МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Омский государственный технический университет»

А. В. Зыкина, О. Н. Канева, Т. Ю. Финк

МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Учебное текстовое электронное издание
локального распространения

Омск
Издательство ОмГТУ
2020

Сведения об издании: 1, 2

ISBN 978-5-8149-1561-0

УДК 007(075)
ББК 32.81я73
З-96

Рецензенты:

Л. Н. Романова, доцент кафедры «Физика и математика» ФГБОУ ВО «Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет (СибАДИ)», к. ф.-м. н, доцент;

А. В. Паничкин, с.н.с. Омского филиала Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, к. ф.-м. н

Зыкина, А. В.

З-96 Методы принятия оптимальных решений : учеб. пособие / А. В. Зыкина, О. Н. Канева, Т. Ю. Финк ; Минобрнауки России, ОмГТУ. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2020.

ISBN 978-5-8149-1561-0

Приводятся основные классы оптимизационных задач исследования операций и принятия решений. Рассматриваются методы решения задач линейного, нелинейного и целочисленного линейного программирования, теория двойственности в линейном программировании, транспортная задача линейного программирования, матричные игры.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлениям 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии», 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.02 «Информационные системы и технологии», 09.03.03 «Прикладная информатика», 09.03.04 «Программная инженерия», а также для студентов университетов, изучающих методы оптимизации.

УДК 007(075)
ББК 32.81я73

Рекомендовано редакционно-издательским советом Омского государственного технического университета

ISBN 978-5-8149-1561-0

1 электронный оптический диск

Оригинал-макет издания выполнен в Microsoft Office Word 2007/2010 с использованием возможностей Adobe Acrobat Reader.

Минимальные системные требования:
•процессор Intel Pentium 1,3 ГГц и выше;
•оперативная память 256 Мб;
•свободное место на жестком диске 260 Мб и более;
•операционная система Microsoft Windows XP/Vista/7/10;
•разрешение экрана 1024×768 и выше;
•акустическая система не требуется;
•дополнительные программные средства Adobe Reader 5.0 и выше.

Редактор *М. А. Болдырева*
Компьютерная верстка *Е. В. Беспаловой*

Сводный темплан 2020 г.
Подписано к использованию 30.10.20.
Объем 1,07 Мб.

Издательство ОмГТУ.
644050, г. Омск, пр. Мира, 11; т. 23-02-12
Эл. почта: info@omgtu.ru

ВВЕДЕНИЕ

При решении широкого комплекса практических задач, в том числе задач создания и сопровождения автоматизированных систем различного назначения, возникают модели оптимизации принятия решений, для которых характерны следующие черты:

1) показатель эффективности (целевая функция) является функцией от элементов решения;

2) ограничительные условия, налагаемые на возможные решения, имеют вид функциональных равенств или неравенств.

Такие задачи называются задачами математического программирования (МП).

Первые исследования по МП были проведены в конце 30-х годов в Ленинградском университете академиком Л. В. Канторовичем (первая публикация – в 1939 году). Канторович Л. В. предложил легко алгоритмизируемый метод решения задач линейного программирования (ЛП) – метод последовательного улучшения допустимого вектора. Американский математик Дж. Данциг в 1947 году разработал симплекс-метод решения задачи ЛП. По существу симплекс-метод является табличной формой записи метода последовательного улучшения допустимого вектора. В 1951 году Дж. Данциг ввел термин «линейное программирование» (слово «программирование» в рассматриваемом контексте означает не что иное, как «планирование»).

В настоящее время с точки зрения уровня теоретических разработок сфера приложения и реализации вычислительных методов ЛП является одним из наиболее развитых направлений в области решения оптимизационных задач. Успехи в использовании методов ЛП во многом обусловлены значительным увеличением быстродействия и объема памяти компьютеров. Достижения в области ЛП в свою очередь содействовали прогрессу в разработке алгоритмов решения других задач математического программирования. Сущность этих алгоритмов состоит в том, что исходная (в общем случае, нелинейная) задача сводится к одной линейной задаче или их совокупности. Таким образом, линейное программирование выделяется среди других методов математического программирования как основа для многих процедур решения.

В учебном пособии приводятся основные классы оптимизационных задач: одномерной и многомерной, безусловной и условной оптимизации. Для одномерной оптимизации рассматриваются методы дихотомии, Фибоначчи и золотого сечения, не требующие от функции свойств непрерывности и дифференцируемости, а также методы, которые требуют информацию о производной оптимизируемой функции (метод деления пополам, метод Ньютона). Для безусловной многомерной оптимизации рассматриваются методы нулевого порядка (циклического покоординатного спуска, Хука и Дживса, Розенброка), методы первого порядка (градиентный метод с дроблением шага, метод наискорейшего спуска), методы второго порядка (Ньютона, Ньютона с регулировкой шага). Для задач с ограничениями рассматриваются методы возможных направлений (методы Зойтендейка, Розена, Вульфа), методы штрафных и барьерных функций.

Более подробно рассматриваются методы решения задач линейного и целочисленного линейного программирования, теория двойственности в линейном программировании, транспортная задача линейного программирования, матричные игры.

В пособии используются стандартные обозначения для точек (векторов) x из n-мерного линейного пространства R^n: нижний индекс $x = (x_1, ..., x_n)$ – это номер координаты точки, верхний индекс $x^k = (x_1^k, ..., x_n^k)$ обозначает номер точки, верхний индекс «звездочка» характеризует решение задачи оптимизации x^*. Для одномерной оптимизации ($x \in R^1$) нижний индекс x_k – это уже номер точки.

1. ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

1.1. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Постановка задачи линейного программирования (ЛП) *в общем виде* (*в произвольном виде*) состоит в следующем.

Найти вектор $x = (x_1, \ldots x_q)$, минимизирующий (максимизирующий) линейную функцию:

$$L = c_1 x_1 + \ldots + c_q x_q,$$

переменные которой подчинены следующим линейным ограничениям вида:

$$\begin{aligned}
&a_{11} x_1 + \ldots + a_{1q} x_q \le b_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\
&a_{s1} x_1 + \ldots + a_{sq} x_q \le b_s, \\
&a_{s+11} x_1 + \ldots + a_{s+1q} x_q \ge b_{s+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\
&a_{s+t1} x_1 + \ldots + a_{s+tq} x_q \ge b_{s+t}, \\
&a_{s+t+11} x_1 + \ldots + a_{s+t+1q} x_q = b_{s+t+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\
&a_{s+t+p1} x_1 + \ldots + a_{s+t+pq} x_q = b_{s+t+p}, \\
&x_1 \ge 0, \ldots, x_k \ge 0, k \le q.
\end{aligned}$$

Для численного решения задачи ЛП, представленной в общем виде, требуется предварительно привести задачу к *каноническому виду* (*к канонической форме*): минимизировать (максимизировать) функцию

$$L = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

при следующих ограничениях

$$\begin{aligned}
&a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m, \\
&x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0.
\end{aligned}$$

Для решения задачи в каноническом виде можно использовать прямой или двойственной симплекс-метод. Для построения начального базисного допустимого решения используется метод искусственного базиса.

При выполнении условия $n - m \le 2$ задачу можно решать графически.

1.2. КЛАССИЧЕСКАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Математическая модель классической транспортной задачи ЛП имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = \overline{1,m} \quad \Longleftrightarrow \quad x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = \overline{1,n}, \quad \Longleftrightarrow \quad x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = b_j$$

$$x_{ij} \ge 0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}.$$

Транспортная задача, в которой суммарные запасы $\sum_{i=1}^{m} a_i$ и суммарные потребности $\sum_{j=1}^{n} b_j$ совпадают, то есть выполняется условие $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, называется закрытой моделью, в противном случае – открытой.

Открытая модель решается приведением к закрытой модели. Решение закрытой модели классической транспортной задачи находят методом потенциалов.

1.3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ПО КРИТЕРИЮ ВРЕМЕНИ

Математическая модель транспортной задачи при минимизации максимального времени перевозки продуктов от пунктов отправления к пунктам назначения имеет вид

$$\max_{x_{ij}>0} t_{ij} \to min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=\overline{1,m}, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=\overline{1,n}.$$

Решение транспортной задачи по критерию времени можно получить методом «запрещенных клеток».

1.4. ЗАДАЧА ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Требуется найти решение $x(t) = (x_1(t),..., x_n(t))$ задачи

$$\sum_{j=1}^{n} (c'_j + tc''_j)x_j \to \max(\min),$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + \ldots + a_m x_n = b'_1 + tb''_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b'_m + tb''_m,\\
&x_1 \ge 0,..., x_n \ge 0.
\end{aligned}$$

В общем случае значения параметра t принадлежат заданному конечному или бесконечному интервалу. Решение задачи для случаев, когда от параметра t зависит либо целевая функция ($b''_i = 0,\ i=\overline{1;m}$), либо система ограничений ($c''_j = 0,\ j=\overline{1,n}$), находят с помощью методов, основанных на применении симплекс-метода или двойственного симплекс-метода.

1.5. ЗАДАЧА КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача квадратичного программирования состоит в минимизации квадратичной целевой функции

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j$$

при линейных ограничениях в произвольной форме. Линейные ограничения в произвольной форме можно свести к ограничениям в канонической форме, но при этом увеличивается размерность задачи n, а значит, и размерность матрицы $C = \left\| c_{ij} \right\|$.

Для решения задачи квадратичного программирования с симметричной положительно полуопределенной матрицей C (положительная полуопределенность матрицы C следует из неотрицательности главных миноров матрицы C) существует два типа методов. Методы первого типа (Била, Баранкина и Дорфмана, Франка и Вульфа и др.) основаны на симплексных преобразованиях условий Куна-Таккера для задачи квадратичного программирования. Методы второго типа – это специальные методы. К ним можно отнести, к примеру, метод сопряженных градиентов и метод проекции градиента Розена.

1.6. ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Минимизировать нелинейную функцию

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, ..., x_n)$$

при нелинейных ограничениях

$$f_i(x) = f_i(x_1, ..., x_n) \le 0, \quad i = \overline{1, m},$$

где φ, $f_1, ..., f_m$ – непрерывные скалярные функции.

Если функции $\varphi(x), f_1(x), ..., f_m(x)$ – выпуклые функции, то задача нелинейного программирования является задачей *выпуклого программирования* и для ее решения применимы градиентные методы и классический метод решения задачи выпуклого программирования – метод возможных направлений.

Если ограничения заданы в виде равенств, то для решения задачи нелинейного программирования можно использовать метод множителей Лагранжа.

Если ограничения задачи позволяют построить штрафную функцию, сложность которой сравнима со сложностью исходной целевой функции, то можно решать задачу методами штрафных функций.

1.7. ДИСКРЕТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Дискретная задача математического программирования формулируется так же, как и задача МП, но включается дополнительное требование, состоящее в том, что значения переменных, составляющих оптимальное решение, должны принимать некоторые дискретные значения. Дискретность может быть произвольной, но чаще встречается два вида дискретности.

Если переменные принимают целочисленные значения, то говорят о задаче *целочисленного математического программирования*. Если переменные принимают альтернативные значения 0 или 1, то говорят о задаче *альтернативного математического программирования*.

Для решения задачи дискретного МП можно использовать метод ветвей и границ. Но необходимо отметить, что метод ветвей и границ эффективен лишь при решении задач, содержащих небольшое число дискретных переменных или небольшое число допустимых значений дискретных переменных.

1.8. ЗАДАЧА ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача целочисленного линейного программирования (ЦЛП) – это задача ЛП с дополнительным условием целочисленности переменных:

$$
\begin{aligned}
&c_1x_1+\ldots+c_nx_n \to \min,\\
&a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n = b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n = b_m,\\
&x_j \ge 0,\ j=1,n,\\
&x_j - \text{целые},\quad j=\overline{1,k}(k \le n).
\end{aligned}
$$

При $k=n$ – *полностью целочисленная задача*, а при $k<n$ задача является *частично целочисленной*.

Для решения задачи ЦЛП как частично, так и полностью целочисленной применяются методы отсечений, к примеру, метод Гомори.

1.9. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Это специальная задача альтернативного линейного программирования вида

$$
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,
$$

$$
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\quad j=\overline{1,n},
$$

$$
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\quad i=\overline{1,n},
$$

$$
x_{ij} = \{0,1\},\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,n}.
$$

Решение задачи о назначениях находится с помощью венгерского метода для решения задачи выбора: в квадратной матрице с неотрицательными значениями необходимо выбрать в каждой строке и в каждом столбце ровно по одному элементу так, чтобы сумма этих элементов была максимальна.

1.10. ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Это специальная задача альтернативного линейного программирования вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n},$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n},$$

$$x_{ij} - \text{целые}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n},$$

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \leq n-2, \quad i, j = \overline{2,n}, \quad i \neq j,$$

$$u_i, u_j - \text{произвольные переменные} \quad j = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Методы решения задачи коммивояжера основаны на модификациях метода ветвей и границ, использующих особые структурные свойства задачи коммивояжера. К таким методам относятся метод задания маршрутов и метод частичных циклов.

2. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Для численного решения задачи ЛП требуется предварительно привести ее к каноническому виду:

$$
\begin{gathered}
L = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \to min(max), \\
a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m, \\
x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Каноническая форма (КФ) (1) характеризуется следующими двумя признаками:

– однородная система ограничений (*ограничения в собственном смысле*) в виде системы уравнений;

– однородные *условия неотрицательности*, распространяющиеся на все переменные, участвующие в задаче.

Как следует из вида целевой функции в задаче (1), каноническая форма может быть и на минимум (*min*) и на максимум (*max*). В данном учебном пособии, как правило, используется каноническая форма на минимум.

Известно, что для произвольной задачи ЛП можно построить эквивалентную ей задачу ЛП в канонической форме (эквивалентность двух задач означает, что оптимальному решению одной задачи соответствует оптимальное решение другой).

Схема построения канонической формы состоит из трех этапов:

Этап 1. Выделение ограничений в собственном смысле и условий неотрицательности (а точнее, их наличие или отсутствие у каждой основной переменной).

Этап 2. Приведение системы ограничений к системе уравнений путем добавления в ограничения неотрицательных переменных, которые называются *дополнительными* или *слабыми*. Слабые переменные добавляются со знаком «+» для исходного неравенства «≤» и со знаком «-» для исходного неравенства «≥».

Этап 3. Приведение задачи к условиям неотрицательности для всех переменных.

2.1.1. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Привести задачу к КФ на минимум:

$$
\begin{gathered}
L = x_1 - x_2 \to \max, \\
3x_1 + x_2 \le -2, \\
x_1 - 2x_2 \ge 1, \\
-x_1 + 3x_2 = -1, \\
x_1 \ge 0.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

В данной задаче (2) нарушены все признаки КФ.

Этап 1. В задаче (2) выделим ограничения в собственном смысле (это три ограничения); условие неотрицательности есть у переменной x_1 и нет у переменной x_2.

Этап 2. Преобразуем смешанную систему трех ограничений в систему уравнений. Для этого введем в первое и второе ограничения дополнительные неотрицательные переменные y_1, y_2. В результате система ограничений запишется в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
3x_1 + x_2 + y_1 = -2, \\
x_1 - 2x_2 - y_2 = 1, \\
-1x_1 + 3x_2 = -1, \\
x_1 \ge 0, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Этап 3. Условия неотрицательности в (3) не выполняются только для переменной x_2. Для приведения задачи к однородным условиям неотрицательности можно воспользоваться двумя приемами: формальным и неформальным.

Первый прием (*формальный*). Представим переменную x_2 в виде разности двух неотрицательных переменных: $x_2 = x_2' - x_2'', x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0.$ После преобразования системы ограничений и целевой функции получим задачу в следующем виде

$$
\begin{gathered}
L = x_1 - x_2' + x_2'' \rightarrow max, \\
3x_1 + x_2' - x_2'' + y_1 = -2, \\
x_1 - 2x_2' + 2x_2'' - y_2 = 1, \\
-x_1 + 3x_2' - 3x_2'' = -1, \\
x_1 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Второй прием (*неформальный*). Найдем из какого-либо уравнения (3) переменную x_2. Пусть из первого уравнения $x_2 = -2 - 3x_1 - y_1$. Подставим это выражение во все уравнения и в целевую функцию, исключая таким образом переменную x_2 из задачи. Получим следующую задачу

$$
\begin{gathered}
L = 2 + 4x_1 + y_1 \rightarrow \max, \\
7x_1 + 2y_1 - y_2 = -3, \\
-10x_1 - 3y_1 = 5, \\
x_1 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Переход к задаче минимизации целевой функции L (поскольку в задании требуется привести задачу к КФ на минимум) в задачах (4) и (5) осуществляется путем введения новой функции L' из следующих равенств:

– для задачи (4) $L' = -L = -x_1 + x_2' - x_2'' \rightarrow \min$,

– для задачи (5) $L' = -L = -2 - 4x_1 - y_1 \rightarrow \min$.

Следует заметить, что константа -2 в целевой функции для задачи (5) не влияет на решение задачи ЛП любым методом. После вычисления оптимального значения целевой функции по используемому методу необходимо добавить к этому значению константу -2.

2.1.2. ЗАДАНИЯ. ПРИВЕСТИ ЗАДАЧУ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

1. $L = x_1 + 2x_3 + x_4 \to \max$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 \le -1, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$$

2. $L = x_1 + x_2 \to \max$

$$3x_1 + x_2 \le 1$$
$$2x_1 - x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 1$$

3. $L = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 2$$
$$0 \le x_1 \le 3, x_3 \ge 0$$

4. $L = x_1 - x_2 - x_3 \to \max$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 - 4x_2 + x_3 \le 1$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 5$$

5. $L = x_1 + x_4 \to \max$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 4$$
$$0 \le x_1 \le 4, x_4 \ge 0$$

6. $L = x_2 + x_4 \to \min$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge -5$$

7. $L = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$x_1 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 4$$

8. $L = x_1 + x_2 \to \max$

$$x_1 - x_2 - x_3 \le 1$$
$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \le 2$$
$$0 \le x_1 \le 3, x_2 \ge -1$$

9. $L = x_3 - x_4 \to \max$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$0 \le x_1 \le 5, x_4 \ge 0$$

10. $L = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 1$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 0$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge -2, x_3 \le 3$$

11. $L = -4x_1 - x_2 \to \max$

$$x_2 - 3x_3 + x_4 = 5$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_4 = 1$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge -3$$

12. $L = 3x_1 + 2x_3 \to \min$

$$8x_1 + x_2 \ge 6$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 7$$
$$x_2 \ge 5, x_4 \le 3$$

2.2. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Графически могут решаться:

a) задачи ЛП в произвольной форме, содержащие не более двух переменных;

b) задачи ЛП в канонической форме с числом свободных переменных: $n-m \le 2$;

c) задачи ЛП в произвольной форме записи, которые после приведения к канонической форме будут содержать не более двух свободных переменных: $n-m \le 2$.

2. Основной формой для графического решения является 1-й тип задачи. Поэтому, если встречается 2-й или 3-й тип задачи, то предварительно эти задачи должны быть приведены к первому типу.

3. Решение задачи 1-го типа выполняется в два этапа: построение области допустимых решений; построение в допустимой области оптимального решения.

4. При построении области допустимых решений может встретиться один из трех случаев:

а) пустая область (рис. 1) – в этом случае говорят, что задача не имеет решения из-за несовместности системы ограничений (область допустимых решений – пустое множество);

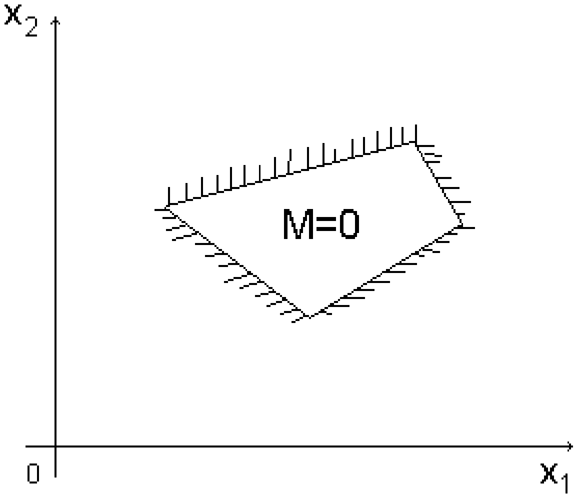

Рис. 1. Пустая область

б) выпуклый многоугольник (компакт) (рис. 2) – в этом случае задача всегда имеет оптимальное решение;

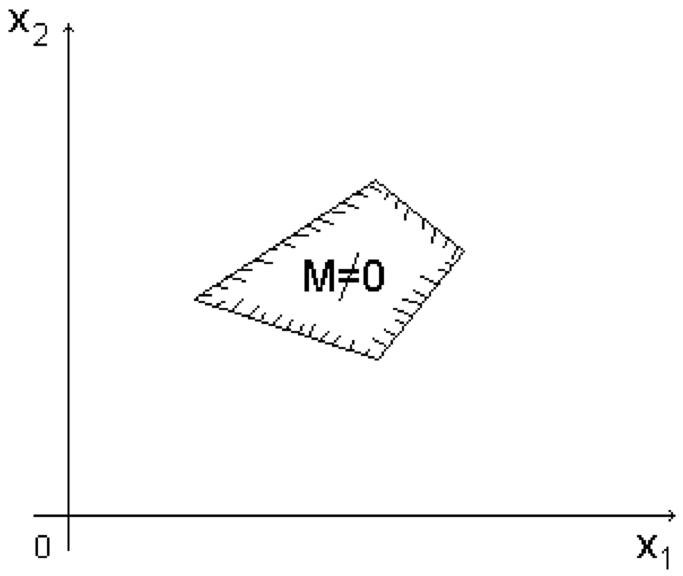

Рис. 2. Выпуклый многоугольник

в) неограниченная выпуклая многогранная область (рис. 3) – в зависимости от направления вектора c (вектора коэффициентов целевой функции L) задача может иметь или не иметь решение. Последнее связано с неограниченностью целевой функции в области допустимых решений.

