MOwNiT laboratorium 8. - Sprawozdanie

Michał Szczurek
Informatyka, WIEiT

Grupa poniedziałek 12:50

1 Zadanie 1. Przedstaw każde z poniższych równań różniczkowych zwyczajnych jako równoważny układ równań pierwszego rzędu:

Często przed rozpoczęciem numerycznego rozwiązywania układu równań różniczkowych równania sprowadza się do równoważnego układu równań pierwszego rzędu. Poniżej znajdują się przekształcenia dla wybranych równań:

- równanie Van der Pol'a:

$$y'' = y'(1 - y^2) - y \tag{1}$$

  Aby przekształcić równanie należy wprowadzić zmienną pomocniczą:

$$u = y' \tag{2}$$

  Wówczas łącząc (1) i (2) otrzymamy układ równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = u(1 - y^2) - y \end{cases}$$

- równanie Blasiusa:

$$y''' = -yy'' \tag{3}$$

  Tym razem konieczne będzie wprowadzenie dwóch zmiennych pomocniczych:

$$u = y' \tag{4}$$

$$v = u' \tag{5}$$

  Po uwzględnieniu (3), (4) i (5) uzyskamy następujący układ równań:

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = v \\ v' = -yv \end{cases}$$

- II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y_1'' = -GMy_1/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2} \tag{6}$$

$$y_2'' = -GMy_2/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2} \tag{7}$$

Ponownie należy wprowadzić zmienne pomocnicze:

$$u_1 = y_1' \tag{8}$$

$$u_2 = y_2' \tag{9}$$

Wówczas układ równań przyjmuje postać:

$$\begin{cases} y_1' = u_1 \\ y_2' = u_2 \\ u_1' = -GMy_1/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2} \\ u_2' = -GMy_1/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2} \end{cases}$$

2 Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne $y' = -5y$ z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem $h = 0.5$.

2.1 Wyjaśnij, czy rozwiązania powyższego równania są stabilne?

Rozwiązaniem równania postaci $y = \lambda y$, gdzie λ to stała jest $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$. W związku z tym dla rzeczywistych wartości λ:

- jeśli $\lambda > 0$, to wszystkie niezerowe rozwiązania rosną wykładniczo. Rozwiązania są wówczas niestabilne.
- jeśli $\lambda < 0$, to wszystkie niezerowe rozwiązania maleją wykładniczo. Rozwiązania są wówczas stabilne.

W równaniu $y' = -5y$ współczynnik $\lambda = -5$, wobec czego rozwiązania równania są stabilne.

2.2 Wyjaśnij, czy metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

Stosując metodę Eulera do równania postaci $y = \lambda y$ z krokiem h otrzymujemy:

$$y_{k+1} = y_k + \lambda y_k h = (1 + \lambda h) y_k$$

W konsekwencji:

$$y_k = (1 + \lambda h)^k y_0$$

Wobec tego metoda Eulera jest stabilna, jeśli $|1 + \lambda h| < 1$. W przypadku z zadania:

$$|1 - 5 \cdot 0.5| = 1.5 > 1$$

Czyli metoda nie jest stabilna.

2.3 Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla t = 0.5 metodą Euler'a.

$h = t = 0.5$, wobec czego $y(t) = y_1$:

$$y(t) = y_1 = (1 + \lambda h)y_0 = (1 - 2.5)y_0 = -1.5$$

2.4 Wyjaśnij, czy niejawna metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

Stosując niejawną metodę Eulera do równania postaci $y = \lambda y$ z krokiem h otrzymujemy:

$$y_{k+1} = y_k + \lambda y_{k+1} h$$

Co po przekształceniu daje:

$$y_{k+1} = \frac{1}{1 - \lambda h} y_k$$

Wobec tego:

$$y_k = \left(\frac{1}{1 - \lambda h} \right)^k y_0$$

Warunek na stabilność tej metody wygląda więc następująco:

$$\left| \frac{1}{1 - \lambda h} \right| < 1$$

W przypadku z zadania:

$$\left| \frac{1}{1 + 5 \cdot 0.5} \right| < 1$$

Czyli metoda jest stabilna.

Metoda niejawna jest stabilna, dla każdego $\lambda < 0$, co sprawia, że jest stabilna, dla większego zakresu λ od metody jawnej, dla której warunkiem było to, by $\lambda < 0$ oraz, by $\lambda h > -2$.

