

Вычислительные схемы для Higher Order модели

Фареник А.

13 апреля 2023 г.

Дискретная сетка

В пространстве $\{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3$ строится сетка

Перед введением схемы по z производится координатное отображение.

$$\xi|_{x,y} = \frac{z|_{x,y}}{s(x,y) - b(x,y)}$$

- равномерная сетка по x : $\{x_i\} : x_i = i \cdot \Delta x$
- равномерная сетка по y : $\{y_j\} : y_j = j \cdot \Delta y$
- неравномерная сетка по $\xi : \{\xi_k\}$
- некоторая сетка по времени t : $\{t_l\}$

Указанные индексные обозначения закрепим за координатами в пространстве и времени, т.е. i будет нумеровать узлы по координате x , j – по координате y , k – по координате z и l – по времени t .

Также для получения схем, включающих z нужны следующие соотношения.

$$\begin{aligned}\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}} &= \xi_k - \xi_{k-1} \\ \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}} &= \xi_{k+1} - \xi_k \\ \Delta \xi_k &= \frac{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}} + \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\xi_{k+1} - \xi_{k-1}}{2} \\ f_{k-\frac{1}{2}} &= \frac{f_k + f_{k-1}}{2} \\ f_{k+\frac{1}{2}} &= \frac{f_{k+1} + f_k}{2} \\ f_k &= \frac{\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}}{2\Delta \xi_k} f_{k+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}}{2\Delta \xi_k} f_{k-\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_k &= \frac{\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi_k \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}} f_{k+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta \xi_k \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}} f_{k-\frac{1}{2}} + 2 \frac{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}} \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}} f_k\end{aligned}$$

Преобразование координат

Для моделирования ледников обычно производят преобразование по вертикальной координате, скалирую область ледника на единичную высоту. Для этого используется координатное отображение

$$(x, y, z, t) \mapsto (x', y', \xi, t)$$

Примером такого отображения может быть

$$\xi = \frac{z - b}{s - b} = \frac{z - b}{H}$$

Тогда нижняя граница ледника будет всегда находится на плоскости $\xi = 0$, а верхняя граница на плоскости $\xi = 1$.

Рассмотрим, как происходит преобразование некоторой достаточно гладкой функции $f = f(x, y, z, t)$ при таком координатном отображении.

С небольшой погрешностью можно утверждать, что

$$\begin{cases} x \approx x' \\ y \approx y' \\ t \approx t' \end{cases}$$

Перед тем, как выводить вид функций в новых координатах приведем вспомогательные производные.

$$\begin{aligned} a_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z - b}{H} \right) = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} (z - b) + (z - b) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \right) = -\frac{1}{H} \frac{\partial b}{\partial x} + (z - b) \cdot \frac{-1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} = \\ &= \frac{-1}{H} \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{z - b}{H} \frac{\partial H}{\partial x} \right) = -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \xi \frac{\partial H}{\partial x} \right) \approx -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial b}{\partial x'} + \xi \frac{\partial H}{\partial x'} \right) \end{aligned}$$

Аналогично

$$a_y = \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial b}{\partial y} + \xi \frac{\partial H}{\partial y} \right) \approx -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial b}{\partial y'} + \xi \frac{\partial H}{\partial y'} \right)$$

$$a_z = \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z - b}{H} \right) = \frac{1}{H}$$

$$\begin{aligned} b_x = \frac{\partial a_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{1}{H} \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \xi \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{H} \right) \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \xi \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \left(-\frac{1}{H} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \xi \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \xi \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \xi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) = \\ &= \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \xi \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + a_x \frac{\partial b}{\partial x} + \xi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} a_x - \frac{1}{H} a_x \frac{1}{H} - \frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + 2a_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) \approx \\ &\approx -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x'^2} + \xi \frac{\partial^2 H}{\partial x'^2} + 2a_x \frac{\partial H}{\partial x'} \right) \end{aligned}$$

$$b_y = \frac{\partial a_y}{\partial y} = -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \xi \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + 2a_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) \approx -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial y'^2} + \xi \frac{\partial^2 H}{\partial y'^2} + 2a_y \frac{\partial H}{\partial y'} \right)$$

