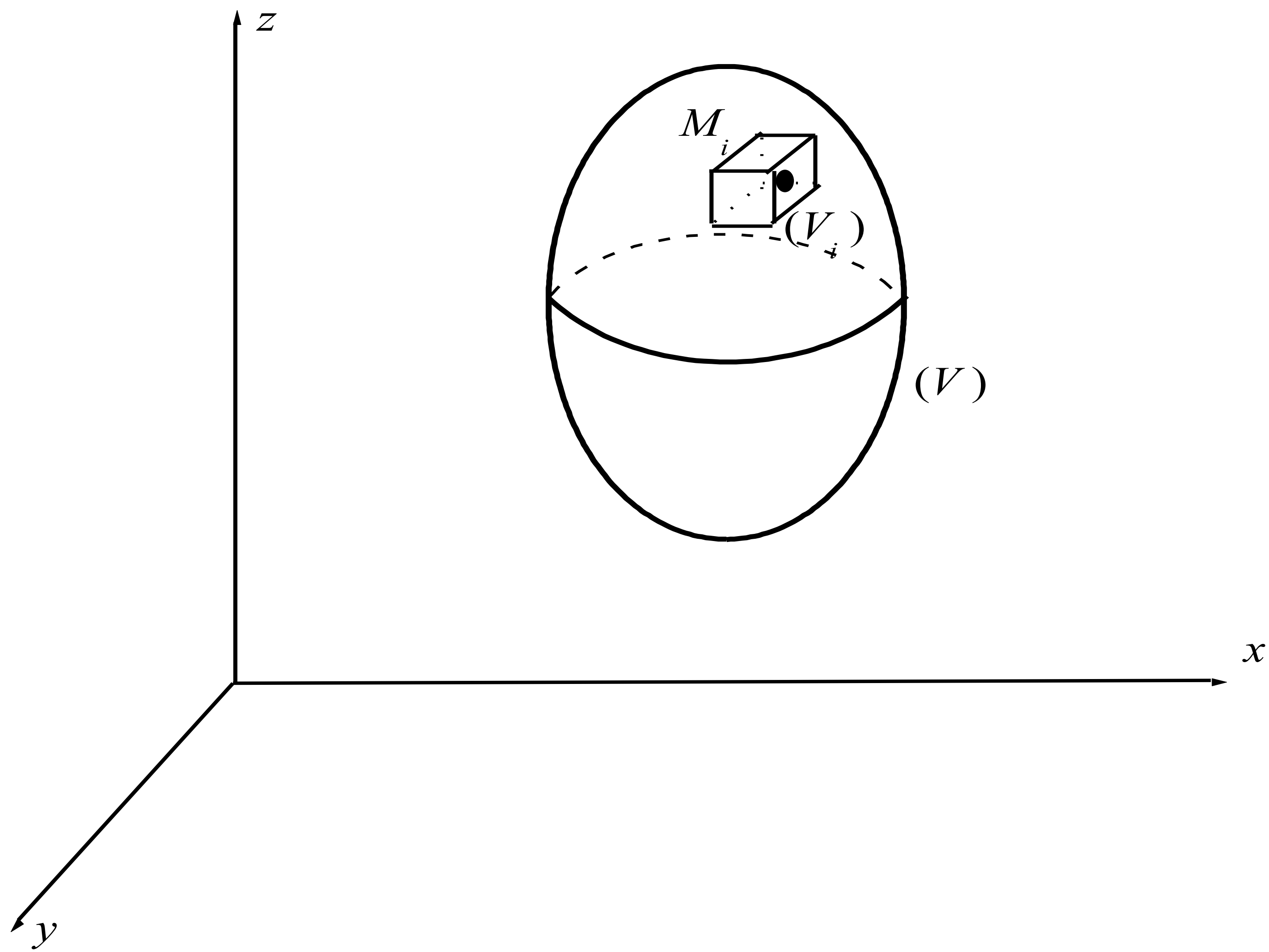
Здравствуйте!

