Здравствуйте!

Лекция №9

Признак Абеля. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится (не обязательно абсолютно!), а последовательность чисел a_k монотонна и ограничена, то **ряд** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ **сходится.**

Доказательство.

1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится $\Rightarrow$ по признаку Больцано–Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall m > 0 \ |b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+m}| < \varepsilon.$$

2. Последовательность чисел a_k ограничена $\Rightarrow$ $\exists K < +\infty \ \ \forall n \ \ |a_n| \le K < +\infty$.

3. Дальнейшие выкладки сначала полностью повторяют вывод признака Дирихле

$$|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+a_{n+3}b_{n+3}+\ldots+a_{n+m}b_{n+m}|=$$

(делаем преобразование Абеля)

$$=\left|a_{n+m}\widetilde{B}_m-\sum_{i=1}^{m-1}(a_{n+i+1}-a_{n+i})\widetilde{B}_i\right|\le$$

$$\le|\widetilde{B}_m|\cdot|a_{n+m}|+\sum_{i=1}^{m-1}|\widetilde{B}_i|\cdot|a_{n+i+1}-a_{n+i}|\le$$

С этого момента начинаются отличия. Если раньше действовала оценка $|\widetilde{B}_i| \le 2M$, то теперь будет оценка $|\widetilde{B}_i| < \varepsilon$:

$$< \varepsilon\left\{|a_{n+m}| + \sum_{i=1}^{m-1} |a_{n+i+1} - a_{n+i}|\right\} \le$$

В этом месте – самый тонкий момент. Согласно ограничению, последовательность чисел a_k **монотонна** $\Rightarrow$ все разности $a_{n+i+1} - a_{n+i}$ **одного знака**, или все положительные, или все отрицательные. Поэтому можно записать

$$\sum_{i=1}^{m-1} |a_{n+i+1} - a_{n+i}| = \left|\sum_{i=1}^{m-1} (a_{n+i+1} - a_{n+i})\right| = |a_{n+m} - a_{n+1}| \le |a_{n+m}| + |a_{n+1}|.$$

Поэтому, продолжая доказательство, можно записать:

$$\le \varepsilon\left(|a_{n+m}| + |a_{n+m}| + |a_{n+1}|\right) \le 3K\varepsilon.$$

Заключительная фраза та же самая: ε сколь угодно мало. Поэтому, со ссылкой на признак сходимости Больцано–Коши, можно утверждать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Сочетательное свойство сходящихся рядов

Рассмотрим два ряда: ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = A$$

который будем называть рядом (A), и ряд

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots = \widetilde{A},$$

который будем называть рядом $(\widetilde{A})$.

Теорема. Если ряд (A) сходится, то ряд $(\widetilde{A})$ тоже сходится и имеет ту же сумму.

Доказательство.

Пусть A_n есть частная сумма ряда (A), то есть $A_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$. Рассмотрим теперь частные суммы ряда $(\widetilde{A})$. Имеем

$$\widetilde{A}_1 = A_{n_1};\ \ \widetilde{A}_2 = A_{n_2};\ \ \widetilde{A}_3 = A_{n_3};\ \ \ldots\ \ \widetilde{A}_k = A_{n_k}.$$

Но тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, то и $\widetilde{A} = \lim\limits_{k\to\infty} A_{n_k} = A$, потому, что последовательность $\{A_{n_k}\}$ есть подпоследовательность последовательности $\{A_n\}$.

Замечания.

1. Это свойство нельзя применять наоборот, то есть из сходимости ряда ($\tilde{A}$) **не следует** сходимость ряда (A). Другими словами, в сходящемся ряду собирать слагаемые в группы и заключать эти группы в скобки **можно,** а вот раскрывать скобки, вообще говоря, **нельзя**, точнее, надо делать это очень осторожно. Это можно делать лишь тогда, когда ряд, получающийся после раскрытия скобок, является сходящимся рядом, а это надо доказывать.