$$b_z = \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{H} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
c_{xy} &= \frac{\partial a_y}{\partial x} = c_{yx} = \frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{1}{H} \left(\frac{\partial b}{\partial y} + \xi \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] = \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \right) \left(\frac{\partial b}{\partial y} + \xi \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial b}{\partial y} + \xi \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \\
&= \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{\partial b}{\partial y} + \xi \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} + \xi \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right) = \\
&= -\frac{1}{H} a_y \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} + a_x \frac{\partial H}{\partial y} + \xi \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} + a_x \frac{\partial H}{\partial y} + a_y \frac{\partial H}{\partial x} + \xi \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right) \approx \\
&\approx -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x' \partial y'} + a_x \frac{\partial H}{\partial y'} + a_y \frac{\partial H}{\partial x'} + \xi \frac{\partial^2 H}{\partial x' \partial y'} \right) \\
c_{xz} &= \frac{\partial a_z}{\partial x} = c_{zx} = \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \right) = -\frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x} \approx -\frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x'} \\
c_{yz} &= \frac{\partial a_z}{\partial y} = c_{zy} = \frac{\partial a_y}{\partial z} = -\frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} \approx -\frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y'}
\end{aligned}$$

Перейдем к первым производным функции f

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} \approx \frac{\partial f}{\partial x'} + a_x \frac{\partial f}{\partial \xi} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &\approx \frac{\partial f}{\partial y'} + a_y \frac{\partial f}{\partial \xi} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} \approx a_z \frac{\partial f}{\partial \xi}
\end{aligned}$$

Далее нужно рассмотреть вторые производные

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} + a_x \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} + a_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} + a_x \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \approx \\
&\approx \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + 2a_x \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial \xi} + a_x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + b_x \frac{\partial f}{\partial \xi} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &\approx \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + 2a_y \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial \xi} + a_y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + b_y \frac{\partial f}{\partial \xi} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(a_z \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = a_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \xi} \approx a_z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}
\end{aligned}$$

Включая смешанные частные производные

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} + a_y \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} + a_y \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} = \\
&= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial x'}{\partial x} + a_x \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial \xi} + c_{xy} \frac{\partial f}{\partial \xi} + a_y \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial x'}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \approx \\
&\approx \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial y'} + a_x \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial \xi} + a_y \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial \xi} + a_x a_y \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + c_{xy} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_z \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial a_z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} + a_z \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} = \\
&= c_{xz} \frac{\partial f}{\partial \xi} + a_z \left(\frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \approx a_z \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial \xi} + a_x a_z \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + c_{xz} \frac{\partial f}{\partial \xi}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \approx a_z \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial \xi} + a_y a_z \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + c_{yz} \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

Схемы основных операторов

В данном разделе приведены дискретные схемы основных дифференциальных операторов.

2D операторы

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2} \left\{ f_{i-1,j} \left[g_{i-\frac{1}{2},j} \right] + f_{i,j} \left[-g_{i-\frac{1}{2},j} - g_{i+\frac{1}{2},j} \right] + f_{i+1,j} \left[g_{i+\frac{1}{2},j} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j} = & \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left\{ f_{i-1,j-1} \left[g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + f_{i-1,j} \left[-g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + \right. \\ & + f_{i-1,j+1} \left[-g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + f_{i,j-1} \left[g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + \\ & + f_{i,j} \left[-g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + \\ & + f_{i,j+1} \left[-g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + f_{i+1,j-1} \left[-g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + \\ & \left. + f_{i+1,j} \left[g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + f_{i+1,j+1} \left[g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} = & \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left\{ f_{i-1,j-1} \left[g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + f_{i-1,j} \left[g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + \right. \\ & + f_{i-1,j+1} \left[-g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + f_{i,j-1} \left[-g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + \\ & + f_{i,j} \left[-g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + \\ & + f_{i,j+1} \left[g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + f_{i+1,j-1} \left[-g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + \\ & \left. + f_{i+1,j} \left[-g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + f_{i+1,j+1} \left[g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{1}{\Delta y^2} \left\{ f_{i,j-1} \left[g_{i,j-\frac{1}{2}} \right] + f_{i,j} \left[-g_{i,j-\frac{1}{2}} - g_{i,j+\frac{1}{2}} \right] + f_{i,j+1} \left[g_{i,j+\frac{1}{2}} \right] \right\}$$

