# Decentralized Computing and Modelling

## 1st exercise report

Αγγελόπουλος Γιώργος, 6ο έτος, AM: 1067435

---

## Θεωρητικό Μέρος

Και στις δύο εργασίες προσπάθησα να τις λύσω στο χαρτί γιατί μου ήταν πιο εύκολο και ξεκούραστο να διορθώνω και να γράφω τύπους. Για αυτό και παραθέτω τις φωτογραφίες των χαρτιών, προσπάθησα να τα κάνω όσο πιο ευανάγνωστα γινόταν.

# Άσκηση 1

① **Luby's Algorythm for varoiable $p = 1/\ell \cdot d(v)$, ex. 1**

Έστω ότι έχω γράφημα $G(V, E)$ και τυχαίος κόμβος $v$ με τάξη $d(v)$.
Ορίζω την πιθανότητα $\boxed{p = \frac{1}{\ell \cdot d(v)}, \ \ell \in \mathbb{N}}$ για την επιλογή του $v$.
Έστω $M$ το σύνολο των κόμβων που επιλέχθηκαν στο 1° βήμα. Έστω $H(v)$ το σύνολο των γειτόνων του $v$ που έχουν μεγαλύτερο βαθμό ή ίσο βαθμό και μεγαλύτερο -id- από τον $v$.
Λόγω της ανεξαρτησίας της επιλογής των κόμβων έχω:

$$P[v \notin MIS \mid v \in M] = P[\exists w \in H(v), w \in M \mid v \in M] \overset{\text{ανεξ}}{=} P[\exists w \in H(v), w \in M] \leq$$

$$\leq \sum_{w \in H(v)} P[w \in M] = \sum_{w \in H(v)} \frac{1}{\ell \cdot d(w)} \overset{d(w) \geq d(v)}{\leq} \sum_{w \in H(v)} \frac{1}{\ell \cdot d(v)} \leq$$

$$\leq \frac{\cancel{d(v)}}{\ell \cdot \cancel{d(v)}} = 1/\ell \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P[v \notin MIS \mid v \in M] \leq \frac{1}{\ell} \quad (1)$$

Τότε $P[v \in MIS] = P[v \in MIS \mid v \in M] \cdot P[v \in M] =$

$$\overset{(1)}{\geq} \left(1 - \frac{1}{\ell}\right) \cdot \frac{1}{\ell \cdot d(v)} = \left(\frac{\ell - 1}{\ell}\right) \cdot \frac{1}{\ell \cdot d(v)} = \frac{\ell - 1}{\ell^2 \cdot d(v)}$$

Άρα αναμένω ότι με πιθανότητα επιλογής $p = \frac{1}{\ell \cdot d(x)}$ ένας κόμβος $v$ μπαίνει στο MIS με $P_{MIS} \geq (\ell - 1)/(\ell^2 \cdot d(x))$

Αν $\ell = 1 \Rightarrow P_{MIS} \geq (1-1)/(1^2 \cdot d(v)) = 0/d(v) = 0$

Άρα αν βάλω $\ell = 1$ τότε δεν έχω καμία εγγύηση ότι ο κόμβος θα μπει στο σύνολο. Αν $\ell = 2 \rightarrow$ Έχω τον luby's algorithm.

Άρα συζητάμε μόνο για $l \geq 2$. Αν $l=2$, $P_{u2S} = \frac{1}{4d(v)}$ (1)

$\boxed{\text{Καλός κόμβος}}$ Ένας κόμβος v λέγεται καλός αν $\sum_{w\in N(v)} \frac{1}{l\cdot d(w)} \geq \frac{1}{3l}$, αλλιώς είναι κακός. Ένας καλός κόμβος θα απενεργοποιηθεί στο βήμα 3 με $\boxed{P = \frac{3-l}{9\cdot l^2}}$

<u>Αποδ:</u> Έστω v καλός κόμβος. Αν έχει γείτονα $w \in N(v)$ με $d(w) \leq 2$, η $P_{w\to u2S} = \frac{1}{l\cdot d(w)}$ και ο v θα αφαιρεθεί στο βήμα 3.
Άρα ασχολούμαστε με $w: d(w) \geq 3$. Για όποιον γείτονα w του v έχουμε $\frac{1}{l\cdot d(w)} \leq \frac{1}{3l}$. Εφόσον $\sum_{w\in N(v)} 1/l\cdot d(w) \geq 1/3l$ υπάρχει ένα υποσύνολο των γειτόνων του v $S$ τέτοιο ώστε $1/3l \leq \sum_{w\in S} 1/l\cdot d(w) \leq 1/3$. Τώρα μπορούμε να φράξουμε την πιθανότητα ο v να απενεργοποιηθεί. Έστω R η απενεργοποίηση του v.

$$P[R] \geq P[\exists u \in S, u \in MIS] \geq \sum_{u\in S} P[u\in MIS] - \sum_{\substack{u,w\in S,\\ u\neq w}} P[u\in MIS \text{ and } w \in MIS] \quad (2)$$

λόγω του εγκλεισμού αποκλεισμού.

Έστω M πάλι το σύνολο των επιλεγμένων κόμβων. Αφού $P[u\in M] \geq P[u\in MIS]$: (2) $\Rightarrow P[R] \geq$

$$\geq \sum_{u\in S} P[u\in MIS] - \sum_{u\in S}\sum_{w\in S} P[u\in M]\cdot P[w\in M].$$

$$\geq \sum_{u\in S} \frac{1}{l\,d(u)} - \sum_{u\in S}\sum_{w\in S} \frac{1}{l\,d(u)}\,\frac{1}{l\cdot d(w)} \geq \sum_{u\in S} \frac{1}{d(u)\cdot l}\left(\frac{1}{l} - \sum_{w\in S} \frac{1}{l\cdot d(w)}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{3l}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3\cdot l}\left(\frac{3-l}{3l}\right) = \boxed{\frac{3-l}{9\cdot l^2}}$$

Ομοίως με το paper και βασιζόμενοι στο πόρισμα του 8.6 και 8.7, γνωρίζουμε ότι τουλάχιστον οι μισές ακμές του G είναι καλές, όπου <u>καλή ακμή</u> είναι αυτή που συνδέεται τουλάχιστον σε έναν καλό κόμβο.