2.5 Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla t = 0.5 niejawną metodą Euler'a.

$h = t = 0.5$, wobec czego $y(t) = y_1$:

$$y(t) = y_1 = \frac{1}{1 - \lambda h} y_0 = \frac{1}{1 + 2.5} y_0 \approx 0.29$$

2.6 Wartość wyliczona analitycznie dla t = 0.5

Rozwiązaniem równania postaci $y' = \lambda y$ jest $y = ce^{\lambda t}$. Korzystając z informacji, że $y(0) = 1$ można przedstawić wynik jako $y = e^{-5t}$, wobec czego $y(0.5) \approx 0.8$.

3 Model Kermack'a-McKendrick'a

Model Kermack'a-McKendrick'a przebiegu epidemii w populacji opisany jest układem równań:

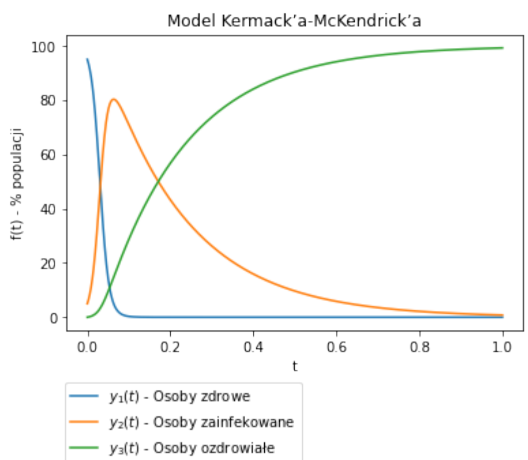
$$\begin{aligned} y_1' &= -cy_1y_2 \\ y_2' &= cy_1y_2 - dy_2 \\ y_3' &= dy_2 \end{aligned}$$

gdzie
y_1 reprezentuje osoby zdrowe podatne na zainfekowanie,
y_2 reprezentuje osoby zainfekowane i roznoszące infekcję,
y_3 reprezentuje osoby ozdrowiałe.

Parametry c i d reprezentują odpowiednio współczynnik zakaźności i współczynnik wyzdrowień. Celem zadnia jest rozwiązanie układu numerycznie z parametrami metrami $c = 1$, $d = 5$, oraz wartościami początkowymi

$$y_1(0) = 95, y_2(0) = 5, y_3(0) = 0.$$

całkując od t = 0 do t = 1.
Do rozwiązania układu użyłem funkcji z biblioteki scipy integrate.solve_ivp, korzystającej z metody Rungego–Kutty–Fehlberga, nazywanej również RK4(5), opartej o klasę metod Rungego-Kutty. Metoda ma rząd $O(h^4)$ i oszacowanie błędu $O(h^5)$.



3.1 Problem dwóch ciał

Ważnym problemem mechaniki klasycznej jest wyznaczanie ruchu dwóch ciał poddanych wzajemnemu przyciąganiu grawitacyjnemu. Załóżmy, że ciało o masie m orbituje wokół drugiego ciała o znacznie większej masie M (np. Ziemia wokół Słońca). Zgodnie z zasadami dynamiki Newton'a trajektoria ruchu (x(t), y(t)) jest opisana przez układ równań drugiego rzędu:

$$\begin{aligned} x'' &= -GMx/r^3 \\ y'' &= -GMy/r^3 \end{aligned}$$

gdzie G jest stałą grawitacji, $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ jest odległością orbitującego ciała od środka masy dwóch ciał. Dla potrzeb zadania jednostki dobrane są tak, że $GM = 1$. Rozwiąż powyższy układ równań z warunkami początkowymi

$$\begin{aligned} &x(0) = 1 - e \\ &x'(0) = 0 \\ &y(0) = 0 \\ &y'(0) = \left(\tfrac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

gdzie e jest ekscentrycznością (mimośrodem) orbity eliptycznej o okresie 2π. Wykonaj eksperymenty z wartościami $e = 0$ (orbita kołowa), $e = 0.5$ i $e = 0.9$. Wykonaj osobne wykresy x względem t, y względem t, i y względem x. Sprawdź w jakim stopniu otrzymane numerycznie rozwiązania zachowują energię i moment pędu, które powinny pozostawać stałe zgodnie z zasadami zachowania:

