

Здравствуйте!

Лекция №5

Сходимость несобственных интегралов второго рода от неотрицательных функций

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны (то есть $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$) и точка b является особой точкой для обеих из них. Приводимые ниже теоремы полностью аналогичны соответствующим теоремам для несобственных интегралов первого рода.

Теорема 1. Для сходимости $\int_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists L < +\infty \quad \forall \eta \quad 0 < \eta < b - a \quad \int_a^{b-\eta} f(x)dx \leq L.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию $\Phi(\eta) = \int_a^{b-\eta} f(x)dx$. Если $\eta \downarrow$, то область интегрирования увеличивается, а так как $f(x) \geq 0$, то и $\Phi(\eta) \uparrow$. Поэтому, для существования конечного $\lim_{\eta \rightarrow +0} \Phi(\eta)$, согласно теоремы о монотонно возрастающей функции, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной сверху, то есть должно быть выполнено условие

$$\exists L < +\infty \quad \forall \eta \quad 0 < \eta < b - a \quad \Phi(\eta) = \int_a^{b-\eta} f(x)dx \leq L,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Пусть $\forall x \in [a, b) \quad f(x) \leq g(x)$. Тогда

а) из сходимости $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$;

б) из расходимости $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^b g(x)dx$.

Доказательство.

А) Пусть $\int_a^b g(x)dx$ сходится. Тогда, согласно теореме 1,

$$\exists L < +\infty \quad \forall \eta \quad 0 < \eta < b - a \quad \int_a^{b-\eta} g(x)dx \leq L.$$

Но $\forall x \in [a, b) \quad f(x) \leq g(x)$ и поэтому

$$\forall \eta \quad 0 < \eta < b - a \quad \int_a^{b-\eta} f(x)dx \leq \int_a^{b-\eta} g(x)dx \leq L,$$

и, согласно теореме 1, $\int_a^b f(x)dx$ сходится.

Б) Пусть $\int_a^b f(x)dx$ расходится. Так как $f(x) \geq 0$, то это означает,

что $\lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx = +\infty$. Но, так как $g(x) \geq f(x)$, то

$\int_a^{b-\eta} g(x)dx \geq \int_a^{b-\eta} f(x)dx$, и поэтому

$$\lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} g(x)dx \geq \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx = +\infty,$$

что и означает, что $\lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} g(x)dx = +\infty$, то есть $\int_a^b g(x)dx$ расходится.

Теорема 3. Пусть $\exists \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, $0 < K < +\infty$. Тогда интегралы

$\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство.

1. В формулировке теоремы сказано, что $\exists \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = K$. Согласно определению предела это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \quad b - \eta \leq x < b \quad K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon. \quad (*)$$

2. Пусть $\int_a^b g(x)dx$ сходится. В (*) рассмотрим вторую половину неравенства, которую запишем в виде $f(x) < (K + \varepsilon)g(x)$. Тогда имеем следующую цепочку следований (сообразите сами, где идет ссылка на свойства несобственных интегралов и где на теорему 2):

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)dx \text{ сходится} &\Rightarrow \int_{b-\eta}^b g(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int_{b-\eta}^b (K + \varepsilon)g(x)dx \text{ сходится} \\ &\Rightarrow \int_{b-\eta}^b f(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ сходится.} \end{aligned}$$

3. Пусть теперь $\int_a^b f(x)dx$ сходится. Возьмем ε настолько малым, чтобы было $K - \varepsilon > 0$. Тогда из левого неравенства в (*) следует, что $g(x) < f(x)/(K - \varepsilon)$ и мы имеем следующую цепочку следований (и снова сообразите сами, где идет ссылка на свойства несобственных интегралов и где на теорему 2):

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \text{ сходится} &\Rightarrow \int_{b-\eta}^b f(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int_{b-\eta}^b \frac{f(x)}{K - \varepsilon} dx \text{ сходится} \Rightarrow \\ \int_{b-\eta}^b g(x)dx \text{ сходится} &\Rightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ сходится.} \end{aligned}$$

Практический признак сходимости.

Пусть b – особая точка и $\exists \lim_{x \rightarrow b} (b-x)^\lambda f(x) = K$, $0 < K < +\infty$.

Тогда $\int_a^b f(x)dx$ сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geq 1$.

(Заметим снова, что вопрос о том, как же находить λ , остается на данном этапе открытым).

Доказательство.

Возьмем функцию $g(x)$ в виде $g(x) = \frac{1}{(b-x)^\lambda}$. Тогда условие

теоремы 3 примет вид $\exists \lim_{x \rightarrow b} (b-x)^\lambda f(x) = K$, $0 < K < +\infty$ и $\int_a^b f(x)dx$

сходится или расходится одновременно с интегралом $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$.

Рассмотрим поэтому вопрос о сходимости этого интеграла.

1. Пусть $\lambda \neq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \cdot \int_a^{b-\eta} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} &= \int_\eta^{b-a} \frac{du}{u^\lambda} = \int_\eta^{b-a} u^{-\lambda} du = \\ &= \frac{u^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} \Big|_\eta^{b-a} = \frac{(b-a)^{1-\lambda} - \eta^{1-\lambda}}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Будут два варианта:

а) $\lambda < 1$. В этом случае $1-\lambda > 0$, поэтому $\lim_{\eta \rightarrow +0} \eta^{1-\lambda} = 0$ и

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

так что $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ сходится.

