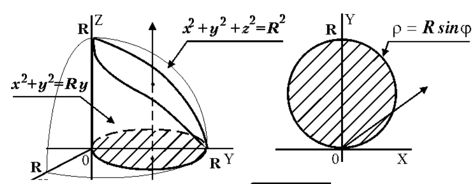
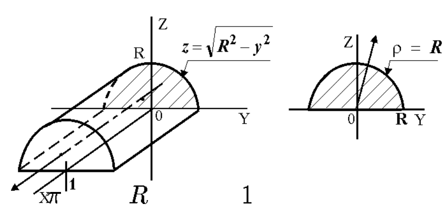
</td>
</tr>
</table>

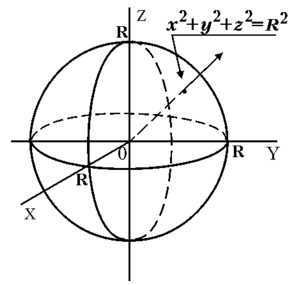
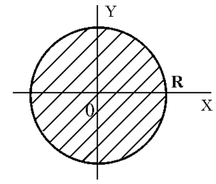
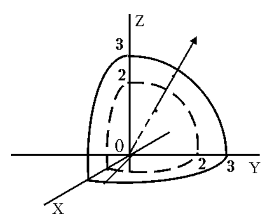
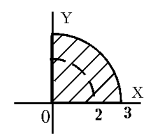
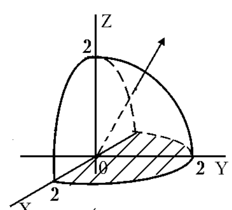
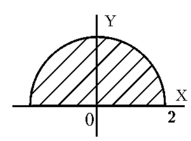
8.	$\begin{cases} x+z=2, \\ y^2=2x, \\ z\geq 0 \end{cases}$	  $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{y^2/2}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f(x,y,z)\; dz$
9.	$\begin{cases} y^2+z^2=4x, \\ y^2=x, \quad y^2=4x, \\ x=3, \\ z\geq 0, \quad y\geq 0 \end{cases}$	  $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4x-y^2}} f(x,y,z)\; dz$
10.	$\begin{cases} z=y, \qquad z\geq 0, \\ y=\sqrt{4-x}, \\ x-2y=1 \end{cases}$	  $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y+1}^{4-y^2} dx \int\limits_{0}^{y} f(x,y,z)\; dz$
11.	$\begin{cases} z=x^2, \\ x+y=4, \\ y=x, \qquad z\geq 0 \end{cases}$	  $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{4-x} dy \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y,z)\; dz$

Приложение 4.

Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах

	Область интегрирования	Рисунок Повторный интеграл
1.	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2R^2, \\ x^2+y^2=Rz, \\ z\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z=\sqrt{2R^2-\rho^2}, \\ z=\rho^2/R \end{cases}$	 $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho\, d\rho \int\limits_{\rho^2/R}^{\sqrt{2R^2-\rho^2}} f(\rho,\varphi,z)\, dz$
2.	$\begin{cases} z=4-x^2-y^2, \\ z=3 \end{cases}$ $\begin{cases} z=4-\rho^2, \\ z=3 \end{cases}$	 $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} \rho\, d\rho \int\limits_{3}^{4-\rho^2} f(\rho,\varphi,z)\, dz$
3.	$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ $\begin{cases} z=\rho, \\ z=\rho^2 \end{cases}$	 $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} \rho\, d\rho \int\limits_{\rho^2}^{\rho} f(\rho,\varphi,z)\, dz$

4.	$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ x^2+y^2=2x, \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} z=0, \quad z=\rho, \\ \rho=2\cos\varphi \end{cases}$	 $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho\, d\rho \int\limits_0^{\rho} f(\rho,\varphi,z)\ dz$
5.	$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=-1, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} z=\pm\sqrt{1+\rho^2}, \\ \rho=1 \end{cases}$	 $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\ d\rho \int\limits_{-\sqrt{1+\rho^2}}^{\sqrt{1+\rho^2}} f(\rho,\varphi,z)\ dz$
6.	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x^2+y^2=Ry, \\ z\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z=\sqrt{R^2-\rho^2}, \\ \rho=R\sin\varphi, \\ z=0 \end{cases}$	 $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{R\sin\varphi} \rho\ d\rho \int\limits_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho,\varphi,z)\ dz$
7.	$\begin{cases} z\leq\sqrt{R^2-y^2}, \\ x=0, \quad x=1, \\ z\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \quad x=1, \\ \rho=R \end{cases}$	 $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho\ d\rho \int\limits_0^{1} f(\rho,\varphi,z)\ dx$

	Область интегрирования	Рисунок Повторный интеграл
8.	$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $\rho = R$	  $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta \int\limits_0^{R} f(\rho,\varphi,\theta) \; \rho^2 \; d\rho$
9.	$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \geq 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ z \geq 0 \end{cases}$ $2 \leq \rho \leq 3$	  $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_2^{3} f(\rho,\theta,\varphi) \; \rho^2 \; d\rho$
10.	$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y \geq 0, \\ z \geq 0 \end{cases}$ $\rho = 2.$	  $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2} f(\rho,\theta,\varphi)\rho^2 \; d\rho$