- $\frac{(x')^2+(y')^2}{2} - \frac{1}{r}$
- $xy' - yx'$

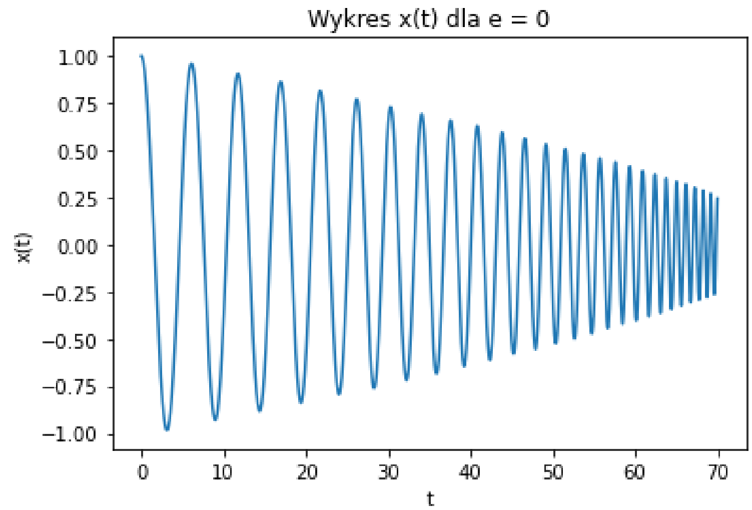
Równania można przedstawić jako równoważny układ równań różniczkowych pierwszego rzędu:

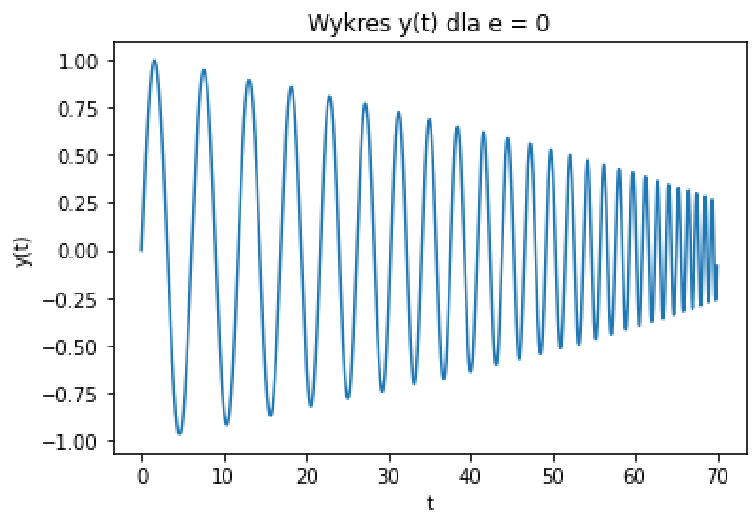
$$\begin{cases} x' = u \\ u' = -GMx/r^3 \\ y' = v \\ v' = -GMy/r^3 \end{cases}$$

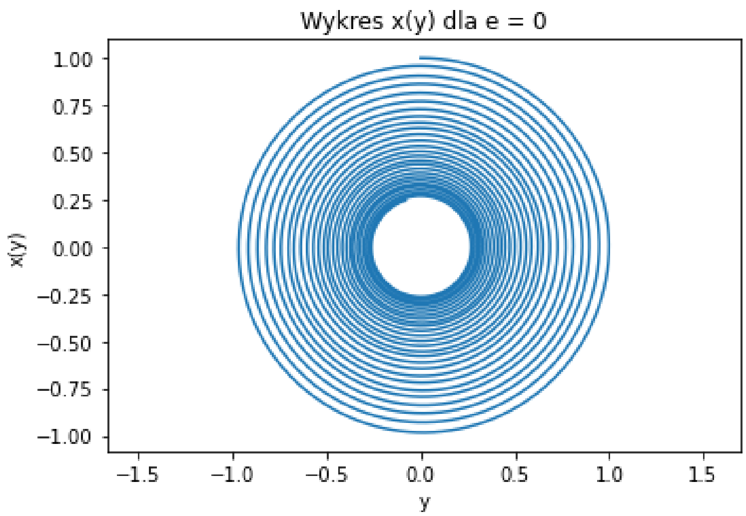
Następnie poszczególne wartości liczbowe można wyliczyć korzystając, tak jak w poprzednim zadaniu z funkcji integrate.solve_ivp.