Έτσι δείξαμε ότι ένας καλός κόμβος θα διαγράφεται με σταθερή πιθανότητα. Επίσης, αφού τουλάχιστον οι μισοί κόμβοι είναι καλοί, ένα σταθερό μέρος των κόμβων* θα διαγράφεται σε κάθε φάση. * και των ακμών.

Έστω R ο αριθμός των ακμών που αφαιρούνται με $p = \frac{3-l}{9 \cdot l^2}$. Ξέρουμε ότι $\mathbb{E}(R) \geq \frac{m(3-l)}{18 \cdot l^2}$, m ο συνολικός αριθμός των ακμών στην αρχή της φάσης 1.
Τώρα, έστω $p := P[R \leq \mathbb{E}(R)/2]$. Φράσοντας την εκτίμηση παίρνουμε:

$$\mathbb{E}(R) = \sum_r P[R=r] \cdot r \leq p \cdot \mathbb{E}(R)/2 + (1-p) \cdot m.$$

και λύνοντας ως προς p:

$$p \leq \frac{m - \mathbb{E}(R)}{m - \mathbb{E}(R)/2} < \frac{m - \mathbb{E}(R)/2}{m} = \frac{m}{m} - \frac{\mathbb{E}[R]}{2m} \leq 1 - \frac{\cancel{m}(3-l)}{2 \cdot \cancel{m} \cdot 18 l^2} = 1 - \frac{3-l}{36 \cdot l^2}.$$

Άρα με πιθανότητα τουλάχιστον $\frac{3-l}{36 \cdot l^2}$ το λιγότερο $m \cdot \frac{3-l}{36 \cdot l^2}$ ακμές απενεργοποιούνται σε κάθε φάση. Αφού $m \leq n^2 \xRightarrow{\log_2} \log m \leq 2 \log n$

Άρα $O(\log m) = O(\log n)$ <u>whp</u>

Αυτά επιβεβαιώνουν την θεωρία για $l=2$ οπου και βασίζεται ο αλγόριθμος του paper. Όμως αν βάλουμε πχ $l=1$ τότε όπως είδαμε στην αρχη τότε ο κόμβος v έχει πιθανότητα να μπει στο MIS τουλάχιστον 0, το οποίο προφανως δεν μας καλύπτει. Όμως με $l=3$ τότε η πιθανότητα να αφαιρεθεί ο κόμβος v είναι τουλαχιστον 0 πάλι, το οποίο προκαλεί την ίδια αβεβαιότητα εμφανισης του φαινομένου με πριν. Αν μεγαλώσει κι αλλο το l τότε αυτή η $p<0$, το οποίο δεν μπορεί να ισχύει άρα το l για τα καλύτερα αποτελέσματα: $\boxed{l=2}$

# Άσκηση 2

Simple Self-Stabilizing Algorithm for Maximal Independent Set. Ex. 1.1.2.

O Αλγόριθμος

**Inputs:**

p.N: το σύνολο των γειτόνων του p.

**Local Variable:**

mis: Boolean έχω μπει ή όχι στο MIS.

id: το id του εκάστοτε κόμβου

**Macros**

proper(p): $\nexists q \in p.N : q.id > p.id$ AND $q.mis = true$.

**Guard:**

Conflict(p): $\exists q \in p.N : q.mis = true$ AND $p.mis = true$ AND $q.id > p.id$

**Action**

leave : Conflict(p) → (if ¬ proper(p): p.mis ← false)

join: proper(p) → p.mis ← true.

**Terminal Configuration (predicate).**

MIS: $\forall p \in V, \forall q \in p.N : p.mis \neq q.mis$.

Παρατηρώ ότι ο Daemon του συγκεκριμένου αλγορίθμου είναι σειριακός αφού κάθε κόμβος ενεργοποιείται ατομικά. Άρα δεν έχω κανένα θέμα κατά τους ελέγχους το Guard και το Action αφού όλοι οι άλλοι κόμβοι είναι ανενεργοί.

Η τερματική συνθήκη MIS καλύπτει τις ανάγκες μας για σταθερή κατάσταση εφόσον δεν υπάρξουν λάθη.

Ανάλυση

· Έστω η εκτέλεση $e = \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_i, \dots$

→ Έστω ο κόμβος p.
→ Η Δυναμική Συνάρτηση: $Energy(\delta_i) = |\{p \in V : conflict(p)\}|$
→ Αν ισχύει στην κατάσταση $\delta_i$ conflict(p), τότε στην $\delta_{i+1}$ θα ισχύει ότι ¬conflict(p).
→ Αν ισχύει στην $\delta_i$ proper(p) τότε στην $\delta_{i+1}$ σίγουρα ¬conflict(p).
→ Η τιμή της $Energy(\delta_i)$ τείνει να μειώνεται ή να είναι σταθερή αλλά ποτέ να αυξάνεται.
→ $0 \leq Energy(\delta_i) \leq n-1$.
→ Αν στο $\delta_i$ ισχύει ¬conflict(p) τότε και στο $\delta_{i+1}$ θα ισχύει ¬conflict(p).
→ Όταν $Energy(\delta_i) = 0$ τότε είμαι σε τερματική κατάσταση
→ Για κάθε διαμόρφωση $\delta_i, \delta_j$ με $i < j$ ισχύει ότι $Energy(\delta_i) \geq Energy(\delta_j)$
→ Η εκτέλεση e τερματίζει μετά από το πολύ n-2 βήματα
→ Για οποιαδήποτε εκτέλεση e, η e είναι διακριτή

