MOwNiT laboratorium 7. - Sprawozdanie

Michał Szczurek
Informatyka, WIEiT

Grupa poniedziałek 12:50

1 Zadanie 1.

Dana jest macierz: $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$

1.1 Udowodnij, że macierz A jest osobliwa

Macierz osobliwa, to macierz kwadratowa, której wyznacznik wynosi 0. Wyznacznik A możemy policzyć korzystając z Tw. Laplace'a:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.7 & 0.8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.7 & 0.8 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = 0.05 - 0.08 - (0.08 - 0.14) + 0.32 - 0.35 = 0$$

Wobec tego macierz jest osobliwa.

1.2 Jaki jest rozwiązań układu równań $Ax = b$ jeśli $b = \begin{vmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{vmatrix}$

Układ równań możemy rozwiązać metodą polegająca na podstawianiu zmiennych. Poniżej przedstawiono następne kroki tej metody:

$$\begin{cases} 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 = 0.1 \\ 0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.6x_3 = 0.3 \\ 0.7x_1 + 0.8x_2 + 0.9x_3 = 0.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 \\ 4 - 8x_2 - 12x_3 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - 2x_3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - 2x_3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - 2x_3 \\ \frac{7}{3} + 7x_3 + \frac{8}{3} - 16x_3 + 9x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - 2x_3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Wobec tego rozwiązaniem układu jest $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + x_3 \\ \frac{1}{3} - 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$, gdzie $x_3 \in \mathbb{R}$.

1.3 W którym momencie eliminacja Gaussa z częściowym przesuwaniem elementu wiodącego (ang. partial pivoting) nie powiedzie się, jeśli rozwiązujemy ten układ równań w dokładnej arytmetyce?

Eliminacja Gaussa polega na przekształceniu macierzy, tak by otrzymać macierz trójkątną górną. a następnie wykonaniu podstawienia wstecznego. Wersja metody z częściowym przesuwaniem elementu wiodącego polega na odpowiedniej zamianie wierszy, tak by w kolejnych krokach mnożyć przez liczbę mniejszą lub równą 1. W tym celu w k-tym kroku metody wybieramy wierz o największym współczynniku w niezredukowanej części w k-tej kolumnie jako wiersz, który, po przeskalowaniu, będziemy odejmować od pozostałych.
Poniżej znajdują się kolejne kroki metody, aż do momentu wystąpienia błędu:

- Macierz A i wektor B na wejściu:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{5}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{7}{10} & \frac{8}{10} & \frac{9}{10} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{5}{10} \end{bmatrix}$$

- Zamiana wiersza 1 i 3 tak by największy element 1. kolumny był na pozycji (1,1):

$$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{8}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{5}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \frac{5}{10} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

- odjęcie od 2. wiersza wiersza 1. przemnożonego przez $\frac{4}{7}$ i odjęcie od 4. wiersza wiersza 1. przemnożonego przez $\frac{1}{7}$:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{8}{10} & \frac{9}{10} \\ 0 & \frac{3}{70} & \frac{6}{70} \\ 0 & \frac{6}{70} & \frac{12}{70} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \frac{5}{10} \\ \frac{1}{70} \\ \frac{2}{70} \end{bmatrix}$$

- Zamiana wiersza 2. i 3. zgodnie z metodą częściowego przesuwania elementu wiodącego.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{8}{10} & \frac{9}{10} \\ 0 & \frac{6}{70} & \frac{12}{70} \\ 0 & \frac{3}{70} & \frac{6}{70} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \frac{5}{10} \\ \frac{2}{70} \\ \frac{1}{70} \end{bmatrix}$$

- Odjęcie od 3. wiersza wiersza 2. przemnożonego przez 0.5.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{8}{10} & \frac{9}{10} \\ 0 & \frac{6}{70} & \frac{12}{70} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \frac{5}{10} \\ \frac{2}{70} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Macierz A jest już macierzą trójkątną górną, jednak podczas próby obliczenia x_3 dochodzi do próby ewaluacji $x_3 = \frac{0}{0}$. Prowadzi to do błędu. Alternatywnie po sprowadzeniu macierzy do macierzy trójkątnej górnej można sprawdzić, czy współczynnik na pozycji (n,n) = 0 i jeśli tak to zakończyć algorytm. Układ ma nieskończenie wiele lub 0 rozwiązań.

