MICHAŁ SZCZUREK

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x) \\ \Phi(0)=5 \\ \Phi(3)=4 \end{cases} \qquad \rho(x) = \begin{cases} 0, & x\in[0,1] \\ 1, & x\in(1,2] \\ 0, & x\in(2,3] \end{cases}$$

$$[0,3] \ni x \to \Phi(x) \in \mathbb{R}$$

dalej $\Phi = u$ w oznaczeniach

$$\int_0^3 u'' v \, dx = \int_0^3 4\pi G \rho(x) dx$$

$$\underbrace{[u'v]_0^3}_{=0} - \int_0^3 u'v' \, dx = \int_1^2 4\pi G dx$$ / korzystam z własności $\rho(x)$

$$\underbrace{-\int_0^3 u'v' dx}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_1^2 4\pi G dx}_{L(v)}$$

uwzględniam shift $\tilde{u} = 5e_0 + 4e_n$ $\quad u = w + \tilde{u}$

$$B(w+\tilde{u}, v) = L(v)$$

$$B(w,v) = L(v) - B(\tilde{u},v)$$

$$B(w,v) = \tilde{L}(v)$$

W programie korzystałem z następujących obserwacji

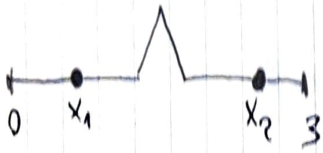
skoro $e_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x\in(x_{i-1}, x_i) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x\in(x_i, x_{i+1}) \end{cases}$, to pochodna tej

funkcji jest współczynnikiem kierunkowym () , szkic

więc pochodna $e_i' = \begin{cases} \dfrac{1}{h} & x\in(x_{i-1}, x_i) \\ -\dfrac{1}{h} & x\in(x_i, x_{i+1}) \end{cases}$

Aby efektywniej wyliczać całki numeryczne całkowałem tylko po przedziale, gdzie funkcja jest niezerowa. Dzięki temu uniknąłem sytuacji, gdy punkty kwadratury były w niefortunnych miejscach i powodowały, że wartość całki wynosiła 0.

Ilustracja takiej sytuacji:



Licząc $\tilde{L}(v)$ odejmowałem $B(\tilde{u},v)$ tylko dla dwóch przedziałów. W pozostałych $B(\tilde{u},v)=0$, bo $\tilde{u}'\equiv 0$

Ostatecznie obliczyłem wartości v, korzystając z macierzy.

$$\begin{bmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_2,e_1) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B(e_1,e_{m-1}) & \cdots & \cdots & B(e_{m-1},e_{m-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{(m-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) - B(\tilde{u},e_1) \\ L(e_2) \\ \vdots \\ L(e_{m-1}) - B(\tilde{u},e_{m-1}) \end{bmatrix}$$