

**TP-ECC-2015-2016**



Code de Hamming

**Emmanuel BAUDVIN**  
**Antoine PUISSANT**

Enseignant : M. FILIOL

2015 - 2016

## **Résumé**

résumé

## Table des matières

<b>1 Exercice 1 : Sur papier</b>	<b>3</b>
1.1 Encodage du message $m = (1, 1, 0, 1)$ . . . . .	3
1.2 Vérification que $H$ est bien une matrice de contrôle . . . . .	3
1.3 Vérification que $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ est bien un de code . . . . .	3
1.4 Réception et correction du message $c' = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$ . . . . .	4
<b>2 Exercice 2 : Le code</b>	<b>4</b>

## 1 Exercice 1 : Sur papier

### 1.1 Encodage du message $m = (1, 1, 0, 1)$

Pour encoder le message  $m = (1, 1, 0, 1)$ , il faut multiplier ce message par la matrice génératrice  $G$  donnée. La matrice génératrice  $G$  est de la forme suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ainsi, en multipliant  $m$  et  $G$ , nous obtenons le message  $m_e$  suivant :

$$m_e = m \times G = (1, 1, 0, 1) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1) \quad (2)$$

### 1.2 Vérification que $H$ est bien une matrice de contrôle

Afin de vérifier si un mot de code reçu comporte des erreurs, il est possible multiplier ce dernier à une matrice de contrôle,  $H$ . Ici, la matrice  $H$  est de la forme suivante :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Afin de vérifier si cette matrice est bien une matrice de contrôle, nous allons vérifier cela avec notre mot encodé  $m_e$ .

Pour ce faire, nous allons multiplier  $m_e$  et  $H$ . Nous obtiendrons alors deux résultats possibles :

- Si le résultat  $s$  est égal  $(0, 0, 0)$ , alors il n'y a aucune faute dans le mot code.
- Si le résultat  $s$  n'est pas égal à  $(0, 0, 0)$ , alors le mot code comporte au moins une erreur.

Ici, nous utiliserons un mot code que nous savons correct. Le résultat devra obligatoirement être égal à  $(0, 0, 0)$  sauf si  $H$  n'est pas une matrice de contrôle.

$$s = H \times m_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0) \quad (4)$$

Ainsi, nous savons que la matrice de contrôle  $H$  est correcte.

### 1.3 Vérification que $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ est bien un de code

Afin de vérifier si le message  $c_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$  est bien un mot code, nous allons le multiplier avec la matrice de contrôle  $H$  et observer le résultat :

$$s_2 = H \times c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = (0, 0, 0) \quad (5)$$

Le résultat  $s_2$  étant bien égal à  $(0, 0, 0)$ , le mot encodé  $c_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$  est bien un mot code. ce dernier, décodé est le mot  $(1, 1, 1, 1)$ .

### 1.4 Réception et correction du message $c' = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$

Le mot de code reçu,  $c' = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$ , n'est pas un mot de code. pour le vérifier, nous allons multiplier  $c'$  à la matrice  $H$  de contrôle :

$$s_3 = H \times c' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1) = (0, 1, 1) \quad (6)$$

Comme nous pouvons le constater, le résultat  $s_3 = (0, 1, 1)$  est différent de  $(0, 0, 0)$ . Nous pouvons alors noter que  $c'$  n'est pas un mot de code.

Cependant, nous savons qu'il ne comporte qu'une seule erreur. De plus, nous pouvons déduire grâce au résultat de  $s_3$  connaître la position de ce bit erroné. En effet, en lisant le résultat  $s_3$  en binaire (ici,  $011 = 3$  en décimal), nous savons que l'erreur a été faite sur le troisième bit.

Nous obtenons alors le mot de code suivant :

$$c'_2 = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1) \quad (7)$$

Afin de vérifier si cette correction est la bonne, nous allons vérifier que ce dernier est correct :

$$s_4 = H \times c'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0) \quad (8)$$

Le résultat  $s_4$  étant bien égal à  $(0, 0, 0)$ , nous pouvons conclure que  $c'_2$  est bien un mot de code. Il peut être décodé en mot  $m_{c'} = (1, 1, 0, 1)$ .

## 2 Exercice 2 : Le code

Dans cette partie nous avons réaliser les différentes fonctions qui étaient demandées afin de faire une simulation sur un nombre aléatoire de mots (eux même générés aléatoirement) en fonction d'une probabilité que l'on passe en paramètre. Cette simulation va de 0.001 à 0.500 pour la valeur de la probabilité (noté  $p$ ).

Le principe est simple :

- On choisit une valeur de  $p$
- On génère un mot aléatoirement
- On l'encode
- On génère du bruit sur ce mot
- On le décode
- On vérifie que le décodé est égale au mot d'origine
- On recommence cette opération  $N$  fois pour la probabilité  $p$  donnée

Pour chacune des probabilités données, on effectue un grand nombre de fois l'algorithme précédent et on affiche dans la console les résultats suivants :

- La valeur de  $p$
- Le nombre de fois où le mot décodé est égale au mot d'origine
- Le nombre de fois où le mot décodé n'est pas égale au mot d'origine

FIGURE 1: Sorties du programme

5