3D операторы

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta x^2} \left\{ f_{i-1,j,k} \left[g_{i-\frac{1}{2},j,k} \right] + f_{i,j,k} \left[-g_{i-\frac{1}{2},j,k} - g_{i+\frac{1}{2},j,k} \right] + f_{i+1,j,k} \left[g_{i+\frac{1}{2},j,k} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j,k} = & \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left\{ f_{i-1,j-1,k} \left[g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right] + f_{i-1,j,k} \left[-g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right] + \right. \\ & + f_{i-1,j+1,k} \left[-g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right] + f_{i,j-1,k} \left[g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} - g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right] + \\ & + f_{i,j,k} \left\{ -g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} - g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right\} + \\ & + f_{i,j+1,k} \left[-g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right] + f_{i+1,j-1,k} \left[-g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right] + \\ & \left. + f_{i+1,j,k} \left[g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} - g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right] + f_{i+1,j+1,k} \left[g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_{i,j,k} &= \frac{1}{4\Delta x \Delta \xi_k \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}} \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}} \times \\ &\times \left\{ f_{i-1,j,k-1} \left[\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \right] + f_{i-1,j,k} \left[-\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} + \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] + \right. \\ &+ f_{i-1,j,k+1} \left[-\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] + f_{i,j,k-1} \left[\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \right] + \\ &+ f_{i,j,k} \left[-\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} + \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] + \\ &+ f_{i,j,k+1} \left[-\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] + f_{i+1,j,k-1} \left[-\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \right] + \\ &\left. + f_{i+1,j,k} \left[\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] + f_{i+1,j,k+1} \left[\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j,k} &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left\{ f_{i-1,j-1,k} \left[g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right] + f_{i-1,j,k} \left[g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} - g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right] + \right. \\ &\quad + f_{i-1,j+1,k} \left[-g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right] + f_{i,j-1,k} \left[-g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right] + \\ &\quad + f_{i,j,k} \left\{ -g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} - g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right\} + \\ &\quad + f_{i,j+1,k} \left[g_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right] + f_{i+1,j-1,k} \left[-g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right] + \\ &\quad \left. + f_{i+1,j,k} \left[-g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right] + f_{i+1,j+1,k} \left[g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta y^2} \left\{ f_{i,j-1,k} \left[g_{i,j-\frac{1}{2},k} \right] + f_{i,j,k} \left[-g_{i,j-\frac{1}{2},k} - g_{i,j+\frac{1}{2},k} \right] + f_{i,j+1,k} \left[g_{i,j+\frac{1}{2},k} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_{i,j,k} &= \frac{1}{4\Delta y \Delta \xi_k \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}} \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}} \times \\ &\times \left\{ f_{i,j-1,k-1} \left[\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right] + f_{i,j-1,k} \left[-\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] + \right. \\ &+ f_{i,j-1,k+1} \left[-\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] + f_{i,j,k-1} \left[\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right] + \\ &+ f_{i,j,k} \left[-\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] + \\ &+ f_{i,j,k+1} \left[-\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] + f_{i,j+1,k-1} \left[-\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right] + \\ &\left. + f_{i,j+1,k} \left[\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] + f_{i,j+1,k+1} \left[\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j,k} = & \frac{1}{4\Delta x \Delta \xi_k \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}} \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}} \times \left\{ f_{i-1,j,k-1} \left[\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\ & + f_{i-1,j,k} \left[2\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}} \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}} \left(g_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} - g_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right) - \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} + \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] + \\ & + f_{i-1,j,k+1} \left[-\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] + f_{i,j,k-1} \left[-\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} + \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \right] + \\ & + f_{i,j,k} \left[-2\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}} \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}} \left(g_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} - g_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - g_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} + g_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} + \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] + \\ & + f_{i,j,k+1} \left[\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] + f_{i+1,j,k-1} \left[-\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \right] + \\ & + f_{i+1,j,k} \left[-2\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}} \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}} \left(g_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} - g_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right) + \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] + \\ & \left. + f_{i+1,j,k+1} \left[\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j,k} &= \frac{1}{4\Delta y \Delta \xi_k \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}} \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}} \times \left\{ f_{i,j-1,k-1} \left[\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right] + \right. \\
&+ f_{i,j-1,k} \left[2\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}} \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}} \left(g_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - g_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) - \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] + \\
&+ f_{i,j-1,k+1} \left[-\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] + f_{i,j,k-1} \left[-\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right] + \\
&+ f_{i,j,k} \left[-2\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}} \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}} \left(g_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - g_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - g_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + g_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) + \right. \\
&+ \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \left. \right] + \\
&+ f_{i,j,k+1} \left[\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] + f_{i,j+1,k-1} \left[-\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right] + \\
&+ f_{i,j+1,k} \left[-2\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}} \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}} \left(g_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - g_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) + \Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] + \\
&+ f_{i,j+1,k+1} \left[\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}^2 g_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi} \left(g \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_{i,j,k} &= \frac{1}{2\Delta \xi_k} \left\{ f_{i,j,k-1} \left[2\frac{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}} g_{i,j,k-\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}} \right) g_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right] + \right. \\
&+ f_{i,j,k} \left[-\left(1 + 2\frac{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}} \right) g_{i,j,k-\frac{1}{2}} - \left(1 + 2\frac{\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}} \right) g_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right] + \\
&+ f_{i,j,k+1} \left[\left(1 - \frac{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}} \right) g_{i,j,k-\frac{1}{2}} + 2\frac{\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}} g_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(g \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_{i,j,k} &= \frac{1}{2\Delta \xi_k} \left\{ f_{i,j,k-1} \left[-\frac{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}}{\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}} g_{i,j,k} \right] + f_{i,j,k} \left[2\Delta \xi_k \frac{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}} - \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}} \Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}} g_{i,j,k} \right] + \right. \\
&+ f_{i,j,k+1} \left[\frac{\Delta \xi_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi_{k+\frac{1}{2}}} g_{i,j,k} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