Obliczenia wykonałem dla t z zakresu 0 do 70 i z krokiem $h = 10^{-4}$.

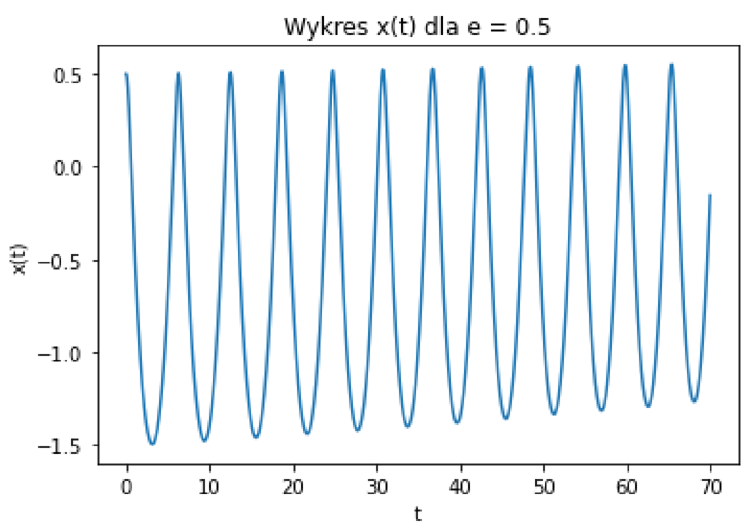
Wykresy wyników wyglądały następująco:
Dla $e = 0$:

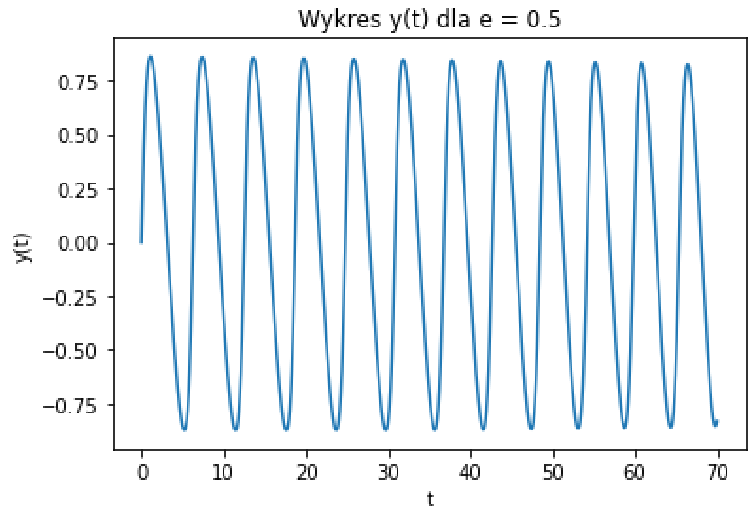




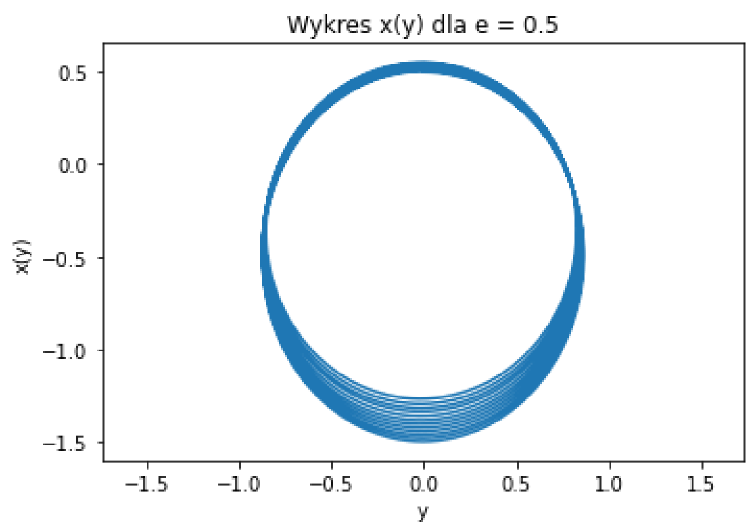

Wykres x(y) dla e = 0
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
x(y)
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
y

