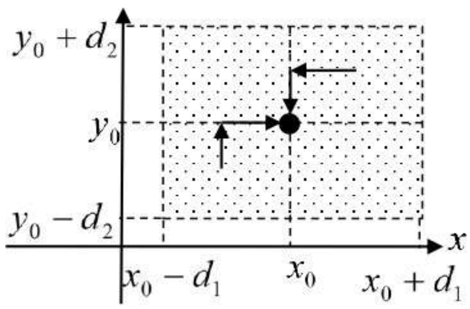
Повторные пределы



О. Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве точек $0<|x-x_0|<d_1,\ 0<|y-y_0|<d_2$ (прямоугольник с выброшенными границей и прямыми $x=x_0, y=y_0$).

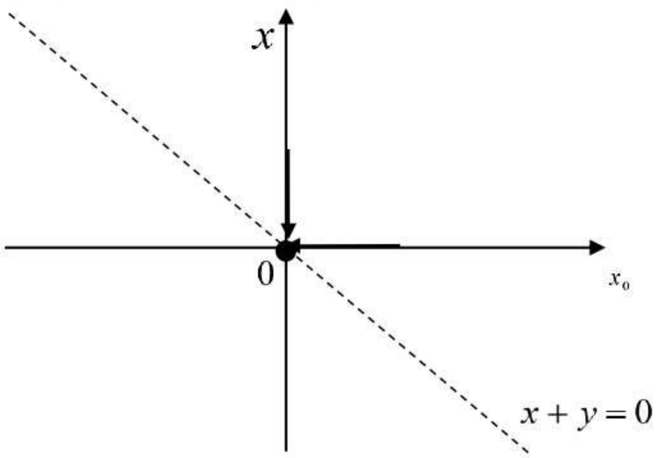
Пусть существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\text{ — фикс.}\\ 0<|y-y_0|<d_2}} f(x,y)=\varphi(y)$ — *внутренний предел.*

Тогда *повторным пределом* называется

$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$.

Аналогично определяется другой повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$.

Пример 2 (Демидович № 3181). Для функции $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$ найти предел и повторные пределы в точке $O(0;0)$.



$D(f)=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y): x+y=0\}$.

Точка $O(0;0)$ является предельной точкой области определения функции.

Пусть точка $M(x,y)$ стремится к точке $O(0;0)$ вдоль оси Ox, тогда

$$\lim_{\substack{M\to O\\ M\in Ox}} f(M)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

Теперь пусть точка $M(x,y)$ стремится к точке $O(0,0)$ вдоль оси Oy, тогда

$$\lim_{\substack{M\to O\\ M\in Oy}} f(M)=\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1.$$

Поскольку предел $\lim\limits_{M\to O} f(M)$ зависит от способа стремления точки M к точке O, то он не существует.

А повторные пределы существуют:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,\qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1.$$

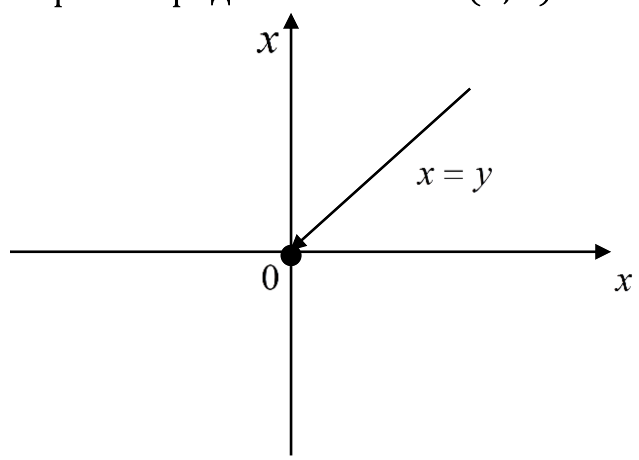
Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=1$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}=-1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x-y}{x+y}$ не существует.

Т. Если функция $f(x,y)$ определена при $0<|x-x_0|<d_1$, $0<|y-y_0|<d_2$, существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ и существуют внутренние пределы $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\text{ — фикс.}\\ 0<|y-y_0|<d_2}} f(x,y)$, $\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ x\text{ — фикс.}\\ 0<|x-x_0|<d_1}} f(x,y)$, то существуют и повторные пределы $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, и оба они равны b.

Следствие. Если внутренние пределы существуют, а повторные не существуют или не равны друг другу, то $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ не существует.

В обратную сторону теорема неверна, т.е. из существования повторных пределов и их равенства между собой не следует существование $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$, что показывает следующий пример.

Пример 3 (Демидович № 3182). Для функции $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ найти предел и повторные пределы в точке $O(0;0)$.



$D(f)=\mathbb{R}^2\setminus O$.

