Blatter-Pattyn's Higher Order Model

Фареник А.

8 марта 2023 г.

Постановка задачи. Основные уравнения

Для описания динамики ледника используем несколько уравнений

- закон сохранения массы

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

- закон сохранения момента

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla \cdot \sigma + \rho \vec{g}$$

- закон сохранения энергии

$$\rho \frac{d\left(c_p \Theta\right)}{dt} = \nabla \left(k_i \nabla \Theta\right) + \Phi$$

Дополнительные уравнения

- уравнение поверхности

$$\nabla \cdot H \overline{v_H} = \dot{M}_s - \dot{M}_b - \frac{\partial H}{\partial t}$$

Уравнение сохранения момента

Напишем уравнение сохранения момента в проекциях на основные оси

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g \end{cases}$$

Третье уравнение системы редуцируем до вида

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \approx \rho g$$

Далее используем девиаторы для тензора напряжений

$$\sigma_{ij}^{'} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \sum_{k} \sigma_{kk}$$

После этого первое и второе уравнение системы примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(2\sigma_{xx}^{'} + \sigma_{yy}^{'}\right) + \frac{\partial \sigma_{xy}^{'}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{'}}{\partial z} = \rho g \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(2\sigma_{yy}^{'} + \sigma_{xx}^{'}\right) + \frac{\partial \sigma_{yx}^{'}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{'}}{\partial z} = \rho g \frac{\partial s}{\partial y} \end{cases}$$

После используем закон Глена, чтобы перейти от девиаторов тензора напряжений к тензору скоростей деформации.

$$\sigma_{ij}^{'} = 2\eta \dot{\varepsilon_{ij}}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\, A \left(\Theta^{*}\right)^{-\frac{1}{n}} \left(\dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}_0\right)^{\frac{1-n}{n}}$$

При этом тензор скоростей деформации определяется

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Подставив указанные соотношения в систему уравнения для девиаторов тензора напряжений получим систему уравнений для проекций скоростей u и v.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(4\eta \frac{\partial u}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(4\eta \frac{\partial v}{\partial y} + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g \frac{\partial s}{\partial y} \end{cases}$$

Мы получили систему двух уравнений, причем они симметричны друг другу относительно замен $x \leftrightarrow y$ и $u \leftrightarrow v$.

Раскроем скобки в уравнениях системы

$$\begin{cases} 4\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g \frac{\partial s}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ 4\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g \frac{\partial s}{\partial y} - 2\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{cases}$$

В итоге мы получили систему уравнений для нахождения компонентов u, v поля скоростей в виде, готовом для дискретизации.

После нахождения компонентов u, v компоненту w можно найти

$$w\left(z\right) = w\left(b\right) - \int_{b}^{z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dz^{'}$$

Перед тем, как приступить выводу дискретной вычислительной схемы переведем полученные уравнения в новую систему координат путем простой замены производных в новых координатах. После подстановки и упрощения выражений получим следующий вид уравнений на компоненты скорости.

Для u:

$$
\begin{aligned}
4\frac{\partial}{\partial x'}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x'}\right) + 4a_x\frac{\partial}{\partial x'}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial y'}\right) + a_y\frac{\partial}{\partial y'}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + 4a_x\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x'}\right) + a_y\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial y'}\right) + \\
+ \left(4a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + (4b_x + b_y)\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \rho g\frac{\partial s}{\partial x'} - \\
- 2\frac{\partial}{\partial x'}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial y'}\right) - 2a_y\frac{\partial}{\partial x'}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial}{\partial y'}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial x'}\right) - a_x\frac{\partial}{\partial y'}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) - \\
- a_y\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial x'}\right) - 2a_x\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial y'}\right) - 3a_x a_y\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) - 3c_{xy}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)
\end{aligned}
$$

Для v:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial x'}\right) + a_x\frac{\partial}{\partial x'}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) + 4\frac{\partial}{\partial y'}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial y'}\right) + 4a_y\frac{\partial}{\partial y'}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) + a_x\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial x'}\right) + 4a_y\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial y'}\right) + \\
+ \left(a_x^2 + 4a_y^2 + a_z^2\right)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) + (b_x + 4b_y)\left(\eta\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) = \rho g\frac{\partial s}{\partial y'} - \\
- \frac{\partial}{\partial x'}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial y'}\right) - a_y\frac{\partial}{\partial x'}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - 2\frac{\partial}{\partial y'}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x'}\right) - 2a_x\frac{\partial}{\partial y'}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \\
- 2a_y\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x'}\right) - a_x\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial y'}\right) - 3a_x a_y\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - 3c_{xy}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)
\end{aligned}
$$

Указанный вид уравнения пригоден к применению схем дискретизации.

Уравнение поверхности

Найти положение поверхности $s(x, y, t)$ можно найти из следующего уравнения.

$$\nabla \cdot H\overline{v_H} = \dot{M}_s - \dot{M}_b - \frac{\partial H}{\partial t}$$

Введем матрицу диффузивности

$$D = \begin{pmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{u}H\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{v}H\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

Используя диффузивность, преобразуем левую часть уравнения

$$\nabla \cdot H\overline{v}_H = \frac{\partial}{\partial x}\left(H\overline{u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(H\overline{v}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial s}{\partial y}\right)$$

В итоге получили следующий вид, используя еще $H = s - b$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial s}{\partial y}\right) = \dot{M}_s - \dot{M}_b - \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial s}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial s}{\partial y}\right) + \frac{\partial b}{\partial t} + \dot{M}_s - \dot{M}_b$$

В таком виде уравнение уже можно приводить к дискретному виду с помощью разделенных разностей. Значения компонентов диффузивности рассчитываются в узлах смещенной сетки.