б) $\lambda > 1$. В этом случае $1 - \lambda < 0$, поэтому $\lim_{\eta \rightarrow +0} \eta^{1-\lambda} = +\infty$ и

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = +\infty,$$

так что $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ расходится.

2. $\lambda = 1$. Тогда

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} \frac{dx}{b-x} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_\eta^{b-a} \frac{du}{u} = \lim_{\eta \rightarrow +0} (\ln(b-a) - \ln \eta) = +\infty,$$

так что $\int_a^b \frac{dx}{b-x}$ расходится.

Таким образом, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ сходится при $\lambda < 1$ и расходится при

$\lambda \geq 1$. По теореме 3 $\int_a^b f(x)dx$ также сходится при $\lambda < 1$ и расходится

при $\lambda \geq 1$.

Главные значения несобственных интегралов

Вернемся к интегралу $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Его определение было следующим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^a f(x)dx + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx \quad (a - \text{любое}).$$

Обратите внимание на одну деталь: в этом определении **два** предела и величины A и B совершенно **не связаны** друг с другом, они живут «каждый сам по себе».

Так вот, **главным значением** этого интеграла называется величина

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x)dx.$$

(V.p. – первые буквы слов «valeur principale», что, в переводе с французского, и означает «главное значение»). Обратите внимание на то, что здесь только **один** предел. Это выражение получается из предыдущего, если завязать величины A и B соотношением $B = -A$.

Если $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ не существует, но существует $V.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, то говорят, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ существует **в смысле главного значения**.

Рассмотрим вычисление главного значения $V.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Пусть $f(x)$ – нечетная функция, то есть $f(-x) = -f(x)$. Тогда очевидно, что $\int_{-A}^A f(x)dx = 0$ и поэтому в данной ситуации

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0.$$

Пусть теперь $f(x)$ – четная функция, то есть $f(-x) = f(x)$. Тогда очевидно, что $\int_{-A}^A f(x)dx = 2 \int_0^A f(x)dx$ и поэтому в данной ситуации

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2 \int_0^{\infty} f(x)dx.$$

В общем случае $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, где

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Очевидно, что $\varphi(x)$ есть четная функция, а $\psi(x)$ – нечетная. Поэтому

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} [f(x) + f(-x)] dx,$$

что и является рабочей формулой для вычисления $\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.

Рассмотрим теперь несобственные интегралы второго рода. Пусть c есть особая точка функции $f(x)$ и $a < c < b$. Тогда, как уже говорилось выше,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\eta_1} f(x)dx + \lim_{\eta_2 \rightarrow +0} \int_{c+\eta_2}^b f(x)dx.$$

Снова обратите внимание на то, что в этом определении **два** предела и величины η_1 и η_2 никак друг с другом не связаны. Главное значение этого интеграла определяется так

$$\text{V.p.} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\eta} f(x)dx + \int_{c+\eta}^b f(x)dx \right],$$

то есть величины η_1 и η_2 стали **одинаковыми** и предел **один**.

Преобразование несобственных интегралов

Интегрирование по частям

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на промежутке $[a, b)$ и точка b является особой точкой по крайней мере для одной из них. Тогда, вспоминая формулу интегрирования определенных интегралов по частям, получим

$$\int_a^{b-\eta} u dv = u(b-\eta)v(b-\eta) - u(a)v(a) - \int_a^{b-\eta} v du.$$

Сделаем предельный переход $\eta \rightarrow 0$. Переменная η есть в трех слагаемых. Если существуют два предела, то существует и третий, и мы получим

$$\int_a^b u dv = \lim_{\eta \rightarrow +0} [u(b-\eta)v(b-\eta)] - u(a)v(a) - \int_a^b v du,$$

что является формулой интегрирования по частям в несобственных интегралах.

Для несобственных интегралов первого рода она принимает вид

$$\int_a^\infty u dv = \lim_{A \rightarrow +\infty} [u(A)v(A)] - u(a)v(a) - \int_a^\infty v du.$$

Замена переменных

Теорема. Пусть

1. $f(x)$ определена на $[a, b)$ (b – особая точка);
2. $x = \varphi(t)$, где на $[\alpha, \beta)$ $\varphi(t) \uparrow$ и существует непрерывная $\varphi'(t)$;
3. $\varphi(\alpha) = a$ и $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = b$.

Тогда имеет место формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Доказательство.

Пусть $b - \eta = \varphi(\beta - \eta')$. В силу непрерывности $\varphi(t)$ при $\eta \rightarrow 0$ также и $\eta' \rightarrow 0$. Вспоминая замену переменных в определенных интегралах, имеем:

$$\int_a^{b-\eta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta-\eta'} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

После предельного перехода $\eta \rightarrow 0$, получаем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример.

Рассмотрим интеграл $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$, который называется интегралом Френеля. Вопрос о его сходимости не может быть решен на основании изученных нами признаков.

Сделаем замену переменных $x = \sqrt{t}$. Тогда $dx = dt/2\sqrt{t}$ и мы имеем:

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

Получившийся интеграл сходится по признаку Дирихле.