Dla $e = 0.5$:


Wykres x(t) dla e = 0.5
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
x(t)
0
10
20
30
40
50
60
70
t

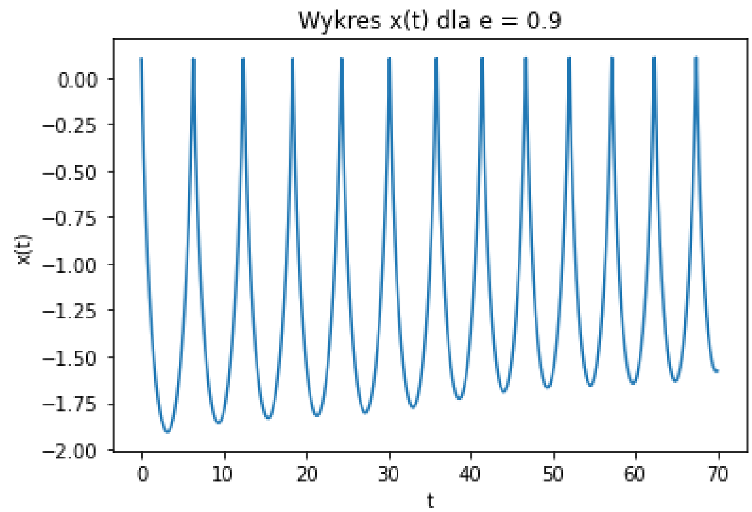


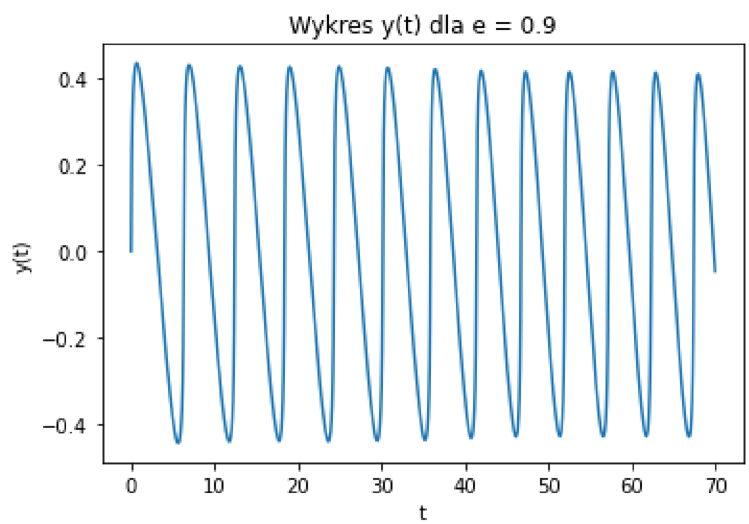
Wykres y(t) dla e = 0.5
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
y(t)
0
10
20
30
40
50
60
70
t

