Interpolacja

Zadanie 1. Interpolacja funkcji $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ na przedziale $[-1, 1]$ i efekt Rungego.

(a) Używając biblioteki `sympy` oblicz pochodne $f^{(5)}(x), f^{(10)}(x), f^{(15)}(x)$, a następnie narysuj na osobnych wykresach funkcje $f(x), f^{(5)}(x), f^{(10)}, f^{(15)}(x)$.

(b) Zinterpoluj funkcję

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \tag{1}$$

wielomianami Newtona 5-go i 10-go stopnia na przedziale $[-1, 1]$ z równoodległymi węzłami $x_j = x_0 + jh,\ j = 0, 1, \ldots, n$, gdzie $h = (x_n - x_0)/n$.

(c) Powtórz obliczenia używając węzłów Czebyszewa:

$$x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)}\pi\right),\ 0 \leq j \leq n \tag{2}$$

(d) Wykonaj interpolację funkcji $f(x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi kubicznymi (ang. *clamped cubic spline*) z 11 równoodległymi węzłami

(e) Narysuj wykresy funkcji interpolowanej $f(x)$, funkcji interpolujących oraz wykresy funkcji błędów.

(f) Przedstaw wyniki interpolacji i jej błędy w postaci poniższej tabeli dla losowo próbkowanych punktów z przedziału $[x_0, x_n]$

x	$f(x)$	Newton $P_{10}^N(x)$	Czebyszew $P_{10}^C(x)$	spline $s(x)$	Błąd $\lvert f(x) - P_{10}^N(x)\rvert$	Błąd $\lvert f(x) - P_{10}^C(x)\rvert$	Błąd $\lvert f(x) - s(x)\rvert$

gdzie:
$P_{10}^N(x)$ to wielomian interpolacyjny Newtona 10-go stopnia,
$P_{10}^C(x)$ to wielomian interpolacyjny Newtona 10-go stopnia wyznaczony dla węzłów Czebyszewa,
$s(x)$ to kubiczna funkcja sklejana.

(g) Porównaj otrzymane błędy interpolacji (maksymalny moduł różnic) z oszacowaniem błędu interpolacji w interpolacji wielomianami Newtona

$$|f(x) - p(x)| \leq \max_{x_0 \leq t \leq x_n} |f^{(n+1)}(t)| \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \tag{3}$$

wielomianami Newtona z węzłami Czebyszewa

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{2}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq t \leq x_n} |f^{(n+1)}(t)| \left(\frac{x_n - x_0}{4}\right)^4. \tag{4}$$

oraz funkcjami sklejanymi

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{5}{384} \max_{x_0 \leq t \leq x_n} |f^{(4)}(t)| \cdot \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)^4 \tag{5}$$

Zadanie 2. Udowodnij, że w przypadku węzłów równoodległych

$$x_j = x_0 + jh,\ j = 0, 1, \ldots, n$$

jeśli $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ dla $x \in [x_0, x_n]$, to błąd interpolacji

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq t \leq x_n} |f^{(n+1)}(t)| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{6}$$

jest ograniczony w następujący sposób:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{4(n+1)} h^{n+1} \tag{7}$$

Zadanie 3. Wykonaj interpolację funkcji $f(x) = |\sin(x)|$ w przedziale $[-4, 4]$ przy użyciu wielomianów Lagrange'a 2-go, 5-go oraz 10-go stopnia, dla równoodległych węzłów interpolacji. Narysuj wykres i zinterpretuj go. Jakie wiele węzłów interpolacji byłoby wymaganych aby maksymalny błąd interpolacji nie przekraczał 10^{-10}?

Wskazówka. Wykorzystaj oszacowanie (7) z zadania 2.

Zadanie 4.

(a) Oblicz wielomian interpolacyjny dla danych (0.5,5.5), (1,14.5), (1.5,32.5), (2,62.5) przy pomocy jednomianów.

(b) Oblicz wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla tych samych danych i pokaż, że wielomian będzie ten sam co w (a).

(c) Oblicz wielomian interpolacyjny Newtona dla tych samych danych korzystając z metody trójkąta różnic dzielonych.

Pokaż, że każda reprezentacja dają ten sam wielomian.

Zadanie 5.
Wyraź następujący wielomian metodą Hornera: $p(t) = 3t^3 – 7t^2 + 5t – 4$.

Zadanie 6. Ile mnożeń trzeba wykonać do ewaluacji wielomianu $p(t)$ stopnia $n - 1$ w danym punkcie t jeżeli wybieramy jako reprezentację:

(a) jednomiany

(b) wielomiany Lagrange'a

(c) wielomiany Newton'a