Лекция № 4

Тройные интегралы



Пусть в трехмерном пространстве выделена некоторая ограниченная область (V) и задана функция $f(x,y,z)$, определенная по крайней мере, в области (V) (см. рис.). Проделаем стандартную процедуру, относящуюся к построению интеграла:

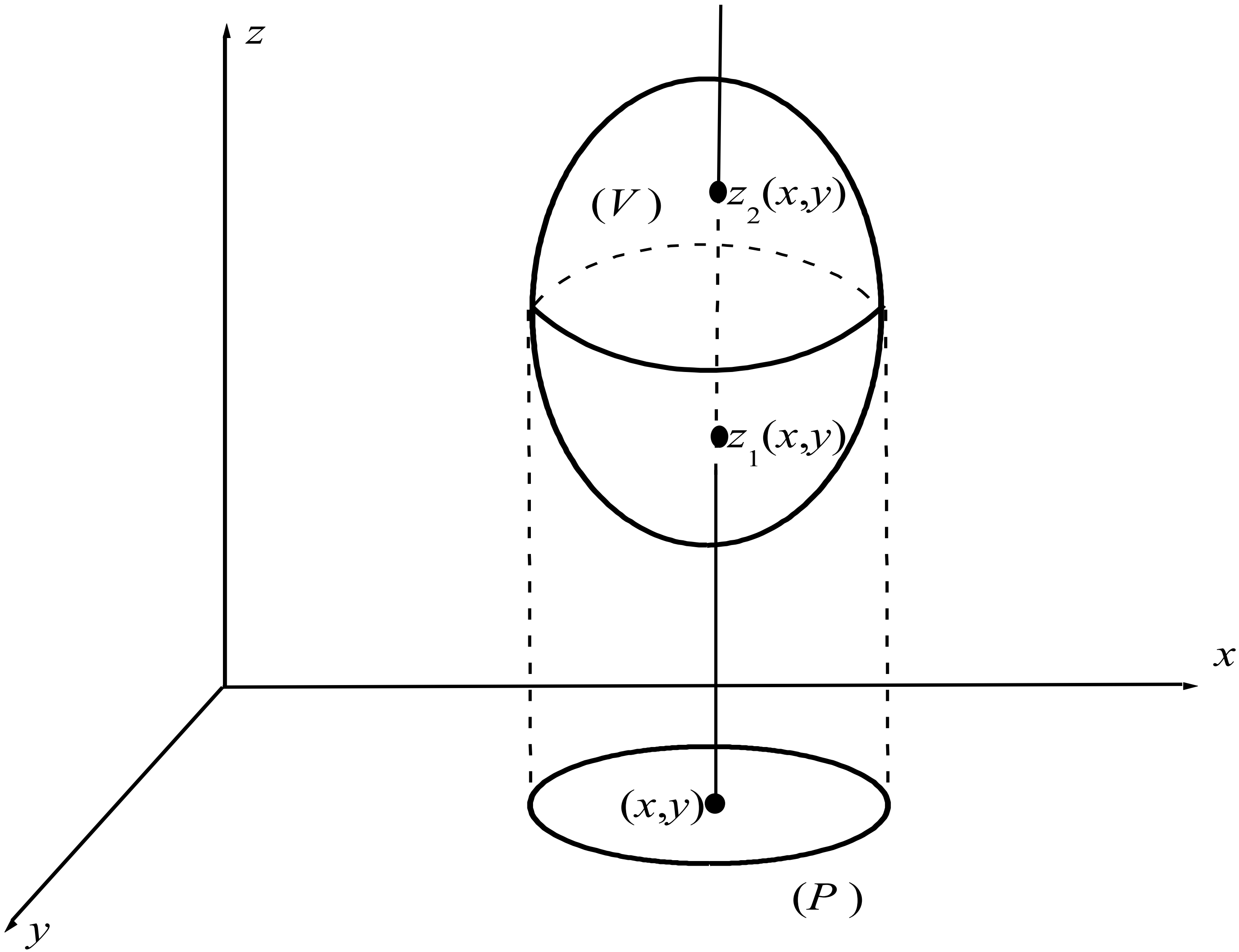
а) разобьем область (V) на кусочки (V_i). Пусть V_i – объем i-го кусочка, d_i – его диаметр и $\lambda = \max\limits_i d_i$;

б) возьмем в каждом кусочке произвольным образом среднюю точку M_i с координатами ξ_i, η_i, ζ_i и составим интегральную сумму