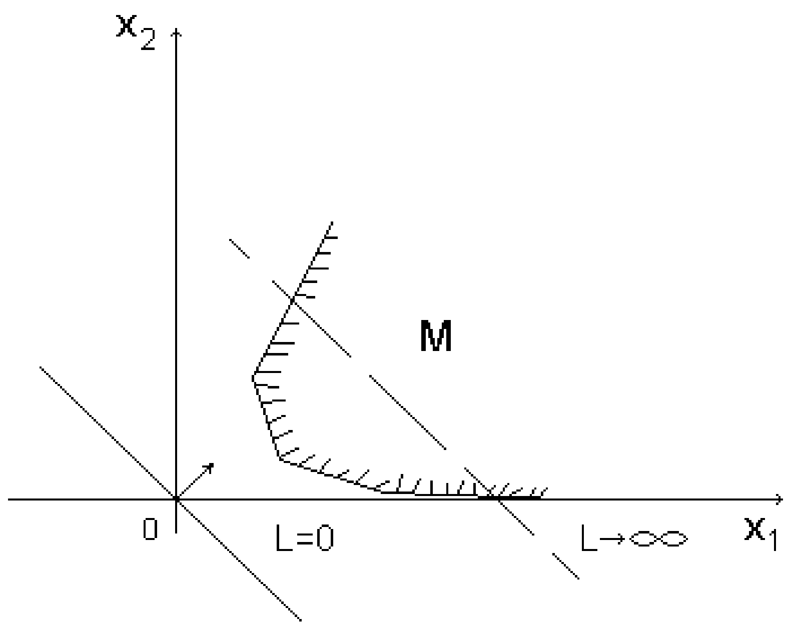

Рис. 3. Неограниченная выпуклая многогранная область

5. При построении в допустимой области оптимального решения в случае неограниченной выпуклой многогранной области может встретиться один из четырех случаев, а именно:

- оптимальное решение не существует, в этом случае говорят, что задача не имеет решения из-за неограниченности целевой функции в области допустимых решений (рис. 3);

- оптимальное решение существует и возможен один из трех исходов:

а) оптимальное решение единственное (рис. 4) и совпадает с одной из вершин области;

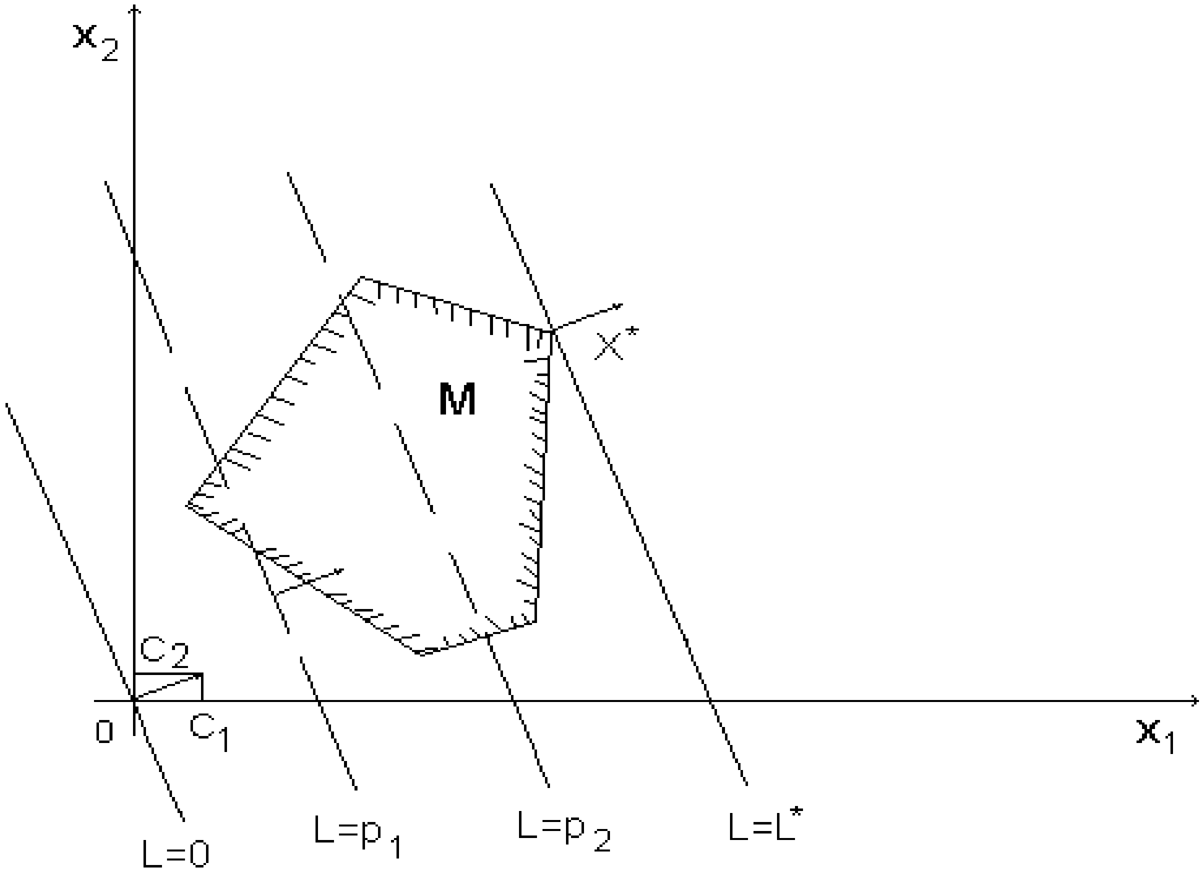

Рис. 4. Оптимальное решение единственное

б) оптимальные решения соответствуют всем точкам отрезка (рис. 5), соединяющего две вершины области x^{1*} и x^{2*}:

$$x^* = ax^{1*} + (1-a)x^{2*}, 0 \le a \le 1;$$

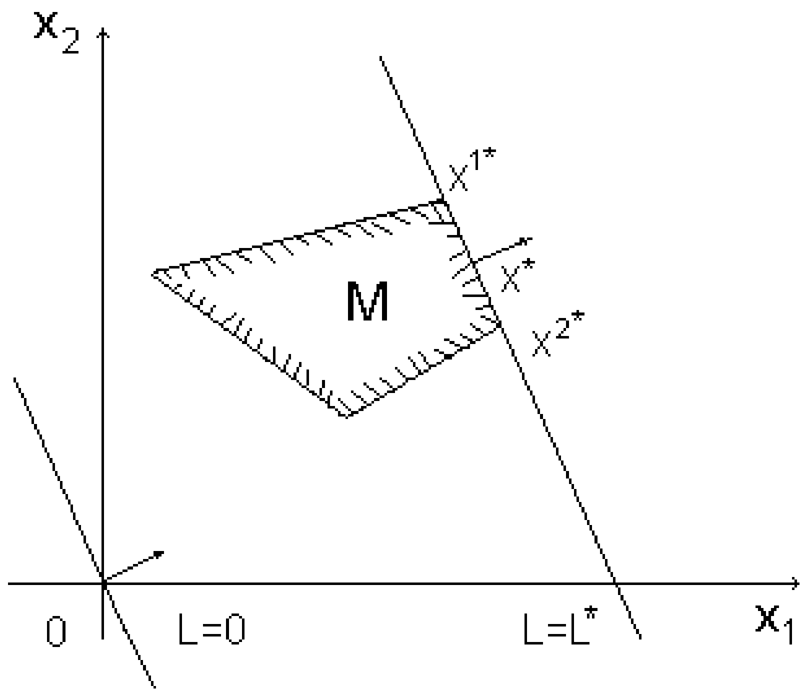

Рис. 5. Оптимальные решения – точки отрезка

в) оптимальные решения соответствуют всем точкам допустимого луча (рис. 6), исходящего из вершины области x^{1*}:

$$x^{*} = ax^{2*} + (1-a)x^{1*}, 0 \le a \le \infty .$$

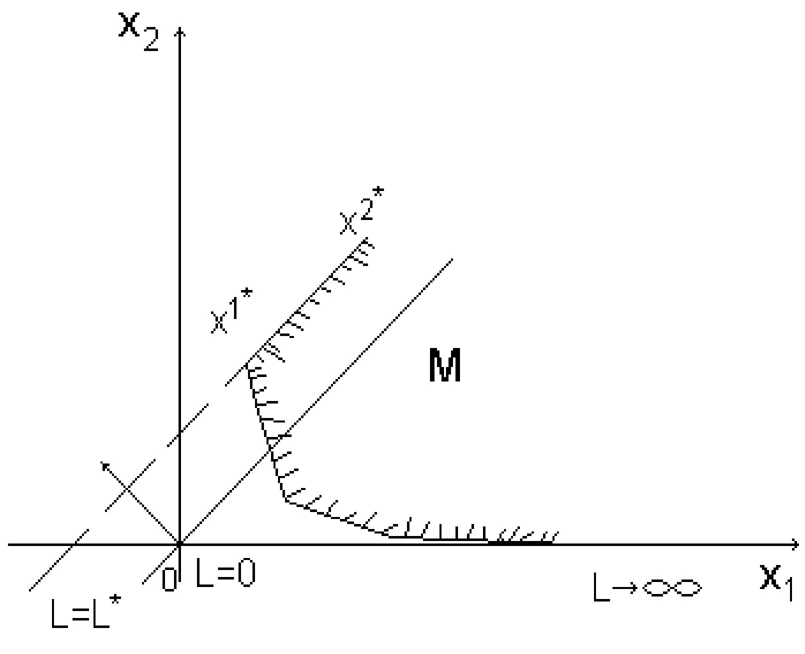

Рис. 6. Оптимальные решения – точки луча

2.2.1. ПРИМЕР ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Решить графически задачу ЛП, заданную в канонической форме:

$$L = 4x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 \to \max, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad &= 2, \\ x_1 - 2x_2 \quad + x_4 \quad &= 2, \\ x_1 + x_2 \quad\quad\quad + x_5 &= 5, \end{aligned} \tag{7}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}. \tag{8}$$

Число уравнений задачи m=3, число неизвестных n=5. Тогда n–m=2 и задача в канонической форме может быть сведена к 1-му типу задачи: к задаче на плоскости относительно свободных переменных. Возьмем в качестве базисных переменные x_3, x_4, x_5 и выразим их через свободные (небазисные переменные x_1, x_2):

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 + 2x_1 - x_2, \\ x_4 &= 2 - x_1 + 2x_2, \\ x_5 &= 5 - x_1 - x_2. \end{aligned} \tag{9}$$

По условию (8) переменные могут принимать только неотрицательные значения, т. е. допустимой областью задачи ЛП (6)–(8) будет область, определяемая условиями (8), (9), или

$$\begin{aligned} 2 + 2x_1 - x_2 &\geq 0, \\ 2 - x_1 + 2x_2 &\geq 0, \\ 5 - x_1 - x_2 &\geq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Чтобы получить задачу ЛП относительно переменных x_1, x_2, подставим значения базисных переменных (9) в целевую функцию (6). В результате получим

$$L = x_1 - x_2 \to \max. \tag{11}$$

Задача (10), (11) эквивалентна задаче (6)–(8), потому что, решая графически задачу (10), (11), найдем оптимальные значения переменных

x_1, x_2, и подставляя эти значения в соотношения (9), получим оптимальные значения переменных x_3, x_4, x_5, а следовательно, и оптимальное решение задачи (6)–(8).

Перейдем теперь к двухэтапному решению задачи 1-го типа: задачи (10), (11).

Этап 1. *Построение области допустимых решений*.

Каждое из неравенств (10) определяет некоторую полуплоскость x_1Ox_2. Так, неравенство $x_1 \geq 0$ определяет правую полуплоскость. Заштрихуем эту полуплоскость и обозначим это ограничение цифрой 1 в круглых скобках (рис. 7). Аналогично определяется ограничение, соответствующее неравенству $x_2 \geq 0$ (на рис. 7 это ограничение обозначено (2)).

Неравенство $2x_1 - x_2 \geq -2$ определяет полуплоскость, лежащую по ту сторону от прямой $2x_1 - x_2 = -2$, где $2x_1 - x_2 > -2$. Подставляя значения $x_1 = 0, x_2 = 0$ в это неравенство, получим 0 > –2, значит, координаты (0,0) удовлетворяют первому неравенству (10) и область решений этого неравенства включает начало координат (на рис. 7 это ограничение обозначено (3)). Аналогично определяют полуплоскости остальных неравенств из (10): на рис. 7 эти ограничения обозначены (4) и (5).

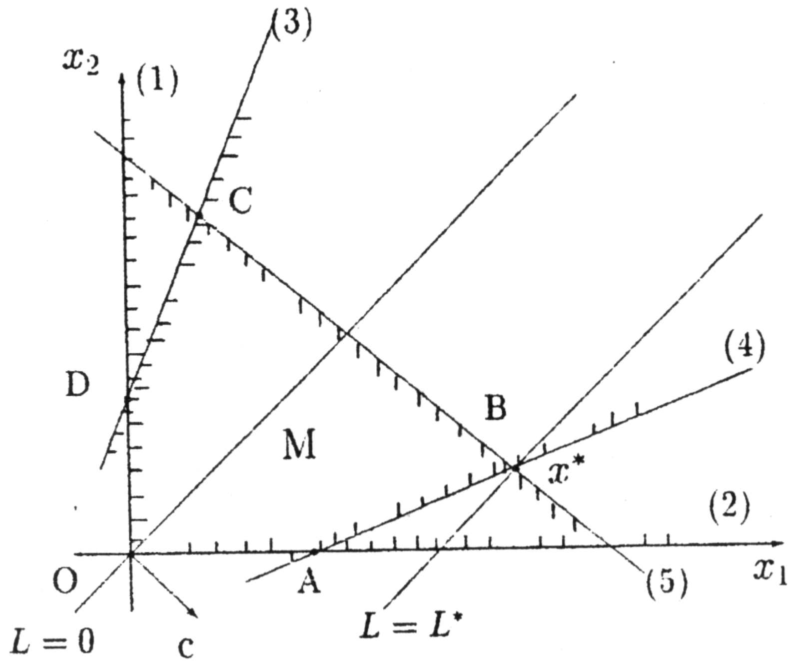

Рис. 7. Пример графического решения

В результате выполнения первого этапа получили допустимую область M – выпуклый пятиугольник OABCD.

Этап 2. *В допустимой области М находим оптимальное решение*.

Строим прямую $L = x_1 - x_2 = 0$, соответствующую линии уровня L=0, и определяем направление возрастания целевой функции $L = x_1 - x_2$, это направление вектора градиента функции $c = (c_1, c_2) = (1, -1)$. Перемещая прямую L параллельно самой себе в направлении вектора $c = (c_1, c_2)$ до тех пор, пока она будет сохранять общие точки с областью допустимых решений, найдем, что в крайнем возможном положении прямая L пройдет через точку $B = x^*$. Этому положению прямой L соответствует значение L^*. Для нахождения координат точки x^* необходимо совместно решить систему уравнений граничных прямых, на которых лежит точка x^*:

$$x_1 - 2x_2 = 2, x_1 + x_2 = 5.$$

В результате получаем искомое оптимальное решение $x^* = (4,1)$. Подставляя значения $x_1^* = 4$ и $x_2^* = 1$ в целевую функцию и в равенства (9), получим оптимальное значение целевой функции $L^* = 4 - 1 = 3$ и оптимальное решение исходной задачи: $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (4,1,9,0,0)$.

2.2.2. ЗАДАНИЯ. РЕШИТЬ ЗАДАЧУ ЛП ГРАФИЧЕСКИ

Во всех заданиях выполняются условия неотрицательности $x_i \geq 0, i = \overline{1,n}$.

1. $L = x_1 - x_2 \to \max$

$$4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15$$
$$2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_4 = -17$$

Ответ: $x^* = (4,1,7,0,0)$

2. $L = 2x_1 + x_2 + x_4 \to \min$

$$x_1 + x_2 + 3x_4 = 9$$
$$x_2 + 3x_4 - x_5 = 6$$
$$x_2 + x_3 + 2x_4 = 8$$

Ответ: $x^* = (0,0,2,3,3)$

3. $L = x_1 + 3x_2 \to \max$

$$x_1 - x_2 \le 1$$
$$2x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 - x_2 \ge 0$$

Ответ: $x^* = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

4. $L = x_1 - 2x_2 \to \min$

$$x_1 - x_2 \le 1$$
$$x_1 + x_2 \ge 2$$
$$x_1 - 2x_2 \le 0$$

Ответ: *решений нет*

5. $L = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$3x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 1$$

Ответ: $x^* = (0,3)$

6. $L = 5x_1 + 3x_2 \to \max$

$$3x_1 + 5x_2 \le 15$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 10$$

Ответ: $x^* = (\frac{20}{19}, \frac{45}{19})$

7. $L = x_1 + x_2 \to \max$

$$2x_1 - x_2 \ge -2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$2x_1 + x_2 \le 6$$

Ответ: $x^* = (\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$

8. $L = x_2 \to \max$

$$3x_2 - 4x_1 \le 0$$
$$2x_1 + x_2 \le 10$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Ответ: $x^* = (3,4)$

9. $L = -4x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 \to \max$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = -1$$
$$x_1 - 3x_2 - x_4 = -13$$
$$4x_1 + x_2 + x_5 = 26$$
$$x_1 - 3x_2 + x_6 = 0$$

Ответ: $x^* = (5,6,5,0,0,13)$

10. $L = x_1 + 3x_2 \to \max$

$$2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_4 + x_5 = -9$$
$$6x_2 + x_3 + x_4 = 36$$

Ответ: $x^* = (3,6,0,0,3,7)$

11. $L = 2x_1 + 4x_2 \to \max$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = -6$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4$$
$$3x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

Ответ: *решений нет*

12. $L = x_1 + 3x_2 \to \min$

$$x_1 + 2x_2 \ge 3$$
$$4x_1 + x_2 \ge 6$$
$$8x_1 + x_2 \ge 4$$
$$x^* = (3,0)$$

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Для решения задачи ЛП в каноническом виде в зависимости от свойств канонической формы задачи возможно использование следующих методов:

1) Если известно базисное решение и оно допустимое, то можно использовать *прямой симплекс-метод* (обычно в этом случае опускается слово «прямой» и говорят об использовании симплекс-метода).

2) Если известно базисное решение и оно недопустимое, то можно использовать *двойственный симплекс-метод*.

3) Если не известно базисное решение или оно недопустимое, то для построения начального базисного допустимого решения используется *метод искусственного базиса.*

3.1. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Рассмотрим задачу ЛП в канонической форме:

$$L = \bar{c}_1 x_1 + \ldots + \bar{c}_n x_n \to \min, \tag{12}$$

$$\begin{array}{l} \bar{a}_{11} x_1 + \ldots + \bar{a}_{1n} x_n = \bar{b}_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{a}_{m1} x_1 + \ldots + \bar{a}_{mn} x_n = \bar{b}_m \,, \end{array} \tag{13}$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \tag{14}$$

Будем предполагать, что:

1) $\bar{b}_i \geq 0, i = \overline{1, m}$ (это условие не ограничивает общности, поскольку иначе умножим соответствующее уравнение на –1);

2) уравнения системы (13) линейно независимы (это условие также не ограничивает общности, поскольку иначе исключаем линейно зависимые уравнения);

3) система (13)–(14) совместна и $m < n$ (если $m = n$ и если система уравнений (13) имеет в этом случае решение, то это решение единствен-

ное – и задача оптимизации теряет смысл или является тривиальной, поскольку будем выбирать оптимальное решение из одного возможного).

При сделанных предположениях можно выбрать m неизвестных (к примеру, опять не ограничивая общности, $x_1,..., x_m$, поскольку иначе можно просто перенумеровать переменные) таких, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, не обращался в ноль.