Для удобства вывода вычислительных схем и повышения читаемости переобозначим коэффициенты при узловых значениях функции f . Для этого перечислим символьные переобозначения для коэффициентов при узлах искомой функции в указанных выше схемах.

2D:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{i-1,j} [\alpha_{xx}(-1, 0)] + f_{i,j} [\alpha_{xx}(0, 0)] + f_{i+1,j} [\alpha_{xx}(1, 0)]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= f_{i-1,j-1} [\alpha_{xy}(-1, -1)] + f_{i-1,j} [\alpha_{xy}(-1, 0)] + f_{i-1,j+1} [\alpha_{xy}(-1, 1)] + \\
&+ f_{i,j-1} [\alpha_{xy}(0, -1)] + f_{i,j} [\alpha_{xy}(0, 0)] + f_{i,j+1} [\alpha_{xy}(0, 1)] + \\
&+ f_{i+1,j-1} [\alpha_{xy}(1, -1)] + f_{i+1,j} [\alpha_{xy}(1, 0)] + f_{i+1,j+1} [\alpha_{xy}(1, 1)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= f_{i-1,j-1} [\alpha_{yx}(-1, -1)] + f_{i-1,j} [\alpha_{yx}(-1, 0)] + f_{i-1,j+1} [\alpha_{yx}(-1, 1)] + \\
&+ f_{i,j-1} [\alpha_{yx}(0, -1)] + f_{i,j} [\alpha_{yx}(0, 0)] + f_{i,j+1} [\alpha_{yx}(0, 1)] + \\
&+ f_{i+1,j-1} [\alpha_{yx}(1, -1)] + f_{i+1,j} [\alpha_{yx}(1, 0)] + f_{i+1,j+1} [\alpha_{yx}(1, 1)]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{i,j-1} [\alpha_{yy} (0, -1)] + f_{i,j} [\alpha_{yy} (0, 0)] + f_{i,j+1} [\alpha_{yy} (0, 1)]$$

Для введенных коэффициентов можно заметить некоторые свойства

$$\begin{cases} \alpha_{x,y} (p, q) = -\alpha_{y,x} (p, q), & |p| \neq |q| \\ \alpha_{x,y} (p, q) = \alpha_{y,x} (p, q), & |p| = |q| \end{cases}$$