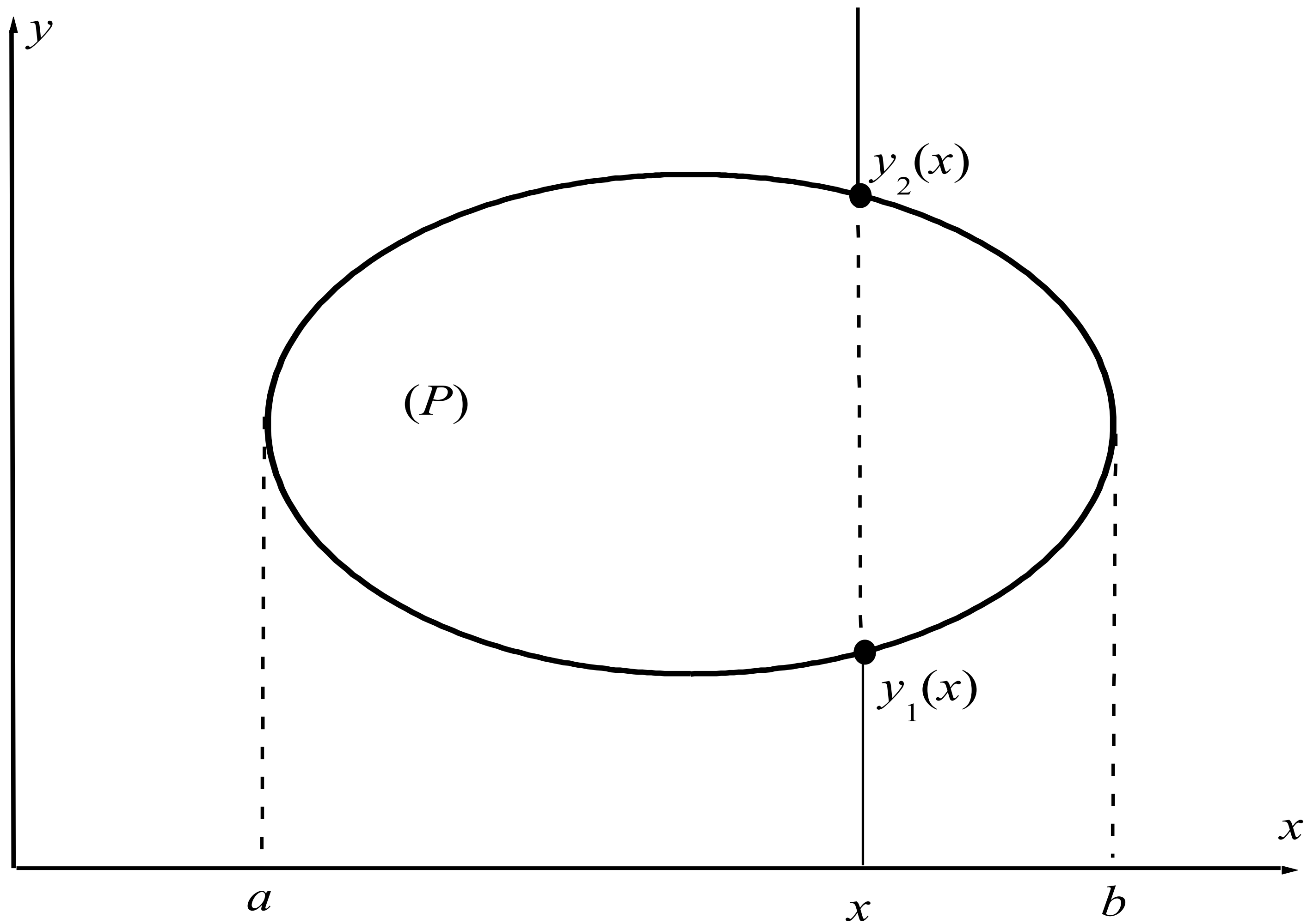
$$\sigma = \sum_i f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i;$$

в) перейдем к пределу при $\lambda \to 0$. Тогда, если существует $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$, и он не зависит от способа разбиения области (V) на кусочки и от способа выбора средней точки, то он называется тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области (V) и обозначается так:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV$$



z
(V)
$z_2(x,y)$
$z_1(x,y)$
x
(x,y)
(P)
y



y
x
$y_2(x)$
(P)
$y_1(x)$
a
x
b

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{(P)} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Теорема существования тройного интеграла.
Если подынтегральная функция $f(x,y,z)$ является непрерывной, или кусочно–непрерывной в области (V), то тройной интеграл всегда существует и равен определенному числу.