1.4 Próba rozwiązania układu przy pomocy numpy.linalg.solve

Niektóre elementy macierzy nie są reprezentowane dokładnie. Wobec tego można podjąć próbę zastosowania eliminacji Gaussa przy pomocy bibliotecznej funkcji. Poniżej znajduje się kod programu korzystającego z tego faktu:

```
A = np.array([[0.1, 0.2, 0.3], [0.4, 0.5, 0.6], [0.7, 0.8, 0.9]])
b = np.array([0.1, 0.3, 0.5])
X = np.linalg.solve(A,b)
```

Otrzymany e ten sposób wektor X będący rozwiązaniem układu wygląda następpująco: $X = \begin{bmatrix} 0.06327986 \\ 0.87344029 \\ -0.27005348 \end{bmatrix}$. Korzystając z tego, że rzeczywisty zbiór rozwiązań ma postać $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + x_3 \\ \frac{1}{3} - 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$ można podstawić ostatnią wartość otrzymanego wektora do wyniku teoretycznego i porównać pozostałe elementy. Okazuje się, że wartości odpowiadają tym uzyskanym ze wzorów. Wobec tego rozwiązanie otrzymane w programie jest przykładowym (ale nie jedynym) rozwiązaniem układu z dokładnością do 8 cyfr po przecinku.

1.5 Obliczenie współczynnika uwarunkowania macierzy

Współczynnik uwarunkowania macierzy wyraża się wzorem:

$$cond(A) = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|$$

Macierz A jest osobliwa. W takim wypadku $cond(A) = \infty$. Nie jest to jednak prawdą dla macierzy w reprezentacji komputerowej. dla takiej macierzy można wyliczyć $cond(A')$ przy pomocy funkcji bibliotecznej numpy.linalg.cond. Współczynnik wynosi:
$cond(A') = 2.37588029981422 \cdot 10^{16}$
Błąd względy otrzymanych wyników można ograniczyć w następujący sposób przy założeniu, że dane wejściowe są dokładne (na tyle na ile pozwala reprezentacja komputerowa):

$$\frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|} \leq cond(A)\epsilon_{mach}$$

Rozwiązanie otrzymane numerycznie traci $\log_{10}(cond(A))$ cyfr dziesiętnych dokładności. W badanym przypadku $\log_{10}(cond(A')) \approx 16.3758$, co biorąc pod uwagę, że reprezentacje zmiennoprzecinkowa jest dokładna dla 15-17 cyfr znaczących powoduje, że cyfry otrzymanego wyniku nie muszą wcale pokrywać się z tymi rzeczywistymi. Jest to jednak ograniczenie górne i otrzymany wynik w rzeczywistości nie był tak niedokładny.

2 Zadanie 2.

Dana jest macierz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\epsilon \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix}$

2.1 Obliczenie wyznacznika A

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1+\epsilon \\ 1-\epsilon & 1 \end{vmatrix} = 1 - (1-\epsilon)(1+\epsilon) = 1 - 1 + \epsilon^2 = \epsilon^2$$

2.2 Dokładność wyznacznika w arytmetyce zmiennoprzecinkowej

Aby wyznacznik w arytmetyce komputerowej był różny od zera $1-\epsilon$ lub $1+\epsilon$ musi być różny od 1.

- $1+\epsilon$ jest różne od 1, gdy ϵ jest większe lub równe ϵ_{mach} (równego dla float64 2^{-52}) lub ϵ jest mniejsze lub równe -2^{-53} ($1-2^{-53}$ jest największą reprezentowaną liczbą mniejszą od 1, o czym można się przekonać korzystając z funkcji numpy.nextafter).
- $1-\epsilon$ jest różne od 1, gdy ϵ jest większe lub równe 2^{-53} lub ϵ jest mniejsze lub równe -ϵ_{mach}.
- Należy również przeanalizować wartość wyznacznika równą $1-$, gdy $|\epsilon| = 2^{-53}$ lub ϵ^2, gdy $|\epsilon| > 2^{-53}$. W każdym z przypadków o ile poprzednie punkty są spełnione, nie zachodzi konieczność nałożenia dodatkowych ograniczeń - wartość jest większa od zera.

Wobec tego wyznacznik będzie niezerowy, gdy $|\epsilon| \geq 2^{-53}$.

2.3 Rozkład LU macierzy A

Rozkład LU macierzy polega na znalezieniu macierzy trójkątnej górnej U i trójkątnej dolnej L, takich że:

$$A = LU$$

Macierz U można otrzymać odejmując 1. wiersz przemnożony przez $(1-\epsilon)$:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1+\epsilon \\ 0 & \epsilon^2 \end{bmatrix}$$

Aby otrzymać macierz L należy wobec tego ustalić element na pozycji(2,1) macierzy jednostkowej na $1-\epsilon$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Osobliwość macierzy U w arytmetyce zmiennoprzecinkowej

Wyznacznik macierzy jest niezerowy wówczas, gdy ϵ^2 jest niezerowe. Najmniejszą liczbą reprezentowaną w float64 jest 2^{-1074}. Wobec tego, by macierz była niezerowa musi być spełniona nierówność $|\epsilon| \geq 2^{-537}$.