Тогда задача (12)–(14) с помощью преобразований Жордана-Гаусса может быть приведена к виду, который называется *специальной формой задачи* ЛП:

$$\begin{gathered}L = \gamma_0 - (\gamma_{m+1} x_{m+1} + ... + \gamma_n x_n) \to \min, \\ x_1 = b_1 - (a_{1m+1} x_{m+1} + ... + a_{1n} x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = b_m - (a_{mm+1} x_{m+1} + ... + a_{mn} x_n). \\ x_1 \geq 0,..., x_n \geq 0, \\ b_i \geq 0, i = \overline{1, m}.\end{gathered} \tag{15}$$

Одно из допустимых решений этой задачи можно найти, если переменные $x_{m+1},..., x_n$ положить равными нулю. Такое решение называется *допустимым базисным решением*. Оно имеет вид

$$x_1 = b_1,..., x_m = b_m, x_{m+1} = 0,..., x_n = 0.$$

Этому решению соответствует значение целевой функции $L = \gamma_0$. Переменные $x_1,..., x_m$ называют *базисными*, набор переменных $x_1,..., x_m$ называют *базисом*, а переменные $x_{m+1},..., x_n$ называют *небазисными* или *свободными*. Число возможных базисов в задаче размерности n с количеством ограничений m не превосходит величину C_n^m.

Известно, что каждому допустимому базисному решению соответствует вершина многоугольника допустимых решений и оптимальное решение задачи (при условии его существования) достигается хотя бы в одной из вершин многоугольника. Поэтому оптимальное решение задачи ЛП находится среди допустимых базисных решений и, в худшем случае, перебрав все допустимые базисные решения, найдем оптимальное решение задачи. Существуют рациональные способы последовательного перебора допустимых базисных решений, к которым относится симплекс-метод (прямой симплекс-метод). В двойственном симплекс-методе, в отличие от прямого, ведется последовательный перебор недопустимых базисных решений до тех пор, пока не будет найдено допустимое базисное решение, которое и является оптимальным.

3.1.1. АЛГОРИТМ СИМПЛЕКС-МЕТОДА ДЛЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА МИНИМУМ

Шаг 0. Подготовительный этап. Приводим задачу ЛП к канонической форме (12)-(14) (с целевой функцией на минимум) и затем - к специальной форме (15).

Шаг 1. Составляем симплекс-таблицу (*симплексную таблицу*), соответствующую специальной форме (15):

	b	x_{m+1}	x_q	x_n
L	γ_0	γ_{m+1}	γ_q	γ_n
x_1	b_1	a_{1m+1}	a_{1q}	a_{1n}
..	..		....	
x_p	b_p	a_{pm+1}	a_{pq}	a_{pn}
..	..		....	
x_m	b_m	a_{mm+1}	a_{mq}	a_{mn}

Заметим, что этой таблице соответствует допустимое базисное решение $x=(b_1,...,b_m,0,...,0)$ задачи (15), значение целевой функции на этом решен $L(x)=\gamma_0$.

Шаг 2. *Проверка на оптимальность*.

Если среди элементов *индексной строки* симплекс-таблицы $\gamma_{m+1},...,\gamma_n$ нет ни одного положительного элемента $(\gamma_{m+1} \le 0,...,\gamma_n \le 0)$, то оптимальное решение задачи ЛП найдено – это допустимое базисное решение $x = (b_1,...,b_m,0,...,0)$, соответствующее симплекс-таблице:

$$x_1^* = b_1,..., x_m^* = b_m, x_{m+1}^* = 0,..., x_n^* = 0, L^* = \gamma_0 .$$

Алгоритм завершает работу. Иначе, переходим к следующему шагу.

Шаг 3. *Проверка на неразрешимость*.

Если среди $\gamma_{m+1},...,\gamma_n$ есть положительный элемент $\gamma_l > 0$, а в соответствующем столбце $(a_{1l},...,a_{ml})$ нет ни одного положительного элемента $(a_{1l} \le 0,...,a_{ml} \le 0)$, то целевая функция L является неограниченной снизу на допустимом множестве. В этом случае оптимального решения не существует по причине неограниченности целевой функции на допустимом множестве. Алгоритм завершает работу. Иначе, переходим к следующему шагу.

Шаг 4. *Выбор ведущего столбца* q.

Среди элементов $\gamma_{m+1},...,\gamma_n$ выбираем максимальный положительный элемент $\gamma_q = \max\limits_{\gamma_j > 0} \gamma_j$.Этот столбец с номером q объявляем *ведущим* (*разрешающим*).

Шаг 5. *Выбор ведущей строки* p.

Среди положительных элементов столбца $a_{1q},...,a_{mq}$ находим элемент a_{pq}, для которого выполняется равенство – *ключевое отношение для прямого симплекс-метода*

$$\frac{b_p}{a_{pq}} = \min_{a_{iq} > 0} \frac{b_i}{a_{iq}} .$$

Строку p объявляем *ведущей* (*разрешающей*). Элемент a_{pq} объявляем *ведущим* (*разрешающим*).

Шаг 6. *Преобразование симплексной таблицы*.

Составляем новую симплекс-таблицу, в которой:

а) вместо базисной переменной x_p записываем x_q, вместо небазисной переменной x_q записываем x_p;

б) ведущий элемент заменяем обратной величиной $\lambda = \dfrac{1}{a_{pq}}$;

в) все элементы ведущего столбца (кроме a_{pq}) умножаем на $-\lambda$;

г) все элементы ведущей строки (кроме a_{pq}) умножаем на λ;

д) оставшиеся элементы симплексной таблицы преобразуются по следующей схеме «*прямоугольника*» (преобразуемый элемент и соответствующие ему три сомножителя являются вершинами «прямоугольника» в симплексной таблице):

из элемента вычитается произведение трех сомножителей:

первый – соответствующий элемент ведущего столбца;

второй – соответствующий элемент ведущей строки;

третий – обратная величина ведущего элемента λ.

Шаг 7. Переход к следующей итерации осуществляется возвратом к шагу 2.

3.1.2. АЛГОРИТМ СИМПЛЕКС-МЕТОДА ДЛЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА МАКСИМУМ

Задача ЛП на максимум отличается от задачи ЛП на минимум только поведением целевой функции, информация о целевой функции содержится в индексной строке симплексной таблицы, поэтому алгоритм симплекс-метода для задачи на максимум отличается от алгоритма для задачи на минимум только знаками индексной строки коэффициентов в целевой функции $\gamma_{m+1},...,\gamma_n$, а именно:

<u>*на шаге* 2</u>: проверяем неравенства $\gamma_{m+1} \geq 0,...,\gamma_n \geq 0$;

<u>*на шаге* 3</u>: если в выбранном столбце $(a_{1l},...,a_{ml})$ с условиями $(a_{1l} \leq 0,...,a_{ml} \leq 0)$ выполняется неравенство $\gamma_l < 0$, то целевая функция L является неограниченной сверху на допустимом множестве.

<u>*на шаге* 4</u>: выбираем среди элементов $\gamma_{m+1},...,\gamma_n$ минимальный отрицательный элемент $\gamma_q = \min\limits_{\gamma_j < 0} \gamma_j$.

3.1.3. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Решить следующую задачу, записанную в специальной форме (15)

$$
\begin{aligned}
&L = 0 - (x_1 + 2x_2) \to \min, \\
&y_1 = 3 - (x_1 + x_2), \\
&y_2 = 1 - (-\tfrac{1}{2}x_1 + x_2), \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

<u>*Шаг* 1.</u> Составим симплексную таблицу:

	b	x_1	x_2
L	0	1	2
y_1	3	1	1
y_2	1	$-1/2$	1

Шаг 2. Так как задача на минимум и коэффициенты строки целевой функции неотрицательны (среди коэффициентов есть положительные), то начальное базисное решение

$$y_1 = 3, y_2 = 1, x_1 = 0, x_2 = 0,$$

соответствующее симплекс-таблице, не является оптимальным. Значение целевой функции для этого базиса L=0.

Шаг 3. Проверка показывает, что неразрешимости нет, поскольку нет элемента $\gamma_l > 0$, для которого в соответствующем столбце $(a_{1l},..., a_{ml})$ нет ни одного положительного элемента, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Выбираем ведущий столбец из условия: максимальный положительный элемент $\gamma_q = \max\limits_{\gamma_j > 0} \gamma_j$ – это столбец, соответствующий переменной x_2.

Шаг 5. Выбираем ведущую строку. Для этого находим для положительных элементов ведущего столбца $\min\left\{\frac{3}{1}, \frac{1}{1}\right\} = 1$. Следовательно, ведущая строка соответствует переменной y_2.

Шаг 6. Проводим преобразование симплексной таблицы, вводя переменную x_2 в базис и выводя переменную y_2 из базиса. В результате получим таблицу:

	b	x_1	y_2
L	–2	2	–2
y_1	2	3/2	–1
x_2	1	−1/2	1

Первая итерация метода завершена.

Переходим к новой итерации. Полученная таблица неоптимальная. Базисное решение, соответствующее таблице, имеет вид

$$y_1 = 2, x_2 = 1, x_1 = 0, y_2 = 0.$$

Значение целевой функции на этом базисе $L = -2$.

Ведущий столбец здесь – столбец, соответствующий переменной x_1. Ведущая строка – строка, соответствующая переменной y_1. После проведения преобразований получим симплексную таблицу:

	b	y_1	y_2
L	$-14/3$	$-4/3$	$-2/3$
x_1	$4/3$	$2/3$	$-2/3$
x_2	$5/4$	$1/3$	$2/3$

Вторая итерация метода завершена.

Переходим к новой итерации. Индексная строка (строка целевой функции) не содержит положительных значений, значит, соответствующее базисное решение $x_1^* = 4/3, x_2^* = 5/4, y_1^* = 0, y_2^* = 0, L^* = -14/3$ является оптимальным, и алгоритм завершает работу.

3.1.4. ЗАДАНИЯ. РЕШИТЬ ЗАДАЧУ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Во всех заданиях выполняются условия неотрицательности $x_i \geq 0, i = \overline{1,n}$.

1. $L = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \min$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$Ответ: L^* = -12, x^* = (2,0,4)$

2. $L = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$Ответ: L^* = 1, x^* = (1,0,0)$

3. $L = x_1 \to \max$

$x_1 - 2x_2 \le 0$

$x_1 - x_2 \ge -1$

$x_1 + x_2 \ge 1$

Ответ $: L$ – *неограничена*

4. $L = -x_1 + x_2 \to \max$

$x_1 + 2x_2 \le 10$

$x_1 + 2x_2 \ge 2$

$2x_1 + x_2 \le 10$

Ответ $: L^* = 5, x^* = (0{,}5)$

5. $L = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$

$x_1 + x_2 + x_3 \ge 1$

$x_1 + x_2 + 6x_3 \le 6$

Ответ $: L^* = 18, x^* = (0{,}6{,}0)$

6. $L = x_1 - x_2 + x_3 \to \max$

$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$

Ответ $: L^* = \frac{7}{3}, x^* = (\frac{5}{3}, 0, \frac{2}{3})$

7. $L = 2x_2 - x_3 \to \max$

$x_1 + 5x_2 \ge 0$

$2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 4$

$-x_1 - x_3 \le 4$

$x_2 \le 3$

Ответ$: L^* = 6, x^* = (0{,}3{,}0)$

8. $L = x_4 - x_5 \to \max$

$-2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 \ge 0$

$2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \ge 0$

$x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 \ge 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Ответ: L - *неограничена*

9. $L = x_1 - x_2 \to \min$

$x_1 + 2x_2 - 3x_4 \ge 0$

$x_1 + x_3 + 2x_4 \le 0$

$x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 3$

Ответ $: L$ – *неограничена*

10. $L = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$2x_1 - x_2 + x_3 = 6$

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$

Ответ $: L^* = 26, x^* = (0{,}10{,}16)$

11. $L = x_1 + 2x_2 - x_3 \to min$

$x_1 + x_3 \ge 4$

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$

Ответ $: L^* = -10, x^* = (0{,}0{,}10).$

12. $L = -x_1 + x_2 \to min$

$x_1 - x_3 = 5$

$x_1 + x_2 + x_3 = 7$

Ответ $: L^* = -6, x^* = (6{,}0{,}1).$

13. $L = 1 - x_2 - 3x_3 \to \min$

$$x_1 + x_3 + x_5 = 0$$
$$2x_2 + x_4 + x_6 = 1$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 0$$

Ответ: $L^* = 1, x^* = (0,0,0,0,0,1).$

14. $L = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 \ge 0$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 \le 2$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Ответ: *нет решений*

15. $L = -x_1 + x_2 \to \max$

$$0.5x_1 + x_2 \le 5$$
$$0.5x_1 + x_2 \ge 2$$
$$x_1 + 0.5x_2 \le 5$$

Ответ: $L^* = 5, x^* = (0,5).$

16. $L = -2x_2 \to \min$

$$4x_1 - x_2 \le 5$$
$$-2x_1 + 2x_2 \ge 1$$
$$2x_1 - x_2 \le 1$$

Ответ: $L^* = -10, x^* = (0,5).$

17. $L = x_1 + x_2 \to \min$

$$x_1 + x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 \le 2$$
$$x_3 \le 4$$

Ответ: $L^* = 0, x^* = (0,0,1).$

18. $L = x_1 - x_2 \to \max$

$$2x_1 + x_2 \le 5$$
$$2x_1 + x_2 \ge 2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10$$

Ответ: $L^* = \frac{5}{2}, x^* = (\frac{5}{2},0).$

19. $L = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$

$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 1$$
$$x_1 + x_2 + 6x_3 \le 6$$

Ответ: $L^* = 18, x^* = (0,6,0).$

20. $L = x_1 - x_2 + x_3 \to \max$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

Ответ: $L^* = \frac{7}{3}, x^* = (\frac{5}{3},0,\frac{2}{3}).$

21. $L = x_1 - x_2 \to min$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_4 \ge 0$$
$$x_1 + x_3 + 2x_4 \ge 0$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3$$

Ответ: $L^* = -1\frac{1}{2}, x^* = (0,1\frac{1}{2},0,0)$

22. $L = -3x_1 + x_2 \to max$

$$-2x_1 - x_2 \le 2$$
$$-x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_2 \le 7$$

Ответ: $L^* = 3, x^* = (0,3)$

3.2. МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА

Симплекс-метод применяется для решения задачи ЛП, представленной в специальной форме:

$$
\begin{aligned}
&L = \gamma_0 - (\gamma_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \gamma_n x_n) \to \min(\max),\\
&x_1 = \bar{b}_1 - (\bar{a}_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_m = \bar{b}_m - (\bar{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{mn}x_n),\\
&x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0,\\
&\bar{b}_i \ge 0, i = \overline{1, m}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Характерная особенность задачи (16) – известное базисное допустимое решение

$$x_1 = \bar{b}_1, \ldots, x_m = \bar{b}_m, x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Чтобы применить симплекс-метод для решения задачи ЛП в произвольной форме, необходимо привести эту задачу к виду (16), т. е. выделить начальное допустимое базисное решение. Для этого в симплекс-метод решения задачи ЛП в произвольной форме вводят подготовительный этап. Один из методов для реализации подготовительного этапа называется *методом искусственного базиса* и состоит в следующем.

3.2.1. АЛГОРИТМ МЕТОДА ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА

Шаг 1. Приводим задачу ЛП к канонической форме с неотрицательными правыми частями $b_i \ge 0, i = \overline{1, m}$:

$$
\begin{aligned}
&L = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \min(\max),\\
&a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,\\
&x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Шаг 2. В каждую i-ю строку ограничений (17) вводим *искусственную* неотрицательную переменную z_i и строим *вспомогательную задачу* ЛП вида:

$$\begin{aligned}
&\omega = z_1 + \ldots + z_m \to \min, \\
&a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + z_1 = b_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + z_m = b_m, \\
&x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \\
&z_1 \geq 0, \ldots, z_m \geq 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

В задаче (18) $z_1 = b_1, \ldots, z_m = b_m, x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ – допустимое базисное решение, и задача (18) легко может быть записана в специальной форме (16). Для этого из каждого ограничения в собственном смысле системы (18) выражаем переменную z_i, а целевую функцию выражаем через свободные переменные $x_1, \ldots, x_n$, подставляя z_i в целевую функцию задачи (18):

$$\begin{aligned}
&\omega = z_1 + \ldots + z_m = \sum_{i=1}^{m}(b_1 - (a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)) = \\
&= \sum_{i=1}^{m} b_i - (\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_1 + \ldots + \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_n) = \\
&= \omega_0 - (\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n).
\end{aligned}$$

Шаг 3. Для специальной формы вспомогательной задачи (18) строим симплексную таблицу

	b	x_1	$\cdots$	x_n
ω	ω_0	ω_1	$\cdots$	ω_n
z_1	b_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	…………………		
z_m	b_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}

Находим оптимальное решение вспомогательной задачи с помощью симплекс-метода.

Шаг 4. Если $\min\omega = 0$ и все переменные $z_1,..., z_m$ являются небазисными, то m переменных из списка $x_1,..., x_n$ войдут в базис (не ограничивая общности, будем считать, что это первые m переменных из списка $x_1,..., x_n$, поскольку иначе можно перенумеровать переменные) и тогда система ограничений, соответствующих итоговой оптимальной таблице вспомогательной задачи (18), будет иметь вид

$$\begin{aligned} &x_1 + \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} + ... + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1, \\ &.................................... \\ &x_m + \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} + ... + \bar{a}_{mn}x_n = \bar{b}_m. \end{aligned} \qquad (19)$$

Так как переменные $z_i = 0, i = \overline{1,m}$ (они небазисные в итоговой оптимальной таблице вспомогательной задачи (18)), то их исключили из системы (19), не нарушив при этом равенств. Тогда, выражаем целевую функцию основной задачи $L = c_1x_1 + ... + c_nx_n$ через небазисные переменные $x_{m+1},..., x_n$, подставляя в целевую функцию значения $x_1,..., x_m$ из системы (19), получим исходную задачу (17) в виде (16). Алгоритм метода искусственного базиса завершает работу.

Шаг 5. Если $\min\omega = 0$, но в базисе остались искусственные переменные z_i, для которых $\bar{b}_i = 0$ (это вырожденный случай), то проводим для каждой искусственной переменной z_i из базиса следующее преобразование симплексной таблицы.

Выбираем ведущим столбцом столбец такой переменной x_j, для которой элемент индексной строки нулевой, т. е. $\bar{\omega}_j = 0$, а элемент столбца – положителен, т. е. $\bar{a}_{ij} > 0$. В этом случае строка искусственной переменной z_i будет ведущей и после стандартного преобразования симплексной таблицы (шаг 6 из прямого симплекс-метода) искусственная переменная z_i выведется из базиса. В результате получим симплексную таблицу, соответствующую шагу 4.

<u>*Шаг* 6.</u> Если $\min \omega > 0$, то допустимого решения в исходной задаче (17) не существует. Объясняется это следующим: не могут все искусственные переменные $z_1,...,z_m$ быть равными нулю в системе ограничений задачи (18), поскольку $\min \omega > 0$. Это, в свою очередь, значит, что система ограничений задачи (17), в которой все z_i =0, несовместна.

Процесс построения начального допустимого базисного решения исходной задачи (17) завершается следующим заключением: задача (17) не разрешима по причине отсутствия допустимых решений.

3.2.2. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА

Определить начальное допустимое базисное решение для следующей задачи ЛП

$$\begin{aligned}
&L = 3x_1 - x_2 \to \min,\\
&3x_1 - 2x_2 \le 3,\\
&-5x_1 - 4x_2 \le -10\\
&2x_1 + x_2 \le 5,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

<u>*Шаг* 1</u>. Приведем задачу к канонической форме с неотрицательными правыми частями:

$$\begin{aligned}
&L = -3x_1 + x_2 \to \min,\\
&3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3,\\
&5x_1 + 4x_2 - x_4 = 10\\
&2x_1 + x_2 + x_5 = 5,\\
&x_i \ge 0, i = \overline{1,5}.
\end{aligned}$$

Шаг 2. Заметим, что переменные x_3 и x_5 можно использовать для введения в исходный базис специальной формы. Это следует из того, что при неотрицательных правых частях уравнений каждая из этих переменных входит только в одно из уравнений и при этом с коэффициентом +1. В результате в первую и третью строку ограничений можно не вводить искусственные переменные. В этом случае количество итераций в симплекс-методе, примененном к решению вспомогательной задачи, уменьшится на две итерации (по количеству не введенных искусственных переменных). Во вторую строку ограничений вводим искусственную переменную z, потому что в этой строке нет переменной, которую можно взять базисной, не проводя при этом дополнительных преобразований всей системы ограничений.

