ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ $(u = u(x))$

1. $\int 0\, du = c;$

степенные функции

2. $\int u^m du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + c; m \neq -1;$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c;$

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \quad \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

показательные функции

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c;$

4a. $\int e^u du = e^u + c;$

дробные рациональные и иррациональные функции

5. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + c;$

6. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + c;$

7. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + c;$

8. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c;$

тригонометрические функции

9. $\int \sin u\, du = -\cos u + c;$

10. $\int \cos u\, du = \sin u + c;$

11. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + c;$

12. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + c;$

гиперболические функции

13. $\int sh\, u\, du = ch\, u + c;$

14. $\int ch\, u\, du = sh\, u + c;$

15. $\int \dfrac{du}{ch^2 u} = th\, u + c;$

16. $\int \dfrac{du}{sh^2 u} = -cth\, u + c;$

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)}$$

Непосредственное интегрирование

$du = u'_x dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{u'};$

$u = ax + b \Rightarrow dx = \dfrac{d(ax+b)}{a};$

$\int \dfrac{1}{(ax+b)^m} dx = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{(ax+b)^{1-m}}{1-m} + c;$

$\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + c;$

$u = (ax^3 + b) \Rightarrow dx = \dfrac{d(ax^3 + b)}{3ax^2}$

$\int x^2 cos(ax^3 + b)\, dx = \dfrac{1}{3a} \sin(ax^3 + b) + c;$

$u = mx \Rightarrow dx = \dfrac{d(mx)}{m}$

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - (mx)^2}} = \dfrac{1}{m} \arcsin \dfrac{mx}{a} + c;$

основные свойства неопределенного интеграла

1. $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx;$

2. $\int \alpha udx = \alpha \int udx;$

3. $d\int u(x)dx = u(x)dx;$

4. $\int du = u + c;$

замена переменной

$u = u(t) \Leftrightarrow du = u'_t dt;$

$\int f(u)du = \int f(u(t))u'_t dt;$

интегрирование по частям

$\int udv = uv - \int vdu.$

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Метод непосредственного интегрирования

$$\boxed{du = u_x' dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u_x'}}$$

$$u = ax + b \Rightarrow dx = \frac{d(ax+b)}{a} \Rightarrow \quad \underline{\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \int \frac{d(ax+b)}{a\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{ax+b} + c;}$$

$$u = (-ax^2 + b) \Rightarrow dx = \frac{d(-ax^2+b)}{-2ax} \Rightarrow \underline{\int e^{-ax^2+b} x\,dx = \int \frac{e^{-ax^2+b} x d(-ax^2+b)}{-2ax} = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2+b} + c;}$$

$$u = \sin x \Rightarrow dx = \frac{d(\sin x)}{\cos x} \Rightarrow \underline{\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - a^2} = \int \frac{\cos x\, d(\sin x)}{(\sin^2 x - a^2)\cos x} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{\sin x - a}{\sin x + a}\right| + c;}$$

$$u = mx \Rightarrow dx = \frac{d(mx)}{m} \Rightarrow \underline{\int \sin mx dx = \int \frac{\sin mx\, d(mx)}{m} = -\frac{1}{m} \cos mx + c;}$$

Метод интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du;$$

№ п/п	Интеграл	Разбиение подынтегральн ого выражения на части	du	v	Результат применения метода
1	$\int P_n(x) e^{\alpha x} dx,$ $\int P_n(x) a^{\alpha x} dx,$ $\int P_n(x) \sin mx dx,$ $\int P_n(x) \cos mx dx.$	$u = P_n(x)$ $dv = \begin{Bmatrix} e^{\alpha x} \\ a^{\alpha x} \\ \sin mx \\ \cos mx \end{Bmatrix} dx$	$P_{n-1}(x)dx$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}, \frac{a^{\alpha x}}{\alpha \ln a},$ $-\frac{\cos mx}{m},$ $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют ***n* раз**, пока степень многочлена не понизится до нулевой
2	$\int P_n(x) \ln x dx,$ $\int P_n(x) \arcsin x dx, \int P_n(x) \arccos x dx,$ $\int P_n(x) arctgx dx, \int P_n(x) arcctgx dx.$	$u = \begin{Bmatrix} \ln x \\ \ldots \\ arcctgx \end{Bmatrix},$ $dv = P_n(x)dx$	$\frac{dx}{x},$ .... $-\frac{dx}{1+x^2}$	$P_{n+1}(x)$	Получают интеграл от функций степеней x
3	Циклические интегралы: $\int e^{\alpha x} \sin mx dx, \int e^{\alpha x} \cos mx dx$	$u = e^{\alpha x},$ $dv = \begin{Bmatrix} \sin mx \\ \cos mx \end{Bmatrix} dx$ $\left(\begin{matrix} или\ u = \begin{Bmatrix} \sin mx \\ \cos mx \end{Bmatrix}, \\ dv = e^{\alpha x} dx \end{matrix} \right)$	$\alpha e^{\alpha x} dx$	$-\frac{\cos mx}{m},$ $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют **2 раза**, получая уравнение относительно искомого интеграла