3 Badanie przeskalowania układu

Pomnożenie obu stron układu równań liniowych $Ax = b$ przez nieosobliwą macierz diagonalną D daje nowy układ $DAx = Db$. Takie przeskalowanie nie zmienia teoretycznego rozwiązania układu. Aby przekonać się, jaki efekt daje takie przeskalowanie w rzeczywistości wybrano następujący układ:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0.5 & 8 & 1 \\ 7 & 5 & 1 & -3 \\ -6 & 1.5 & -4.5 & 1 \\ 2 & 10 & 5 & -7 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 99.5 \\ 38 \\ -69.5 \\ 42 \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem układu jest

$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Macierz A posiada uwarunkowanie $cond(A) \approx 8.6302$.
Przetestowałem następujące macierze D:

- $D_1 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$

  Zgodnie z oczekiwaniami przeskalowanie każdego wiersza przez 100 nie zmienia ani wyniku ani uwarunkowania macierzy - $cond(D_1A) \approx 8.6302$. Residuum jest wobec tego zerowe.

- $D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10^{10} \end{bmatrix}$

  Przeskalowanie macierzy przy pomocy macierzy, której wartości bezwzględne na przekątnych mocno się różnią powoduje znaczny wzrost współczynnika uwarunkowania - $cond(D_2A) \approx 6.8558 \cdot 10^{10}$.Funkcja numpy.linalg.solve i tym razem dała poprawny rezultat. Residuum jest wobec tego zerowe.

- $D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{19} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10^{-304} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

  Jeszcze bardziej zwiększyłem dysproporcje pomiędzy elementami macierzy. Tym razem razem biblioteczna funkcja wskazała następujące uwarunkowanie macierzy- $cond(D_3A) = \infty$. Wynika to z tego, że uwarunkowanie jest zbyt duże, by mogły zostać wyrażone w arytmetyce komputerowej.

Wbrew moim oczekiwaniom wynik nie był bardzo odległy od oczekiwanego i wynosił $x_3 = \begin{bmatrix} 5.0119 \\ 0.9188 \\ 10.0135 \\ 3.8971 \end{bmatrix}$
Błąd względny poszczególnych wartości wynosił wobec tego

$$|x - x_3| = \begin{bmatrix} 0.0024 \\ 0.0812 \\ 0.0013 \\ 0.0257 \end{bmatrix}$$

Wektor residuum był równy

$$r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7.1054 \cdot 10^{-15} \\ 3.5691 \cdot 10^{-305} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Residuum względne wynosi $||r_3||_1 = 7.1054 \cdot 10^{-15}$.

- $D_4 = \begin{bmatrix} 10^{19} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10^{-320} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{19} \end{bmatrix}$

  Pomownie uwarunkowanie macierzy wynosiło $cond(D_4 A) = \infty$. Wynik był jednak jeszcze bardziej odległy od prawdziwego: $x_4 = \begin{bmatrix} 7.2354 \\ -14.1931 \\ 12.5195 \\ -15.2661 \end{bmatrix}$
  Błąd względny poszczególnych wartości był następujący

$$|x - x_4| = \begin{bmatrix} 0.4471 \\ 15.1932 \\ 0.2520 \\ 4.8165 \end{bmatrix}$$

  Wektor residuum był równy

$$r_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.6806 \cdot 10^{-319} \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Residuum względne wynosi $||r_4||_1 = 6.6806 \cdot 10^{-319}$.

- $D_5 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$

Przykład ten ilustruje, że skalowanie może poprawić uwarunkowanie macierzy. $cond(D_5A) \approx 7.4680$ czyli wartość zmalała. Rozwiązanie, zgodnie z przewidywaniami jest dokładne.

3.1 Wnioski

- Duże różnice wartości bezwzględnych elementów na przekątnych znacząco zwiększały uwarunkowanie, jak i mogły prowadzić do zmniejszenia dokładności wyniku.
- Utrata dokładności wynikająca z błędnego przeskalowania była mniejsza, niż początkowo zakładałem.
- Residuum nie zawsze malało zgodnie ze zmniejszeniem błędu (przykład D_3 i D_4).
- Skalowanie może pozytywnie wpłynąć na uwarunkowanie macierzy.