MOwNiT laboratorium 6. - Sprawozdanie

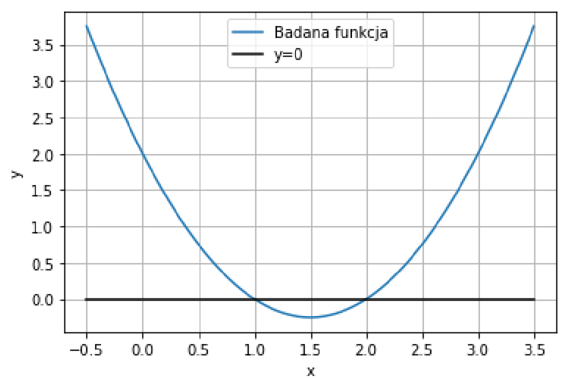
Michał Szczurek
Informatyka, WIEiT

Grupa poniedziałek 12:50

1 Zadanie 1.

Celem zadania jest porównanie czterech równoważnych schematów iteracyjnych dla równania $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$:

- $g_1(x) = \frac{x^2+2}{3}$
- $g_2(x) = \sqrt{3x-2}$
- $g_3(x) = 3 - \frac{2}{x}$
- $g_4(x) = \frac{x^2-2}{2x-3}$



Rysunek 1: Wykres f(x)

1.1 Analiza teoretyczna zbieżności pierwiastków

Zgodnie z twierdzeniem o zbieżności procesu iteracyjnego jeśli:

- $x = \phi(x)$ ma pierwiastek α

- na przedziale $I = [\alpha - a, \alpha + a]$ zachodzi $|\phi'(x)| \leq L < 1$, gdzie L jest stałą

To dla dowolnego $x_0 \in I$:

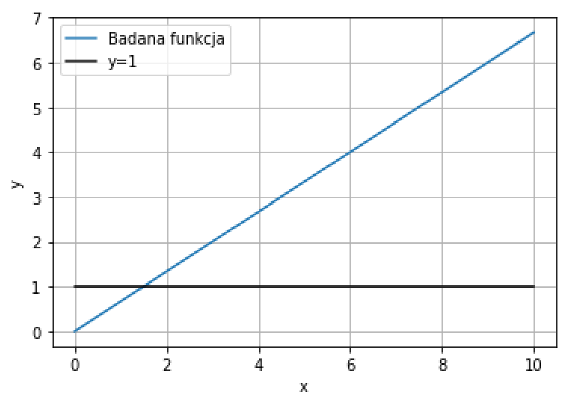
- $x_i \in I$
- $\lim_{x \to \inf} x_i = \alpha$
- α jest jedynym pierwiastkiem $x = \phi(x)$ w I

Zbieżność analizujemy dla pierwiastka $x = 2$. Należy zbadać zatem $|g_i'(2)|$. Wynosi ona odpowiednio:

- $g_1'(x) = \frac{2x}{3}$, $g_1'(2) = \frac{4}{3}$
- $g_2'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$, $g_2'(2) = \frac{3}{4}$
- $g_3'(x) = \frac{2}{x^2}$, $g_3'(2) = \frac{1}{2}$
- $g_4'(x) = \frac{2x}{2x-3} - \frac{2(x^2-2)}{(2x-3)^2}$, $g_4'(2) = 0$

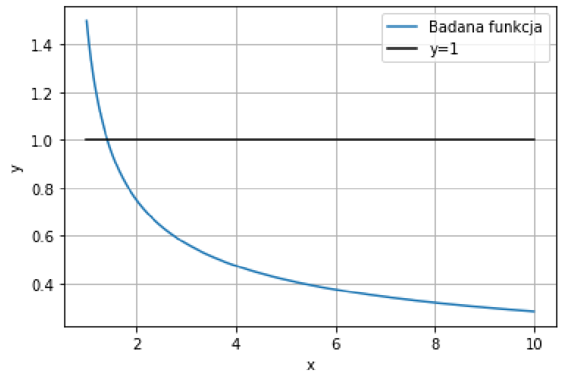
Analiza wskazuje na to, że rozbieżny będzie pierwszy schemat. Aby dowiedzieć się czegoś więcej postanowiłem przeanalizować wartość pochodnych również w innych miejscach, ze szczególnym uwzględnieniem wartości dla $x > 2$:

- Jak już ustalono $g_1'(x)$ jest większa od 1 w otoczeniu 2. Można to zobaczyć na wykresie:



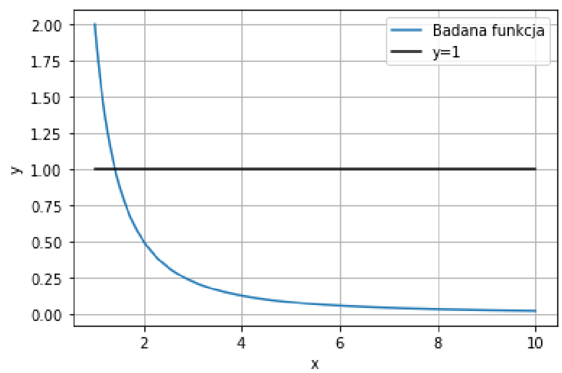
Rysunek 2: Wykres $g_1'(x)$

- $g_1'(x)$ jest mniejsza/równa od 1 na przedziale $[\frac{17}{12}, \inf)$. Punkt, w którym jest równa 1 można wyliczyć rozwiązując proste równanie. Następnie można zauważyć, że funkcja maleje aż do 0 w nieskończoności.



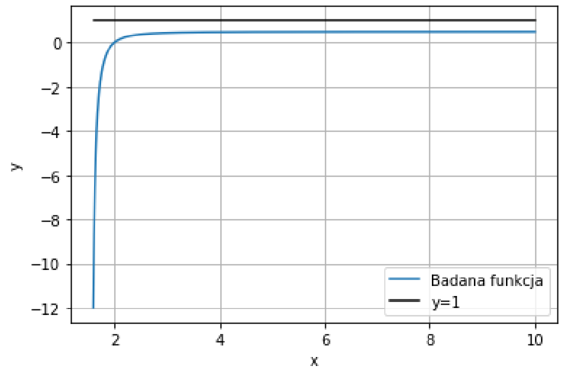
Rysunek 3: Wykres $g_2'(x)$

- $g_3'(x)$ jest mniejsza/równa od 1 na przedziale $[\sqrt{2}, \inf)$ o czym można się przekonać analizując prostą funkcję $\frac{2}{x^2}$. Łatwo zauważyć, że funkcja maleje dla wartości mniejszych od $\sqrt{2}$.



Rysunek 4: Wykres $g_3'(x)$

- $g_4'(x)$ jest nieco trudniejsza do analizy. Aby ją przeanalizować warto policzyć $g_4''(x) = \frac{2}{(2x-3)^3}$. Funkcja jest więc stale rosnąca dla x większych od 2. Ponad to $\lim_{x\to\inf} g_4'(x) = \lim_{x\to\inf} \frac{2x^2-6x+4}{4x^2-12x+9} = \frac{1}{2} < 1$. Schemat będzie więc zbieżny dla $x > 2$.



Rysunek 5: Wykres $g_4'(x)$

1.2 Sprawdzanie zbieżności schematów w praktyce

Przy wyborze punktów startowych kierowałem się zasadą, by jak najbardziej uwypuklić cechę danego schematu. Wobec tego dla schematu, który okazał się być rozbieżny wybrałem x_0 bliskie pierwiastkowi. Z kolei dla schematów zbieżnych wybierałem odległe x_0 tak, by pokazać, że wynik wciąż będzie poprawny.

1.2.1 $g_1(x)$

Schemat ten przetestowałem dla dwóch wartości 1.95 i 2.5. W obu przypadkach schemat nie zbiegał do 2. Poniżej znajduje się wydruk z programu komputerowego dla obu przypadków:
Dla 1.95:

```
After 1 iterations x =  1.93416666666667
After 2 iterations x =  1.91366689814815
After 3 iterations x =  1.88737366568932
After 4 iterations x =  1.85405978464584
After 5 iterations x =  1.81251256168033
After 6 iterations x =  1.76173392874967
After 7 iterations x =  1.70123547856924
After 8 iterations x =  1.63140071784758
After 9 iterations x =  1.55382276739786
After 10 iterations x =  1.47145506416132
```

Dla 2.5

```
After 1 iterations x =  2.75000000000000
After 2 iterations x =  3.18750000000000
After 3 iterations x =  4.05338541666666
After 4 iterations x =  6.14331111201533
After 5 iterations x =  13.2467571396703
```

```
After 6 iterations x =  59.1588582391356
After 7 iterations x =  1167.25683605271
After 8 iterations x =  454163.507103931
After 9 iterations x =  68754830395.6474
After 10 iterations x =  1.57574223424475e+21
```

Jak widać w drugim przypadku wynik bardzo szybko był rozbieżny.