План интегрирования рациональных дробей

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx.$$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n,$$

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots\ldots + b_m.$$

I. $n \geq m$ – дробь неправильная; $n < m$ – дробь правильная (степень $P_n(x)$ меньше)

$\Downarrow$ (степень n $P_n(x)$ больше или равна степени m $Q_m(x)$)

$$\begin{array}{l|l} P_n(x) & Q_m(x) \\ \cline{2-2} \ldots\ldots & \text{целая часть} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \text{целая часть} + \frac{\text{остаток}}{Q_m(x)}$$

$r_s(x)$ – остаток ($s<m$)

$$\Downarrow$$

$$\frac{r_s(x)}{Q_m(x)}$$ – прав. дробь.

II. Знаменатель $Q_m(x)$ разложить на множители линейные – $(x-a)$ и квадратичные – (x^2+px+q). Правильную дробь разложить на сумму простых дробей в зависимости от множителей знаменателя.

Вид множителя в знаменателе дроби	Сколько дробей	Сумма простых дробей, соответствующая множителю в знаменателе правильной рациональной дроби
$(x-a)^k$	k	$\frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{x-a}$
$(x^2+px+q)^w$	w	$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^w} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{w-1}} + \ldots + \frac{M_wx+N_w}{x^2+px+q}$

III. Найти неопределенные коэффициенты *A, M, N,* приведя сумму дробей к общему знаменателю и **приравняв числители исходной** правильной дроби и **суммы** дробей.

IV. Проинтегрировать простые дроби:

а) дроби первого типа $\int \frac{A}{x-a}dx = \int \frac{A}{x-a}d(x-a) = A\ln|x-a| + c;$

б) дроби второго типа $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c; (k>1)$

в) дроби третьего типа

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ x+\frac{p}{2} = t; \quad dx = dt \\ x^2+px+q = t^2 \pm a^2 \end{array} \right| = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2 \pm a^2}dt = M\int \frac{td(t^2 \pm a^2)}{(t^2 \pm a^2)2t} + (N - M\frac{p}{2})\int \frac{dt}{t^2 \pm a^2} = \ldots.$$

г) дроби четвертого типа

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^w}dx = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ x+\frac{p}{2} = t; \quad dx = dt \\ x^2+px+q = t^2 \pm a^2 \end{array} \right| = \ldots$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right)$$ – рекуррентная формула

Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

№ п/п	Подынтегральная функция	Подстановка	Вспомогательные преобразования	Итог
1	$R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция относительно $\sin x$, $\cos x$	Универсальная $t = tg\frac{x}{2}$	$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$	Подынтегральная функция рациональная относительно x
2	$R(\sin x, -\cos x) =$ $= -R(\sin x, \cos x)$ Нечётная относительно $\cos x$	$t = \sin x$	$dt = \cos x\, dx$	
3	$R(-\sin x, \cos x) =$ $= -R(\sin x, \cos x)$ Нечётная относительно $\sin x$	$t = \cos x$	$dt = -\sin x\, dx$	
4	$R(-\sin x, -\cos x) =$ $= R(\sin x, \cos x)$ Чётная относительно $\cos x$ и $\sin x$	$t = tgx$	$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; dx = \frac{dt}{1+t^2}$	
		$t = ctgx$	$\sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; dx = -\frac{dt}{1+t^2}$	
5	$\sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x$ Степени чётные неотрицательные		$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$	Понижение степени
6	$\sin mx \cos nx$ $\cos mx \cos nx$ $\sin mx \sin nx$		$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$ $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$ $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$	Сумма функций
7	$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $thx = \frac{shx}{chx}$; $cthx = \frac{chx}{shx}$; $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$; $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; $ch^2 x - sh^2 x = 1$; $shxchx = \frac{1}{2} sh2x$; $sh^2 x = \frac{ch2x - 1}{2}$; $ch^2 x = \frac{ch2x + 1}{2}$ Интегрирование гиперболических функций аналогично интегрированию тригонометрических функций			