Точка $O(0;0)$ является предельной точкой области определения функции.

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0.$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0.$$

Повторные пределы существуют и равны. Но из этого не следует, что существует $\lim\limits_{M\to O} f(M)$.

Докажем, что он не существует.

Пусть точка $M(x,y)$ стремится к точке $O(0;0)$ вдоль прямой $x=y$:

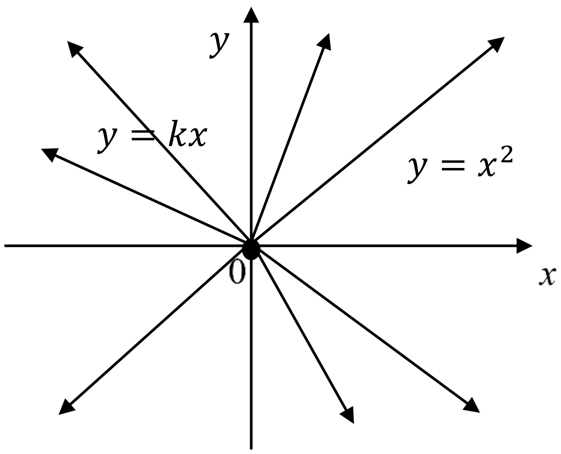
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ x=y}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1.$$

Значит, если предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ существует, то он равен 1 (поскольку при любом способе стремления точки $M(x,y)$ к точке $O(0;0)$ предел должен получаться один и тот же). Но тогда и повторные пределы должны быть равны 1 (из теоремы). Полученное противоречие доказывает, что предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует.

Ответ: $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует.

Пусть функция $f(M)$ определена на неограниченном множестве точек.
О. (предела функции $f(M)$ при $M \to \infty$). Число b называется пределом функции $f(M)$ при $M \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists R: \forall M \in D(f), \rho(M, O) > R \Rightarrow |f(M) - b| < \varepsilon$.
Обозначение: $\lim\limits_{M\to\infty} f(M) = b$ или $\lim\limits_{\substack{x_1\to\infty\\ x_2\to\infty\\ \dots\\ x_m\to\infty}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$.

Пример 4 (Демидович № 3183.3). Найти $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} x^2 e^{-(x^2-y)}$.



Пусть точка $M(x, y)$ стремится к бесконечности вдоль прямой $y = kx$:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty\\ y=kx}} x^2 e^{-(x^2-y)} = \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-(x^2-kx)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{-x^2+kx+2\ln|x|} = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2\underbrace{\left(1-\frac{k}{x}-2\frac{\ln|x|}{x^2}\right)}_{\to 1}} = e^{-\infty} = 0.$$

Вдоль любой прямой вида $y = kx$ получается одинаковый предел. Но это ещё не значит, что предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} x^2 e^{-(x^2-y)}$ существует.

Пусть точка $M(x, y)$ стремится к бесконечности вдоль параболы $y = x^2$:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty\\ y=x^2}} x^2 e^{-(x^2-y)} = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty.$$

Значит, предел функции зависит от способа стремления точки $M(x, y)$ к бесконечности, и поэтому предел не существует.
Ответ: предел не существует.

Пример 5 (МАВЗ гл. X № 12а). Доказать, что функция $f(x, y) = \frac{x^2}{|x|+|y|}$ — бесконечно малая в точке $O(0; 0)$, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$.

Функция определена везде, кроме точки $O(0; 0)$. Точка $O(0; 0)$ является предельной точкой области определения функции.
Первый способ. Справедливы оценки

$$0 \le \frac{x^2}{|x| + |y|} \le \frac{x^2}{|x|} = |x| \to 0 \ \text{ при } \ x \to 0 \ \ \Rightarrow \ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{|x| + |y|} = 0$$

по теореме о двух полицейских, ч.т.д.
Второй способ. Перейдём к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, тогда $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$, а угол φ изменяется произвольным образом: $\varphi = \varphi(\rho)$. Получим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{|x| + |y|} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi=\varphi(\rho)}} \frac{\rho^2\cos^2\varphi}{\rho|\cos\varphi| + \rho|\sin\varphi|} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi=\varphi(\rho)}} \left(\rho \cdot \underbrace{\frac{\cos^2\varphi}{|\cos\varphi| + |\sin\varphi|}}_{g(\varphi)}\right).$$

Функция ρ является бесконечно малой при $\rho \to 0$, а функция $g(\varphi) = \frac{\cos^2\varphi}{|\cos\varphi|+|\sin\varphi|}$ непрерывна на отрезке $\varphi \in [0; 2\pi]$ (т.к. знаменатель не обращается в нуль), а следовательно, ограничена на этом отрезке. А в силу её 2π-периодичности, функция $g(\varphi)$ ограничена на всей вещественной оси. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную является бесконечно малой функцией, поэтому предел равен нулю, ч.т.д.