Таким образом можно кратко записать схему для суммы.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] &= f_{i-1,j-1} [2\alpha_{x,y} (-1, -1)] + f_{i-1,j+1} [2\alpha_{x,y} (-1, 1)] + \\ &+ f_{i,f} [2\alpha_{x,y} (0, 0)] + f_{i+1,j-1} [2\alpha_{x,y} (1, -1)] + f_{i+1,j+1} [2\alpha_{x,y} (1, 1)] \end{aligned}$$

3D:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{i-1,j,k} [\beta_{xx} (-1, 0, 0)] + f_{i,j,k} [\beta_{xx} (0, 0, 0)] + f_{i+1,j,k} [\beta_{xx} (1, 0, 0)]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= f_{i-1,j-1,k} [\beta_{xy} (-1, -1, 0)] + f_{i-1,j,k} [\beta_{xy} (-1, 0, 0)] + f_{i-1,j+1,k} [\beta_{xy} (-1, 1, 0)] + \\ &+ f_{i,j-1,k} [\beta_{xy} (0, -1, 0)] + f_{i,j,k} [\beta_{xy} (0, 0, 0)] + f_{i,j+1,k} [\beta_{xy} (0, 1, 0)] + \\ &+ f_{i+1,j-1,k} [\beta_{xy} (1, -1, 0)] + f_{i+1,j,k} [\beta_{xy} (1, 0, 0)] + f_{i+1,j+1,k} [\beta_{xy} (1, 1, 0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) &= f_{i-1,j,k-1} [\beta_{x\xi} (-1, 0, -1)] + f_{i-1,j,k} [\beta_{x\xi} (-1, 0, 0)] + f_{i-1,j,k+1} [\beta_{x\xi} (-1, 0, 1)] + \\ &+ f_{i,j,k-1} [\beta_{x\xi} (0, 0, -1)] + f_{i,j,k} [\beta_{x\xi} (0, 0, 0)] + f_{i,j,k+1} [\beta_{x\xi} (0, 0, 1)] + \\ &+ f_{i+1,j,k-1} [\beta_{x\xi} (1, 0, -1)] + f_{i+1,j,k} [\beta_{x\xi} (1, 0, 0)] + f_{i+1,j,k+1} [\beta_{x\xi} (1, 0, 1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= f_{i-1,j-1,k} [\beta_{yx} (-1, -1, 0)] + f_{i-1,j,k} [\beta_{yx} (-1, 0, 0)] + f_{i-1,j+1,k} [\beta_{yx} (-1, 1, 0)] + \\ &+ f_{i,j-1,k} [\beta_{yx} (0, -1, 0)] + f_{i,j,k} [\beta_{yx} (0, 0, 0)] + f_{i,j+1,k} [\beta_{yx} (0, 1, 0)] + \\ &+ f_{i+1,j-1,k} [\beta_{yx} (1, -1, 0)] + f_{i+1,j,k} [\beta_{yx} (1, 0, 0)] + f_{i+1,j+1,k} [\beta_{yx} (1, 1, 0)] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{i,j-1,k} [\beta_{yy} (0, -1, 0)] + f_{i,j,k} [\beta_{yy} (0, 0, 0)] + f_{i,j+1,k} [\beta_{yy} (0, 1, 0)]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) &= f_{i,j-1,k-1} [\beta_{y\xi} (0, -1, -1)] + f_{i,j-1,k} [\beta_{y\xi} (0, -1, 0)] + f_{i,j-1,k+1} [\beta_{y\xi} (0, -1, 1)] + \\ &+ f_{i,j,k-1} [\beta_{y\xi} (0, 0, -1)] + f_{i,j,k} [\beta_{y\xi} (0, 0, 0)] + f_{i,j,k+1} [\beta_{y\xi} (0, 0, 1)] + \\ &+ f_{i,j+1,k-1} [\beta_{y\xi} (0, 1, -1)] + f_{i,j+1,k} [\beta_{y\xi} (0, 1, 0)] + f_{i,j+1,k+1} [\beta_{y\xi} (0, 1, 1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= f_{i-1,j,k-1} [\beta_{x\xi} (-1, 0, -1)] + f_{i-1,j,k} [\gamma_{\xi x} (-1, 0, 0) + \beta_{x\xi} (-1, 0, 0)] + f_{i-1,j,k+1} [\beta_{x\xi} (-1, 0, 1)] + \\ &+ f_{i,j,k-1} [-\beta_{x\xi} (0, 0, -1)] + f_{i,j,k} [\gamma_{\xi x} (0, 0, 0) - \beta_{x\xi} (0, 0, 0)] + f_{i,j,k+1} [-\beta_{x\xi} (0, 0, 1)] + \\ &+ f_{i+1,j,k-1} [\beta_{x\xi} (1, 0, -1)] + f_{i+1,j,k} [\gamma_{\xi x} (1, 0, 0) + \beta_{x\xi} (1, 0, 0)] + f_{i+1,j,k+1} [\beta_{x\xi} (1, 0, 1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= f_{i,j-1,k-1} [\beta_{y\xi} (0, -1, -1)] + f_{i,j-1,k} [\gamma_{\xi y} (0, -1, 0) + \beta_{y\xi} (0, -1, 0)] + f_{i,j-1,k+1} [\beta_{y\xi} (0, -1, 1)] + \\ &+ f_{i,j,k-1} [-\beta_{y\xi} (0, 0, -1)] + f_{i,j,k} [\gamma_{\xi y} (0, 0, 0) - \beta_{y\xi} (0, 0, 0)] + f_{i,j,k+1} [-\beta_{y\xi} (0, 0, 1)] + \\ &+ f_{i,j+1,k-1} [\beta_{y\xi} (0, 1, -1)] + f_{i,j+1,k} [\gamma_{\xi y} (0, 1, 0) + \beta_{y\xi} (0, 1, 0)] + f_{i,j+1,k+1} [\beta_{y\xi} (0, 1, 1)]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(g \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = f_{i,j,k-1} [\beta_{\xi\xi} (0, 0, -1)] + f_{i,j,k} [\beta_{\xi\xi} (0, 0, 0)] + f_{i,j,k+1} [\beta_{\xi\xi} (0, 0, 1)]$$