Интегрирование иррациональностей

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Подынтегральная функция</th><th>Подстановка</th><th>Итог</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">$R(x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}},(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_2}{q_2}},...)$
R – рациональная функция,
$p_1,p_2,q_1,q_2,...$ – целые числа</td><td>$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где k — наименьшее общее кратное знаменателей показателей:
$k=НОК(q_1,q_2,...)$</td><td>Рациональная функция t</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td colspan="2">$R(x,\sqrt{a^2-x^2})$</td><td>$x=a\sin t$ *или* $x=a\cos t$
$dx=a\cos tdt$ *или* $dx=-a\sin tdt$
$(a^2-x^2=a^2\cos^2 t$ *или* $a^2-x^2=a^2\sin^2 t)$</td><td rowspan="3">Рациональная функция $\sin t$, $\cos t$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$R(x,\sqrt{a^2+x^2})$</td><td>$x=atgt$ *или* $x=actgt$
$dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$ *или* $dx=\frac{-adt}{\sin^2 t}$
$(a^2+x^2=\frac{a^2}{\cos^2 t}$ *или* $a^2+x^2=\frac{a^2}{\sin^2 t})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$R(x,\sqrt{x^2-a^2})$</td><td>$x=\frac{a}{\cos t}$ *или* $x=\frac{a}{\sin t}$
$dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$ *или* $dx=\frac{-a\cos t}{\sin^2 t}dt$
$(x^2-a^2=a^2tg^2t$ *или* $x^2-a^2=a^2ctg^2t)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">Дифференциальный бином
$x^m(a+bx^n)^p$
по теореме Пафнутия Львовича Чебышева интегрируется в элементарных функциях только в трёх случаях:</td><td>p — целое число, m,n — дроби</td><td>$x=t^k$, $k=НОК(\text{знаменателей } m,n)$
$dx=kt^{k-1}dt$</td><td rowspan="3">Рациональная функция t</td></tr>
<tr><td>$\frac{m+1}{n}$ – *целое*</td><td>$a+bx^n=t^k$, k – *знаменатель дроби* p
$bnx^{n-1}dx=kt^{k-1}dt$, $x^m(a+bx^n)^p dx=x^m t^{kp}\frac{kt^{k-1}dt}{bnx^{n-1}}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{m+1}{n}+p-$
– *целое*</td><td>$a+bx^n=t^k x^n$, k – *знаменатель дроби* p
$ax^{-n}+b=t^k$, $-anx^{-n-1}dx=kt^{k-1}dt$,
$x^m(a+bx^n)^p dx=x^m(t^k x^n)^p\frac{kt^{k-1}dt}{-anx^{-n-1}}$, *где*
$x^{-n}=\frac{t^k-b}{a}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">$\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$</td><td>$t=\frac{1}{mx+n}$</td><td>См. пункт 5</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">$\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$</td><td>$t=x+\frac{b}{2a}$, $ax^2+bx+c=at^2-\frac{b^2}{4a}+c$</td><td>Два табл-х инт-ла</td></tr>
</table>

При нахождении первообразной функции можно пользоваться следующим **алгоритмом**:

1. Попытаться найти первообразную непосредственным интегрированием или подведением подходящей функции под знак дифференциала. Если это не удается, то
2. Определить класс подынтегральной функции (рац. дробь, тригонометрическая, иррациональная) и применить соответствующие подстановки, а если функция смешанных классов – интегрирование по частям.