Пример. Ряд

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0$$

сходится и сумма его **равна** нулю, а вот ряд, полученный после раскрытия скобок,

$$1-1+1-1+1-1\pm\ldots$$

расходится, так как его общий член не стремится к нулю.

2. Это свойство **неверно** для **расходящихся рядов**, то есть в расходящемся ряду собирать слагаемые в группы и заключать эти группы в скобки **нельзя.**

Пример. Ряд

$$1-1+1-1+1-1\pm\ldots$$

расходится, но ряды

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0,$$

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots=1$$

сходятся, и имеют разные суммы.

Переместительное свойство сходящихся рядов

Пусть дан сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ (ряд A). Пусть $\{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ есть некоторая перестановка чисел $\{1, 2, 3, \ldots\}$, причем чисел переставлено **бесконечно много**. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = A'$ (ряд A'), где $a'_k = a_{n_k}$. Будет ли выполняться равенство $A = A'$?

Теорема. Если ряд A сходится абсолютно, то ряд A' тоже абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Доказательство.

1. Пусть $\forall k \ \ a_k \geq 0$ и $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ есть частная сумма ряда A. Так как все слагаемые неотрицательны, то, очевидно, все частные суммы меньше суммы ряда A.

Рассмотрим теперь частные суммы ряда A':

$$A'_k = \sum_{s=1}^{k} a'_s .$$

Возьмем $n = \max(n_1, n_2, n_3, ..., n_k)$. Тогда очевидно, что $A'_k \leq A_n$, так как в сумме A'_k **не больше** слагаемых, чем в сумме A_n. Но $\forall n \ \ A_n \leq A$, и поэтому $\forall k \ \ A'_k \leq A_n \leq A$ и ряд A' сходится. При этом верно соотношение $A' \leq A$.

Но ряд A также получается из ряда A' перестановкой слагаемых. Поэтому должно одновременно выполняться и неравенство $A \leq A'$. Отсюда и следует, что $A = A'$.

2. Пусть теперь слагаемые ряда A могут иметь произвольный знак, но ряд, составленный из их модулей, сходится:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \overline{A} < +\infty.$$

Основная идея дальнейшего состоит в том, чтобы разбить ряд A на два ряда, в одном из которых будут собраны все положительные слагаемые, а в другом – все отрицательные. Представим себе, что мы просматриваем все слагаемые ряда A по порядку номеров. Если окажется, что $a_k > 0$, то обозначим его через p_s: $p_s = a_k$ (величины p_s нумеруются в порядке их появления). Если окажется, что $a_k < 0$, то введем величину $q_r = -a_k$ (величины q_r также нумеруются в порядке их появления). Таким образом, вместо одного ряда A появятся два ряда $P = \sum_s p_s$ и $Q = \sum_r q_r$

Так как $\forall k$ частные суммы этих рядов удовлетворяют неравенствам $P_k \le \overline{A}$, $Q_k \le \overline{A}$, то оба этих ряда сходятся. Далее очевидно, что $A = P - Q$ и $\overline{A} = P + Q$.

Но перестановка слагаемых в ряде A приведет лишь к перестановке слагаемых в рядах P и Q. Все слагаемые этих рядов положительные, следовательно, согласно п.1, от такой перестановки их суммы не изменятся, а поэтому не изменится сумма ряда A.

Теорема Римана. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **сходится неабсолютно, то, какое бы ни взять число *B* (конечное, или равное** $\pm\infty$**), можно так переставить слагаемые в ряде, что его сумма станет равной *B*.**

Так что от перестановки местами слагаемых сумма все-таки может меняться!

1. Проделаем с нашим рядом ту же процедуру, что и в предыдущей теореме, и построим ряды P и Q. Но теперь ситуация меняется кардинально: $A = P - Q$ есть **конечное число**, а $\overline{A} = P + Q = +\infty$. Это может быть лишь в том случае, когда $P = +\infty$ и $Q = +\infty$, то есть ряды P и Q **расходящиеся.**

2. Возьмем конечное число B. Пусть, для определенности, $B > 0$. Начнем строить новый ряд A' следующим образом.