Аналогично предыдущим выводам, приведем схемы для сумм операторов.

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] &= f_{i-1,j-1,k} [2\beta_{xy} (-1, -1, 0)] + f_{i-1,j+1,k} [2\beta_{xy} (-1, 1, 0)] + \\ &+ f_{i,f,k} [2\beta_{xy} (0, 0, 0)] + f_{i+1,j-1,k} [2\beta_{xy} (1, -1, 0)] + f_{i+1,j+1,k} [2\beta_{xy} (1, 1, 0)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] &= f_{i-1,j,k-1} [2\beta_{x\xi} (-1, 0, -1)] + f_{i-1,j,k} [\gamma_{\xi x} (-1, 0, 0) + 2\beta_{x\xi} (-1, 0, 0)] + \\ &+ f_{i-1,j,k+1} [2\beta_{x\xi} (-1, 0, 1)] + f_{i,f,k} [\gamma_{\xi x} (0, 0, 0)] + f_{i+1,j,k-1} [2\beta_{x\xi} (1, 0, -1)] + \\ &+ f_{i+1,j,k} [\gamma_{\xi x} (1, 0, 0) + 2\beta_{x\xi} (1, 0, 0)] + f_{i+1,j,k+1} [2\beta_{x\xi} (1, 0, 1)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] &= f_{i,j-1,k-1} [2\beta_{y\xi} (0, -1, -1)] + f_{i,j-1,k} [\gamma_{\xi y} (0, -1, 0) + 2\beta_{y\xi} (0, -1, 0)] + \\ &+ f_{i,j-1,k+1} [2\beta_{y\xi} (0, -1, 1)] + f_{i,f,k} [\gamma_{\xi y} (0, 0, 0)] + f_{i,j+1,k-1} [2\beta_{y\xi} (0, 1, -1)] + \\ &+ f_{i,j+1,k} [\gamma_{\xi y} (0, 1, 0) + 2\beta_{y\xi} (0, 1, 0)] + f_{i,j+1,k+1} [2\beta_{y\xi} (0, 1, 1)]\end{aligned}$$

Дискретизация уравнений компонентов скорости

Проведем дискретизацию уравнений для компонентов u и v скорости среды. Вывод проведем только с уравнением для компоненты u , так как уравнения идентичны с учетом замен $u \leftrightarrow v$ и $x \leftrightarrow y$, и получить второе можно заменой указанных переменных и индексов дискретизации.