Пример 6 (МАВЗ гл. X № 13а). Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x}$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \left(\frac{\sin xy}{xy}\cdot y\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \left(\frac{\sin xy}{xy}\right)\cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}(y) = 1\cdot a = a.$$

Пояснение: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{xy} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$, т.к. $t = xy \to 0$.

Ответ: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x} = a$.

Пример 7 (МАВЗ гл. X № 13г). Найти $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{ax+by}{x^2+xy+y^2}$.

Перейдём к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, тогда $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$, а угол φ изменяется произвольным образом: $\varphi = \varphi(\rho)$. Получим

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{ax+by}{x^2+xy+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to\infty\\ \varphi=\varphi(\rho)}} \frac{a\rho\cos\varphi + b\rho\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to\infty\\ \varphi=\varphi(\rho)}} \left(\frac{1}{\rho}\cdot \underbrace{\frac{a\cos\varphi + b\sin\varphi}{1+\frac{\sin 2\varphi}{2}}}_{g(\varphi)}\right).$$

Функция $g(\varphi)$ непрерывна на отрезке $\varphi \in [0; 2\pi]$ (т.к. знаменатель не обращается в нуль), поэтому она ограничена на нём. Поскольку функция $g(\varphi)$ является 2π-периодической, то она ограничена и на всей вещественной оси. Поэтому

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{ax+by}{x^2+xy+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to\infty\\ \varphi=\varphi(\rho)}} \left(\underbrace{\frac{1}{\rho}}_{\text{б.м.}}\cdot \underbrace{g(\varphi)}_{\text{огр.}}\right) = 0.$$

Ответ: $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{ax+by}{x^2+xy+y^2} = 0$.

Пример 8 (МАВЗ гл. X № 14а). Доказать, что предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ не существует.

Функция определена везде, кроме точки $O(0;0)$, которая является предельной точкой области определения функции.

Первый способ. Пусть точка $M(x,y)$ стремится к точке $O(0;0)$ вдоль прямой $y = kx$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+k+k^2}{1-k+k^2}.$$

Предел получается различный вдоль различных прямых, поэтому он не существует, ч.т.д.

Второй способ. Перейдём к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, тогда $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$, а угол φ изменяется произвольным образом: $\varphi = \varphi(\rho)$. Получим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi=\varphi(\rho)}} \frac{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi=\varphi(\rho)}} \frac{1 + \dfrac{\sin 2\varphi}{2}}{1 - \dfrac{\sin 2\varphi}{2}}.$$

Значение предела зависит от φ (при различных φ получаются различные значения), поэтому предел не существует, ч.т.д.

МАВЗ гл. X № 12(б). Докажите, что функция $f(x, y) = \sin(x + y)\ln(x^2 + y^2)$ является б.м. в точке $O(0; 0)$.

Рассмотрим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin(x + y)\ln(x^2 + y^2) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{\sin(x + y)}{x + y} \cdot (x + y)\ln(x^2 + y^2)\right).$$

Вычислим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x + y)}{x + y} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Для того чтобы вычислить

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x + y)\ln(x^2 + y^2),$$

перейдём к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\rho \to 0$, $\varphi = \varphi(\rho)$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x + y)\ln(x^2 + y^2) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi=\varphi(\rho)}} (\cos\varphi + \sin\varphi)\rho\ln\rho^2.$$

Функция $\cos\varphi + \sin\varphi$ является ограниченной на любой области изменения φ. Докажем, что функция $\rho\ln\rho^2$ является б.м. при $\rho \to 0$:

$$\lim_{\rho\to 0} \rho\ln\rho^2 = \lim_{\rho\to 0} \frac{\ln\rho^2}{1/\rho} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\dfrac{1}{\rho^2} \cdot 2\rho}{-1/\rho^2} = 0,$$

где предел вычислен с помощью правила Лопиталя.

Поскольку произведение ограниченной функции на б.м. является б.м. функцией, то

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \varphi=\varphi(\rho)}} (\cos\varphi + \sin\varphi)\rho\ln\rho^2 = 0.$$

Тогда получаем, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\underbrace{\frac{\sin(x+y)}{x+y}}_{\to 1} \cdot \underbrace{(x+y)\ln(x^2+y^2)}_{\to 0} \right) = 0, \qquad \text{ч. т. д.}$$

МАВЗ гл. X № 14(б). Докажите, что предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+y)}{y}$ не существует.