1.2.2 $g_2(x)$

Schemat ten przetestowałem dla dwóch wartości 1.5 (nieco większej od wartości brzegowej, by uniknąć błędów numerycznych) i 50(by pokazać, że schemat poradzi sobie również z taką wartością). W obu przypadkach schemat zbiegał do 2. Poniżej znajduje się wydruk z programu komputerowego dla obu przypadków:
Dla 1.5:

```
After 1 iterations x =  1.58113883008419
After 2 iterations x =  1.65632620285153
After 3 iterations x =  1.72307243276497
After 4 iterations x =  1.78022956336954
After 5 iterations x =  1.82775509576875
After 6 iterations x =  1.86635079427910
After 7 iterations x =  1.89711686061700
After 8 iterations x =  1.92128878148263
After 9 iterations x =  1.94006864426182
After 10 iterations x =  1.95453471004878
```

Dla 50:

```
After 1 iterations x =  12.1655250605964
After 2 iterations x =  5.87337851511286
After 3 iterations x =  3.95223171706045
After 4 iterations x =  3.13953741038092
After 5 iterations x =  2.72371294947591
After 6 iterations x =  2.48417770065423
After 7 iterations x =  2.33506597379232
After 8 iterations x =  2.23722996613602
After 9 iterations x =  2.17064273854728
After 10 iterations x =  2.12412999028822
```

Jak widać wynik jest stosunkowo zbliżony do 2 biorąc pod uwagę odległy punkt jakim jest 50.

1.2.3 $g_3(x)$

Ten schemat został przetestowany dla takich samych wartości jak poprzedni wyniki przedstawiono poniżej:
Dla 1.5

```
After 1 iterations x =  1.66666666666667
After 2 iterations x =  1.80000000000000
After 3 iterations x =  1.88888888888889
After 4 iterations x =  1.94117647058824
After 5 iterations x =  1.96969696969697
After 6 iterations x =  1.98461538461538
After 7 iterations x =  1.99224806201550
After 8 iterations x =  1.99610894941634
After 9 iterations x =  1.99805068226121
After 10 iterations x =  1.99902439024390
```

Dla 50

```
After 1 iterations x =  2.96000000000000
After 2 iterations x =  2.32432432432432
After 3 iterations x =  2.13953488372093
After 4 iterations x =  2.06521739130435
After 5 iterations x =  2.03157894736842
After 6 iterations x =  2.01554404145078
After 7 iterations x =  2.00771208226221
After 8 iterations x =  2.00384122919334
After 9 iterations x =  2.00191693290735
After 10 iterations x =  2.00095754867539
```

Jak widać schemat jest zbieżny. Ponad to dla 10 iteracji wyniki były dokładniejsze niż poprzednio.

1.2.4 $g_4(x)$

Ten schemat przetestowałem dla wartości 1.9 i 50. Poniżej jest wydruk z programu:

Dla 1.9

```
After 1 iterations x =  2.01250000000000
After 2 iterations x =  2.00015243902439
After 3 iterations x =  2.00000002323057
After 4 iterations x =  2.00000000000000
After 5 iterations x =  2.00000000000000
After 6 iterations x =  2.00000000000000
After 7 iterations x =  2.00000000000000
After 8 iterations x =  2.00000000000000
After 9 iterations x =  2.00000000000000
After 10 iterations x =  2.00000000000000
```

Dla 50

```
After 1 iterations x =  25.7525773195876
After 2 iterations x =  13.6314427511860
```

```
After 3 iterations x =  7.57602517890506
After 4 iterations x =  4.55858524942668
After 5 iterations x =  3.07016119295855
After 6 iterations x =  2.36469025729663
After 7 iterations x =  2.07690556395471
After 8 iterations x =  2.00512602593624
After 9 iterations x =  2.00002600949125
After 10 iterations x =  2.00000000067646
```

Schemat ponownie okazał się zbieżny. Ponadto dla $x_0 = 50$ wskazał najdokładniejszą wartość.

1.3 Ocena rzędu zbieżności metod

Aby ocenić rząd zbieżności metod skorzystałem ze wzoru:

$$r = \frac{\ln \frac{\epsilon_k}{\epsilon_{k+1}}}{\ln \frac{\epsilon_{k-1}}{\epsilon_k}}$$

Wartości r wyznaczyłem dla kolejnych iteracji przy pomocy programu.