Начнем сначала складывать положительные слагаемые из ряда P. Так как этот ряд расходящийся, то есть его сумма равна $+\infty$, то на каком-то шаге накопленная сумма превзойдет число B. Мы остановимся, как только это произойдет **в первый раз**, то есть будет выполнено следующее

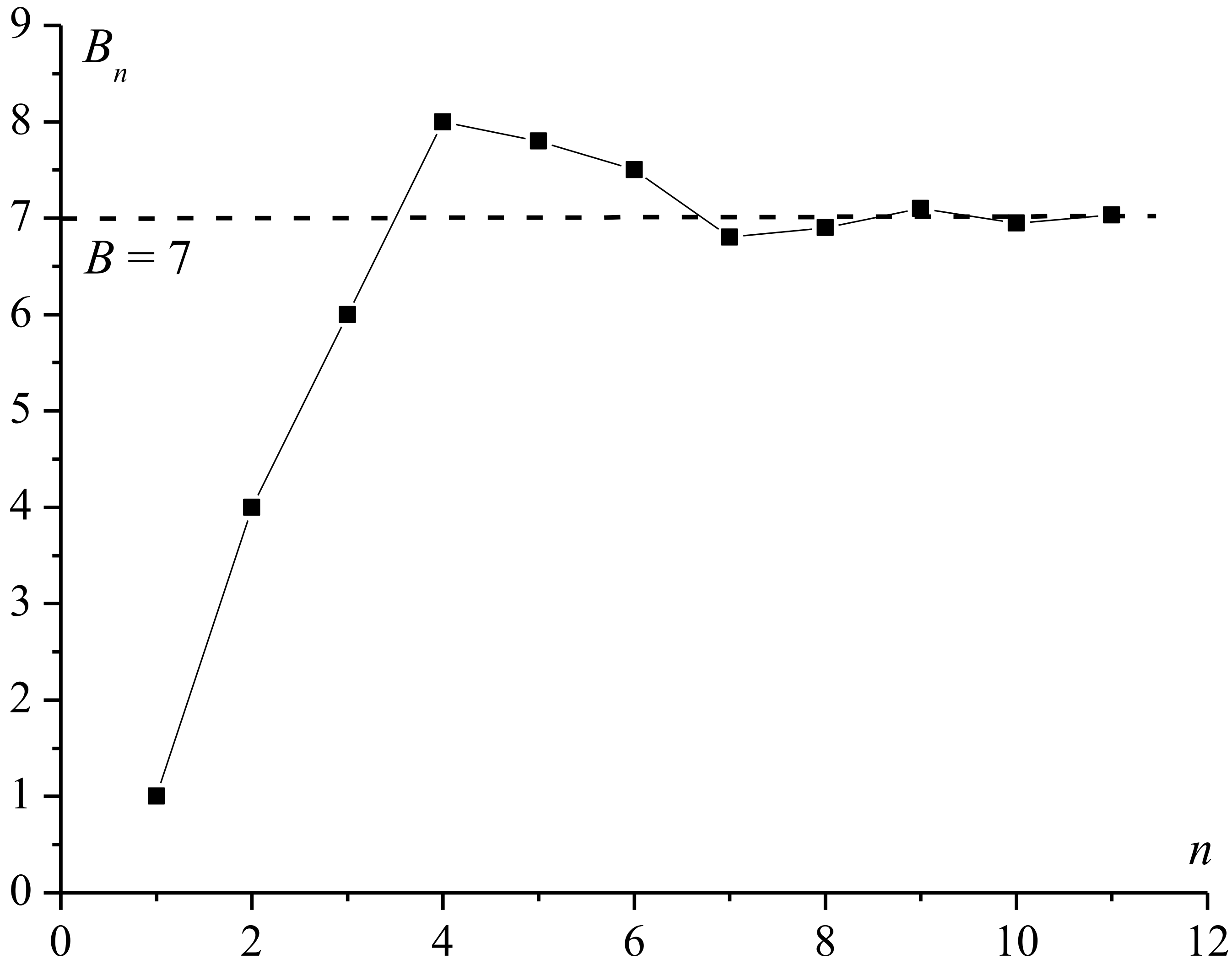
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1-1} < B, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1-1} + p_{k_1} > B.$$