Λόγω του τελευταίου, ο αλγόριθμος είναι και σιωπηλός αφού τερματίζει σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.
Υποθέσαμε σε σειριακό αυστηρά δίκαιο Δαίμονα, άρα όλοι οι κόμβοι θα ενεργοποιηθούν τυχαία σειριακά και σε κάθε περίπτωση τα conflicts θα μειώνονται ή θα είναι σταθερά. Αλλά στο τέλος μηδενίζονται

# Προγραμματιστικές ασκήσεις

Το αρχείο της Netlogo στο οποίο βρίσκονται οι κώδικες είναι μέσα στο zip με το παρόν pdf. Προτείνω να το ανοίξετε και να το δείτε καθώς έχει αρκετά comments στον κώδικα που εξηγούν καλύτερα την λειτουργία από ότι θα έκανα εδώ.

## Άσκηση 1

Λόγω περιορισμένου χρόνου δεν κατάφερα να δημιουργήσω πιο καλές γραφικές παραστάσεις και συγγνώμη για αυτό. Επίσης δεν κατάφερα να βάλω και τους 4 αλγορίθμους στο ίδιο γράφημα για κάθε μετρική. Παρόλα αυτά, τα ζητούμενα αποτελέσματα φαίνονται καλά στα bar charts.

Τα γραφήματα μπορείτε να τα δείτε στο τέλος για να μην χαθεί η συνοχή του κειμένου.

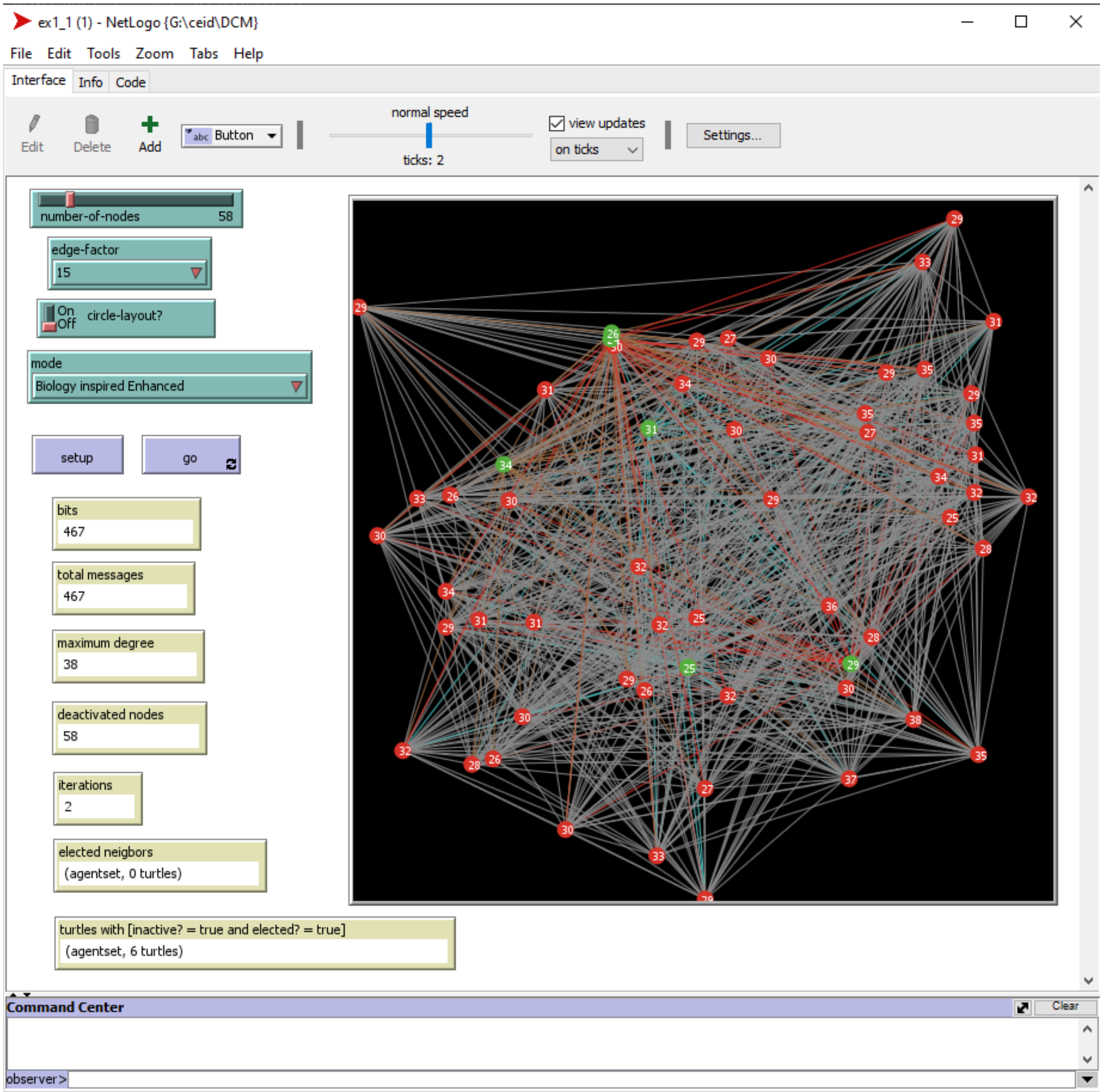
Όσον αφορά τις παρατηρήσεις μου, κατα την υλοποίηση των αλγορίθμων είχα λίγες δυσκολίες ως προς την λογική της Netlogo που όμως προσπέρασα εν τέλει και βρήκα τρόπους να υλοποιήσω τους αλγορίθμους. Θα παρατηρήσετε στο γραφικο περιβαλλον ότι υπάρχουν διάφορα monitors για διάφορες τιμες. Τα χρησιμοποίησα κυριώς για debugging purposes και επαλήθευση ορθής λειτουργίας.