Геометрический смысл тройного интеграла. Если функция $f(x,y,z) \equiv 1$ во всех точках области (V), то тройной интеграл есть объем тела, занимающего область интегрирования. $\iint\limits_{(V)} dv = V.$

Если подынтегральная функция отлична от единицы в области интегрирования, то интеграл геометрического смысла не имеет.

1. Почленное интегрирование. Тройной интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме итегралов от слагаемых.

2. Вынос постоянного множителя . Постоянный множитель можно вынести за знак тройного интеграла.

3. Разбиение области интегрирования на части. Если область интегрирования разбить на части, то тройной интеграл можно представить в виде суммы интегралов по отдельным частям области.

4. Оценка тройного интеграла. Если M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y, z)$ в области (V), то величина тройного интеграла не меньше $m \cdot V$ и не больше $M \cdot V$, где V – объем области (V).

5. Теорема о среднем для тройного интеграла. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области (V), то справедливо равенство

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dv = f(C) \cdot V,$$

где V– объем области интегрирования, а $f(C)$ – значение подынтегральной функции в некоторой точке C этой области. В физическом смысле теорема о среднем для тройного интеграла означает, что масса тела, имеющего переменную объемную плотность, равна произведению объема тела на величину плотности в некоторой точке C этой области (значение $\delta(C) = \delta_{\text{ср.}}$– средняя плотность тела.)

Тройной интеграл в прямоугольных координатах

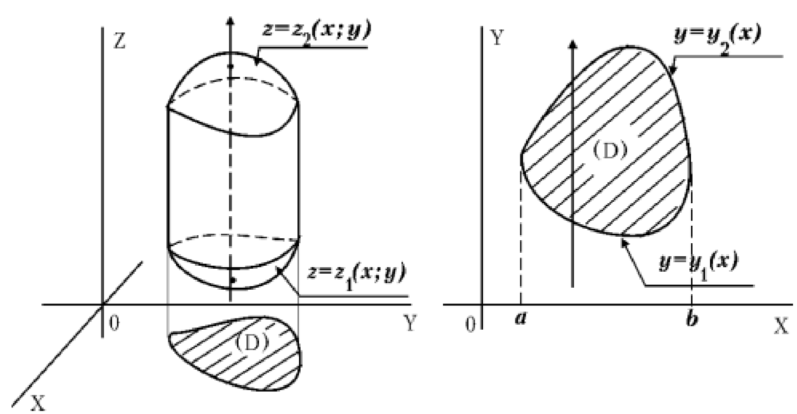
Для вычисления тройного интеграла от данной функции $u = f(x, y, z)$ по указанной области (V) рекомендуется действовать по следующей схеме.

1) Строим в системе координат $OXYZ$ область интегрирования.

2) Элемент объема dv заменяем произведением $dv = dx\,dy\,dz$. (Элементарный объем выбирается в виде "кирпичика" с размерами dx, dy, dz).

3) Выбираем порядок интегрирования, который, в основном, диктуется видом самой области интегрирования. Область (V) проецируется на одну из трех координатных плоскостей. В результате мы определяем проекцию области (V)– плоскую область (D), и уравнения поверхностей, которые ограничивают область (V).

4) Выносим, для удобства, проекцию – область (D) на отдельный рисунок и дальнейшую расстановку пределов осуществляем как в двойном интеграле.



5) В результате такой подготовительной работы мы определяем пределы изменения для каждой из трех переменных x, y, z. Если последовательность интегрирования выбрана в таком порядке: внутреннее по z, $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, промежуточное по y, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, а внешнее по x, $a \le x \le b$, то тройной интеграл в виде повторного запишется

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Сначала вычисляется внутренний интеграл. При этом учитывается, что все переменные, кроме той, по которой проводится внутреннее интегрирование, считаются постоянными (в данном случае это переменные x и y).

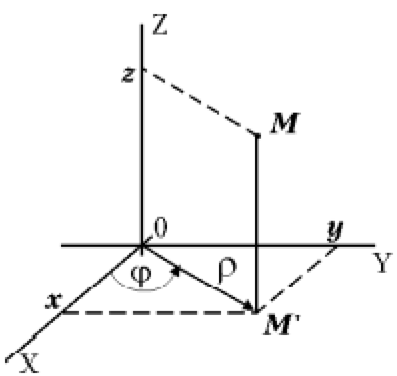
После выполнения внутреннего интегрирования по формуле Ньютона-Лейбница мы приходим к двойному интегралу, от функции двух переменных x и y, который вычисляем далее по уже известной схеме.