Исходное уравнение

$$\begin{aligned} 4 \frac{\partial}{\partial x'} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x'} \right) + 4a_x \frac{\partial}{\partial x'} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y'} \right) + a_y \frac{\partial}{\partial y'} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + 4a_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x'} \right) + a_y \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y'} \right) + \\ + (4a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + (4b_x + b_y) \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \rho g \frac{\partial s}{\partial x'} - \\ - 2 \frac{\partial}{\partial x'} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y'} \right) - 2a_y \frac{\partial}{\partial x'} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial y'} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x'} \right) - a_x \frac{\partial}{\partial y'} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) - \\ - a_y \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x'} \right) - 2a_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y'} \right) - 3a_x a_y \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) - 3c_{xy} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \end{aligned}$$

Дискретизацию уравнения можно получить, просто подставив указанные выше конечно-разностные аппроксимации операторов. В таком случае получим систему линейных уравнений. Однако в совокупности уравнения для u и v компонент образуют нелинейную задачу, которую решать предлагается (J.J. Furst. Improved convergence and stability properties in a three-dimensional higher-order ice sheet model, 2011) итерациями Пикара. Опишем кратко. Уравнения для u и v образуют две системы

$$\begin{cases} A_u(v^{r-1})u^r = b_u(v^{r-1}) \\ A_v(u^{r-1})v^r = b_v(u^{r-1}) \end{cases}$$

Пусть есть некоторое начальное приближение (u^0, v^0) . Используя это приближение вычисляется приближение вязкости

$$\eta = \frac{1}{2} A^{\frac{-1}{n}}(\Theta^*) \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \varepsilon_0^2 \right\}^{\frac{1-n}{2n}}$$

или, после преобразования координат:

$$\begin{aligned} \eta = \frac{1}{2} A^{\frac{-1}{n}}(\Theta^*) \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x'} + a_x \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y'} + a_y \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x'} + a_x \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y'} + a_y \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y'} + a_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial x'} + a_x \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(a_z \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(a_z \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + \varepsilon_0^2 \right\}^{\frac{1-n}{2n}} \end{aligned}$$

где

$$A(\Theta^*) = m \left(\frac{1}{B_0} \right)^n \exp \left(\frac{3C}{(\Theta_r - \Theta^*)^K} - \frac{Q}{R\Theta^*} \right)$$

Более подробное описание можно найти в документации CISM 2.0 либо в статье (F. Pattyn A new three-dimensional higher-order thermomechanical ice sheet model: Basic sensivity, ice stream development, and ice flow across subglacial lakes, 2003)

После производим решение первой системы для u^1 , используя (u^0, v^0) и решение v^1 . Потом повторяем с использованием (u^1, v^1) и повторяем до сходимости.

Другой подход заключается в одновременном решении совокупности систем для u и v . Тогда размер системы увеличится в 2 раза, и вычислительная сложность примено в 4 раза. J.J. Furst утверждает, что вполне достаточно использовать раздельное решение, а совместное решение ничего кроме увеличения вычислительных затрат не влечет.

При решении необходимо установить граничные условия. На границах домена по осям x и y принято ставить условие нулевой скорости. На поверхности применяется так называемое граничное условие свободной поверхности (stress-free surface boundary condition)

Напишем его сразу в преобразованных координатах

$$4 \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial s}{\partial y'} \frac{\partial u}{\partial y'} + \left(4a_x \frac{\partial s}{\partial x'} + a_y \frac{\partial s}{\partial y'} + a_z \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} = - \frac{\partial s}{\partial y'} \frac{\partial v}{\partial x'} - 2 \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y'} - \left(2a_y \frac{\partial s}{\partial x'} + a_x \frac{\partial s}{\partial y'} \right) \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

Для вычисления всех производных желательно использовать аппроксимации второго порядка. Во внутренних узлах – центральные разности. На границах использовать односторонние разности (upstream finite-difference approximations), вывод которых несложен и проведен в (F. Pattyn Transient glacier response with a higher-order numerical ice-flow model, 2002). Любые уточнения можно найти также в документации к проекту CISM 2.0.