Ως προς την απόδοση των αλγορίθμων, η μεγαλύτερη αλλαγή φάνηκε μεταξύ του Simple MIS και του Luby’s αφού υλοποίησα τον έναν μετά τον άλλον και η διαφορά στα βήματα τερματισμού ήταν οριακά τρομακτική! Αυτό οφείλεται όχι μόνο στην αποδοτικότητα του Luby’s αλλά και στην χαμηλή πιθανότητα ένας κόμβος να ενεργοποιηθεί σε εναν γύρο στον απλό Αλγόριθμο.

Γενικά τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν ως επι το πλείστον την θεωρία, για τα αναμενόμενα βήματα και μηνύματα. Χαρακτηριστικά ο τελευταίος αλγόριθμος είχε την καλύτερη απόδοση από όλους. Επίσης βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των κόμβων και των ακμών τα μηνύματα πολλαπλασιάζονται, κάτι που οδηγεί σε πολύ μεγάλους αριθμούς, ειδικά στον Luby’s όπου τα bits δεν είναι 1 ανά μήνυμα αλλά $\log^2 n$.

Για περισσότερες λεπτομέρειες ως προς την υλοποίηση προτείνω να ανατρέξετε στον κώδικα της άσκησης όπου εξηγώ μέσω σχολίων όλες τις λειτουργίες και νοοτροπία των αλγορίθμων.

Ακολουθεί screenshot του περιβάλλοντος υλοποίησης και οι γραφικές παραστάσεις.



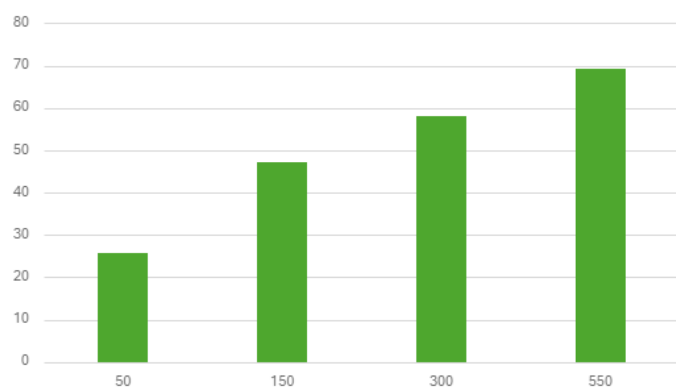

**<u>Simple MIS</u>**: Ο απλός αλγόριθμος που παρουσιάστηκε στις διαλέξεις στην διαφάνεια 13.

Επειδή ο αριθμός των Bits που ζητήθηκε είναι ο ίδιος σε κάθε περίπτωση αυτού του αλγορίθμου με τα μηνύματα που στάλθηκαν, παρατίθεται μόνο η γραφική των μηνυμάτων.

**Για Edge Factor** (πολλαπλασιαστικό παράγοντα των ακμών επί των κόμβων) **= 3**:

Total messages:


Steps:



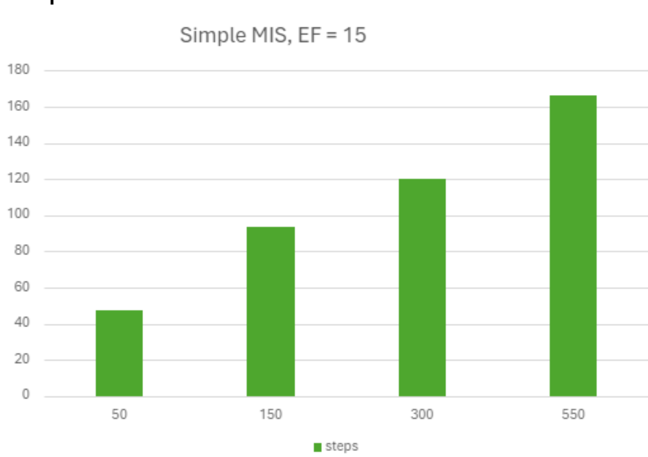
**Για Edge Factor = 7**

Steps:

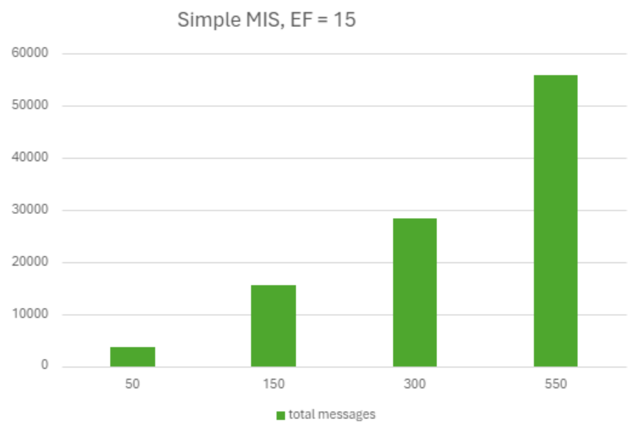

*total messages


**Για Edge Factor = 15**

Steps:



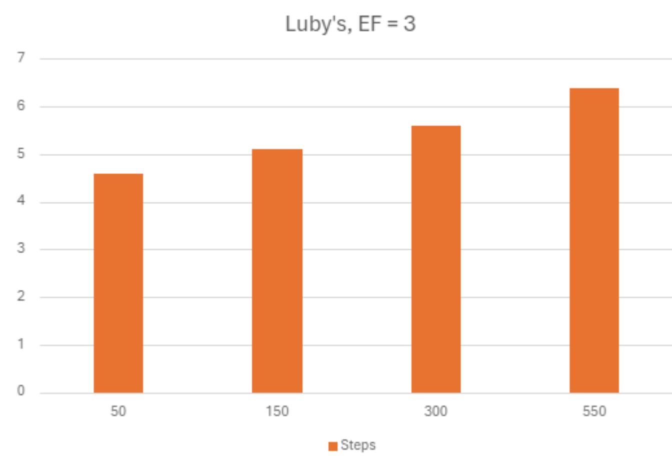
Total Messages:



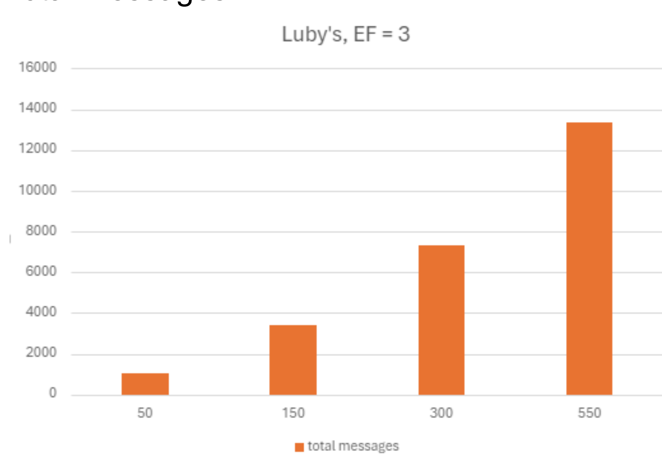

**Luby’s**: Ο αλγόριθμος που παρουσιάστηκε στις διαλέξεις στην διαφάνεια 24.

**Για Edge Factor = 3:**

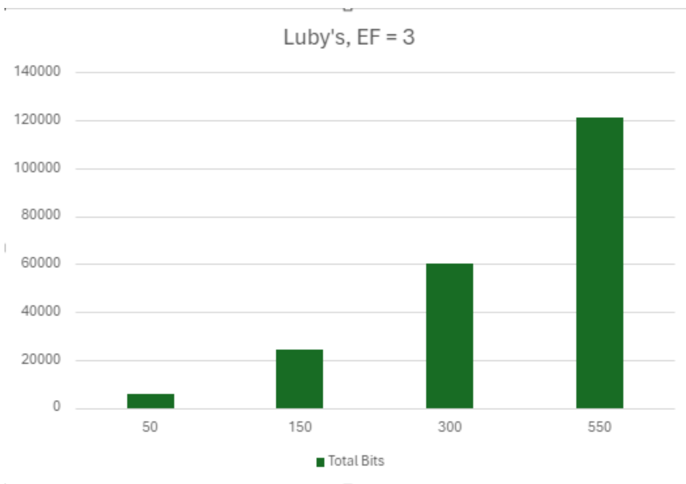
Steps:




Total Messages:

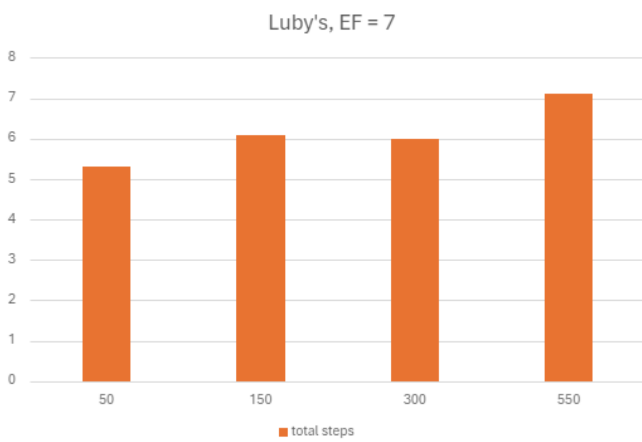


Total Bits:

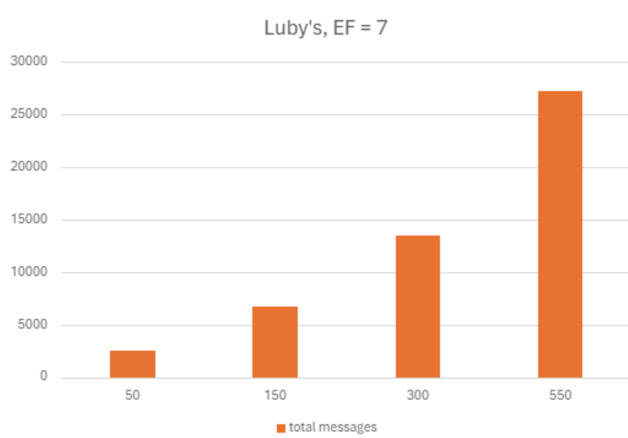



**Γιο Edge Factor = 7**

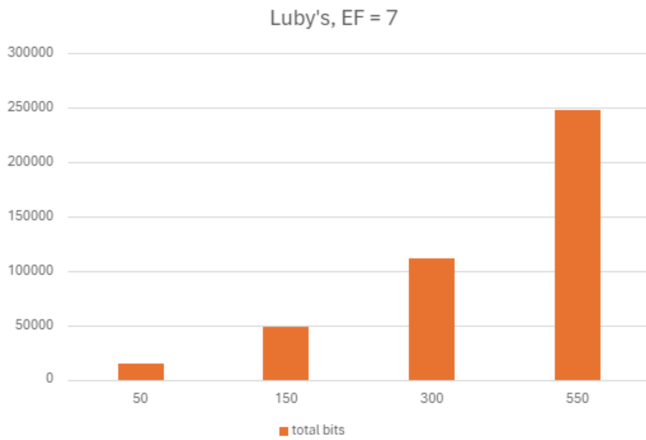
Steps:




Total Messages:

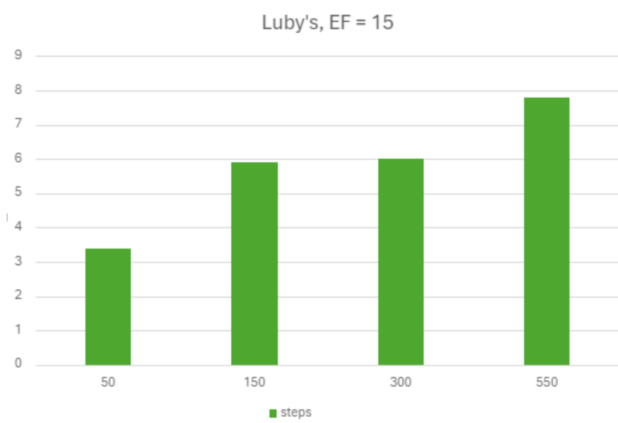


Total Bits:

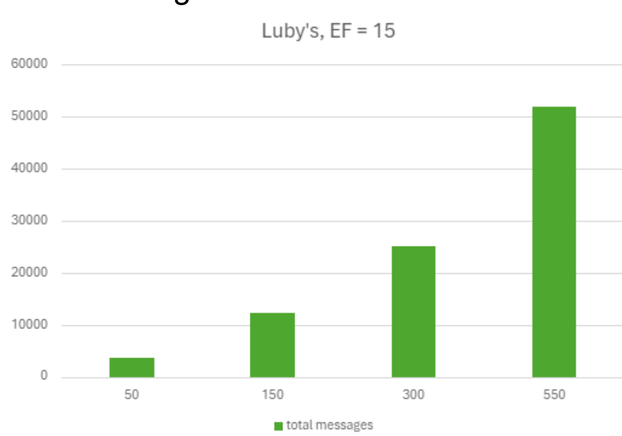



**Για Edge Factor = 15:**

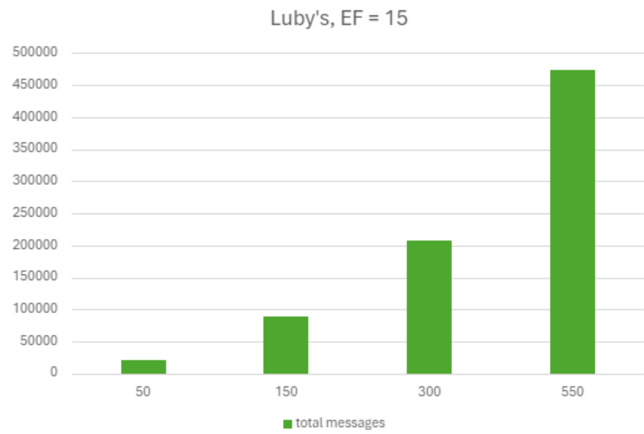
Steps:




Total Messages:



Total Bits:

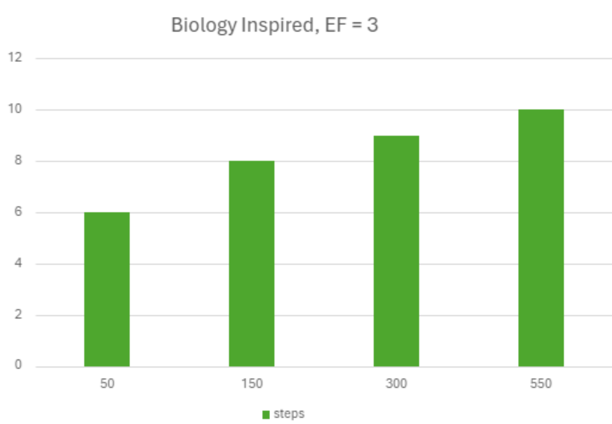



**Biology inspired algorithm**: Ο αλγόριθμος που παρουσιάστηκε στις διαλέξεις στην διαφάνεια 38.

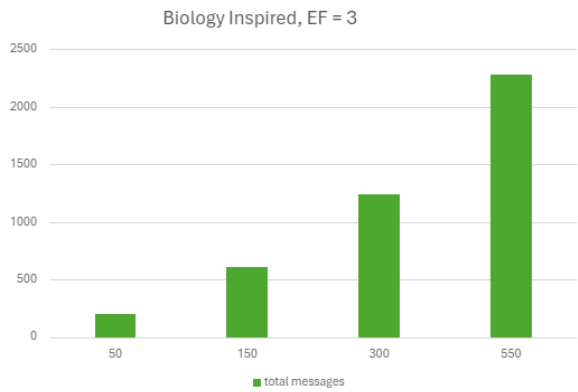
Πάλι τα μηνύματα ισούνται με τα bits οπότε παρατίθεται μόνο η γραφική των μηνυμάτων.

