Równania różniczkowe zwyczajne

Zadanie 1. Przedstaw każde z poniższych równań różniczkowych zwyczajnych jako równoważny układ równań pierwszego rzędu (ang. *first-order system of ODEs*):

(a) równanie Van der Pol'a:

$y'' = y'(1 - y^2) - y.$

(b) równanie Blasiusa:

$y''' = -yy''.$

(c) II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y_1'' = -GMy_1/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}, \tag{1}$$

$$y_2'' = -GMy_2/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}. \tag{2}$$

Zadanie 2. Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne

$$y' = -5y$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem $h = 0.5$.

(a) Wyjaśnij, czy rozwiązania powyższego równania są stabilne?

(b) Wyjaśnij, czy metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

(c) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ metodą Euler'a.

(d) Wyjaśnij, czy niejawna metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

(e) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ niejawną metodą Euler'a.

Zadanie 3. Model Kermack'a-McKendrick'a przebiegu epidemii w populacji opisany jest układem równań:

$$y_1' = -cy_1y_2, \tag{3}$$
$$y_2' = cy_1y_2 - dy_2, \tag{4}$$
$$y_3' = dy_2, \tag{5}$$

gdzie
y_1 reprezentuje osoby zdrowe podatne na zainfekowanie,
y_2 reprezentuje osoby zainfekowane i roznoszące infekcję,
y_3 reprezentuje osoby ozdrowiałe.

Parametery c i d reprezentują odpowiednio współczynnik zakaźności i współczynnik wyzdrowień (ang. *removal rate*). Rozwiąż układ numerycznie z parametrami $c = 1$, $d = 5$, oraz wartościami początkowymi

$$y_1(0) = 95,\ y_2(0) = 5,\ y_3(0) = 0.$$

całkując od $t = 0$ do $t = 1$. Przedstaw na wspólnym rysunku wykresy komponentów rozwiązania (y_1, y_2, y_3) jako funkcje t.

Zadanie 4. Ważnym problemem mechaniki klasycznej jest wyznaczanie ruchu dwóch ciał poddanych wzajemnemu przyciąganiu grawitacyjnemu. Załóżmy, że ciało o masie m orbituje wokół drugiego ciała o znacznie większej masie M (np. Ziemia wokół Słońca). Zgodnie z zasadami dynamiki Newton'a trajektoria ruchu $(x(t), y(t))$ jest opisana przez układ równań drugiego rzędu:

$$x'' = -GMx/r^3, \tag{6}$$
$$y'' = -GMy/r^3, \tag{7}$$

gdzie G jest stałą grawitacji, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ jest odległością orbitującego ciała od środka masy dwóch ciał. Dla potrzeb zadania jednostki dobrane są tak, że $GM = 1$.

Rozwiąż powyższy układ równań z warunkami początkowymi

$$x(0) = 1 - e, \qquad y(0) = 0,$$
$$x'(0) = 0, \qquad y'(0) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2},$$

gdzie e jest ekscentrycznością (mimośrodem) orbity eliptycznej o okresie 2π. Wykonaj eksperymenty z wartościami $e = 0$ (orbita kołowa), $e = 0.5$ i $e = 0.9$. Wykonaj osobne wykresy x względem t, y względem t, i y względem x.

Sprawdź w jakim stopniu otrzymane numerycznie rozwiązania zachowują energię i moment pędu, które powinny pozostawać stałe zgodnie z zasadami zachowania:

(a) Prawo zachowania energii:

$$\frac{(x')^2 + (y')^2}{2} - \frac{1}{r}, \tag{8}$$

(b) Prawo zachowania momentu pędu:

$$xy' - yx'. \tag{9}$$

Stwórz 11 wykresów:

- Wykres x w funkcji y, x w funkcji t, oraz y w funkcji t dla każdej z trzech wartości ekscentryczności (łącznie 9 wykresów).
- Wykresy energii oraz momentu pędu w funkcji czasu dla $e = 0.9$ (2 wykresy).

Wykresy powinny uwzględniać wiele okresów.