Полученная вспомогательная задача в итоге имеет вид

$$\begin{aligned}
&\omega = z \to \min,\\
&3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3,\\
&5x_1 + 4x_2 - x_4 + z = 10,\\
&2x_1 + x_2 + x_5 = 5,\\
&x_i \ge 0, i = \overline{1,5}, z \ge 0.
\end{aligned}$$

Заметим, что построенная вспомогательная задача имеет только одну искусственную переменную (в отличие от задачи (18) в общем виде) и легко может быть записана в специальной форме (16). Для этого из первого ограничения выражаем x_3, из второго ограничения выражаем z, из третьего ограничения выражаем x_5, а целевую функцию выражаем через свободные переменные x_1, x_2, x_4, подставляя выражение z из второго ограничения в целевую функцию задачи. В результате получаем специальную форму

$$\begin{aligned}
&\omega = 10 - (5x_1 + 4x_2 - x_4) \to \min,\\
&x_3 = 3 - (3x_1 - 2x_2),\\
&z = 10 - (5x_1 + 4x_2 - x_4),\\
&x_5 = 5 - (2x_1 + x_2),\\
&x_i \ge 0, i = \overline{1,5}, z \ge 0.
\end{aligned}$$

Шаг 3. Выпишем соответствующую вспомогательной задаче симплексную таблицу

	b	x_1	x_2	x_4
ω	10	5	4	–1
x_3	3	3	–2	0
z	10	5	4	–1
x_5	5	2	1	0

Для дополнительного сокращения количества итераций рекомендуется ведущий столбец выбирать не по максимальному положительному элементу строки целевой функции, а так, чтобы из базиса выводилась искусственная базисная переменная (для этого соответствующая ведущая строка должна быть строкой искусственной переменной). Так, выбрав в качестве ведущего столбец переменной x_2, получим ведущую строку – строку с переменной z (а выбирая ведущим столбцом x_1 по максимальному значению положительных элементов индексной строки, получили бы ведущую строку x_3, и из базиса выводилась бы переменная x_3 – и это была бы дополнительная итерация симплекс-метода).

Итак, искусственная переменная z выйдет из базиса, а переменная x_2 введется в базис. В результате симплексная таблица преобразуется к виду:

	b	x_1	z	x_4
ω	0	0	–1	0
x_3	8	11/2	1/2	–1/2
x_2	5/2	5/4	1/4	–1/4
x_5	5/2	3/4	–1/4	1/4

Шаг 4. Так как значение $\omega = 0$, то полученный базис $x_3 = 8, x_2 = 6/2, x_5 = 5/2, x_1 = x_4 = 0$ является начальным допустимым базисом для исходной задачи ЛП. Так как искусственная переменная z =0 (z - небазисная переменная в итоговой оптимальной таблице вспомогательной задачи), то z исключили из системы ограничений вспомогательной задачи, не нарушив при этом равенств. Чтобы выразить целевую функцию $L = 3x_1 - x_2$ через небазисные переменные x_1, x_4, подставим в целевую функцию значение базисной переменной $x_2 = \frac{5}{2} - (\frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4)$, выписанное из четвертой строки симплексной таблицы. Получим:

$$L = 3x_1 - \tfrac{5}{2} + \tfrac{5}{4}x_1 - \tfrac{1}{4}x_4 = -\tfrac{5}{2} - (\tfrac{17}{4}x_1 + \tfrac{1}{4}x_4).$$

В результате исходная задача получает специальную форму:

$$\begin{aligned}
&L = -\tfrac{5}{2} - (\tfrac{17}{4}x_1 + \tfrac{1}{4}x_4),\\
&x_3 = 8 - (\tfrac{11}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}),\\
&x_2 = \tfrac{5}{2} - (\tfrac{5}{4}x_1 - \tfrac{1}{4}x_4),\\
&x_5 = \tfrac{5}{2} - (\tfrac{3}{4}x_1 + \tfrac{1}{4}x_4),\\
&x_i \geq 0, i = \overline{1,5},
\end{aligned}$$

для которой симплексная таблица имеет вид:

	b	x_1	x_4
L	–5/2	17/4	1/4
x_3	8	11/2	–1/2
x_2	5/2	5/4	–1/4
x_5	5/2	3/4	1/4

что и требовалось получить, решая вспомогательную задачу симплекс-методом.

3.2.3. ЗАДАНИЯ. ОПРЕДЕЛИТЬ ДОПУСТИМОЕ БАЗИСНОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА

Во всех заданиях выполняются условия неотрицательности $x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$.

1. $L = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \max$
$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -1$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

2. $L = -2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = -4$$
$$-2x_1 + x_2 + 5x_3 = 3$$

3. $L = x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$$

4. $L = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$
$$3x_1 + x_2 - x_3 = 5$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$$

5. $L = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$
$$x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2$$

6. $L = x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 \to \max$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 3$$

7. $L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

8. $L = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2$$

9. $L = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5$$
$$2x_1 - x_3 + x_4 = 1$$

10. $L = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max$
$$x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5$$
$$x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9$$

11. $L = x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

12. $L = x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \to \max$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = -1$$

13. $L = x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = -5$$
$$2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$$

14. $L = 2x_1 - 21x_2 + 7x_3 \to \min$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$
$$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 12$$

15. $L = x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

16. $L = x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 \to \min$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2$$
$$x_1 + x_3 - 2x_4 = 3$$

17. $L = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$

$$x_1 - x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

18. $L = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

19. $L = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3$$

20. $L = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 4$$
$$2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

21. $L = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

22. $L = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 5$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$$

23. $L = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10$$
$$4x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 2$$

24. $L = 2x_1 + x_3 + x_4 \to \max$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3$$

25. $L = x_1 + x_2 \to \min$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

26. $L = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \max$

$$x_1 - x_2 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

3.3. ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Метод работает с теми же симплексными таблицами, что и прямой симплекс-метод для задачи на минимум. Но в двойственном симплекс-методе для неоптимальной симплекс-таблицы среди значений в столбце b имеются отрицательные значения. Такую таблицу называют *недопустимой симплекс-таблицей*. Поэтому в двойственном симплекс-методе сначала определяется переменная, подлежащая выводу из базиса (эта переменная соответствует отрицательному значению b_i, именно эта переменная «нарушает» допустимость соответствующего базисного решения), а затем определяется переменная, вводимая в базис.

3.3.1. АЛГОРИТМ ДВОЙСТВЕННОГО СИМПЛЕКС-МЕТОДА

<u>*Шаг* 1.</u> Начинаем с симплексной таблицы, где $\gamma_{m+1} \le 0,\dots,\gamma_n \le 0$. Такая таблица называется *двойственно допустимой*.

	b	x_{m+1}	$\cdots$	x_n
L	γ_0	γ_{m+1}	$\cdots$	γ_n
x_1	b_1	a_{1m+1}	$\cdots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		…………..	
x_m	b_m	a_{mm+1}	$\cdots$	a_{mn}

<u>*Шаг* 2.</u> <u>*Проверка на оптимальность*</u>. Если $b_i \ge 0, i=\overline{1,m}$, то решение $x^* = (b_1,\dots,b_m,0,\dots,0)$ – оптимальное для задачи на минимум (поскольку преобразования начинались с двойственно допустимой симплексной таблицы, а условия $\gamma_{m+1} \le 0,\dots,\gamma_n \le 0$ вместе с условиями $b_i \ge 0, i=\overline{1,m}$ обеспечивают оптимальность базисного допустимого решения для задачи на минимум). Алгоритм завершает работу. Иначе, переходим к следующему шагу.

<u>*Шаг* 3.</u> <u>*Проверка на неразрешимость*</u>. Если для номеров i, для которых $b_i < 0$, хотя бы в одной строке ($a_{k\,m+1}, \dots, a_{k\,n}$), $k=i$, нет отрицательных

элементов, то двойственная целевая функция неограниченная и, следовательно, прямая задача не имеет допустимых решений. Обоснование этого следующее: среди уравнений-ограничений задачи появляется уравнение, у которого правая часть отрицательна ($b_i < 0$), а все коэффициенты при переменных – положительны (в соответствующей строке нет отрицательных элементов). Но при этом в ограничениях задачи есть условия неотрицательности, которые не могут выполняться в таком уравнении; другими словами: уравнение неразрешимо с неотрицательными значениями переменных. Алгоритм завершает работу. Иначе, переходим к следующему шагу.

<u>Шаг</u> <u>4.</u> *<u>Выбор ведущей строки</u>*. Выбираем среди номеров i, для которых $b_i < 0$, номер k с максимальным по модулю значением

$$b_k = \max_{b_i < 0} |b_i|.$$

Строка k объявляется *ведущей*.

<u>Шаг</u> <u>5.</u> *<u>Выбор ведущего столбца s</u>*. Выбираем среди отрицательных элементов строки ($a_{k\ m+1}$,…, $a_{k\ n}$) элемент с номером s, для которого выполняется равенство - *ключевое отношение для двойственного симплекс-метода*

$$\frac{\gamma_s}{a_{ks}} = \min_{a_{kj} < 0} \frac{\gamma_j}{a_{kj}}.$$

Ключевое отношение обеспечивает сохранение двойственной допустимости симплексной таблицы.

Столбец s объявляется *ведущим*, а элемент a_{ks} – *ведущим элементом*.

<u>Шаг</u> <u>6.</u> Проводим стандартное *преобразование симплексной таблицы* (*Шаг* 6 из прямого симплекс-метода).

<u>Шаг</u> <u>7</u>. Переход к следующей итерации осуществляется возвратом к шагу 2.

3.3.2. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВОЙСТВЕННЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Решить задачу ЛП двойственным симплекс-методом:

$$\begin{aligned}&L = x_1 + x_2 \to \min,\\ &x_1 - x_2 + x_3 \geq 2,\\ &2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1,\\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.\end{aligned}$$

<u>Шаг</u> <u>1.</u> Приводим задачу к каноническому виду:

$$\begin{aligned}&L = x_1 + x_2 \to min,\\ &-x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = -2,\\ &-2x_1 - x_2 + x_3 + y_2 = -1,\\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Знаки в ограничениях заменили противоположными для того, чтобы переменные y_1 и y_2 можно было взять в качестве базисных. Симплексная таблица примет вид

	b	x_1	x_2	x_3
L	0	–1	–1	0
y_1	–2	–1	1	–1
y_2	–1	–2	–1	1

<u>Шаг</u> <u>2.</u> Таблица двойственно-допустимая, но не оптимальная, поскольку существуют отрицательные значения в столбце b.

<u>Шаг</u> <u>3</u>. Неразрешимости нет, поскольку в строке переменных y_1 и y_2 есть отрицательные значения, поэтому переходим на *Шаг* 4.

<u>Шаг</u> <u>4.</u> Выбираем ведущую строку – это строка переменной y_1 (строка с максимальным по модулю отрицательным значением в столбце b).

<u>Шаг</u> <u>5.</u> Ведущий столбец – это столбец переменной x_3 (поскольку в этом столбце достигается минимум в ключевом отношении).

Шаг 6. После стандартного преобразования таблица принимает вид

	b	x_1	x_2	y_1
L	0	–1	–1	0
x_3	2	1	–1	–1
y_2	–3	–3	0	1

Первая итерация метода завершена.

Переходим к новой итерации. Так как в столбце b есть отрицательная переменная $y_2 = -3$, то эту строку выбираем ведущей, а столбец переменной x_1 будет ведущим столбцом (в данном случае не потребовалось пересчитывать ключевое отношение, поскольку в ведущей строке только одно отрицательное значение, соответствующее переменной x_1). После преобразования получаем таблицу:

	b	y_2	x_2	y_1
L	1	–1/3	–1	–
x_3	1	1/3	–1	–2/3
x_1	1	–1/3	0	–1/3

Вторая итерация метода завершена.

Переходим к новой итерации. Так как в столбце b нет отрицательных значений, то таблица является оптимальной. Соответствующее оптимальное решение имеет вид $x_3^* = 1, x_1^* = 1, x_2^* = 0, L^* = 1$.

3.3.3. ЗАДАНИЯ. РЕШИТЬ ЗАДАЧУ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДВОЙСТВЕННЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Во всех заданиях выполняются условия неотрицательности $x_i \ge 0, i = \overline{1,n}$.

1. $L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$

$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3$

$-x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 2$

$Ответ: L^* = 4, x^* = (0,2,0,1,0)$

2. $L = x_1 + x_2 \to \min$

$x_1 - x_2 + x_3 \ge 2$

$2x_1 + x_2 - x_3 \ge 1$

$Ответ: L^* = 1, x^* = (1,0,1)$

3. $L = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$

$x_1 + x_2 - x_3 \ge 8$

$x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 2$

$-2x_1 - 8x_2 + 3x_3 \ge 1$

$Ответ: L^* = 84, x^* = (25,0,17)$

4. $L = x_1 + 3x_2 + \frac{2}{3}x_3 \to \min$

$x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 2$

$3x_1 + x_2 + x_3 \ge 3$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 1$

$Ответ: L^* = \frac{5}{3}, x^* = (1,0,1)$

5. $L = 2x_1 + x_3 \to \min$

$x_1 - 4x_2 \ge 1$

$2x_1 - x_2 + x_3 \ge 4$

$Ответ: L^* = 4, x^* = (1,0,2)$

6. $L = x_1 + x_2 \to \min$

$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \ge 2$

$-x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \ge 1$

$Ответ: L^* = 0, x^* = (0,0,0,2)$

7. $L = x_1 + 2x_2 \to \min$

$x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 1$

$x_2 - x_3 \ge 1$

$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 1$

$Ответ: L^* = 4, x^* = (2,1,0)$

8. $L = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \ge 3$

$-2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \ge -1$

$Ответ: L^* = 2, x^* = (1,1,0,0)$

9. $L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge 2$$
$$-x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \ge 1$$

Ответ: $L^* = 5, x^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0)$

10. $L = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$

$$2x_1 + 4x_2 - x_4 = 5$$
$$-3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 4$$

Ответ: $L^* = \frac{19}{4}, x^* = (0, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, 0, 0)$

11. $L = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 3$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \ge 1$$

Ответ: $L^* = \frac{5}{2}, x^* = (2, \frac{1}{2}, 0, 0)$

12. $L = 3x_1 + x_2 \to \min$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$
$$x_1 - x_2 - x_4 = 3$$

Ответ: $L^* = 37, x^* = (10, 7, 0, 0)$

13. $L = 2 + 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 \to \min$

$$10x_1 - 2x_2 + 4x_3 \ge 6$$
$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 \ge 3$$
$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 4$$

Ответ: $L^* = 8, x^* = (3, 0, 0)$

14. $L = 2x_1 + 4x_2 \to \min$

$$-x_1 + 5x_2 \ge 2$$
$$-2x_1 + 2x_2 \ge 4$$
$$2x_1 + 2x_2 \ge 6$$

Ответ: $L^* = 11, x^* = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$

15. $L = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3$$
$$-x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_5 = 2$$

Ответ: $L^* = \frac{7}{3}, x^* = (0, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$

16. $L = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$

$$-x_1 - x_2 - x_3 \le -2$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 \ge 1$$

Ответ: $L^* = 2, x^* = (1, 0, 1)$

17. $L = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$x_1 + x_2 \ge 1$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2$$
$$2x_1 - x_3 \ge 1$$

Ответ: $L^* = 1, x^* = (1, 0, 0)$

18. $L = 2x_1 \to \max$

$$x_1 - x_2 \le 2$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 - x_2 \ge 3$$

Ответ: *нет решений*

19. $L = x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \to \min$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \ge 0$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \ge 2$$

Ответ: *нет решений*

20. $L = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$x_1 - x_2 + x_3 \ge 2$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \ge 1$$

Ответ: $L^* = 2, x^* = (1,0,1)$

21. $L = 6x_1 + x_4 + 2x_5 \to \min$

$$4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 8$$
$$2x_1 - x_2 - x_4 \ge 2$$
$$x_1 + x_2 + x_5 \ge 0$$

Ответ: $L^* = 6, x^* = (1,0,4,0,0)$

22. $L = x_1 + x_2 \to \min$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 1$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 3$$

Ответ: $L^* = \frac{5}{3}, x^* = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0)$

23. $L = 2x_1 + x_3 \to \min$

$$x_1 - 4x_2 \ge 1$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \ge 4$$

Ответ: $L^* = 4, x^* = (1,0,2)$

24. $L = x_1 + x_2 \to \min$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \ge 2$$
$$-x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \ge 1$$

Ответ: $L^* = 0,\ x^* = (0,0,0,2)$

25. $L = x_1 + x_2 \to \min$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 1$$
$$x_2 - x_3 \ge 1$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 1$$

Ответ: $L^* = 3,\ x^* = (2,1,0)$

26. $L = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

$$x_1 - x_2 \le 3$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2$$
$$x_1 + x_3 \ge 4$$

Ответ: $L^* = 6, x^* = (0,3,4)$

27. $L = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$

$$x_1 - x_2 \ge 2$$
$$3x_2 + x_3 \ge 3$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \ge 1$$

Ответ: $L^* = 6, x^* = (3,1,0)$

28. $L = x_1 + x_2 \to \min$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 1$$
$$x_2 - 3x_3 \ge 1$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 1$$

Ответ: $L^* = 3, x^* = (2,1,0)$

4. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим пару задач ЛП вида:

$$
\begin{array}{rcl}
\text{(I)} & & \text{(II)} \\
L = c_1 x_1 + ... + c_n x_n \to \max & \longleftrightarrow & L = b_1 y_1 + ... + b_m y_m \to \min \\
a_{11} x_1 + ... + a_{1n} x_n \le b_1 & \longleftrightarrow & y_1 \ge 0 \\
\dots & & \dots \\
a_{k1} x_1 + ... + a_{kn} x_n \le b_k & \longleftrightarrow & y_k \ge 0 \\
a_{k+11} x_1 + ... + a_{k+1n} x_n = b_{k+1} & \longleftrightarrow & y_{k+1} - \textit{любое} \\
\dots & & \dots \\
a_{m1} x_1 + ... + a_{mn} x_n = b_m & \longleftrightarrow & y_m - \textit{любое} \\
x_1 \ge 0 & \longleftrightarrow & a_{11} y_1 + ... + a_{m1} y_m \ge c_1 \\
\dots & & \dots \\
x_l \ge 0 & \longleftrightarrow & a_{1l} y_1 + ... + a_{ml} y_m \ge c_l \\
x_{l+1} - \textit{любое} & \longleftrightarrow & a_{1l+1} y_1 + ... + a_{ml+1} y_m = c_{l+1} \\
\dots & & \dots \\
x_n - \textit{любое} & \longleftrightarrow & a_{1n} y_1 + ... + a_{mn} y_m = c_n .
\end{array}
$$

Задачу (I) называют прямой задачей ЛП, а задачу (II) – двойственной. Ограничения задач (I) и (II), соответствующие друг другу (по стрелке), называются *сопряженными*. Заметим, что задача двойственная к (II), есть исходная прямая задача, т. е. *соотношение двойственности взаимное*. Поэтому можно из такой пары задач любую считать прямой, а другую – двойственной.

Прежде чем приступать к построению двойственной задачи, необходимо упорядочить запись исходной: согласовать знаки неравенств в ограничениях задачи с целевой функцией. При построении двойственной задачи рекомендуется использовать одну из следующих двух согласованных форм.

Первая согласованная форма: для целевой функции на максимум все ограничения в собственном смысле (неравенства) должны быть записаны с помощью знака «≤».

Вторая согласованная форма: для целевой функции на минимум все ограничения в собственном смысле (неравенства) должны быть записаны с помощью знака «≥».

После записи исходной задачи в согласованной форме строим двойственную задачу по следующей схеме.

1) Выписываем целевую функцию в отдельной строке.

2) Выделяем в исходной задаче ограничения в собственном смысле, записываем их, каждое в отдельной строке.

3) Выписываем для каждой переменной исходной задачи условие неотрицательности (каждое в отдельной строке), или указываем отсутствие такого условия.

4) Соответственно п. 1) выписываем целевую функцию двойственной задачи; коэффициенты при переменных двойственной задачи – правая часть ограничений прямой задачи.

5) Соответственно п. 2) выписываем переменные двойственной задачи: каждому ограничению прямой задачи – переменная двойственной. При этом переменная имеет условие неотрицательности, если в ограничении прямой задачи стоит неравенство (≥ или ≤.), иначе, если в прямой задаче ограничение равенство, то переменная двойственной задачи не имеет условие неотрицательности.

6) Соответственно п. 3) выписываем ограничения двойственной задачи: каждой переменной прямой задачи – ограничение двойственной. При этом ограничение двойственной задачи имеет неравенство (≥ или ≤. в зависимости от согласованной формы), если переменная прямой задачи имеет условие неотрицательности, иначе, если в прямой задаче переменная не имеет условие неотрицательности, то ограничение двойственной задачи - равенство.