Компоненту w после итераций получаем из условия несжимаемости

$$w(z) - w(b) = - \int_b^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} dz \right)$$

Простым численным интегрированием с использованием квадратурных формул.

Дискретизация уравнения поверхности

При дискретизации уравнения поверхности можно использовать полученные выше дискретизации операторов. Например, дискретизацию для оператора $\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right)$.

Запишем исходное уравнение и сразу перейдем к дискретной форме

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial s}{\partial y} \right) + \frac{\partial b}{\partial t} + \dot{M}_s - \dot{M}_b$$

$$\begin{aligned} \frac{s_{ijl} - s_{ijl-1}}{\Delta t_l} = & -\frac{1}{\Delta x^2} \left\{ s_{i-1jl} D_{x_{i-\frac{1}{2}jl}} + s_{ijl} \left[-D_{x_{i-\frac{1}{2}jl}} - D_{x_{i+\frac{1}{2}jl}} \right] + s_{i+1jl} D_{x_{i+\frac{1}{2}jl}} \right\} - \\ & -\frac{1}{\Delta y^2} \left\{ s_{ij-1l} D_{y_{ij-\frac{1}{2}l}} + s_{ijl} \left[-D_{y_{ij-\frac{1}{2}l}} - D_{y_{ij+\frac{1}{2}l}} \right] + s_{ij+1l} D_{y_{ij+\frac{1}{2}l}} \right\} + \\ & + \frac{b_{ijl} - b_{ijl-1}}{\Delta t_l} + \dot{M}_{s_{ijl}} - \dot{M}_{b_{ijl}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{i-1jl} \left[\frac{D_{x_{i-\frac{1}{2}jl}}}{\Delta x^2} \right] + s_{ij-1l} \left[\frac{D_{y_{ij-\frac{1}{2}l}}}{\Delta y^2} \right] + s_{ijl} \left[\frac{1}{\Delta t_l} - \frac{D_{x_{i-\frac{1}{2}jl}} + D_{x_{i+\frac{1}{2}jl}}}{\Delta x^2} - \frac{D_{y_{ij-\frac{1}{2}l}} + D_{y_{ij+\frac{1}{2}l}}}{\Delta y^2} \right] + \\ s_{ij+1l} \left[\frac{D_{y_{ij+\frac{1}{2}l}}}{\Delta y^2} \right] + s_{i+1jl} \left[\frac{D_{x_{i+\frac{1}{2}jl}}}{\Delta x^2} \right] = s_{ijl-1} \left[\frac{1}{\Delta t_l} \right] + \frac{b_{ijl} - b_{ijl-1}}{\Delta t_l} + \dot{M}_{s_{ijl}} - \dot{M}_{b_{ijl}} \end{aligned}$$

Уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\rho c_p \frac{\partial \Theta}{\partial t} = k_i \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \rho c_p \left(u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} + w \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) + 2\dot{\varepsilon}\sigma$$

Это уравнение имеет распространенные в моделировании льда упрощения:

- лед считается несжимаемой средой
- лед считается изотропным (т.е. его теплофизические характеристики (c_p, k_i и др.) всюду постоянны)
- температурное поле представляется в виде изотермических плоскостей с горизонтальной ориентацией. То есть градиент температурного поля направлен всегда вдоль оси z (его составляющие вдоль x и y осей пренебрежимо малы)

После замены координат уравнение принимает следующий вид.

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t'} + \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \left(a_x u + a_y v + a_z \left(\frac{\partial s}{\partial t'} - \xi \frac{\partial H}{\partial t'} - w \right) \right) + u \frac{\partial \Theta}{\partial x'} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y'} - \frac{k}{H^2 \rho c_p} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} = \frac{2}{\rho c_p} \dot{\varepsilon} \sigma$$

Дискретизация также проводится с использованием центральных разностей во внутренних узлах сетки и с использованием трехточечных односторонних разностей на границе домена.