Пусть точка $M(x,y)$ стремится к точке $O(0;0)$ вдоль прямой $x=0$. Тогда

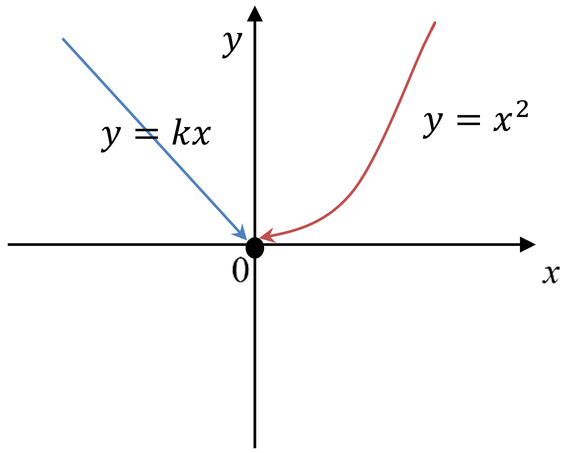
$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln y}{y} = \frac{\infty}{0} = \infty,$$

откуда следует, что исходный предел не существует, ч.т.д.

МАВЗ гл. X № 15.

а) Докажите, что предел функции $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ при стремлении точки $M(x,y)$ к точке $O(0;0)$ по любой прямой, проходящей через точку $O(0;0)$, существует.

б) Докажите, что предел функции $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ в точке $O(0;0)$ не существует.



а) Вычислим предел вдоль прямой вида $y = kx$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0.$$

Вычислим предел вдоль прямой $x=0$:

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Таким образом, предел функции вдоль любой прямой, проходящей через точку $O(0;0)$, существует и равен 0, ч.т.д.

б) Теперь пусть точка $M(x,y)$ стремится к точке $O(0;0)$ вдоль параболы $y = x^2$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку предел получился другой, то предел функции $f(x,y)$ в точке $O(0;0)$ не существует, ч.т.д.

МАВЗ гл. X № 16(ж). Вычислите повторные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \lim\limits_{y\to+0} \frac{x^y}{1+x^y}$ и $\lim\limits_{y\to+0} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^y}{1+x^y}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \lim_{y\to+0} \frac{x^y}{1+x^y} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{y\to+0} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^y}{1+x^y} = \lim_{y\to+0} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{-y}+1} = \lim_{y\to+0} \frac{1}{0+1} = 1.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \lim\limits_{y\to+0} \frac{x^y}{1+x^y} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{y\to+0} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^y}{1+x^y} = \lim\limits_{y\to+0} \frac{1}{0+1} = 1.$

МАВЗ гл. X № 16(з). Вычислите повторные пределы $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{\pi(x+y)}{2x+3y}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\sin\frac{\pi(x+y)}{2x+3y}$.

$$\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi(x+y)}{2x+3y}=\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi\left(1+\frac{y}{x}\right)}{2+3\frac{y}{x}}=\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi(x+y)}{2x+3y}=\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi\left(\frac{x}{y}+1\right)}{2\frac{x}{y}+3}=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{\pi(x+y)}{2x+3y}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\sin\frac{\pi(x+y)}{2x+3y}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

МАВЗ гл. X № 17(б). Существуют ли предел и повторные пределы в точке $(1;0)$ функции $f(x,y)=\log_x(x+y)$?

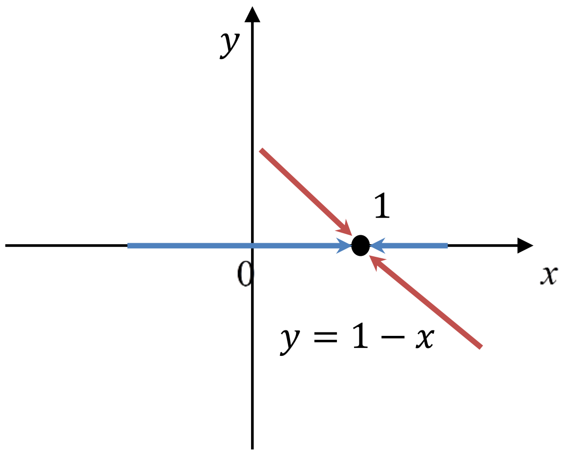
Поскольку $f(x,y)=\frac{\ln(x+y)}{\ln x}$, то

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 1}f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{0}=\lim_{y\to 0}\infty=\infty,$$

$$\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 0}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x}=1.$$

Теперь рассмотрим

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}.$$



Если точка $M(x,y)$ стремится к точке $(1;0)$ вдоль оси Ox, то получим

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y=0}}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x}=1.$$

Если же точка $M(x,y)$ стремится к точке $(1;0)$ вдоль прямой $y=1-x$, то получим

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0\\ y=x-1}}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln 1}{\ln x}=0.$$

Поскольку вдоль разных траекторий предел получился разным, то он не существует.

Ответ: $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 1}\log_x(x+y)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{y\to 0}\log_x(x+y)=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\log_x(x+y)$ не существует.