4.2. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

Построить двойственную задачу к следующей задаче ЛП:

$$
\begin{aligned}
&L = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min,\\
&x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6,\\
&2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \le 4,\\
&x_1 + x_3 \ge 8,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Для построения двойственной задачи необходимо упорядочить запись исходной: согласовать с целевой функцией знаки неравенств в ограничениях в собственном смысле. Так как целевая функция минимизируется, то неравенства должны быть записаны с помощью знака «$\ge$». Для этого второе ограничение-неравенство умножим на -1:

$$- 2x_2 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \ge -4.$$

Теперь, вводя двойственные переменные y_1, y_2, y_3 (каждая переменная соответствует ограничению в собственном смысле из прямой задачи), запишем в соответствии с указанными правилами пару двойственных задач:

$L = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min$	$L = 6y_1 - 4y_2 + 8y_3 \to \max$
$x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6$	y_1 – *любое*
$-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \ge -4$	$y_2 \ge 0$
$x_1 + 3x_3 \ge 8$	$y_3 \ge 0$
$x_1 \ge 0$	$y_1 - 2y_2 + y_3 \le 1$
$x_2 \ge 0$	$-2y_1 - 3y_2 \le -2$
x_3 – *любое*	$y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 1$
x_4 – *любое*	$3y_1 + y_2 = -1$

Задача слева – исходная прямая задача, задача справа – двойственная к исходной задаче.

4.3. ЗАДАНИЯ. ПОСТРОИТЬ ДВОЙСТВЕННУЮ ЗАДАЧУ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. $L = x_1 - 10x_2 \to \min$

$-2x_1 + 3x_2 = -7$

$-x_1 \geq 0$

$0 \leq x_2 \leq 0$

2. $L = 5x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$

$4x_1 + 6x_2 \geq 5$

$x_2 + 6x_3 = 9$

$x_2 \geq 0, x_3 \geq 10$

3. $L = x_1 + 10x_2 - x_3 \to \max$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$

$0 \leq x_1 \leq 5, x_2 \leq 0$

4. $L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$

$x_1 + x_2 - x_3 \geq 1$

$x_1 \geq 0, -3 \leq x_2 \leq -1$

5. $L = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min$

$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 2$

$x_1 - x_3 \leq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$

6. $L = x_1 + 4x_4 \to \max$

$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \geq 3$

$x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 5$

$x_1 \leq 0, x_2 \geq -1$

7. $L = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \max$

$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \leq 2$

$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 0$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0$

8. $L = -6x_1 + 6x_2 - 5x_3 \to \min$

$-2x_1 - x_2 + 6x_4 = 2$

$x_1 + 8x_2 - x_3 \leq 1$

$-6 \leq x_1 \geq 0, x_2 \geq 6$

9. $L = 3x_1 + 4x_2 \to \max$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$-x_1 + 2x_2 \leq 2$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq -10$

10. $L = x_1 - x_2 + x_3 \to \min$

$2x_1 - x_2 \leq 3$

$x_1 - 2x_2 \geq 2$

$x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq 3, x_3 \leq 0$

11. $L = -x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$8x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$

$x_2 \leq 5$

$x_1 \leq 4, x_3 \leq 0$

12. $L = -x_1 \to \max$

$7x_2 + x_3 \geq 9$

$2x_1 + 11x_2 + 2x_3 \geq 5$

$x_1 \geq 1, x_2 \leq 9$

13. $L = -x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

$$x_1 - x_2 = 7$$
$$2x_2 + 3x_3 \le -1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 5$$
$$x_1 + x_2 \ge 10$$
$$x_1 \le 4, x_2 \ge 4$$

14. $L = 4x_1 + 5x_2 \to \max$

$$6x_1 + 8x_2 \ge 1$$
$$x_1 - x_2 \le 0$$
$$x_2 \le 3$$
$$-x_1 + 5x_2 \ge 9$$
$$x_1 \ge 0$$

15. $L = x_1 + 7x_2 - x_3 - x_4 \to \max$

$$2x_1 + 9x_2 - x_3 \le 7$$
$$2x_2 + 3x_4 \le -1$$
$$-x_2 - 3x_3 = 3$$
$$x_1 + x_2 + x_4 \le 1$$
$$0 \le x_3 \le 4, x_2 \le 0$$
$$x_3 \le 0, x_2 \ge 0$$

16. $L = -4x_1 - 9x_2 + x_3 \to \min$

$$2x_2 + 3x_3 \le -1$$
$$x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0$$
$$x_2 + 6x_3 = 9$$
$$-x_1 - x_3 \ge 5$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_2 \ge -1$$

17. $L = x_1 - 10x_2 \to \min$

$$2x_2 + 9x_2 \ge 7$$
$$-2x_1 + 3x_2 = 7$$
$$-x_1 \ge 0$$
$$0 \le x_2 \le 5$$

18. $L = 5x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$
$$4x_1 + 6x_2 \ge 5$$
$$x_2 + 6x_3 = 9$$
$$x_2 \ge 0, x_3 \ge 10$$

19. $L = -x_2 + x_4 \to \min$

$$2x_3 + 9x_4 \ge 1$$
$$-2x_1 + 3x_2 - 8x_4 = -7$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 0$$
$$x_1 \ge 10$$
$$-1 \le x_3 \le -2$$

20. $L = x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 \to \min$

$$2x_1 - x_2 + 3x_4 \le -1$$
$$-2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 \ge 5$$
$$x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 2$$
$$x_3 - 6x_4 \ge 1$$
$$x_3 \ge 0, x_4 \le 0$$

21. $L = -2x_1 - 10x_2 + x_3 \to \min$

$$x_1 + x_2 - 9x_3 \geq 5$$
$$2x_1 + 3x_3 \leq 1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1 - 4x_2 \geq -5$$
$$x_1 \geq 4, x_3 \leq 4$$

22. $L = 4x_3 + x_4 \to \min$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 \leq 2$$
$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 + x_4 \geq 10$$
$$-x_1 + 5x_2 - x_3 - 10x_4 \geq -5$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

23. $L = -x_1 - x_2 - x_3 \to \max$

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 5$$
$$-2x_1 - 2x_2 \leq -2$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = -10$$
$$-x_1 \geq -5$$
$$x_1 \leq 4$$

24. $L = -2x_3 \to \min$

$$-9x_1 - 2x_2 \geq 7$$
$$2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + x_3 \geq -10$$
$$5x_2 - 5x_3 = 5$$
$$x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$$

25. $L = 7x_1 - 2x_3 + 8x_4 \to \min$

$$5x_1 + 7x_4 \geq 7$$
$$2x_1 + 9x_3 + 3x_4 = -1$$
$$-x_1 - x_2 + 3x_3 = 6$$
$$7x_3 + x_4 \geq 10$$
$$-4 \leq x_2 \leq 4, x_4 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0, x_1 \leq 0$$

26. $L = 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 \to \max$

$$2x_2 - 2x_3 \geq 1$$
$$x_1 + x_3 \geq 11$$
$$x_1 + x_2 - 7x_3 \geq -11$$
$$x_1 \leq 0$$
$$0 \leq x_3 \leq 10$$

27. $L = -6x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 4x_4 \to \min$

$$6x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1$$
$$-2x_1 - x_2 + 6x_4 = 2$$
$$x_1 - 8x_2 - x_3 \leq 1$$
$$-6 \leq x_1 \geq 0, x_2 \geq 6$$

28. $L = 4x_2 - 4x_3 \to \max$

$$x_2 + x_4 \leq 8$$
$$4x_2 - 5x_3 + x_4 \leq i$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$
$$x_1 \geq 0, -5 \leq x_4 \leq -1$$

4.4. ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Двойственность является одним из фундаментальных понятий в теории МП. Исключительно важную роль играют следующие утверждения, получившие названия теорем двойственности.

Первая теорема двойственности.

Если одна из пары двойственных задач (I) и (II) разрешима, то разрешима и другая задача, причем оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задач совпадают:

$$c_1x_1^* + ... + c_nx_n^* = b_1y_1^* + ...b_my_m^*,$$

где $x^* = (x_1^*,..., x_n^*), y^* = (y_1^*,..., y_m^*)$ – оптимальные решения задач (I) и (II) соответственно.

Говорят, что допустимые решения $(x,\ y)$ удовлетворяют *условиям дополняющей нежесткости* (УДН), если при подстановке этих векторов в ограничения задач (I) и (II) хотя бы одно из любой пары сопряженных неравенств обращается в равенство.

Вторая теорема двойственности (*теорема о дополняющей нежесткости*).

Допустимые решения (x^*, y^*) оптимальны в задачах (I) и (II) тогда и только тогда, когда они удовлетворяют УДН.

Вторая теорема двойственности используется в решении и исследовании задач ЛП. Имея решение исходной задачи, можно с помощью УДН найти решение двойственной задачи. Такая необходимость возникает, когда, к примеру, легче найти сначала решение двойственной задачи (или это решение известно), а затем, без использования алгоритмов симплекс-методов, находится решение исходной задачи.

Другой случай применения второй теоремы двойственности, когда есть вектор (или несколько векторов) и необходимо проверить этот вектор (эти вектора) на оптимальность.

4.5. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ПАРЫ ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ

Используя теоремы двойственности, решить двойственную задачу, если известно решение прямой задачи:

$$\begin{aligned}
&L = 300x_1 + 500x_2 + 400x_3 \to \max,\\
&2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 120,\\
&x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 100,\\
&3x_1 + 3x_3 \le 200,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Пусть решение прямой задачи найдено одним из стандартных методов: $x^* = (40,0,20), L^* = 20000$. Построим двойственную задачу:

$$\begin{aligned}
&\overline{L} = 120y_1 + 100y_2 + 200y_3 \to \min,\\
&2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 300,\\
&4y_1 + 4y_2 \ge 500,\\
&2y_1 + 3y_2 + 3y_3 \ge 400,\\
&y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

По первой теореме двойственности задача разрешима, причем $\overline{L}^* = L^* = 20000$. Найдем оптимальное решение $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ задачи (21), используя вторую теорему двойственности. Подставим координаты вектора x^* в ограничения задачи (20). Получим

$$\begin{aligned}
&2x_1^* + 4x_2^* + 2x_3^* = 2\cdot 40 + 4\cdot 0 + 2\cdot 20 = 120,\\
&x_1^* + 4x_2^* + 3x_3^* = 1\cdot 40 + 4\cdot 0 + 3\cdot 20 = 100,\\
&3x_1^* + 3x_3^* = 3\cdot 40 + 3\cdot 20 = 180 < 200.
\end{aligned}$$

Следовательно, в силу УДН, неравенство $y_3 \ge 0$ должно выполняться как равенство, т. е. $y_3^* = 0$ (соответствующее выполнению третьего ограничения прямой задачи в виде строгого неравенства « $<$ »). Далее так как

$$x_1^* = 40 > 0, x_3^* = 20 > 0,$$

то в силу УДН в двойственной задаче должны выполняться равенства

$$2y_1^* + y_2^* + 3y_3^* = 300, \quad 2y_1^* + 3y_2^* + 3y_3^* = 400.$$

Получаем систему линейных уравнений и решаем ее:

$$\begin{cases} y_3^* = 0 \\ 2y_1^* + y_2^* + 3y_3^* = 300 \\ 2y_1^* + 3y_2^* + 3y_3^* = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y_1^* + y_2^* = 300 \\ 2y_1^* + 3y_2^* = 400 \end{cases} \quad \begin{cases} y_3^* = 0 \\ y_2^* = 50 \\ y_1^* = 125. \end{cases}$$

Решения $x^* = (40,0,20)$ и $y^* = (125,50,0)$ удовлетворяют УДН, следовательно, в силу второй теоремы двойственности, являются оптимальными в задачах (20) и (21) соответственно.

4.6. ЗАДАНИЯ. РЕШИТЬ ИСХОДНУЮ И ДВОЙСТВЕННУЮ ЗАДАЧИ, ИСПОЛЬЗУЯ ТЕРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Во всех заданиях выполняются условия неотрицательности $x_i \geq 0, i = \overline{1,n}$.

1. $L = 2x_1 + x_2 \to \max$

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$x_1 - x_2 + x_4 = 2$

Ответ: $L^* = 7, x^* = (3,1,0,0)$,

$u^* = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

2. $L = x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max$

$x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 5$

$x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -1$

Ответ: $L^* = 5, x^* = (2,0,3)$,

$u^* = (1,0)$

3. $L = -x_2 - 2x_3 - x_5 \to \min$

$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5 = 1$

$-x_2 - 2x_3 + 5x_5 + x_4 = 4$

Ответ: $L^* = -18, x^* = (0,0,13,0,6)$,

$u^* = (-12, -5)$

4. $L = -2x_1 - 2x_2 \to \min$

$2x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1 + 3x_2 \leq 9$

Ответ: $L^* = -10, x^* = (3,2)$,

$u^* = (\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$

5. $L = x_1 + 3x_2 \to \max$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 1$$

Ответ: $L^* = 3, x^* = (0,1,0,0)$,

$u^* = (0,3)$

6. $L = 2x_1 + x_2 \to \min$

$$-2x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 5$$

Ответ: $L^* = \frac{34}{5}, x^* = (\frac{9}{5}, \frac{16}{5})$,

$u^* = (\frac{1}{5}, \frac{8}{5})$

7. $L = 3x_1 + 3x_2 \to \max$

$$x_1 + 3x_2 \ge 6$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 36$$
$$x_2 \le 13$$

Ответ: $L^* = 49, x^* = (\frac{10}{3}, 13)$,

$u^* = (0,1,1)$

8. $L = 2\ x_1 + x_2 \to \min$

$$-2x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1 - 2x_2 \ge 8$$
$$x_1 \ge 10, x_2 \ge 2$$

Ответ: $L^* = 26,\ x^* = (12,2)$,

$u^* = (0,2,0,5)$

9. $L = 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to \max$

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 32$$
$$x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -8$$

Ответ: $L^* = 8, x^* = (4,4,0,0)$,

$u^* = (\frac{4}{7}, \frac{9}{7})$

10. $L = 10x_1 + 7x_2 + 5x_3 \to \min$

$$x_1 + x_2 \ge 1$$
$$x_1 + x_3 \ge 1$$

Ответ: $L^* = 10, x^* = (1,0,0)$,

$u^* = (5,5)$

11. $L = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$2x_1 - x_2 = 1$$

Ответ: $L^* = \frac{3}{2}, x^* = (\frac{1}{2}, 0)$,

$u^* = (0, \frac{3}{2})$

12. $L = -4 + 2x_1 + 6x_2 \to \max$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 1$$

Ответ: $L^* = -1, x^* = (0, \frac{1}{2}, 10, 0)$,

$u^* = (0,3)$

13. $L = x_1 + x_2 \to \min$

$$-3x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$2x_1 + x_3 \ge 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 8$$

Ответ: $L^* = \frac{9}{2}, x^* = (1, \frac{7}{2}, 0),$

$u^* = (\frac{1}{8}, 0, \frac{5}{8})$

14. $L = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max$

$$6x_1 + x_2 + 7x_3 \le 7$$
$$6x_1 + 4x_2 \le 3$$
$$2x_1 + x_2 \le 9$$

Ответ: $L^* = \frac{67}{14}, x^* = (0, \frac{3}{4}, \frac{25}{28}),$

$u^* = (\frac{2}{7}, \frac{13}{14}, 0)$

15. $L = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$2x_1 - x_2 = 1$$

Ответ: $L^* = \frac{3}{2}, x^* = (\frac{1}{2}, 0),$

$u^* = (0, \frac{3}{2})$

16. $L = 2x_1 + 6x_2 \to \max$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 1$$

Ответ: $L^* = 3, x^* = (0, \frac{1}{2}, 10, 0),$

$u^* = (0, 3).$

17. $L = 7x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 6$$
$$2x_1 + 3x_3 \le 6$$
$$9x_1 + x_2 + 3x_3 \le 3$$

Ответ: $L^* = 3, x^* = (0, 3, 0),$

$u^* = (0, 0, 1).$

18. $L = 4x_1 + x_2 \to \max$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \le 8$$
$$2x_2 + 2x_3 + x_4 = 10$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 \le 16$$
$$-x_4 + x_3 \le 7$$

Ответ: $L^* = 64, x^* = (16, 0, 0, 10),$

$u^* = (0, 0, 4, 0).$

19. $L = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 2$$

Ответ: $L^* = 7, x^* = (3, 1, 0, 0),$

$u^* = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}).$

20. $L = x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 \le 5$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 \ge -1$$

Ответ: $L^* = 5, x^* = (2, 0, 3),$

$u^* = (1, 0)$

4.7. ПРИМЕР ПРОВЕРКИ ВЕКТОРА НА ОПТИМАЛЬНОСТЬ

Исследовать вектор $\bar{x} = (1,0,1,-1)$ на оптимальность в задаче ЛП:

$$
\begin{aligned}
&L = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,\\
&x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1,\\
&x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \le 5,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Вначале нужно проверить, является ли вектор $\bar{x}$ допустимым. Для этого подставляем координаты вектора в ограничения:

$$
\begin{aligned}
&1 + 0 - 1 - 1 = 1,\\
&1 + 2 \cdot 0 - 1 - 2 \cdot 1 = -2 < 5.
\end{aligned}
$$

Вектор $\bar{x}$ является допустимым, поэтому продолжаем исследование. Так как в прямой задаче второе ограничение выполняется как строгое неравенство, то в силу УДН для оптимальности вектора $\bar{x}$ необходимо выполнение равенства $y_2 = 0$.

Построим двойственную задачу. В прямой задаче четыре переменных и два ограничения, следовательно, в двойственной задаче будет две переменных и четыре ограничения. Поскольку третья и четвертая переменные прямой задачи не имеют условий неотрицательности, то третье и четвертое ограничения двойственной задачи выполняются как равенства. Поскольку первое ограничение прямой задачи выполняется как равенство, то первая переменная двойственной задачи не имеет условия неотрицательности. Получаем двойственную задачу

$$
\begin{aligned}
&\bar{L} = y_1 + 5y_2 \to min,\\
&y_1 + y_2 \ge 1,\\
&y_1 + 2y_2 \ge 1,\\
&-y_1 - y_2 = 1,\\
&-y_1 + 2y_2 = 1,\\
&y_2 \ge 0, y_1 - \textit{любое}.
\end{aligned}
$$

Используя полученное выше значение $y_2 = 0$, из третьего и четвертого ограничений двойственной задачи получаем $y_1 = -1$. Но по УДН из условия $\bar{x}_1 = 1 > 0$ следует, что должно выполняться равенство в первом ограничении двойственной задачи: подставляя значения $y_1 = -1, y_2 = 0$, получим, что это равенство не выполняется: $-1 + 0 \neq 1$. Следовательно, УДН не выполняются и вектор $\bar{x} = (1,0,1,-1)$ не является оптимальным в исходной задаче.

4.8. ЗАДАНИЯ. ПРОВЕРИТЬ ВЕКТОР НА ОПТИМАЛЬНОСТЬ

Во всех заданиях выполняются условия неотрицательности $x_i \geq 0, i = \overline{1,n}$.

