Здравствуйте!

Лекция №9

Оценка темпа роста расходящегося ряда

Пусть нам надо оценить поведение сумм вида $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ при $n >> 1$. Мы построим такую оценку в тех предположениях о функции $f(x)$, которые были сделаны выше.

Начинаем с основного неравенства

$$f(k+1) \le F(k+1) - F(k) \le f(k).$$

Вычитаем из всех частей неравенства $f(k)$

$$f(k+1) - f(k) \le F(k+1) - F(k) - f(k) \le 0$$

умножаем на -1

$$0 \le \left[f(k) - F(k+1) + F(k) \right] \le f(k) - f(k+1)$$

и складываем, меняя k от 1 **до** $\boldsymbol{n}$**:**

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} \left[f(k) - F(k+1) + F(k) \right] \le \sum_{k=1}^{n} \big(f(k) - f(k+1) \big) = f(1) - f(n+1) \le f(1)$$

Обратите внимание на то, что, согласно предыдущему неравенству, все слагаемые в сумме $\sum_{k=1}^{n}\left[f(k)-F(k+1)+F(k)\right]$ **положительны**. Поэтому эта сумма **монотонно возрастает** с ростом n, но ее значения ограничены сверху величиной $f(1)$. Ссылаясь на теорему о пределе монотонно возрастающей последовательности можно утверждать, что существует конечный

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f(k)-F(k+1)+F(k)\right]=C_1.$$

А теперь отбросим этот предел. Но тогда мы обязаны в правой части добавить слагаемое, которое стремится к нулю и написать

$$\sum_{k=1}^{n}\left[f(k)-F(k+1)+F(k)\right]=C_1+\alpha_n,$$

где $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то есть α_n является бесконечно малой величиной.

Теперь имеем

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n}\left[F(k+1) - F(k)\right] = C_1 + \alpha_n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - F(n+1) + F(1) = C_1 + \alpha_n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = F(n+1) + C_1 - F(1) + \alpha_n.$$

Обозначая $C_1 - F(1)$ через C, получаем окончательную формулу

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = F(n+1) + C + \alpha_n,$$

или, в явном виде,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_{1}^{n+1} f(x)dx + C + \alpha_n,$$

правда константа C так и остается неопределенной и ее надо находить из каких-то других соображений.

Пример.

Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. В данном случае, $f(x)=\frac{1}{x}$, $\int_{1}^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln(n+1)$, и мы получим

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n+1)+C+\alpha_n.$$

В данном случае константа C (она носит название постоянной Эйлера) есть $C=0{,}5772156649...$. Теперь можно считать эти суммы и при $n=10^{10}$!

Знакопеременные ряды

Пусть имеется последовательность чисел $\{c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots\}$, такая, что $\forall n \;\; c_n > 0$. Ряд

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + c_5 \pm \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} c_k$$

называется **знакопеременным рядом.**

Признак Лейбница. Если $c_n \downarrow 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} c_k$ сходится.

Доказательство.

Рассмотрим следующую частную сумму изучаемого ряда

$$S_{2m} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 \pm \ldots - c_{2m}$$

с **чётным** индексом $2m$. Ее можно записать двояко. Записывая ее в форме

$$S_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2m-1} - c_{2m})$$

и вспоминая, что c_k **монотонно убывают,** получаем, что все слагаемые положительны и поэтому S_{2m} **монотонно возрастают** с ростом m. С другой стороны, записывая эту же частную сумму в виде

$$S_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \ldots - c_{2m} < c_1,$$

так как все выражения, стоящие в скобках, опять-таки положительны. Поэтому, по теореме о пределе монотонно возрастающей последовательности, существует конечный $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$.

Рассмотрим теперь частные суммы знакопеременного ряда **с нечетным индексом.** Имеем

$$S_{2m+1} = S_{2m} + c_{2m+1}.$$

Но тогда

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} c_{2m+1} = S + 0 = S.$$

Поэтому вообще $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}c_k$ сходится.

Оценка остатка знакопеременного ряда

Пусть γ_n есть остаток знакопеременного ряда после n-го слагаемого.