А теперь начнем прибавлять отрицательные слагаемые ряда A, то есть **вычитать** слагаемые ряда Q. Сумма этого ряда также равна $+\infty$, и поэтому на каком-то шаге накопленная сумма обязательно станет меньше B. Мы снова остановимся, как только это произойдет **в первый раз**, то есть будет выполнено следующее

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1 - 1} + p_{k_1}) - q_1 - q_2 - \ldots - q_{s_1 - 1} > B,$$

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1 - 1} + p_{k_1}) - q_1 - q_2 - \ldots - q_{s_1 - 1} - q_{s_1} < B.$$

Снова начнем прибавлять положительные слагаемые, пока накопленная сумма не превзойдет B, затем снова отрицательные, пока накопленная сумма не станет меньше B, и т.д. и т.д.



9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
B_n
B = 7
n
0
2
4
6
8
10
12

Каждый раз членов рядов P и Q берется не больше, чем необходимо для **первого** осуществления требуемого неравенства. Тогда отклонения накопленных сумм от B по модулю не превысят последнего написанного члена. В силу сходимости ряда A его общий член стремится к нулю. Следовательно, накопленные суммы стремятся к числу B, так что построенный ряд сходится и его сумма равна именно B.

3. Пусть $B = +\infty$.

Возьмем последовательность чисел $\{B_1, B_2, B_3, \ldots\}$, такую, что $B_1 < B_2 < B_3 < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = +\infty$.

Трудность заключается в том, что нам надо разместить не только положительные, но и отрицательные члены ряда. Поэтому поступаем следующим образом:

Сначала складываем положительные слагаемые до тех пор, пока их сумма **в первый раз** не превысит число B_1:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} > B_1.$$

Затем добавляем **одно** отрицательное слагаемое и снова добавляем положительные, пока их сумма **в первый раз** не превысит число B_2:

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1}) - q_1 + (p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \ldots + p_{k_2}) > B_2.$$

Снова добавляем одно отрицательное слагаемое и снова добавляем положительные, пока их сумма **в первый раз** не превысит число B_3 и т.д. Так как чисел B_i счетное множество, то разместятся не только все положительные, но и все отрицательные слагаемые.

Очевидно, что сумма построенного таким образом ряда равна $+\infty$.

Пример.

Рассмотрим ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\pm\ldots=S,$$

который сходится по признаку Лейбница. Переставим его слагаемые по следующему правилу: после положительного слагаемого идут два отрицательных:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\pm\ldots .$$

Из экономии, мы не будем доказывать, что этот ряд сходится – попробуйте сделать это сами.

Каждая тройка слагаемых имеет следующую структуру

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}=\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right),$$

Тогда построенный ряд принимает вид

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{k=1}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}_{k=2}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}}_{k=3}\pm\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\pm\ldots\right)=\frac{1}{2}S,$$

так что сумма построенного ряда уменьшилась в два раза.

Перемножение рядов

Пусть даны два ряда

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+a_3+\ldots \text{ (ряд } A\text{) и}$$

$$B=\sum_{k=1}^{\infty}b_k=b_1+b_2+b_3+\ldots \text{ (ряд } B\text{).}$$

Как определить произведение этих рядов?

Рассмотрим бесконечную матрицу

$$\begin{Vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \ldots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \ldots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix},$$

составленную из всевозможных произведений вида a_ib_j. Нам надо сложить все элементы этой матрицы. Как это сделать?

Можно, например, по диагоналям складывать

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + ..., \qquad (*)$$

а можно и так

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + ...,$$

можно еще тысячами разных способов. Но где гарантия, что все эти ряды имеют одну и ту же сумму?

Теорема Коши. Если ряды (*A*) и (*B*) сходятся абсолютно, то их произведение, составленное из слагаемых вида $a_i b_j$, взятых в <u>любом</u> порядке, также сходится и имеет своей суммой $A \cdot B$.