1. $L = x_1 - 2x_2 \to \max$

$x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1$

$-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq -1$

$\bar{x} = (2,0,1)$

Ответ : вектор не оптимален

2. $L = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$

$x_1 - x_2 - x_3 \leq 1$

$\bar{x} = (1,1,0)$

Ответ : вектор не оптимален

3. $L = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \max$

$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

$\bar{x} = (1,1,0)$

Ответ : вектор оптимален

4. $L = 3x_1 + 4x_2 \to \max$

$x_1 + 5x_3 \leq 10$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$

$\bar{x} = (5,0,1)$

Ответ : вектор не оптимален

5. $L = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$

$4x_1 + 11x_2 + 3x_3 = 7$

$x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$\bar{x} = (1,0,1)$

Ответ : вектор не оптимален

6. $L = x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \max$

$x_1 - 3x_2 + 11x_3 = -9$

$3x_1 - x_2 + 9x_3 = 5$

$\bar{x} = (3,4,0)$

Ответ : вектор оптимален

7. $L = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 1$$
$$x_2 - x_3 \ge 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 1$$

$\bar{x} = (2,1,0)$

Ответ: вектор не оптимален

8. $L = x_1 + 2x_3 + x_5 \to \min$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$$
$$x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2$$
$$x_3 - x_4 + x_5 = 1$$

$\bar{x} = (0,3,0,\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

Ответ: вектор оптимален

9. $L = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$x_1 + 17x_2 - 12x_3 = 1$$
$$x_1 - x_2 + 6x_3 = 1$$

$\bar{x} = (1,0,0)$

Ответ: вектор оптимален

10. $L = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x4 = 1$$

$\bar{x} = (1,0,0,0)$

Ответ: вектор не оптимален

11. $L = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \le 2$$

$\bar{x} = (1,-1,-1)$

Ответ: вектор не оптимален

12. $L = 2x_1 - x_2 + 4x_3 \to \max$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 - x_2 - x_3 \le 1$$

$\bar{x} = (1,0,1)$

Ответ: вектор не оптимален

13. $L = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$

$$4x_1 + 11x_2 + 3x_3 = 9$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$\bar{x} = (1,0,1)$

Ответ: вектор не оптимален

14. $L = x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 \le 3$$

$\bar{x} = (1,0,1)$

Ответ: вектор не оптимален

15. $L = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 3$$
$$2x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 + 3x_3 \le 1$$
$$\bar{x} = (1,2,0)$$

Ответ: вектор оптимален

16. $L = 2x_1 + x_2 + 2x_4 \to \max$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_4 \le 4$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 \le 3$$
$$\bar{x} = (1,0,2,1)$$

Ответ: вектор оптимален

17. $L = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \max$

$$3x_1 - 3x_2 - x_3 \le 1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 7$$
$$8x_1 - x_2 + x_3 \le 12$$
$$\bar{x} = (1,2,3)$$

Ответ: *вектор не оптимален*

18. $L = x_1 - x_2 + x_3 \to \min$

$$-x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 3$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 \le 4$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5$$
$$\bar{x} = (1,2,3,0,0)$$

Ответ: *вектор не оптимален*

19. $L = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$

$$x_1 + x_2 - x_3 \ge 2$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 1$$
$$\bar{x} = (1,2,1)$$

Ответ: *вектор не оптимален*

20. $L = x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \to \max$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 1$$
$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \le 1$$
$$\bar{x} = (\tfrac{1}{2},0,0,0).$$

Ответ: *вектор оптимален*

21. $L = 2x_1 + x_2 - 2x_3 \to \min$

$$x_1 + 2x_2 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 2$$
$$\bar{x} = (1,0,3)$$

Ответ: *вектор не оптимален*

22. $L = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to \min$

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 40$$
$$4x_1 + 9x_3 + 12x_4 \ge 40$$
$$\bar{x} = (3,3,0,1)$$

Ответ: *вектор не оптимален*

23. $L = x_1 - 2x_2 \to \max$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \le -1$$
$$\bar{x} = (2,0,1)$$

Ответ: *вектор не оптимален*

24. $L = x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \max$

$$3x_1 - x_2 + 9x_3 = 5$$
$$x_1 - 3x_2 + 11x_3 = -9$$
$$\bar{x} = (3,4,0)$$

Ответ: *вектор оптимален*

25. $L = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \le 2$$
$$\bar{x} = (1,-1,-1)$$

Ответ: *вектор не оптимален*

26. $L = 2x_1 - x_2 + 4x_3 \to \max$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 - x_2 - x_3 \le 1$$
$$\bar{x} = (1,0,1)$$

Ответ: *вектор не оптимален*

5. МЕТОД ГОМОРИ

5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача целочисленного линейного программирования (ЦЛП) формулируется так же, как и задача ЛП, но включается дополнительное требование, состоящее в том, что значения переменных, составляющих оптимальное решение, должны быть целыми неотрицательными числами:

$$\begin{aligned}
&L = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \to \min,\\
&a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m,\\
&x_i \geq 0, x_i - целые, i = \overline{1,n}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Симплекс-метод не гарантирует целочисленности решения задачи (22), поэтому для отыскания оптимального целочисленного решения задачи ЦЛП требуются специальные методы. Один из таких методов, приводящий к целочисленному решению за конечное число шагов, предложен американским математиком Р. Гомори. Идея метода следующая.

С помощью симплекс-метода решается задача ЛП без условия целочисленности. Если оптимальное решение получается нецелочисленным, то вводится дополнительное ограничение, которое, уменьшая многогранник допустимых решений (отсекая некоторую его часть), не исключает из него целочисленных точек. Если оптимальное решение задачи ЛП с дополнительным ограничением целочисленное, то вычисления заканчивают; если же оптимальное решение содержит хотя бы одну дробную компоненту, то добавляют новое дополнительное ограничение.

Процесс присоединения дополнительных ограничений повторяют до тех пор, пока либо не будет найдено целочисленное оптимальное решение, либо показано, что задача не имеет целочисленных решений.

5.2. АЛГОРИТМ МЕТОДА ГОМОРИ

Шаг 1. Симплекс-методом находим оптимальное решение задачи (22) на минимум без учета условия целочисленности. Если задача не имеет решения, то неразрешима и исходная задача ЦЛП. В этом случае алгоритм завершает работу. Иначе, переходим к следующему шагу.

Шаг 2. *Проверка целочисленности*. Пусть оптимальная таблица имеет вид:

	b	ξ_1	$\cdots$	ξ_k
L	γ_0	γ_1	$\cdots$	γ_k
η_1	b_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1k}
$\vdots$	$\vdots$	…………..		
η_m	b_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mk}

Если элементы $b_1,...,b_m$ – целочисленные, то оптимальное решение $\eta_1^* = b_1,...,\eta_m^* = b_m, \xi_1^* = 0,...\xi_k^* = 0$ является целочисленным. В этом случае вычисления заканчиваем. Иначе, переходим к следующему шагу.

Шаг 3. Среди дробных компонент $b_1,...,b_m$ таблицы выбираем элемент b_i с максимальной дробной частью β_i и по строке i составляем дополнительное ограничение следующего вида:

$$S_i = -\beta_i - (-\alpha_{i1}\xi_1 - ... - \alpha_{ik}\xi_k),$$
$$\beta_i = b_i - [b_i], \alpha_{i1} = a_{i1} - [a_{i1}], ..., \alpha_{ik} = a_{ik} - [a_{ik}.]$$

Здесь $[z]$ – целая часть числа z (наибольшее целое число, не превышающее число z).

Шаг 4. Добавляем построенное ограничение к последней симплекс-таблице и, применяя двойственный симплекс-метод, находим оптимальное решение. Переходим к шагу 2.

Замечания

1) На *шаге* 4 двойственный симплекс-метод начинает применяться с выбора ведущей строки – добавленной строки ограничения-отсечения (поскольку таблица была оптимальна для симплекс-метода на минимум и добавили строку, которая нарушила допустимость; именно поэтому и необходимо в этом случае применять двойственный симплекс-метод).

2) На *шаге* 4 двойственный симплекс-метод применяется до тех пор, пока не будет получена оптимальная симплексная таблица (возможно, потребуется несколько итераций двойственного симплекс-метода).

3) Если на *шаге* 4 при реализации двойственного симплекс-метода в базис вводится переменная дополнительного ограничения-отсечения s_j, то эта строка вычеркивается из симплексной таблицы (соответствующее ограничение-отсечение является избыточным).

4) Признаком отсутствия целочисленного решения служит появление в оптимальной симплексной таблице хотя бы одной строки с дробным свободным членом и целыми остальными коэффициентами (поскольку соответствующее уравнение неразрешимо в целых числах). С формальной алгоритмической точки зрения в этом случае добавленное ограничение-отсечение будет иметь в строке коэффициентов все нулевые значения и формальное применение двойственного симплекс-метода будет закончено по причине неразрешимости (см. *шаг* 3 двойственного симплекс-метода: в ведущей строке i нет отрицательных элементов).

5.3. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Решить задачу ЦЛП:

$$L = -x_1 - 2x_2 \to \min,$$
$$-\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 3,$$
$$x_i \ge 0, x_i - \text{целые}, i = \overline{1,4}.$$

Шаг 1. Решаем задачу без учета условия целочисленности. Оптимальная симплексная таблица имеет вид

	b	x_4	x_3
L	–14/3	–4/3	–2/3
x_2	5/3	1/3	2/3
x_1	4/3	2/3	–2/3

Шаг 2. Оптимальное решение $x_1^* = 4/3, x_2^* = 5/3, x_4^* = x_3^* = 0$ не является целочисленным.

Шаг 3. Выберем среди нецелочисленных переменных x_1, x_2 (среди дробных компонент b таблицы) переменную x_2 с максимальной дробной частью и построим соответствующее отсечение:

$$S_1 = -\tfrac{2}{3} - (-\tfrac{1}{3}x_4 - \tfrac{2}{3}x_4).$$

Шаг 4. Добавляем это ограничение к симплексной таблице:

	b	x_4	x_3
L	–14/3	–4/3	–2/3
x_2	5/3	1/3	2/3
x_1	4/3	2/3	–2/3
S_1	–2/3	–1/3	–2/3

и проводим преобразование двойственным симплекс-методом, получим:

	b	x_4	S_1
L	–4	–1	–1
x_2	1	0	1
x_1	2	1	–1
x_3	1	1/2	–3/2

Последняя таблица является оптимальной. Первая итерация метода Гомори завершена.

Переходим к новой итерации. Соответствующее оптимальное решение x^*= (2,1,1,0) является целочисленным. Значение функции на этом решении $L^* = -4$. Вычисления по методу Гомори заканчиваются.

5.4. ЗАДАНИЯ. РЕШИТЬ ЗАДАЧУ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ГОМОРИ

Во всех заданиях выполняются условия неотрицательности $x_i \geq 0, i = \overline{1,n}$.

1. $L = x_1 + x_2 \to \max$

$2x_1 + x_2 \leq 5$

$-2x_1 + 2x_2 \leq 3$

$Ответ: L^* = 3, x^* = (1,2)$

2. $L = -x_1 - 4x_2 \to \min$

$3x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$4x_2 + x_4 = 10$

$Ответ: L^* = -9, x^* = (1,2,1,2)$

3. $L = x_1 + 4x_2 \to \max$

$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$

$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$

$Ответ: L^* = 5, x^* = (1,1,1,1)$

4. $L = 3x_1 + 4x_2 \to \max$

$x_1 + 4x_2 + x_3 = 10$

$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$

$Ответ: L^* = 11, x^* = (1,2,1,1)$

5. $L = -2x_1 + 4x_2 \to \max$

$x_1 + x_3 \geq -1$

$2x_1 - x_3 \geq -7$

$x_1 - 2x_2 \geq -3$

$Ответ: L^* = 6, x^* = (1,2,0)$

6. $L = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max$

$3x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1 + 4x_2 \leq 11$

$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13$

$Ответ: L^* = 19, x^* = (2,2,1)$

7. $L = 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 \to \max$

$2x_1 + 3x_2 \geq -3$

$2x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 12$

$Ответ: L^* = 19, x^* = (2,2,1)$

8. $L = -x_1 - x_2 \to \min$

$2x_1 + 3x_2 \leq 5$

$-2x_1 + 2x_2 \leq 3$

$Ответ: L^* = 3, x^* = (1,2)$

9. $L = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$-1/2x_1 + x_2 \le 1$$

Ответ: $L^* = 4, x^* = (2,1)$

10. $L = -3x_1 - 4x_2 \to \min$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 10$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

Ответ: $L^* = -11, x^* = (1,2,1,1)$

11. $L = 2x_1 + 5x_2 \to \max$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$
$$3x_1 + x_2 + x_4 = 3$$

Ответ: $L^* = 10, x^* = (0,2,1,1)$

12. $L = x_1 + x_2 \to min$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 1$$
$$-\frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 + x_3 = -\frac{1}{8}$$

Ответ: целочисленных решений нет

13. $L = -x_1 - 2x_2 \to \min$

$$2x_1 + 3x_2 \le 4$$
$$-5x_1 + x_2 \le 6$$

Ответ: $L^* = -2, x^* = (2,0)$.

14. $L = 5 - x_1 + 2x_2 \to \min$

$$5x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_2 - x_3 + 4x_4 = 19$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_5 = 4$$

Ответ: $L^* = 1, x^* = (0,2,3,5,0)$

15. $L = 3x_1 + x_2 \to \max$

$$x_1 + x_2 \le 9$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 = 10$$
$$2x_1 - 3x_2 \ge -5$$

Ответ: $L^* = 16, x^* = (4,4,2)$

16. $L = -3x_1 + x_2 \to \min$

$$3x_1 - 2x_2 \le 3$$
$$-5x_1 - 4x_2 \le -10$$
$$2x_1 + x_2 \le 5$$

Ответ: $L^* = -1-, x^* = (1,2)$

17. $L = 2x_1 + 5x_2 \to \max$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$
$$3x_1 + x_2 + x_4 = 3$$

Ответ: $L^* = 10, x^* = (0,2,1,1)$

18. $L = x_1 + x_2 \to \min$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 1$$
$$-\frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 + x_3 = -\frac{1}{8}$$

Ответ: *Решений нет*

19. $L=\frac{11}{2}x_2+10x_3-\frac{7}{2}\to\max$

$$x_2+x_3\le 12$$
$$x1+x_2+x_3=7$$
$$\frac{1}{3}x_2+\frac{3}{2}x_3+x_4=\frac{15}{4}$$

Ответ: *Решений нет*

20. $L=-x_1-x_2\to\min$

$$2x_1+2x_2\le 15$$
$$2x_1-x_2\le 6$$
$$6x_1-10x_2\ge -35$$

Ответ: $L^*=-7, x^*=(3,4)$

21. $L=2x_1-x_2\to\max$

$$2x_1+x_2\le 3$$
$$-x_1+x_2\le\frac{1}{4}$$

Ответ: *Решений нет*

22. $L=-x_1-2x_2\to\min$

$$2x_1+x_2+x_3=5$$
$$2x_1+3x_2+x_4=2$$

Ответ: $L^*=-1, x^*=(1,0,3,0)$

23. $L=x_1+2x_2-5\to\max$

$$x_1+x_2\le 6$$
$$-\frac{1}{2}x_1+2x_2\le 1$$

Ответ: $L^*=2, x^*=(5,1)$

24. $L=-3x_1-4x_2\to\min$

$$x_1+4x_2+x_3=10$$
$$3x_1+2x_2+x_4=8$$

Ответ: $L^*=-11, x^*=(1,2,1,1)$

25. $L=x_1+2x_2\to\max$

$$x_1+x_2\le 3$$
$$-\frac{1}{2}x_1+x_2\le 1$$

Ответ: $L^*=4, x^*=(2,1)$

26. $L=-x_1-x_2+1\to\min$

$$2x_1-x_2\le 2$$
$$-x_1+3x_2\le 1$$

Ответ: $L^*=0, x^*=(1,0)$

27. $L=3x_1+6x_2\to\max$

$$3x_1+3x_2\le 9$$
$$-\frac{3}{2}x_1+3x_2\le 3$$

Ответ: $L^*=12, x^*=(2,1)$

28. $L=x_1+x_2\to\min$

$$x_1-2x_3+x_4=2$$
$$x_2-x_3+2x_4=1$$

Ответ: $L^*=3, x^*=(2,1,0,0)$

6. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

6.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Классическая транспортная задача ЛП формулируется следующим образом. Имеется m пунктов запаса или производства (поставщики) и n пунктов потребления (потребители) однородной продукции. Заданы величины:

a_i - объем производства i-го поставщика (запас), $i = \overline{1,m}$;

b_j - объем потребления j-го потребителя (спрос), $j = \overline{1,n}$;

c_{ij} - стоимость перевозки единицы продукции от i-го поставщика к j-му потребителю (транспортные затраты).

Требуется составить такой план перевозок, при котором спрос всех потребителей был бы выполнен, и при этом общая стоимость всех перевозок была бы минимальна.

Транспортная задача, в которой суммарные запасы $\sum_{i=1}^{m} a_i$ и суммарные потребности $\sum_{j=1}^{n} b_j$ совпадают, называется *закрытой транспортной задачей*; в противном случае – *открытой*. Равенство $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ называется *балансовым равенством*.

Математическая модель закрытой транспортной задачи имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1,n},$$

$$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}.$$

Открытая транспортная задача решается приведением к закрытой. Возможны следующие два случая.

В случае, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, то есть $\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i$, вводится *фиктивный* $n+1$ *потребитель*, потребности которого $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

В случае, когда суммарные потребности превышают суммарные запасы, то есть $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$, вводится *фиктивный* $m+1$ *поставщик*, запасы которого $a_m + 1 = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Стоимость перевозки единицы продукции, как до фиктивного потребителя, так и стоимость перевозки единицы продукции от фиктивного поставщика, полагают равными нулю, так как продукция в обоих случаях не перевозится.

Прежде чем решать транспортную задачу, необходимо проверить балансовое равенство, и если необходимо, то привести задачу к закрытой форме.

6.2. ПОСТРОЕНИЕ ОПОРНОГО ПЛАНА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Методы решения транспортной задачи сводятся к простым операциям с *транспортной таблицей*. *Базисными клетками* транспортной таблицы являются клетки с базисными неотрицательными переменными (в невырожденном случае, с отличными от нуля положительными перевозками), остальные клетки – *свободные* (небазисные). Базисные клетки образуют *опорный план транспортной задачи*.

Транспортная таблица имеет вид:

	1	…	n	a_i
1	c_{11}	…	c_{1n}	a_1
…	…	…	…	…
m	c_{m1}	…	c_{mn}	a_m
b_j	b_1	…	b_n	=

Опорный план транспортной задачи характеризуется следующими тремя свойствами:

– содержит $n+m-1$ базисных неотрицательных переменных x_{ij};

– сумма перевозок в каждой строке равна запасу a_i в данной строке;

– сумма перевозок в каждом столбце равна соответствующему спросу b_j.

Опорный план называется *вырожденным*, если число ненулевых переменных x_{ij} меньше $n+m-1$; опорный план – *невырожденный*, если число ненулевых переменных равно $n+m-1$.

Рассмотрим способы построения опорного плана в невырожденном и вырожденном случаях.

6.2.1. МЕТОД СЕВЕРО-ЗАПАДНОГО УГЛА

Рассмотрим «северо-западный угол» незаполненной таблицы, то есть клетку, соответствующую первому поставщику и первому потребителю.

Возможны три случая:

1) Если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$. Это означает, что первый поставщик отгрузил всю продукцию первому потребителю и его запас равен нулю, по-

этому $x_{12} = x_{13} = ... = x_{1m} = 0$. При этом неудовлетворенный спрос в первом пункте потребления равен $b_1' = b_1 - a_1$.

2) Если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$, то есть спрос первого потребителя полностью удовлетворен и поэтому $x_{21} = x_{31} = ... = x_{m1} = 0$, а остаток продукции в первом пункте производства равен $a_1' = a_1 - b_1$.

3) В случае $a_1 = b_1$ из рассмотрения можно исключить и поставщика и потребителя. Однако при этом план получается вырожденным, поэтому считается, что выбывает только поставщик, а спрос потребителя остается неудовлетворенным и равным нулю.

После этого рассматриваем северо-западный угол оставшейся незаполненной части таблицы и повторяем те же действия. В результате через $m + n - 1$ шагов получим опорный план.

6.2.1.1. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ОПОРНОГО ПЛАНА МЕТОДОМ СЕВЕРО-ЗАПАДНОГО УГЛА

Найти опорный план транспортной задачи:

	1	2	3	a_i			
1	**15**	**20**		35	20	0	0
2		**0**	**30**	30	30	30	
b_j	15	20	30	=			
	0	20	30				
	0	0	30				
	0	0	0				

В таблице, обведенной снизу и справа двойной чертой, указаны объемы базисных перевозок, полученные методом северо-западного угла.

При этом небазисные (нулевые) перевозки не проставлены. Справа и внизу таблицы содержатся объемы возможных запасов и спросов. В число базисных перевозок вошла перевозка $x_{22} = 0$, так как на предыдущем шаге $a_1' = b_1 = 20$ и по п.3 метода считается выбывшим только поставщик, а неудовлетворенный спрос второго потребителя равен $b_2' = b_2 - a_1' = 0$.

6.2.2. МЕТОД МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ

Метод минимальной стоимости отличается от метода северо-западного угла тем, что вместо «северо-западного» угла незаполненной таблицы выбирается клетка с минимальной стоимостью.

6.2.2.1. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ОПОРНОГО ПЛАНА МЕТОДОМ МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ

Опорный план, построенный по методу минимальной стоимости.

	1	2	3	a_i			
	^{9}	^{7} **5**	^{1} **30**	35	5	5	5
	^{2} **15**	^{3} **15**	^{8}	30	30	15	0
b_j	15	20	30	=			
	15	20	0				
	0	20	0				
	0	5	0				

6.3. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

Циклом в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией, которая в каждой клетке цикла совершает поворот на $90°$. Знаком «+» отмечают те вершины, в которых перевозки увеличиваются, а знаком «-» - те вершины цикла, в которых перевозки уменьшаются. Перемещение какого-то количества единиц груза по циклу означает увеличение перевозок на это количество единиц в положительных вершинах и уменьшение в отрицательных вершинах. При этом если перевозки остаются неотрицательными, план остается допустимым, а стоимость плана может меняться.

Ценой цикла называется изменение суммарной стоимости перевозок при перемещении единицы груза по этому циклу. Очевидно, цена цикла равна алгебраической сумме стоимостей, стоящих в вершинах цикла, при этом стоимости в положительных вершинах берутся со знаком « + », а в отрицательных со знаком « – ».

Идея метода потенциалов состоит в следующем. Для любой свободной клетки транспортной таблицы всегда существует единственный *цикл пересчета*, положительная вершина которого лежит в этой свободной клетке, а все остальные – в базисных. Если цена такого цикла отрицательна, то план можно улучшить перемещением перевозок по данному циклу. Количество единиц груза, которое можно переместить, определяется минимальным значением перевозок, стоящих в отрицательных вершинах цикла (если переместить больше единиц продукции, возникнут отрицательные перевозки). Если циклов пересчета с отрицательной ценой нет, то это означает, что дальнейшее улучшение плана невозможно, то есть оптимальный план найден.