Пусть $n = 2m$. Тогда имеем:

$$\gamma_{2m} = c_{2m+1} - c_{2m+2} + c_{2m+3} - c_{2m+4} \pm \ldots.$$

Проделаем с этим выражением преобразования, аналогичные тем, которые проделывались с частными суммами. Группируя слагаемые так

$$\gamma_{2m} = (c_{2m+1} - c_{2m+2}) + (c_{2m+3} - c_{2m+4}) + \ldots$$

получаем, что $\gamma_{2m} > 0$. Группируя слагаемые так

$$\gamma_{2m} = c_{2m+1} - (c_{2m+2} - c_{2m+3}) - (c_{2m+4} - c_{2m+5}) - \ldots$$

получаем, что $\gamma_{2m} < c_{2m+1}$. Окончательно имеем $0 < \gamma_{2m} < c_{2m+1}$

Пусть $n = 2m + 1$. Тогда имеем:

$$\gamma_{2m+1} = -c_{2m+2} + c_{2m+3} - c_{2m+4} + c_{2m+5} \pm \ldots.$$

Но тогда

$$-\gamma_{2m+1} = c_{2m+2} - c_{2m+3} + c_{2m+4} - c_{2m+5} \pm \ldots$$

и все предыдущие рассуждения повторяются слово в слово. В этом случае $0 < -\gamma_{2m+1} < c_{2m+2}$.

Оба полученных неравенства можно объединить в одно

$$0 < |\gamma_n| < c_{n+1}.$$

Словами его часто формулируют так: **остаток знакопеременного ряда меньше первого отброшенного слагаемого.**

Сходимость рядов с произвольными слагаемыми.

Пусть теперь $a_n,\ n=\overline{1,\infty}$ есть вещественные числа произвольного знака. Рассмотрим критерии сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Признак сходимости Больцано–Коши

Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **необходимо и достаточно, чтобы**

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall n > N\ \ \forall m > 0\ |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

Доказательство.

Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, по определению, означает существование конечного предела его частных сумм $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Но, по признаку Больцано–Коши для последовательности, для существования такого предела необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall m > 0 \ | A_{n+m} - A_n | < \varepsilon.$$

Но легко видеть, что $A_{n+m} - A_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}$, что и дает доказываемый признак.

Следствие. Если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Доказательство. В приводимой ниже цепочке следований два раза идет ссылка на признак сходимости Больцано–Коши

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится $\Rightarrow$ по признаку Больцано–Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall m > 0 \ |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}| < \varepsilon .$$

Но тогда

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}| < \varepsilon \Rightarrow$$

по тому же признаку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Определение. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ называется **абсолютно сходящимся рядом.** Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится, но $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|=+\infty$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ называется **неабсолютно сходящимся рядом.**

Пример неабсолютно сходящегося ряда.

Таким рядом является, например, ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\pm\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

который сходится по признаку Лейбница. Но ряд, составленный из модулей

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$$

расходится, как гармонический ряд с $s = 1$.

Преобразование Абеля

Пусть $\alpha_i, \beta_i \quad i = \overline{1,m}$ есть некоторые вещественные числа и $B_i = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_i$. Тогда верна формула

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \alpha_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) B_i .$$

Эта формула и называется преобразованием Абеля. Она является дискретным вариантом формулы интегрирования определенных интегралов по частям.

Доказательство.

Имеем

$$B_1 = \beta_1;\ B_2 = \beta_1 + \beta_2;\ B_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3;\ \ldots\ ; B_m = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + ... + \beta_m$$

Отсюда

$$\beta_1 = B_1;\ \beta_2 = B_2 - B_1;\ \beta_3 = B_3 - B_2;\ \ \beta_4 = B_4 - B_3;\ \ldots;\ \beta_m = B_m - B_{m-1}.$$

Теперь имеем следующую цепочку преобразований:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + ... + \alpha_m\beta_m =$$

$$= \alpha_1 B_1 + \alpha_2 (B_2 - B_1) + \alpha_3 (B_3 - B_2) + ... + \alpha_m (B_m - B_{m-1}) =$$

$$= -B_1(\alpha_2 - \alpha_1) - B_2(\alpha_3 - \alpha_2) - ... - B_{m-1}(\alpha_m - \alpha_{m-1}) + \alpha_m B_m =$$

$$= \alpha_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) B_i .$$

Признак Дирихле

Пусть

1. Все частные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ **ограничены, то есть** $\exists M < +\infty \ \forall n \ |B_n| \le M$ **;**

2. $a_k \downarrow 0$**.**

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ **сходится.**

Доказательство.