Как и при вычислении двойного интеграла, удобно при расстановке пределов интегрирования использовать"стрелки", пересекающие тело, чтобы определить *линии и поверхности входа и выхода* из области.

Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Наиболее часто при вычислении тройных интегралов используется переход от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим.

Цилиндрическая система координат представляет собой обобщение полярной системы координат на пространственный случай.



Здесь (ρ, φ) – полярные координаты проекции точки M на плоскость XOY,

z – аппликата точки M.

Формулы перехода от декартовых координат точки M к цилиндрическим и обратно имеют вид:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = y/x, \\ z = z. \end{cases}$$

1) В подынтегральной функции перейти к цилиндрическим координатам по указанным формулам $f(x,y,z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$.

2) Элемент объема $dv = \mid J \mid \, d\rho\, d\varphi\, dz$.

Якобиан перехода J от декартовой системы координат к цилиндрической равен

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Таким образом, элемент объема $dV = dx\, dy\, dz$ в цилиндрической системе координат примет вид

$$\boxed{dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}.$$

3) Уравнения поверхностей, ограничивающих область (V) снизу и сверху, переводим в цилиндрические координаты $z = z(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)$.

4) Строится ортогональная проекция области (V) на плоскость XOY – область (D) и дальнейшие действия аналогичны тем, которые проводятся при переходе в двойном интеграле от декартовых координат к полярным. Уравнения линий, ограничивающих область (D), записываются в полярных координатах в виде $\rho = \rho(\varphi)$. Далее:

5) Определяются пределы изменения переменных ρ и φ, после чего исходный интеграл записывается в виде повторного:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\,d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz.$$

6) По известной схеме осуществляется вычисление повторного интеграла.

В некоторых случаях, когда область (V) удобнее проектировать на на другие плоскости – XOZ или YOZ, следует использовать другие варианты совмещения цилиндрической и декартовой систем координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = y, \\ z = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x, \\ y = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

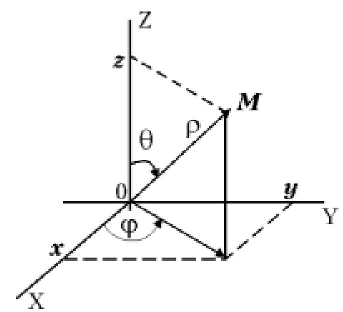
Отметим, что использование цилиндрических координат эффективно в тех случаях, когда область (V) ограничена параболоидами, цилиндрами, конусами и их сочетаниями с другими поверхностями.

Тройной интеграл в сферических координатах

Положение точки M в сферической системе координат определяется тремя числами $M(\rho, \varphi, \theta)$

$\rho = \mid OM \mid$ – сферический радиус,

$\theta, \quad \varphi$ – сферические углы, изменяющие-ся в пределах: $0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$ При соответствующем совмещении прямоугольной и сферической систем координат формулы перехода имеют вид



$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta. \end{cases}$$

Переход и вычисление тройного интеграла в сферических координатах рекомендуется проводить по следующей схеме.

1) Элемент объема записывается в сферических координатах

$$dV = \mid J \mid \; d\rho \, d\theta \, d\varphi.$$

Можно показать, что якобиан перехода J от декартовой системы координат к сферической равен

$$J = \rho^2 \sin\theta.$$

Таким образом, элемент объема $dV = dx\,dy\,dz$ в сферической системе координат примет вид

$$\boxed{dV = \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}\,.$$

2) Осуществляется переход к сферическим координатам в подынтегральной функции

$$f(x,y,z) = f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta) = F(\rho,\ \theta,\ \varphi).$$

3) Уравнения границ области интегрирования записываются в сферических координатах

$$\rho = \rho_1(\theta,\varphi), \qquad \rho = \rho_2(\theta,\varphi).$$

4) Определяются пределы изменения переменных $\rho,\ \theta$ и φ. (При этом удобно использовать стрелку, выходящую из начала координат и пересекающую область в пространстве).

5) Тройной интеграл записывается в виде повторного, причем в качестве внешних переменных интегрирования, как правило, выступают сферические углы

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \, d\theta \int\limits_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)} F(\rho;\ \theta;\ \varphi)\ \rho^2 \, d\rho.$$

6) Составленный интеграл вычисляется стандартным образом.