Для нахождения циклов пересчета с отрицательной ценой вводится система *платежей* $\alpha_i, i=\overline{1,m}, \quad \beta_j, j=\overline{1,n}$, и определяются величины $\tilde{c}_{ij}=\alpha_i+\beta_j$, называемые «*псевдостоимостями*» перевозок единицы груза из пункта *i* в пункт *j*. При этом цена цикла пересчета для каждой свободной клетки равна $c_{ij}-\tilde{c}_{ij}$, если платежи $\alpha_i, i=\overline{1,m}, \quad \beta_j, j=\overline{1,n}$, определять из условия

$\alpha_i+\beta_j=c_{ij}$ для всех базисных клеток (*i j*).

6.3.1. АЛГОРИТМ МЕТОДА ПОТЕНЦИАЛОВ

Шаг 1. Строим опорный план (методом северо-западного угла или методом минимальной стоимости) с $m+n-1$ базисными клетками.

Шаг 2. Определяем платежи $\alpha_i, i=\overline{1,m}, \beta_j, j=\overline{1,n}$ из условий: $\alpha_i+\beta_j=c_{ij}$ для всех базисных клеток (i j). Схема вычислений следующая: один из платежей (в строке или в столбце которого максимальное число базисных клеток) полагаем равным нулю, затем из уравнений с этим нулевым значением $\alpha_i+\beta_j=c_{ij}$ находим соответствующие платежи, подставляем их в другие уравнения для вычисления оставшихся платежей. Считаем псевдостоимости $\tilde{c}_{ij}=\alpha_i+\beta_j$ для всех свободных клеток.

Шаг 3. Если $\tilde{c}_{ij}\le c_{ij}$ для всех клеток, то план оптимален. Вычисляем значение целевой функции L^* на этом плане и исследование прекращаем.

Шаг 4. Если есть свободная клетка, для которой $\tilde{c}_{ij}>c_{ij}$, то улучшаем план, перебрасывая перевозки по циклу этой свободной клетки.

Шаг 5. Возвращаемся к шагу 2 для пересчета платежей нового опорного плана.

6.3.2. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Решить методом потенциалов транспортную задачу:

	1	2	3	a_j
1	**3**	**8**	**2**	35
2	**7**	**4**	**8**	30
b_j	15	20	30	=

Шаг 1. Опорный план этой задачи найден методом северо-западного угла в примере раздела 6.4.

<u>Шаг 2.</u> Приписываем к таблице строку для платежей $\beta_j, j=\overline{1,n}$ и столбец для платежей $\alpha_i, i=\overline{1,m}$. Псевдостоимости записываем в левом углу клетки, а стоимости – в правом.

Из условий $\alpha_i+\beta_j=c_{ij}$ в базисных клетках получаем систему уравнений:

$$\alpha_1+\beta_1=3,$$
$$\alpha_1+\beta_2=8,$$
$$\alpha_2+\beta_2=4,$$
$$\alpha_2+\beta_3=8.$$

Полагая $\alpha_1=0$, находим последовательно из уравнений платежи $\beta_1=3,\beta_2=8,\alpha_2=-4,\beta_3=12$, и затем считаем псевдостоимости для свободных клеток. Получаем таблицу

	1	2	3	a_i	α_i
1	3 **15**	[-] 8 **20**	12 [+] 2	35	0
2	-1 7	[+] 4 **0**	[-] 8 **30**	30	- 4
b_j	15	20	30	=	
β_j	3	8	12		

Стоимость перевозок по плану этой таблицы:

$$L=15\cdot 3+20\cdot 8+0\cdot 4+30\cdot 8=45+160+240=445.$$

<u>Шаг 4.</u> Так как клетка (1,3) имеет отрицательную цену $\tilde{c}_{13}>c_{13}$, то план не является оптимальным. Строим для клетки (1,3) цикл. Цена цикла $\gamma_{13}=2-12=-10$. По циклу переносим 20 единиц груза (больше нельзя, чтобы величина перевозки в клетке (1,2) не стала отрицательной). В результате преобразований базисная клетка (1,2) становится небазисной (она зануляется), а свободная клетка (1,3) получает ненулевое значение пере-

возки (равное 20) и, следовательно, становится базисной. При этом стоимость плана изменяется на величину $20 \cdot \gamma_{13} = -20 \cdot 10 = -200$.

Первая итерация метода завершена. Переходим к новой итерации.

<u>*Шаг* 2.</u> Для нового плана в новой таблице вычисляем новые значения платежей и псевдостоимостей:

	1	2	3	a_i	α_i
1	[-] ^{3} **15**	$^{-2}$ ^{8}	[+] ^{2} **20**	35	0
2	^{9} [+] ^{7}	^{4} **20**	[-] ^{8} **10**	30	6
b_j	15	20	30	=	
β_j	3	- 2	2		

Стоимость перевозок по плану этой таблицы:

$$L = 15 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 8 = 445 - 200 = 245.$$

Стоимость уменьшилась на величину 200, по сравнению с предыдущей таблицей.

<u>*Шаг* 4.</u> Полученная таблица имеет клетку (2,1) с отрицательной ценой $\gamma_{21} = 7 - 9 = -2$. По циклу этой клетки переносим 10 единиц груза (минимальное значение из значений в «отрицательных» клетках: 15 и 10), при этом стоимость плана уменьшается на $2 \cdot 10 = 20$ единиц, и получаем новую таблицу с новым опорным планом.

Вторая итерация метода завершена. Переходим к новой итерации.

<u>*Шаг* 2.</u> Вычисляем новую систему платежей и псевдостоимостей:

	1	2	3	a_i	α_i
1	^{3} **5**	^{0} ^{8}	^{2} **30**	35	0
2	^{7} **10**	^{4} **20**	^{6} ^{8}	30	4
b_j	15	20	30	=	
β_j	3	0	2		

Стоимость перевозок по плану этой таблицы: $L = 245 - 20 = 225$.

Шаг 3. Так как в последней таблице все псевдостоимости не превосходят соответствующих стоимостей $\tilde{c}_{ij} \le c_{ij}$, то полученный опорный план $x_{11}^* = 5,\ x_{13}^* = 30, x_{21}^* = 10, x_{22}^* = 20$ является оптимальным. Значение целевой функции L^* - стоимость перевозок при этом следующая

$$L = 5 \cdot 3 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 7 + 20 \cdot 4 = 225\,.$$

6.3.3. ЗАДАНИЯ. РЕШИТЬ ТРАНСПОРТНУЮ ЗАДАЧУ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

1.

12	6	29	19	21	13
14	3	30	10	10	27
15	27	28	11	24	16
1	23	26	15	13	14
14	14	14	14	14	

$L^* = 757$

2.

4	21	12	8	1	21
20	8	25	15	23	21
17	1	11	5	3	23
23	10	24	6	5	23
22	22	22	11	11	

$L^* = 638$

3.

5	3	24	10	25	24
30	2	22	16	7	15
30	24	27	29	10	16
15	17	21	2	3	24
12	13	15	15	24	

$L^* = 640$

4.

21	19	11	12	12	24
26	29	14	1	26	12
39	1	22	8	25	18
53	20	40	26	28	16
11	13	26	10	10	

$L^* = 1045$

7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

7.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Теория игр – это особый раздел теории принятия решений, в котором изучаются математические модели принятия оптимальных решений в условиях конфликта. Под конфликтом обычно понимают любое явление, применительно к которому имеет смысл говорить, кто и как в этом явлении участвует, каковы его возможные исходы, кто в этих исходах заинтересован и в чем состоит эта заинтересованность. Важно отметить, что приведенная формулировка весьма универсальна и охватывает не только конфликты между участниками так называемых салонных игр (шахматы, шашки, карточные игры и т.д.), но и экономические столкновения интересов различных фирм в условиях конкуренции, а также военные конфликты.

В зависимости от числа сторон, участвующих в конфликте, различают игры многих лиц и игры двух лиц (парные игры). Мы будем рассматривать парные игры. Конфликтующие стороны назовем *игроками* и обозначим их цифрами *I* и *II* (это могут быть и команды).

Игра состоит из последовательности ходов. *Стратегией* игрока называют систему правил, определяющих его выбор варианта действия при каждом ходе. В большинстве игр игрок принимает решение о своем очередном ходе перед самым этим ходом или на несколько ходов вперед. Иначе и не может быть, поскольку в таких играх, как шахматы, число возможных ходов в большинстве позиций очень велико, и это не дает возможности игрокам заранее спланировать все свои действия от начала до конца. Однако с теоретической точки зрения ничто не мешает нам предполагать, что уже до начала игры каждый игрок решил, как он будет играть в любой позиции. Таким образом, мы предполагаем, что каждый игрок выбирает стратегию еще до начала игры.

Множества стратегий игроков *I* и *II* будем обозначать буквами X и Y соответственно. Пусть игрок *I* выбрал стратегию $x \in X$, а игрок *II* – стратегию $y \in Y$. Комбинация этих стратегий (x,y) называется *ситуацией*.

Некоторые комбинации стратегий могут оказаться несовместимыми, и в этом случае говорят о невозможной ситуации.

Пример 1. Игра «Крестики-нолики» (рис. 8).

Имеется поле размером 3×3, клетки поля пронумерованы числами 1,…,9. Игрок *I* делает ход первым, ставя крестик в одну из свободных клеток. Игрок *II* играет ноликами. Максимальное число ходов в одной партии – 9 (5 ходов игрока *I* и 4 хода игрока *II*). Таким образом, любую стратегию *x* игрока *I* можно закодировать набором $m_1m_2m_3m_4m_5$, где m_i, $i = 1,\ldots,5$, – номер клетки, занятой крестиком при *i*-м ходе. Аналогично любая стратегия *y* игрока *II* есть набор $n_1n_2n_3n_4$.

Пусть x =53489, y =1762. Тогда ситуация (*x*,*y*) определяет ничейный исход (показано на рисунке 8,а. Если же x =53489, а y =1742, то ситуация (*x*,*y*) невозможна: игрок *II* не может своим третьим ходом поставить нолик в клетку 4, так как она уже занята крестиком (рисунок 8,б).

0^1	0^2	$\times^3$
$\times^4$	$\times^5$	0^6
0^7	$\times^8$	$\times^9$

а

0^1	2	$\times^3$
$\times^4$	$\times^5$	6
0^7	8	9

б

Рис. 8. Игра «Крестики-нолики»

По количеству возможных стратегий игроков игры делятся на конечные и бесконечные.

Заинтересованность игроков в исходах игры проявляется в том, что каждый из них предпочитает одни ситуации другим. Чаще всего отношение предпочтения задается с помощью *функций выигрыша*, определенных на множестве ситуаций. Обозначим через $H_1(x,y)$ – выигрыш игрока *I* в ситуации (*x*,*y*). Таким образом, $H_1(x,y)$ – это тот выигрыш (количество очков, сумма денег и т. д.), на который может рассчитывать игрок *I*, если он выберет стратегию $x \in X$, а его соперник – стратегию $y \in Y$. Аналогично определяется функция выигрыша $H_2(x,y)$ игрока *II*.

Далее мы будем рассматривать игры с нулевой суммой, когда

$$H_1(x,y)+H_2(x,y)=0,$$

то есть $H_1(x,y) = -H_2(x,y)$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$. В таких играх выигрыш одного игрока одновременно является проигрышем другого, и мы можем рассматривать его как платеж проигравшего победителю.

7.2. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Матричной игрой называется конечная игра двух лиц с нулевой суммой.

Так как число стратегий каждого игрока в матричной игре конечно, то их можно пронумеровать. Будем считать, что игрок *I* имеет стратегии $i=1,\ldots,m$, а игрок *II* – стратегии $j=1,\ldots,n$. В дальнейшем будем называть их *чистыми стратегиями* (ч.с.).

Функции выигрыша игроков в матричной игре могут быть заданы в виде *платежной матрицы* $A=(a_{ij})$ размера $m\times n$, где a_{ij} – выигрыш игрока *I* (и, соответственно, проигрыш игрока *II*) в ситуации (i,j).

Пример 2. Игра «Два числа» (рис. 9).

Играют двое. Каждый из игроков в тайне от другого записывает одно из двух чисел: 1 или 2. Затем числа предъявляются и подводится итог. Если оба записали 1, то *II* выигрывает 1 очко, а если оба записали 2, то *I* выигрывает 2 очка. Если *I* записал меньшее число, то *I* выигрывает 1 очко; в противном случае *II* выигрывает 2 очка. В любой ситуации выигрыш игрока равен проигрышу соперника.

Здесь у каждого из игроков имеется по две ч.с.: записать 1 или записать 2. Платежная матрица игры изображена на рис. 2, строки соответствуют стратегиям игрока *I*, столбцы – стратегиям игрока *II*.

	1	2
1	-1	1
2	-2	2

Рис. 9. Игра «Два числа»

Пример 3**.** Игра в орлянку (рис. 10).

Игрок *I* кладет монету, игрок *II*, не видя, пытается угадать, какой стороной положил монету игрок *I* – «орлом» (О) или «решкой» (Р). Угадал – выиграл 1 очко (а *I* в этом случае проиграл 1 очко), не угадал – проиграл 1 очко (а *I* выиграл 1 очко).

Платежная матрица игры изображена на рис. 10.

	О	Р
О	-1	1
Р	1	-1

Рис. 10. Игра в орлянку

В этой игре у каждого из игроков имеется по две ч.с.: у игрока *I* – положить монету «орлом» или «решкой», у игрока *II* – назвать «орел» или «решку».

7.3. ПРИНЦИП МИНИМАКСА. СЕДЛОВЫЕ ТОЧКИ

Будем предполагать, что игроки ведут себя разумно и каждый из них стремится максимизировать свой выигрыш. Попытаемся выяснить, как следовало бы действовать игрокам в матричной игре, чтобы добиться поставленной цели.

Предположим, что игроки *I* и *II* участвуют в матричной игре с платежной матрицей $A=(a_{ij})$ размера $m\times n$. Выбирая чистую стратегию, игрок *I* выбирает строку i, а игрок *II* – столбец j. Выигрыш *I* или, что то же, проигрыш *II* в этой ситуации равен a_{ij}. Ясно, что игрок *I* будет стараться увеличить a_{ij}, в то время как *II* будет пытаться его уменьшить.

Если игрок *I* выбрал ч.с. i, то *II* должен ответить такой стратегией j, чтобы выигрыш a_{ij} был наименьшим среди чисел $a_{i1},...,a_{in}$, обозначим его через a_i:

$$a_i = \min_j a_{ij}.$$

Величина a_i есть наименьший, то есть гарантированный, выигрыш игрока *I* при выборе им ч.с. *i*. Значит, игроку *I* выгодно выбрать ту стратегию, которая даст наибольшее значение a_i:

$$a = \max_i a_i = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Стратегия *p*, для которой $a_p = \max_i a_i = a$, является *максиминной стратегией игрока I.*

Аналогично рассуждая, получаем, что величина

$$b_j = \max_i a_{ij}$$

есть наибольший, то есть гарантированный, проигрыш игрока *II* при выборе им ч.с. *j*. Игроку *II* из всех стратегий выгодно выбрать *минимаксную стратегию*, при которой его гарантированный проигрыш b_j минимален:

$$b = \min_j b_j = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Величины *a* и *b* называются соответственно *нижней и верхней ценой игры в чистых стратегиях.*

Еще раз подчеркнем, что, выбрав максиминную ч.с., игрок *I* гарантированно получит выигрыш, не меньший *a*, а игрок *II*, выбрав минимаксную ч.с., не проиграет больше *b*.

Описанные рассуждения носят название *принципа минимакса* (или *принципа гарантированного результата*). Кратко этот принцип может быть сформулирован следующим образом: каждый игрок должен стремиться максимально увеличить свой гарантированный выигрыш.

Легко показать, что в любой матричной игре $a \le b$. Например, в игре «Два числа» (пример 2) $a = b = -1$, а в игре в орлянку (пример 3) $a = -1$, $b = 1$.

Равенство $a = b$ имеет место тогда и только тогда, когда платежная матрица *A* имеет *седловую точку*, то есть существует такая пара номеров (*p*, *q*), что $a_{iq} \le a_{pq} \le a_{pj}$ для любых $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$.

Седловая точка платежной матрицы дает ситуацию равновесия (*p, q*) в матричной игре, когда игроку *I* невыгодно отступать от своей максиминной ч.с. *p*, а игроку *II* – от минимаксной ч.с. *q*, поскольку, отклоняясь от этих стратегий, игроки могут разве что уменьшить свой выигрыш. Если (p, q) – седловая точка, то стратегии p, q называются *оптимальными чистыми стратегиями*. Пара (p, q) оптимальных ч.с. называется *решением игры* в ч.с., а сама матричная игра – разрешимой в ч.с. Величина $a=b$ называется в этом случае *ценой игры* в ч.с.

Если же $a < b$, то матрица A не имеет седловой точки. В такой игре ситуации равновесия нет, и она не разрешима в ч.с.

Между играми с седловой точкой и без нее существует огромная разница, которая проявляется особенно ярко при многократном повторении игры. Поясним эту разницу на примерах 2 и 3.

Рассмотрим игру «Два числа» (пример 2) и подумаем, как поведут себя в ней разумные игроки. Если *I* выберет ч.с. 1, то есть запишет 1, он может выиграть 1 очко (если *II* запишет 2), но может и проиграть 1 очко (если *II* запишет 1). Если же *I* выберет ч.с. 2, то он может выиграть 2 очка (если *II* запишет 2), но может и проиграть 2 очка (если *II* запишет 1). А поскольку игрок *II* разумен, то он наверняка выберет ч.с. 1 (при этом он вообще не проигрывает). И тогда игроку *I* ничего другого не остается, как выбрать меньшее из зол и записать число 1.

Итак, в этой игре есть ситуация равновесия (1,1), когда игрокам невыгодно отступать от своих оптимальных ч.с. $i=1$, $j=1$, сколько бы ни продолжалась игра. Правда, при этом *I* каждый раз будет проигрывать 1 очко, но, выбирая число 2, он проиграет еще больше. Игроку *II* тем более невыгодно отступать от избранной стратегии, так как, записав число 2, он вместо выигрыша проиграет 1 очко. Оба даже могут заранее объявить о своих намерениях, «секретность» в играх с седловой точкой не имеет никакого значения.

Иное дело в игре в орлянку (пример 3). В этой игре седловой точки нет, и игрокам имеет смысл скрывать свои намерения от соперника. Если при многократном повторении игры один из игроков будет все время придерживаться какой-либо одной ч.с. или даже выбирать свои ч.с. по некоторой заранее определенной схеме, то его разумный соперник может понять это и принять контрмеры. Единственный разумный выход видится в следующем: в такой игре игроки должны выбирать свои ч.с. случайно, но сама схема рандомизации должна выбираться разумно. В этом и состоит идея использования смешанных стратегий.

7.4. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

Смешанной стратегией (с.с.) игрока в матричной игре называется вероятностное распределение на множестве его ч.с. Таким образом, если $i=1,\dots,m$ – чистые стратегии игрока *I*, а $j=1,\dots,n$ – чистые стратегии игрока *II*, то с.с. игрока *I* – это вероятностный вектор $x=(x_1,\dots,x_m)$, где x_i – вероятность выбора игроком *I* чистой стратегии *i*, $i=1,\dots,m$. Очевидно, что вектор *x* должен удовлетворять условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i=1,\dots,m.$$

Аналогично с.с. игрока *II* – это вероятностный вектор $y=(y_1,\dots,y_n)$, удовлетворяющий условиям

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \ge 0,\ j=1,\dots,n.$$

Обозначим множество всех с.с. игрока *I* через *X*, а игрока *II* – через *Y*. Если *I* выбрал с.с. $x\in X$, а *II* – $y \in Y$, то выигрышем игрока *I* (соответственно, проигрышем игрока *II*) в ситуации (x,y) естественно считать математическое ожидание

$$H(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

В соответствии с принципом минимакса гарантированный, то есть наименьший выигрыш игрока *I* при выборе им с.с. *x* будет

$$u(x)=\min_{y\in Y} H(x,y)=\min_{y\in Y}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Поэтому игроку *I* выгодно выбрать *x* так, чтобы максимально увеличить $u(x)$:

$$u^* = \max_{x\in X} u(x) = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \,.$$

Аналогично гарантированный, то есть наибольший, проигрыш игрока *II* при выборе им с.с. y будет

$$v(y) = \max_{x\in X} H(x,y) = \max_{x\in X} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \,,$$

и игроку *II* выгодно минимизировать $v(y)$:

$$v^* = \min_{y\in Y} v(x) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \,.$$

Числа u^*, v^* называются соответственно *нижней и верхней ценой игры в смешанных стратегиях*.

Замечание. Строго говоря, следовало бы доказать, что все минимумы и максимумы существуют. Однако это очевидно, так как множества X, Y компактны, а функции непрерывны.

Следующая лемма дает более простые выражения величин $u(x)$, $v(y)$.

<u>Лемма</u> (*о гарантированных выигрышах*).

$u(x) = \min_{j} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i$ для всякой с.с. $x \in X$;

$v(y) = \max_{i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$ для всякой с.с. $y \in Y$.

