TP-ECC-2015-2016

Code de Hamming

Emmanuel BAUDVIN
Antoine PUISSANT

Enseignant : M. FILIOL

2015 - 2016

Résumé

résumé

Table des matières

1 Exercice 1 : Sur papier

1.1 Encodage du message $m = (1, 1, 0, 1)$

Pour encoder le message $m = (1, 1, 0, 1)$, il faut multiplier ce message par la matrice génératrice G donnée. La matrice génératrice G est de la forme suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ainsi, en multipliant m et G, nous obtenons le message m_e suivant :

$$m_e = m \times G = (1, 1, 0, 1) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1) \tag{2}$$

1.2 Vérification que H est bien une matrice de contrôle

Afin de vérifier si un mot de code reçu comporte des erreurs, il est possible multiplier ce dernier à une matrice de contrôle, H. Ici, la matrice H est de la forme suivante :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Afin de vérifier si cette matrice est bien un matrice de contrôle, nous allons vérifier cela avec notre mot encodé m_e.
Pour ce faire, nous allons multiplier m_e et H. Nous obtiendrons alors deux résultats possibles :

— Si le résultat s est égal $(0, 0, 0)$, alors il n'y a aucune faute dans le mot code.
— Si le résultat s n'est pas égal à $(0, 0, 0)$, alors le mot code comporte au moins une erreur.

Ici, nous utiliserons un mot code que nous savons correct. Le résultat devra obligatoirement être égal à $(0, 0, 0)$ sauf si H n'es pas une matrice de contrôle.

$$s = H \times m_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0) \tag{4}$$

Ainsi, nous savons que la matrice de contrôle H est correcte.

1.3 Vérification que $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ est bien un de code

Afin de vérifier si le message $c_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ est bien un mot code, nous allons le multiplier avec la matrice de contrôle H et observer le résultat :

$$s_2 = H \times c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = (0, 0, 0) \tag{5}$$

Le résultat s_2 étant bien égal à $(0, 0, 0)$, le mot encodé $c_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ est bien un mot code. ce dernier, décodé est le mot $(1, 1, 1, 1)$.

1.4 Réception et correction du message $c' = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$

Le mot de code reçu, $c' = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$, n'est pas un mot de code. pour le vérifier, nous allons multiplier c' à la matrice H de contrôle :

$$s_3 = H \times c' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1) = (0, 1, 1) \tag{6}$$

Comme nous pouvons le constater, le résultat $s_3 = (0, 1, 1)$ est différent de $(0, 0, 0)$. Nous pouvons alors noter que c' n'est pas un mot de code.
Cependant, nous savons qu'il ne comporte qu'une seule erreur. De plus, nous pouvons déduire grâce au résultat de s_3 connaître la position de ce bit erroné. En effet, en lisant le résultat s_3 en binaire (ici, $011 = 3$ en décimal), nous savons que l'erreur a été faite sur le troisième bit.
Nous obtenons alors le mot de code suivant :

$$c'_2 = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1) \tag{7}$$

Afin de vérifier si cette correction est la bonne, nous allons vérifier que ce dernier est correct :

$$s_4 = H \times c'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0) \tag{8}$$

Le résultat s_4 étant bien égal à $(0, 0, 0)$, nous pouvons conclure que c'_2 est bien un mot de code. Il peut être décodé en mot $m_{c'} = (1, 1, 0, 1)$.