1.3.1 Wyznaczenie r dla $g_1(x)$

Do wyznaczenia r użyłem wartości uzyskanych w poprzednim punkcie poprzez wybranie punktu startowego $x_0 = 2.5$. Poniżej znajduje się wydruk programu:

```
for k = 2 r =  1.1917324677230872
for k = 3 r =  1.2818748020835071
for k = 4 r =  1.4224742136365107
for k = 5 r =  1.6280589337447335
for k = 6 r =  1.8544388712960331
for k = 7 r =  1.9787010204406597
for k = 8 r =  1.999427034217212
for k = 9 r =  1.9999992616000628
```

Wobec tego wyznaczone r wynosi 2. Nie oznacza to jednak zbiegania w sposób kwadratowy, a wręcz przeciwnie- świadczy to o kwadratowej rozbieżności. Wartości logarytmów we wzorze były ujemne zarówno w mianowniku jak i w liczniku, wobec czego wartość r sama w sobie nie wskazuje na rozbieżność.

1.3.2 Wyznaczenie r dla $g_2(x)$

Ponownie obliczając wartość r posłużyłem się wskazaniem programu dla punktu startowego 2.5.

```
for k = 2 r =  0.952961644878998
for k = 3 r =  0.9651019602640635
for k = 4 r =  0.9740429454797902
```

```
for k = 5 r =  0.9806547769381387
for k = 6 r =  0.9855603118574511
for k = 7 r =  0.989209279364832
for k = 8 r =  0.991928961589998
for k = 9 r =  0.9939591122855975
```

Przeprowadzony eksperyment wskazuje na to, że schemat charakteryzuje się liniową zbieżnością.

1.3.3 Wyznaczenie r dla $g_3(x)$

Czynność powtórzyłem dla $g_3(x)$ otrzymując rezultaty:

```
for k = 2 r =  0.9354962997491695
for k = 3 r =  0.9688915533793018
for k = 4 r =  0.9847141340015007
for k = 5 r =  0.9924221522096138
for k = 6 r =  0.9962271071310482
for k = 7 r =  0.9981175318954076
for k = 8 r =  0.9990597568886702
for k = 9 r =  0.9995301257270229
```

Schemat zdaje się, ponownie jak poprzedni, mieć liniową złożoność.

1.3.4 Wyznaczenie r dla $g_4(x)$

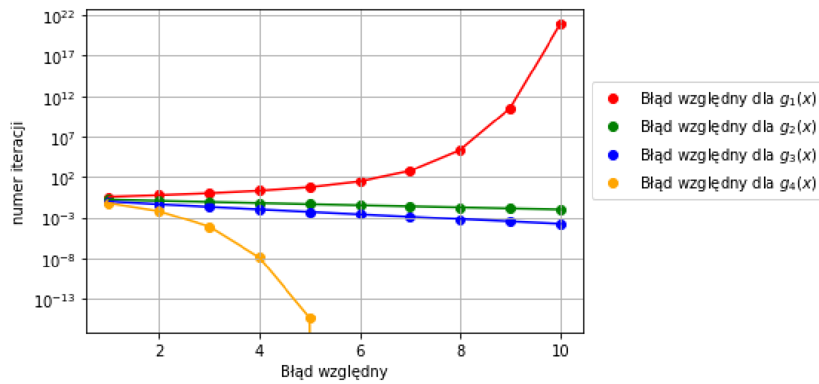
Dla $g_4(x)$ za punkt startowy obrałem 35. Powodem była zbyt szybka zbieżność - podczas wyliczania r dochodziło do dzielenia przez 0.

```
for k = 2 r =  1.043111420025526
for k = 3 r =  1.0861838488384976
for k = 4 r =  1.171471655670102
for k = 5 r =  1.3338343683869944
for k = 6 r =  1.5995011532182721
for k = 7 r =  1.8758350069327483
for k = 8 r =  1.9888490087823025
for k = 9 r =  1.9990345562879226
```

Jak widać wraz ze wzrostem k r dąży do 2. Wobec tego jest to metoda o zbieżności kwadratowej.