**Edge Factor = 3:**

Steps:

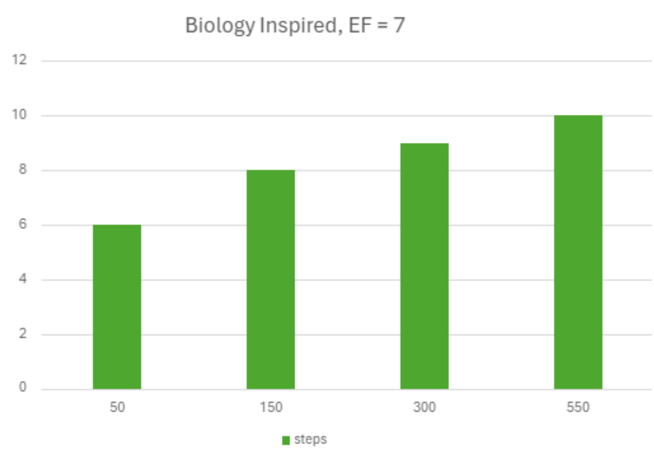


Total Messages:

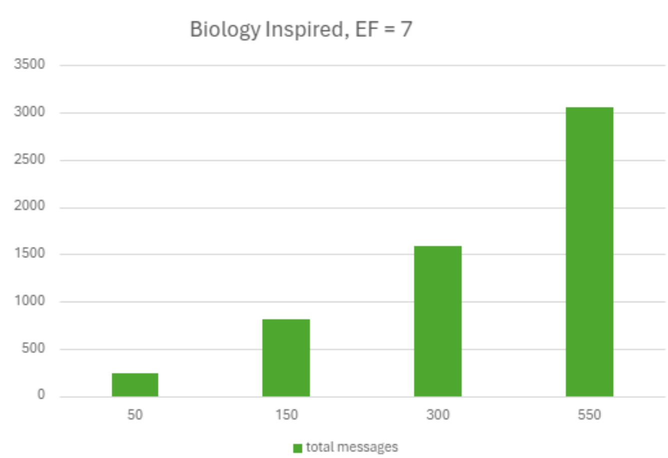



**Edge Factor = 7:**

Steps:

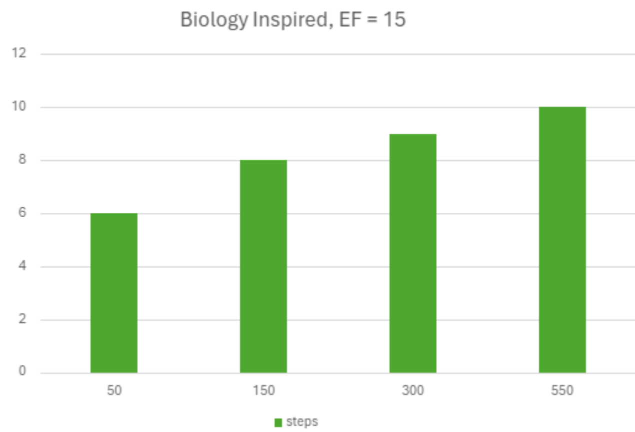



Total Messages:

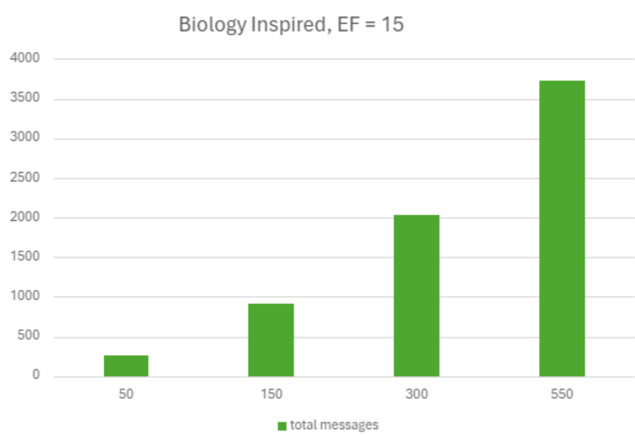


**Edge Factor = 15:**

Steps:




Total Messages:

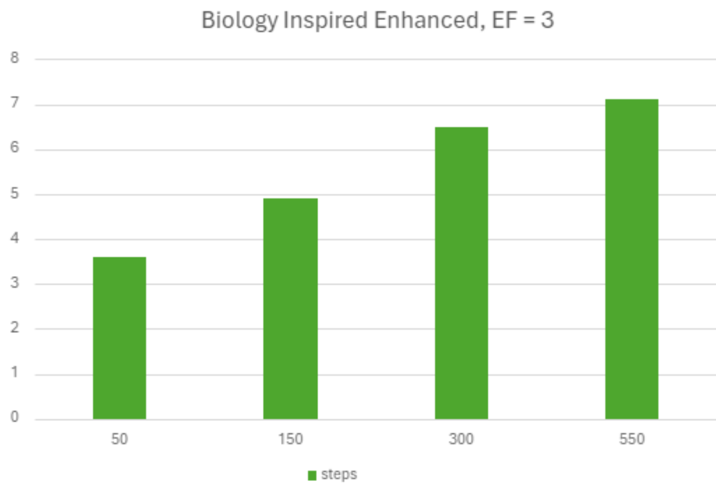



## **Enhanced Biology inspired algorithm**: Ο αλγόριθμος που παρουσιάστηκε στις διαλέξεις στην διαφάνεια 41.

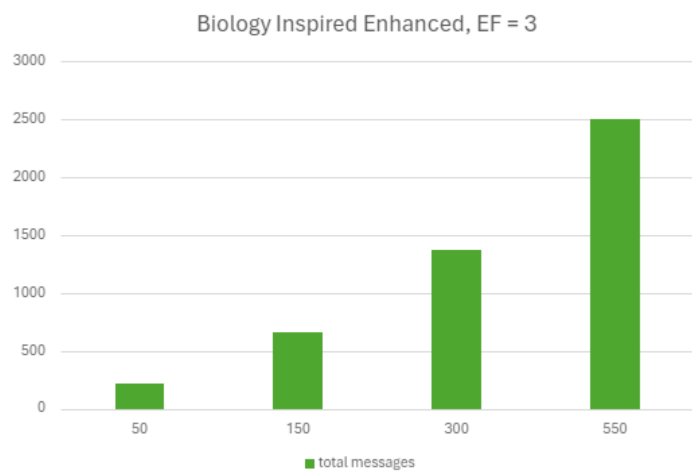
Πάλι τα μηνύματα ισούνται με τα bits οπότε παρατίθεται μόνο η γραφική των μηνυμάτων.

