## 第一题

假设在一次军事演习中，一架战斗机的速度可以用一个随机微分方程来描述。假设战斗机的速度服从以下的随机微分方程：

其中，表示战斗机在时间t的速度，是战斗机的推力，是一个随机项，表示战斗机受到的随机扰动，是一个布朗运动（Brownian motion）。

我们可以根据这个随机微分方程来提出两个数学问题。

**(1)**. 在时刻，战斗机的速度为。求战斗机在时间的速度的概率密度函数。 **(2)**. 假设战斗机的最大速度为，求使战斗机速度不超过最大速度的概率。

### 答案

**(1).** 根据给定的随机微分方程，我们可以使用随机积分的方法来求解。首先，对方程两边同时进行积分，得到：

由于，，我们可以得到：

这里，表示随机积分，它是一个随机过程，表示随机扰动对战斗机速度的影响。

接下来，我们需要对随机积分进行求解。由于b是一个随机项，我们需要考虑到它是随时间变化的。根据随机积分的性质，我们可以得到：

其中，表示布朗桥（Brownian bridge），它是一个服从正态分布的随机过程。

将以上结果代入方程中，我们得到：

这就是战斗机在不同时间点的速度的表达式。我们可以通过计算随机过程的概率密度函数来得到战斗机在时间t的速度的概率密度函数。

**(2).** 假设战斗机的最大速度为，求使战斗机速度不超过最大速度的概率。

解答二：要使战斗机速度不超过最大速度，我们可以设定一个条件，即。根据随机微分方程的解，我们可以得到：

我们可以通过计算这个不等式的概率来得到战斗机速度不超过最大速度的概率。

## 第二题

某军事单位的弹道导弹在空中飞行，其高度满足以下精确随机微分方程：

其中，表示时间，是布朗运动，是常数。 **(1).** 求解该精确随机微分方程，得到的表达式。 **(2).** 假设初始高度为，计算时的高度。

### 答案

**(1).** 首先将微分方程分离变量：

然后对两边同时积分，得到：

整理得：

再次积分，得到：

**(2).** 将初始条件代入上式，得到：

计算时的高度：

注意，由于是布朗运动，它的具体值是随机的。因此，我们无法给出时的确切高度值，只能得到一个随机变量的表达式，描述了导弹在时的高度分布情况。