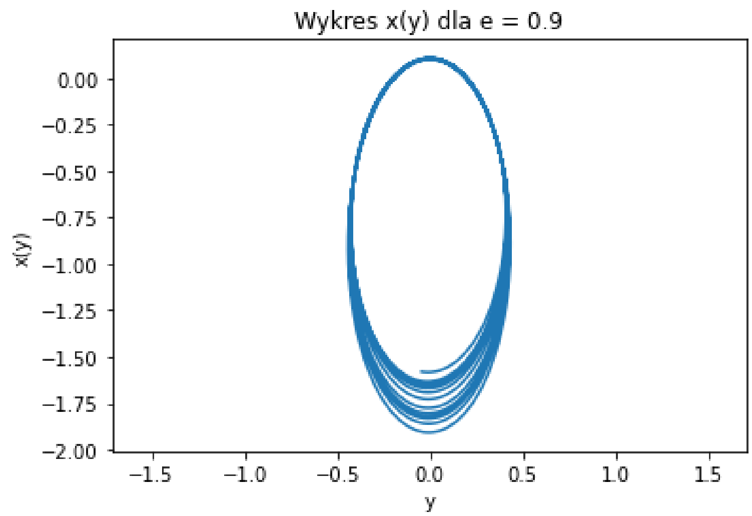


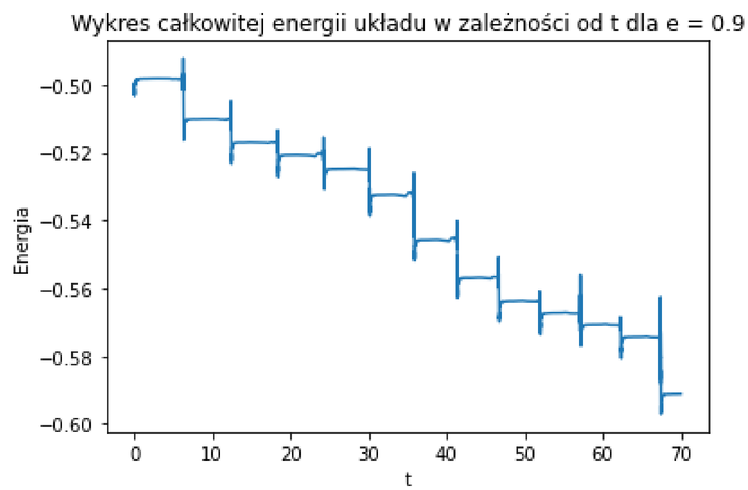
Wykres x(y) dla e = 0.5
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
x(y)
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
y

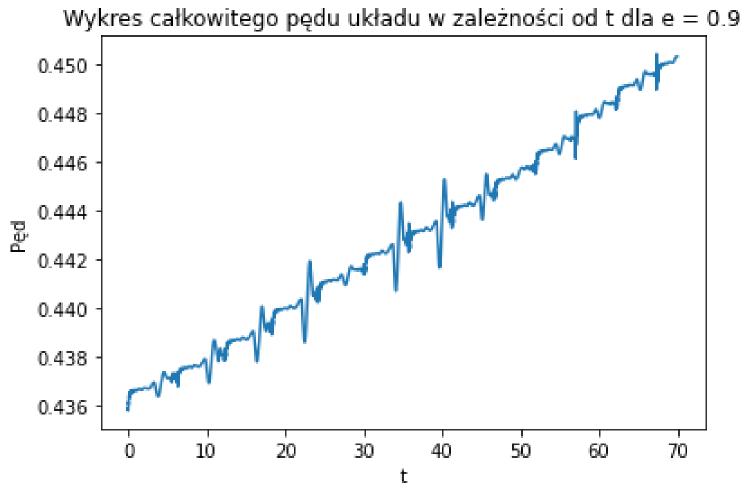
Dla $e = 0.9$:


Wykres x(t) dla e = 0.9
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.25
−1.50
−1.75
−2.00
x(t)
0
10
20
30
40
50
60
70
t


Wykres y(t) dla e = 0.9
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
y(t)
0
10
20
30
40
50
60
70
t


Wykres x(y) dla e = 0.9
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.25
−1.50
−1.75
−2.00
x(y)
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
y


Wykres całkowitej energii układu w zależności od t dla e = 0.9
−0.50
−0.52
−0.54
−0.56
−0.58
−0.60
Energia
0
10
20
30
40
50
60
70
t



3.2 Wnioski i obserwacje:

- Dla wszystkich modeli kolejne orbity zmieniały się na skutek błędów numerycznych.
- Dla $e = 0$ orbita przypominała kołową, jednak promień ulegał systematycznemu zmniejszeniu - amplitudy x i y malały wraz z czasem.
- Dla $e = 0.5$ i $e = 0.9$ z każdym kolejnym okresem malała minimalna osiągana wartość x (efekt był bardziej widoczny dla $e = 0.9$). Amplitudy y również malały, jednak w znacznie mniejszym stopniu.
- Dla $e = 0.5$ wraz z upływem czasu dochodziło do nieznacznego zwiększenia się maksymalnej wartości x.
- W żadnym z przypadków zasady zachowania energii i pędu nie były zachowane.
- Dla $e = 0.9$ wraz z upływem czasu wartość pędu rosła, a energii malała (biorąc pod uwagę tendencję krzywych).
- Dla t, dla którego $x(t)$ osiągało największe wartości dochodziło do nagłych wzrostów, a następnie znacznych spadków energii.