**Edge Factor = 3:**

Steps:

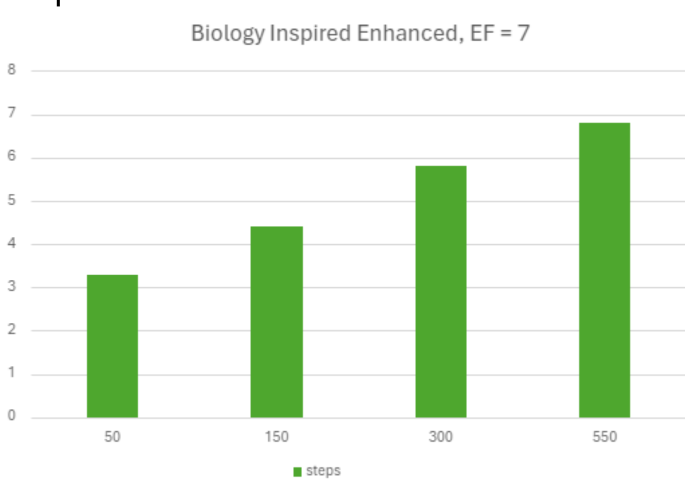



Total Messages:

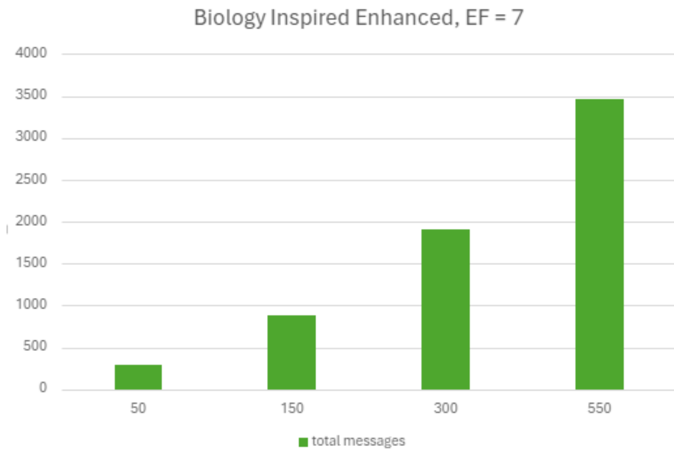



**Edge Factor = 7:**

Steps:

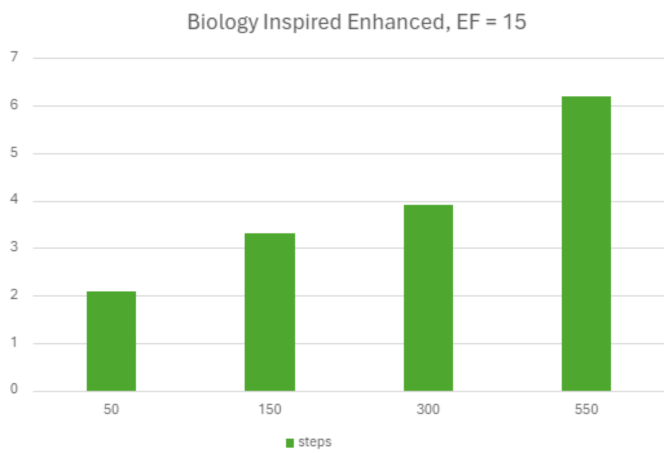


Total Messages:

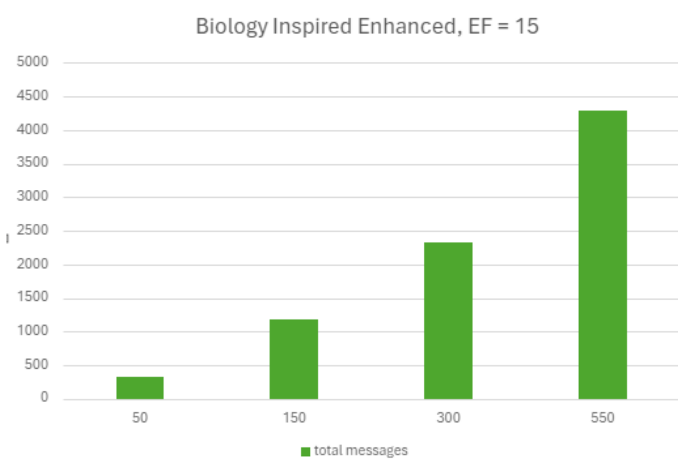



**Edge Factor = 15:**

Steps:




Total Messages:



# Άσκηση 2

Δυστυχώς δεν πρόλαβα να υλοποιήσω τον κώδικα για την 2η άσκηση καθώς δυσκολευόμουν στον λίγο χρόνο που έμενε να δημιουργήσω τις σχέσεις των pointers μεταξύ των κόμβων και της Δυναμικής Συνάρτησης όπως ζητούταν από τον αλγόριθμο.