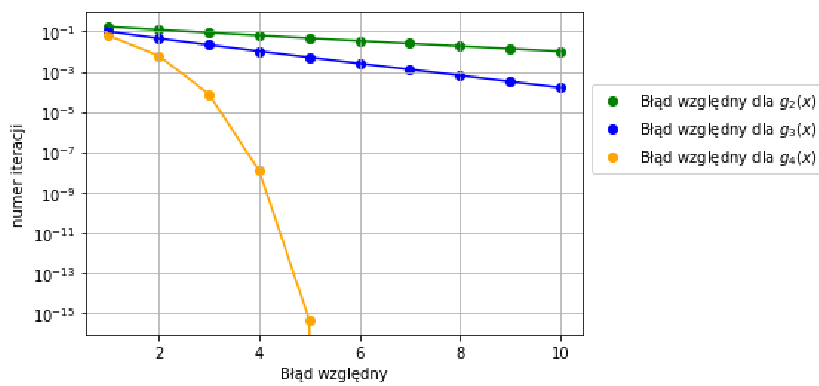
1.4 Porównanie błędów poszczególnych schematów

W celu porównania schematów, za punkt startowy postanowiłem obrać punkt, który jest zbliżony do rzeczywistego wyniku, tak by przetestować działanie metod w sytuacji zbliżonej do normalnego ich użycia. Wobec tego za x_0 przyjąłem 2.5. Poniżej znajduje się wykres błędów względnych dla każdej metody:



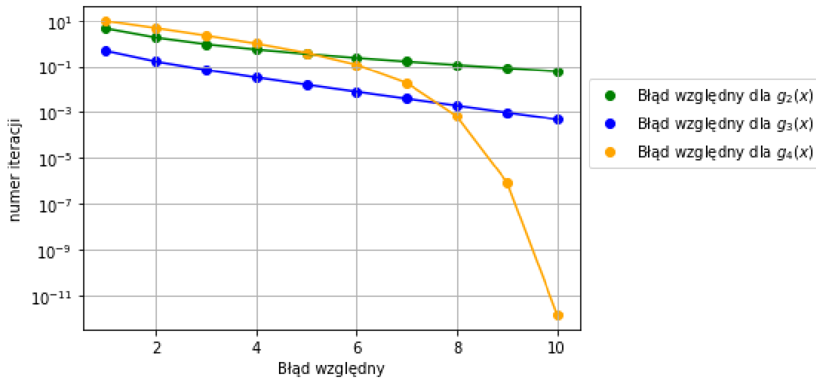
Rysunek 6: Wykres błędu względnego dla wszystkich metod

Wykres dla g_4 zawiera mniej punktów - schemat osiągnął w 6 iteracji wartość dokładną, a liczby 0 nie da się przedstawić na skali logarytmicznej. Sporządzono również wykres zawierający wyłącznie schematy zbieżne:



Rysunek 7: Wykres błędu względnego dla zbieżnych metod

Sporządziłem również wykres dla błędów metod zbieżnych, zaczynając od bardziej nietypowego punktu $x_0 = 40$. Okazało się, że początkowo g_4 dawała najgorszy rezultat. Relacja dla 10 iteracji pozostała jednak bez zmian.



Rysunek 8: Wykres błędu względnego dla zbieżnych metod z punktem startowym $x_0 = 40$

1.5 Wnioski

- Zbieżne były schematy g_2, g_3, g_4.
- Schematy w kolejności od tego, który dał najgorszy wynik w 10. iteracji, do tego który dał najlepszy to:
  - g_1 będący rozbieżny kwadratowo
  - g_2 będący zbieżny liniowo
  - g_3 będący zbieżny liniowo
  - g_4 będący zbieżny kwadratowo
- W zależności od metody przedział zbieżności był różny (lewostronnie).

2 Zadanie 2.

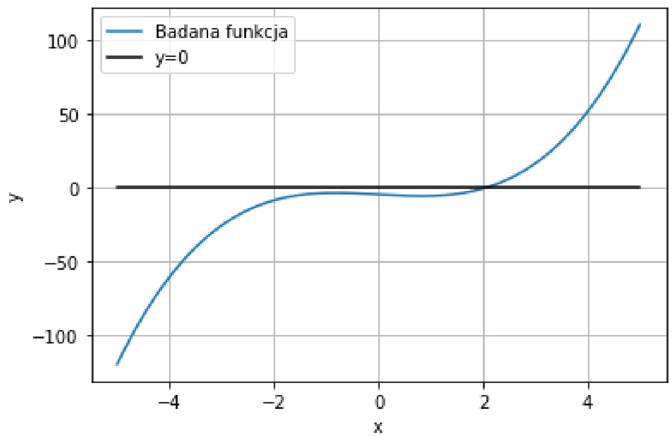
Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla każdego z następujących równań nieliniowych:

2.1 $x^3 - 2x - 5 = 0$

Pierwszym krokiem jest policzenie pochodnej funkcji:
$f'(x) = 3x^2 - 2$
Wobec tego korzystając schemat iteracyjny uzyskany metodą Newtona ma następującą postać:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} = x_{i-1} - \frac{x_{i-1}^3 - 2x_{i-1} - 5}{3x_{i-1}^2 - 2}$$

W celu wybrania przedziału, w którym znajduje się pierwiastek sporządzono wykres:



Rysunek 9: Wykres funkcji $x^3 - 2x - 5$

Funkcja ma jeden pierwiastek znajdujący się w przedziale [1.5,2.5].
Aby sprawdzić, czy przedział jest odpowiednio zawężony można sprawdzić, czy spełnione są założenia twierdzenia o wyborze przedziału dla metody Newtona:

- $f(1.5) \cdot f(2.5) = -4.625 \cdot 5.625 < 0$
- $f'(x) \neq 0$ w wybranym przedziale - miejscami zerowymi pochodnej są $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$
- $f''(x) = 6x$ jest dodatnia w przedziale (funkcja jest wypukła).
- $|\frac{f(1.5)}{f'(1.5)}| \approx 0.9737 < 2.5 - 1.5 = 1$
- $|\frac{f(2.5)}{f'(2.5)}| \approx 0.3358 < 2.5 - 1.5 = 1$

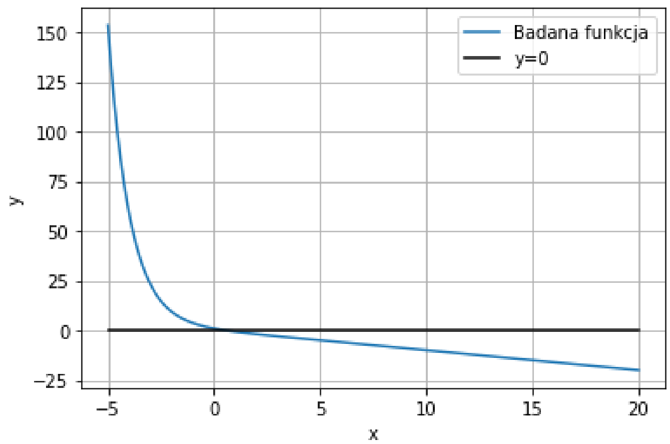
Wobec tego metoda będzie zbieżna w przedziale. Przy pomocy programu wyznaczę wartość pierwiastka po 20 iteracjach przyjmując $x_0 = 1.5$.

$$x_{20} = 2.09455148154233$$

2.2 $e^{-x} = x$

Niech $f(x) = e^{-x} - x$. Wtedy $f'(x) = -e^{-x} - 1$.
Wobec tego schemat Newtona wygląda następująco:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} = x_{i-1} + \frac{e^{-x_{i-1}} - x_{i-1}}{e^{-x_{i-1}} + 1}$$



Rysunek 10: Wykres funkcji $e^{-x} = x$

Ponownie sporządziłem wykres funkcji. Przedział zawierający pierwiastek oszacowałem jako $[0, 1]$ Następnie sprawdziłem założenia:

- $f(0) \cdot f(1) \approx 1.0 \cdot -0.6321 < 0$
- $f'(x) \neq 0$ w wybranym przedziale - funkcja jest ujemna w całej dziedzinie.
- $f''(x) = e^{-x}$ jest dodatnia w dziedzinie (funkcja jest wypukła).
- $|\frac{f(0)}{f'(0)}| = 0.5 < 1 - 0 = 1$
- $|\frac{f(1)}{f'(1)}| \approx 0.4621 < 1 - 0 = 1$

Wobec tego schemat będzie zbieżny w przedziale. Ponownie wyliczyłem pierwiastek po 20 iteracjach tym razem za punkt startowy przyjmując 0.

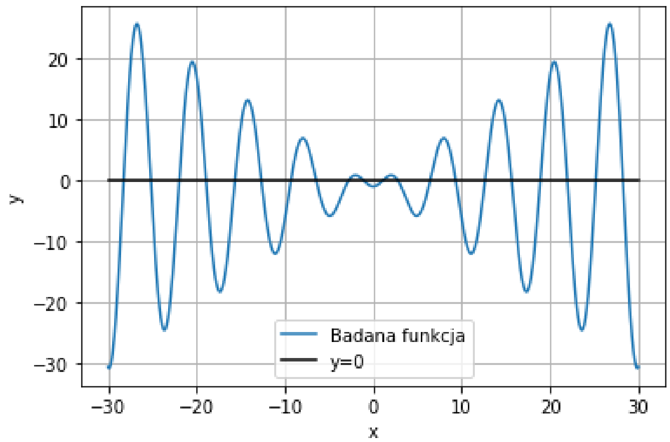
$$x_{20} = 0.567143290409784$$

2.3 $xsin(x) = 1$

Niech $f(x) = xsin(x) - 1$. Wtedy $f'(x) = xcos(x) + sin(x)$.
Wobec tego schemat Newtona wygląda następująco:

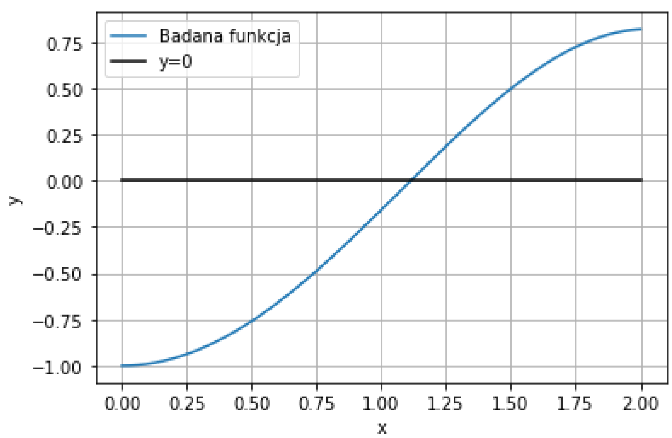
$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} = x_{i-1} + \frac{x_{i-1}sin(x_{i-1}) - 1}{x_{i-1}cos(x_{i-1}) + sin(x_{i-1})}$$

Wykres funkcji wygląda następująco:



Rysunek 11: Wykres funkcji $xsin(x) - 1$

Jak widać funkcja zawiera więcej niż 1 miejsce zerowe. Wobec tego policzę jako przykład pierwiastek dodatni o najmniejszej wartości bezwzględnej.

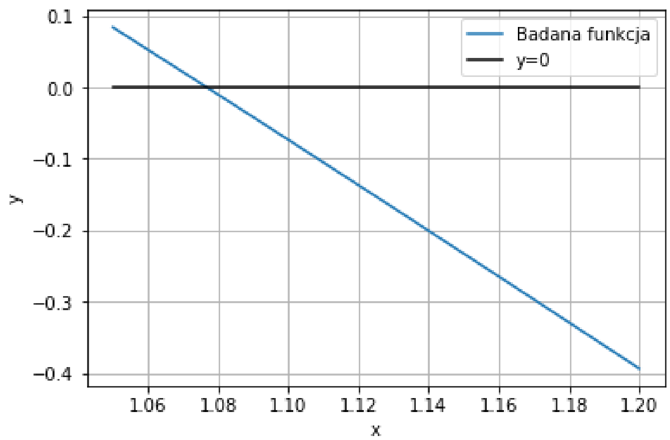


Rysunek 12: Wykres funkcji $xsin(x) - 1$ zawierający pierwiastek dodatni o najmniejszej wartości bezwzględnej

Pierwiastek znajduje się w przedziale $[1.08, 1.2]$. Wybrałem dość wąski przedział, ponieważ druga pochodna zeruje się dla wartości zbliżonej do pierwiastka, a w wybranym przedziale jest to niedopuszczalne:

- $f(1.08) \cdot f(1.2) \approx -0.0475 \cdot 0.1184 < 0$

- $f'(x) \neq 0$ w wybranym przedziale - funkcja jest dodatnia w całym przedziale jako, ze sin(x) i cos(x) są dodatnie w przedziale.
- $f''(x) = 2cos(x) - xsin(x)$ jest ujemna w przedziale, co można odczytać na poniższym wykresie:



Rysunek 13: Wykres funkcji $f''(x) = 2cos(x) - xsin(x)$

- $|\frac{f(1.08)}{f'(1.08)}| = 0.0341 < 1.2 - 1.08 = 0.12$
- $|\frac{f(1.2)}{f'(1.2)}| \approx 0.0867 < 1.2 - 1.08 = 0.12$

Wobec tego schemat będzie zbieżny w przedziale. Ponownie wyliczyłem pierwiastek po 20 iteracjach za punkt startowy przyjmując 1.08.