Доказательство.

Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{j_s} = a_{i_1} b_{j_1} + a_{i_2} b_{j_2} + a_{i_3} b_{j_3} + \ldots = C$$

в которое входят все комбинации типа $a_i b_j$, и рассмотрим его частную сумму

$$\sum_{s=1}^{n} a_{i_s} b_{j_s} = a_{i_1} b_{j_1} + a_{i_2} b_{j_2} + a_{i_3} b_{j_3} + \ldots + a_{i_n} b_{j_n}.$$

Пусть $\nu = \max(i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n)$. Тогда

$$\sum_{s=1}^{n} | a_{i_s} b_{j_s} | \le \left(\sum_{i=1}^{\nu} | a_i | \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\nu} | b_j | \right) \le \overline{A} \cdot \overline{B},$$

где $\overline{A} = \sum_{k=1}^{\infty} | a_k |$, $\overline{B} = \sum_{k=1}^{\infty} | b_k |$. Следовательно, ряд $\sum_{s=1}^{\infty} | a_{i_s} b_{j_s} |$ сходится. В силу этого ряд $\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{j_s}$ сходится абсолютно и поэтому его слагаемые можно располагать в любом порядке.

Беря частные суммы ряда C в виде

$$C_n = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right) = A_n \cdot B_n$$

и поэтому $C = \lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} B_n = A \cdot B.$

На практике чаще всего суммируют по диагоналям бесконечной матрицы, как в (*).

Двойные ряды

Обобщением рассмотренной выше ситуации является следующая. Дана бесконечная матрица

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим суммы $A_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Рассмотрим двойной предел, когда m и n одновременно независимо друг от друга стремятся в $+\infty$ (более строгое определение понятия двойного предела будет дано в следующем семестре):

$$\lim_{m,n \to \infty} A_{mn} = \sum_{i,\,j=1}^{\infty} a_{ij},$$

который называется **двойным рядом**, и обозначается символом $\sum_{i,\,j=1}^{\infty} a_{ij}$.

Кроме этого можно рассмотреть и так называемые повторные пределы, когда в $+\infty$ уходит сначала n, а потом m

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} A_{mn} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} ,$$

или, наоборот, сначала m, а потом n

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} A_{mn} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} .$$

Они называются **повторными рядами**.

Теорема. Если из трех рядов

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| , \quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| , \quad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|$$

то сходятся и два остальные и верно равенство

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} .$$

Доказательство.

1. Пусть $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| = \overline{A} < +\infty$. Тогда очевидно, что $\forall\, m, n$ $\overline{A}_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \le \overline{A}$. Но $\overline{A}_{mn}$ монотонно возрастает с ростом n, и, в силу ограниченности сверху, существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \overline{A}_{mn} = \overline{A}_{m,\infty} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \le \overline{A}.$$

Но $\overline{A}_{m,\infty}$ также монотонно возрастает с ростом m, и также ограничена сверху. Поэтому существует и повторный предел

$$\lim_{m\to\infty} \overline{A}_{m,\infty} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \overline{A}_{mn} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \le \overline{A}$$

и ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ сходится. Совершенно аналогично показывается сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|$.

2. Пусть теперь $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|=\overline{A}<+\infty$. Тогда $\overline{A}_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\leq\overline{A}$. Но $\overline{A}_{mn}$ монотонно возрастают с ростом n и m, и, в силу ограниченности $\overline{A}_{mn}$ сверху, существует двойной предел $\lim\limits_{m,n\to\infty}\overline{A}_{mn}=\sum_{i,j=1}^{\infty}|a_{ij}|\leq\overline{A}$.

3. Сравнивая полученные неравенства легко получить, что суммы всех этих трех рядов равны между собой

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|.$$

Но тогда ряды

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}, \quad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

сходятся абсолютно, и, в силу этого, в них можно произвольно переставлять слагаемые, их суммы от этого не изменятся. Поэтому

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Конец четвёртой части