1. Согласно первому ограничению мы имеем

$$\forall n \ \ |B_n| = |b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n| \le M$$

Пусть

$$\tilde{B}_m = b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3} + \ldots + b_{n+m} = B_{n+m} - B_n.$$

Тогда

$$|\tilde{B}_m| \le |B_{n+m}| + |B_n| \le M + M = 2M\,.$$

2. $a_k \downarrow 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ 0 < a_n < \varepsilon.$

3. Считая, что $\alpha_i = a_{n+i}$, $\beta_i = b_{n+i}$, а также, что $n > N$ и $m > 0$ используем преобразование Абеля. Получаем (вначале особых пояснений не требуется):

$|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + a_{n+3}b_{n+3} + \ldots + a_{n+m}b_{n+m}| =$ (делаем преобразование Абеля)

$$= \left| a_{n+m}\tilde{B}_m - \sum_{i=1}^{m-1}(a_{n+i+1} - a_{n+i})\tilde{B}_i \right| \le$$

$$\le |\tilde{B}_m|\, a_{n+m} + \sum_{i=1}^{m-1} |\tilde{B}_i| \cdot |a_{n+i+1} - a_{n+i}| \le$$

$$\le 2M\left\{ a_{n+m} + \sum_{i=1}^{m-1} |a_{n+i+1} - a_{n+i}| \right\} =$$

И тут наступает самый тонкий момент вывода. Вспомним, что, согласно ограничению 2, a_k **монотонно убывают**. Поэтому **все разности** вида $a_{n+i+1} - a_{n+i}$ **отрицательны,** то есть $|a_{n+i+1} - a_{n+i}| = a_{n+i} - a_{n+i+1}$. В силу этого

$$\sum_{i=1}^{m-1} |a_{n+i+1} - a_{n+i}| = \sum_{i=1}^{m-1} (a_{n+i} - a_{n+i+1}) = a_{n+1} - a_{n+m},$$

и, продолжая прерванный вывод, получим:

$$= 2M(a_{n+m} + a_{n+1} - a_{n+m}) = 2Ma_{n+1} < 2M\,\varepsilon.$$

Но ε сколь угодно мало. Поэтому, со ссылкой на признак сходимости Больцано–Коши, можно утверждать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Следствие. Если $a_k \downarrow 0$, то сходятся ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ (при $x \neq 2\pi l$) и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ (при любых x).

Доказательство.

Пусть $b_k = \cos kx$. Начнем с известной со школы формулы

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x = 2\sin\frac{x}{2}\cos kx.$$

Имеем

$k = 1$: $\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos x$;

$k = 2$: $\sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x = 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x$;

$k = 3$: $\sin\frac{7}{2}x - \sin\frac{5}{2}x = 2\sin\frac{x}{2}\cos 3x$;

………………..

$k = n$: $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x = 2\sin\frac{x}{2}\cos nx$.

Складывая все эти равенства, получим:

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx.$$

Теперь мы имеем очень интересную формулу

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Но тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| = \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \le \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|+\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} < +\infty,$$

если $\left|\sin\frac{x}{2}\right| \ne 0$, то есть, если $x \ne 2\pi l$. По признаку Дирихле, при $x \ne 2\pi l$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ сходится.

Для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ все выкладки совершенно аналогичны, надо только начинать с формулы

$$\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x = -2\sin\frac{x}{2}\sin kx.$$

Условие $x \ne 2\pi l$ можно убрать, так как при $x = 2\pi l$ $\sin kx = 0$ и сумма ряда просто равна нулю.