$$x_{20} = 1.11415714087193$$

2.4 Teoretyczne określenie dokładności

Metoda newtona posiada zbieżność kwadratową. Oznacza to, że błąd maleje kwadratowo wraz z ilością iteracji. Załóżmy zmiennoprzecinkową reprezentację liczby i to, że pierwsze cztery bity, są zgodne z dokładnym wynikiem. Cechę można pominąć w rozważaniach. Związku z tym, dla prostoty rozwiązania, przyjmę, że jest równa 0. Wówczas liczba będzie równa mantysie.
Maksymalny błąd przed rozpoczęciem iteracji wynosi $\epsilon_0 = \sum_{i=5}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-4}$.
Wówczas błąd po kolejnych iteracjach wynosi:
po 1: $\epsilon_1 = 2^{-8}$
po 2: $\epsilon_2 = 2^{-16}$
po 3: $\epsilon_3 = 2^{-32}$
po 4: $\epsilon_4 = 2^{-64}$
W związku z tym by osiągnąć 24-bitową dokładność należy wykonać 3 iteracje, a by osiągnąć 53-bitową dokładność - 4.

3 Zadanie 3.

Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla następującego układu równań nieliniowych:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Metodę Newtona można uogólnić dla wielu zmiennych, jeśli dzielenie przez $f'(x_{i-1})$ zastąpimy mnożeniem przez odwrotność macierzy Jacobiego. Wówczas równanie rekurencyjne ma postać:

$$X_i = X_{i-1} - J_F(X_{i-1})^{-1} F(X_{i-1})$$

gdzie:

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & & \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Dla powyższego zadania poszczególne człony wyglądają następująco:

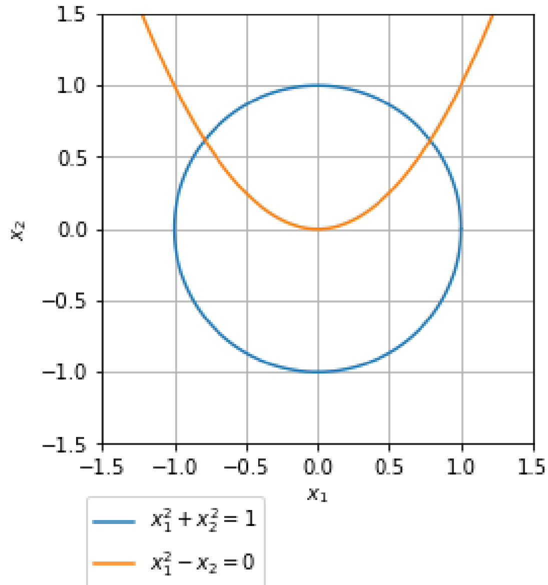
$$J_F(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^2 - x_2 \end{bmatrix}$$

Wówczas:

$$X_i = X_{i-1} - \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^2 - x_2 \end{bmatrix}$$

Następnie należy określić granice przedziałów, w których znajdują się pierwiastki. W tym celu sporządzono wykres:



Rysunek 14: Graficzne przedstawienie układu równań

Obie funkcje są parzyste, wobec tego wystarczy policzyć tylko jeden przypadek przy pomocy metody iteracyjnej. Pierwiastek o obu współrzędnych dodatnich mieści się w przedziałach $x_1 \in [0.5, 1]$ i $x_2 \in [0.5, 1]$. Wobec tego, za początkowy punkt można przyjąć $(x_1,\, x_2) = (0.5,\, 0.5)$.
Poniżej znajdują się wartości pierwiastka po kolejnych iteracjach uzyskane przy pomocy programu komputerowego:

- Po 1 iteracji $(x1, x2) = (0.875, 0.625)$
- Po 2 iteracjach $(x1, x2) = (0.7906746, 0.61805556)$
- Po 3 iteracjach $(x1, x2) = (0.78616432, 0.61803399)$
- Po 4 iteracjach $(x1, x2) = (0.78615138, 0.61803399)$
- Po 5 iteracjach $(x1, x2) = (0.78615138, 0.61803399)$

Wobec tego pierwiastki równania wynoszą w przybliżeniu $X_1 \approx (0.786, 0.618)$ i $X_2 \approx (-0.786, 0.618)$.

Obliczanie odwrotności macierzy Jacobiego jest kosztowne czasowo i wpływa negatywnie na stabilność numeryczną algorytmu. Wobec tego w praktyce można się ograniczyć do obliczenia różnicy $x_i - x_{i-1}$. Układ równań, który należy rozwiązać wygląda wówczas następująco:

$$J_F(X_{i-1})(X_i - x_{i-1}) = -F(X_{i-1})$$