Матричная игра называется *разрешимой в смешанных стратегиях*, если $u^* = v^*$, а стратегии x^*, y^*, для которых $u(x^*) = u^* = v^* = v(y^*)$, называются *оптимальными смешанными стратегиями*. Пара (x^*, y^*) оптимальных с.с. образует ситуацию равновесия в с.с., а величина $u^* = v^*$ – *цена игры в смешанных стратегиях* – равна ожидаемому среднему выигрышу игрока *I* (и, соответственно, ожидаемому среднему проигрышу игрока *II*).

Как и в случае чистых стратегий, несложно показать, что всегда $u \le v$. Однако, заметим, что в случае смешанных стратегий строгое неравенство $u<v$ невозможно. Это вытекает из следующей основной теоремы матричных игр, доказанной Дж. фон Нейманом в 1928 г.

Теорема (*о минимаксе*). Для любой матричной игры имеет место равенство $u^* = v^*$. Другими словами, любая матричная игра разрешима в с.с.

Оптимальные с.с. игроков, а также цена игры в с.с. могут быть найдены как решения пары двойственных задач линейного программирования:

$$\begin{cases} u \to \max \\ u - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \le 0, \ j = 1,\dots,n, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1, \\ x_i \ge 0, i = 1,\dots,m, \\ u - \text{любая}, \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} v \to \min \\ y_j \ge 0, \ j = 1,\dots,n, \\ v - \text{любая}, \\ v - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \ge 0, i = 1,\dots,m, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1 \end{cases}$$

Здесь a_{ij} – элементы платежной матрицы A, переменные x_i, y_j – компоненты смешанных стратегий игроков *I*, *II* соответственно, u – гарантированный выигрыш игрока *I*, v – гарантированный проигрыш игрока *II* в смешанных стратегиях.

7.5. ПРИМЕР ПОЛНОГО РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ

Решить игру с платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Выясним, имеет ли игра решение в ч.с. Для этого вычислим нижнюю и верхнюю цены игры в ч.с.:

$$a = \max_i \min_j a_{ij} = -1; \ b = \min_j \max_i a_{ij} = 1.$$

Получим, что $a < b$, следовательно, матрица A не имеет седловой точки, и игра не разрешима в ч.с.

2. Будем искать решение игры в с.с. Смешанная стратегия игрока *I* – это вероятностный вектор:

$$x=(x_1,x_2,x_3), \text{ где } x_1+x_2+x_3=1;\ x_i\geq 0,\ i=1,2,3.$$

Аналогично смешанная стратегия игрока *II* – это вероятностный вектор:

$$y=(y_1,y_2,y_3), \text{ где } y_1+y_2+y_3=1;\ y_j\geq 0,\ j=1,2,3.$$

3. Заметим, что каждый элемент строки 1 не меньше соответствующего элемента строки 3, то есть выигрыш игрока *I* при выборе им ч.с. 1 не меньше его выигрыша при выборе им ч.с. 3. Ясно, что разумный игрок *I* предпочтет стратегию 1 стратегии. В этом случае говорят, что ч.с. 1 игрока *I доминирует* над его ч.с. 3. Аналогично каждый элемент столбца 2 не больше соответствующего элемента столбца 3, и ч.с. 2 игрока *II* доминирует над его ч.с. 3. Легко понять, что в оптимальные с.с. доминируемые ч.с. войдут с нулевыми вероятностями $x_3^*=0$, $y_3^*=0$. Поэтому в дальнейшем мы можем рассматривать сокращенную матрицу игры, полученную из исходной вычеркиванием третьей строки и третьего столбца:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}.$$

4. «Сдвиг» матрицы. Вместо матрицы $\overline{A}$ рассмотрим матрицу

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix},$$

полученную из матрицы $\overline{A}$ добавлением одного и того же числа ко всем ее элементам. Число это (в данном случае 2) выбирается так, чтобы все элементы матрицы $\tilde{A}$ стали неотрицательными. Несложно показать, что такой сдвиг платежной матрицы не приводит к изменению оптимальных смешанных стратегий игроков. Изменяется только значение цены игры, в данном случае оно увеличивается на 2. Смысл такого сдвига в следующем. В игре с платежной матрицей $\tilde{A}$ выигрыш игрока *I* в любой ситуации неотрицателен, а значит, неотрицательны и все его гарантированные выигрыши, а также цена игры в с.с. Это дает нам право, составляя пару двойственных задач ЛП, считать переменные *u*, *v* неотрицательными.

5. Составляем пару двойственных задач для игры с платежной матрицей $\tilde{A}$:

$$\begin{cases} u \to \max \\ u - 3x_1 \le 0, \\ u - x_1 - 4x_2 \le 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0, \\ u \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v \to \min \\ y_1 \ge 0, \\ y_2 \ge 0, \\ v \ge 0, \\ v - 3y_1 - y_2 \ge 0, \\ v - 4y_2 \ge 0, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Прежде чем решать их, удобно сделать замену переменных

$$s_i = \frac{x_i}{u},\ t_i = \frac{y_i}{v},\ i=1,2.$$

Тогда задачи принимают вид

$$\begin{cases} s_1 + s_2 \to \min \\ 3s_1 \ge 1, \\ s_1 + 4s_2 \ge 1, \\ s_1 \ge 0, \\ s_2 \ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 + t_2 \to \max \\ t_1 \ge 0, \\ t_2 \ge 0, \\ 3t_1 + t_2 \le 1, \\ 4t_2 \le 1. \end{cases}$$

6. Приводим вторую задачу к канонической форме (вводя дополнительные переменные t_3, t_4), и решаем ее симплекс-методом

Первая итерация

	b	t_1	t_2
L	0	- 1	- 1
t_3	1	3	1
t_4	1	0	4

Вторая итерация

	b	t_3	t_2
L	1/3	1/3	- 2/3
t_1	1/3	1/3	1/3
t_4	1	0	4

Третья итерация

	b	t_3	t_4
L	1/2	1/3	1/6
t_1	1/4	1/3	- 1/12
t_2	1/4	0	1/4

Оптимальное решение $t^* = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$, $v^* = \dfrac{1}{t_1 + t_2} = 2$. Используя УДН, находим оптимальное решение двойственной задачи: $s^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$, $u^* = \dfrac{1}{s_1 + s_2} = 2$. Возвращаясь к исходным переменным и вспоминая, что $x_3^* = 0$, $y_3^* = 0$, получаем оптимальные с.с. игроков: $x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Цена игры в с.с. равна 0 (с учетом сдвига матрицы).

Комментарий. Оптимальные с.с. игроков диктуют им следующие действия при многократном повторении игры: игроку *I* следует выбирать свою первую ч.с. с вероятностью $\frac{2}{3}$, а вторую – с вероятностью $\frac{1}{3}$. Игроку *II* – выбирать как первую, так и вторую ч.с. с вероятностью $\frac{1}{2}$. При этом ожидаемый средний выигрыш игрока *I* (и проигрыш игрока *II*) будет равен нулю – ничья.

7.6. ЗАДАНИЯ. РЕШИТЬ ИГРУ С ПЛАТЕЖНОЙ МАТРИЦЕЙ

1.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$,
$y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,
$y^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

3.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right),$
$y^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$

4.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right),$
$y^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

5.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$
$y^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

6.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right),$
$y^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

7.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

x $x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right),$
$y^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

8.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$
$y^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

9.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right),$
$y^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

10.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right),$
$y^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$

11.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$,
$y^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

12.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$,
$y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$

13.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$,
$y^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$

14.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,
$y^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

15.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$,
$y^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

16.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$,
$y^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

17.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,
$y^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

18.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$,
$y^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$

19.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$,
$y^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

20.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$,
$y^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

21.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$,
$y^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

22.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$,
$y^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$

23.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$,
$y^* = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

24.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$,
$y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$

25.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$,
$y^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

26.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,
$y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$

8. БЕЗУСЛОВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Задача безусловной оптимизации состоит в нахождении минимума или максимума функции в отсутствие каких-либо ограничений. В этом разделе рассматриваются методы минимизации функций как с одной переменной (одномерная минимизация), так и с несколькими переменными (многомерная минимизация). Несмотря на то, что большинство практических задач оптимизации содержит ограничения, изучение методов безусловной оптимизации важно с двух точек зрения.

Один класс методов решения задачи с ограничениями основан на поиске подходящего направления и последующей минимизации вдоль этого направления. Линейный поиск по направлению эквивалентен минимизации функции одной переменной без ограничений или с простыми ограничениями, такими, как двусторонние ограничения на переменную.

Другой подход решения задачи с ограничениями предполагает сведение ее к последовательности задач безусловной оптимизации либо с помощью множителей Лагранжа, либо с помощью штрафных или барьерных функций.

8.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Пусть $f(x) = f(x_1,..., x_n)$ – функция n переменных, определенная для всех $x = (x_1,..., x_n) \in R^n$, где R^n – линейное пространство n-мерных векторов x.

Задача безусловной минимизации функции $f(x)$ состоит в отыскании такого вектора $x^* \in R^n$, что для всех $x \in R^n$ справедливо неравенство $f(x^*) \le f(x)$.

Из определения следует, что функция $f(x)$ на векторе x^* принимает наименьшее возможное значение. Вектор x^* называется *оптимальным решением, или точкой минимума.*

Необходимое условие минимума. Пусть $f(x)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*), i=1,...,n.$ Тогда если x^* – решение задачи безусловной минимизации, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)=0, i=1,...,n, \tag{23}$$

или в векторной форме

$$\nabla f(x^*)=0, \tag{24}$$

где $\nabla f(x^*)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*)\right)$ – вектор-градиент функции $f(x)$ в точке x^*.

Необходимое условие минимума позволяет свести задачу безусловной минимизации к задаче отыскания решений, вообще говоря, нелинейной системы уравнений (23) или (24). Однако среди решений этой системы могут быть и посторонние, представляющие, например, точки локальных минимумов и максимумов функции $f(x)$. Поэтому рассматриваются дополнительные ограничения, налагаемые на функцию $f(x)$, при которых необходимое условие минимума оказывается достаточным.

Функция $f(x)$, определенная для всех $x\in R^n$, называется *выпуклой*, если для любых $x^1,x^2\in R^n,\lambda\in[0,1]$ справедливо неравенство

$$f(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)\le\lambda f(x^1)+(1-\lambda)f(x^2).$$

Отметим важное свойство выпуклых функций.

Условие выпуклости. Пусть $f(x)$ имеет непрерывные вторые частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$, $i,j=1,2,...,n$. Тогда $f(x)$ выпукла в том и только в том случае, если ее матрица вторых производных $F(x)$ неотрицательно определена, то есть для всех $y=(y_1,...,y_n)\in R^n$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)y_iy_j\ge 0,$$

где $F(x)$ – квадратная матрица вида

$$F(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Для проверки неотрицательной определенности квадратной матрицы $F(x)$ достаточно выполнение одного из следующих критериев.

Первый критерий. Все собственные числа матрицы $F(x)$ неотрицательны.

Второй критерий. Все главные миноры матрицы $F(x)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

неотрицательны.

Функция $f(x)$, определенная для всех $x \in R^n$, называется *строго выпуклой*, если для любых $x^1, x^2 \in R^n, x^1 \neq x^2, \lambda \in (0,1)$ справедливо неравенство

$$f(\lambda x^1 + (1\_\lambda x^2)) < \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2).$$

Основное свойство строго выпуклой функции: строго выпуклая функция имеет *единственную* точку минимума.

Условие строгой выпуклости. Пусть $f(x)$ имеет непрерывные вторые частные производные. Тогда $f(x)$ строго выпукла, если матрица ее вторых производных $F(x)$ положительно определена, то есть для всех $y=(y_1,..., y_n) \in R^n, y \neq 0,$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) y_i y_j > 0.$$

Для положительной определенности квадратной матрицы $F(x)$ достаточно выполнения одного из критериев:

Третий критерий. Все собственные числа матрицы $F(x)$ положительны.

Четвертый критерий. Все главные миноры матрицы $F(x)$ положительны.

Достаточность необходимого условия минимума. Если функция $f(x)$ выпукла, то сформулированное выше необходимое условие минимума является достаточным.

Таким образом, если $f(x)$ выпуклая функция, то любое решение системы уравнений (23) или (24) является также и решением задачи безусловной минимизации функции $f(x)$.

8.2. ПРИМЕР ПРОВЕРКИ ФУНКЦИИ НА ВЫПУКЛОСТЬ

Показать, что функция $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2$ выпукла.

Построим матрицу вторых производных $F(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + 4x_2, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_1 + 8x_2, \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3,$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

и определим ее собственные числа. Для этого составим характеристический многочлен:

$$\det(F(x) - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 8-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(8-\lambda) - 16(2-\lambda) = \lambda(2-\lambda)(\lambda - 10)$$

и найдем его корни $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 10$.

Так как все $\lambda_i \geq 0, i=1,2,3,$ то по первому критерию $f(x)$ выпуклая функция.

8.3. ПРИМЕР ПРОВЕРКИ ФУНКЦИИ НА СТРОГУЮ ВЫПУКЛОСТЬ

1) Показать, что функция $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2+2x_2^2+x_1-x_2$ строго выпукла.

Матрица вторых производных этой функции имеет вид

$$F(x)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристический многочлен

$$\det(F(x)-\lambda E)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+7$$

и найдем его корни $\lambda_{1,2}=3\pm\sqrt{2}$

Так как λ_1,λ_2 >0, то функция $f(x)$ является строго выпуклой по третьему критерию.

2) Показать, что функция $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_1x_2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2$ строго выпукла.

Находим матрицу вторых производных

$$F(x)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

и ее главные миноры

$$2, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=4.$$

Поскольку все три минора положительны, то функция $f(x)$ является строго выпуклой по четвертому критерию.

8.4. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

Найти точку минимума для функции

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 + x_1 - x_2.$$

В пункте 8.3 было показано, что функция $f(x_1, x_2)$ строго выпукла. Составляем систему уравнений (23)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 1 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных уравнений, находим ее единственное решение $x^* = \left(-\frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right)$, которое в силу достаточного условия является точкой минимума функции $f(x)$.

8.5. ОБЩАЯ СХЕМА АЛГОРИТМА БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

В большинстве практических случаев непосредственное решение системы уравнений (23) или (24) затруднительно. Поэтому большое распространение получили многочисленные приближенные методы решения задачи безусловной минимизации, позволяющие строить последовательность приближений x^k, сходящуюся при определенных условиях к решению x^*

$$\lim_{k \to \infty} x^k = x^*.$$

Общая схема алгоритма нелинейного программирования представляется следующей процедурой. Для заданной точки x^k определяется вектор направления s^k и величина шага α_k вдоль этого направления, после чего вычисляется новая итерационная точка $x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k$. Во многих алгоритмах вычисление величины шага α_k реализуется решением задачи минимизации функции $f(x^k+\alpha s^k)$, зависящей от переменной α. А это – задача одномерного поиска. Поэтому одномерный поиск является основой алгоритмов для решения задач нелинейного программирования.

В следующем разделе рассмотрим приближенные методы решения задачи минимизации функции одной переменной $f(x)$ на конечном интервале $[a,b]$.

8.6. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ. ОБЩАЯ СХЕМА

Пусть $x^*\in[a,b]$ точка минимума $f(x)$ на $[a,b]$. Функция $f(x)$ называется *унимодальной* на $[a,b]$, если на интервале $[a,x^*]$ $f(x)$ монотонно убывает, а на интервале $[x^*,b]$ монотонно возрастает.

Практически, это означает следующее, если $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$, то из условия $x_1>x^*$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$, а из условия $x_2<x^*$ следует, что $f(x_1)>f(x_2)$.

Унимодальными, например, являются строго выпуклые функции. К примеру, функция $f(x)=x^2$ унимодальна на интервале [-1,1], так как ее точкой минимума является точка $x^*=0$, а на интервалах [-1,0] и [0,1] $f(x)$ соответственно монотонно возрастает и монотонно убывает. Одновременно $f(x)$ является и строго выпуклой.

В основе методов лежит следующее важное свойство унимодальных функций. Если для $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$, $x^*\in[x_1,x_2]$ выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$, то $x^*\in[x_1,b]$, если выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$, то $x^*\in[a,x_2]$. Если же $f(x_1)=f(x_2)$, то $x^*\in[x_1,x_2]$. Данное свойство позволяет сократить интервал поиска минимума до интервалов вида $[a,x_2]$ $[x_1,b]$или $[x_1,x_2]$. Полученный в результате интервал называется *интервалом неопределенности.* Последовательное его сужение позволяет находить искомую точку минимума с заранее заданной точностью.

Методы отличаются друг от друга правилом выбора на каждом шаге точек x_1 и x_2 из интервала неопределенности.

Методы дихотомии, Фибоначчи и золотого сечения используют вычисления только значений функции $f(x)$ и не требуют от $f(x)$ таких свойств, как например, непрерывность и дифференцируемость.

Метод деления отрезка пополам и метод Ньютона требуют информацию о производной минимизируемой функции $f(x)$.

8.6.1. МЕТОД ДИХОТОМИИ

Найти приближенное решение задачи минимизации $f(x)$ на интервале $[a,b]$, отличающееся от точного решения x^* не более чем на ε:

$$\left|x - x^*\right| \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – заданная точность.

Алгоритм метода дихотомии

Подготовительный этап. Полагаем $a_0 = a,\ \ b_0 = b$. Тогда $[a_0, b_0]$ – начальный интервал неопределенности, содержащий x^* и имеющий длину $\ell_0 = b_0 - a_0$. Полагаем $k = 0$ и переходим к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Если $\ell_к \le 2\varepsilon$, то остановиться; точка минимума принадлежит интервалу $[a_k, b_k]$. Тогда в качестве приближенного решения задачи минимизации $f(x)$ на интервале $[a,b]$ может быть выбрано значение $\tilde{x} = (a_k + b_k)/2$. В противном случае вычисляем

$$x_1^k = \frac{a_k + b_k}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \quad x_2^k = \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Вычисляем значения $f(x_1^k)$ и $f(x_2^k)$. Если $f(x_1^k) > f(x_2^k)$, то положим $a_{k+1} = x_1^k, b_{k+1} = b_k$. Если $f(x_1^k) \le f(x_2^k)$, то положим

$a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_2^k$. Получаем новый интервал неопределенности $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, содержащий x^* и имеющий длину

$$\ell_{\kappa+1} = b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b-a}{2^k} + (1 - \frac{1}{2^k})\varepsilon .$$

<u>*Шаг* 3</u>. Заменяем k на $k+1$ и переходим к шагу 1.

8.6.1.1. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ДИХОТОМИИ

Найти точку минимума функции $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$ на интервале [1,5; 4] с точностью ε = 0,1.

Функция $f(x)$ строго выпукла на интервале [1,5; 4] по определению, так как $\nabla^2 f(x) = 3x^2 - 4x + 1 > 0$ при $x \in [1{,}5;4]$. Тогда функция $f(x)$ унимодальна.

Полагаем начальные значения

$$a_0 = 1{,}5,\ b_0 = 4,$$

$$x_1^0 = (1{,}5 + 4)/2 - 0{,}1/2 = 2{,}7,\ x_2^0 = (1{,}5 + 4)/2 + 0{,}1/2 = 2{,}8$$

и вычисляем значения функции $f(x_1^0), f(x_2^0)$:

$$f(x_1^0) = \frac{1}{4}(2{,}7)^4 - \frac{2}{3}(2{,}7)^2 - 2 \cdot 2{,}7 + 6 = 4{,}409;\ f(x_2^0) = 5{,}051.$$

Так как $f(x_1^0) < f(x_2^0)$, то $x^* \in [a_0, x_2^0]$ и выбираем $a_1 = a_0 = 1{,}5$, $b_1 = x_2^0 = 2{,}8$. Далее полагаем

$$x_1^1 = (1{,}5 + 2{,}8)/2 - 0{,}05 = 2{,}1, x_2^1 = (1{,}5 + 2{,}8)/2 + 0/05 = 2{,}2$$

и вычисляем $f(x_1^1)$, $f(x_2^1)$: $f(x_1^1) = 2{,}693$; $f(x_1^1) = 2{,}776$.

Снова $f(x_1^1) < f(x_2^1)$. Значит $a_2 = a_1 = 1{,}5, b_2 = x_2^1 = 2{,}2$. И так далее. Результаты вычислений приведены в табл. 1. Процесс решения закончился на 4-м шаге, так в результате был получен интервал $[a_5, b_5] = [1{,}875;2{,}05]$ длиной 0,175<2$\cdot\varepsilon$ =0,2. Следовательно, в качестве приближенного решения можно выбрать $\tilde{x} = (1{,}875 + 2{,}05)/2 = 1{,}9625$.

Таблица 1. Результаты вычислений в методе дихотомии

k	a_k	b_k	ℓ_k	x_1^k	x_2^k	$f(x_1^k)$	$f(x_2^k)$
0	1,5	4	2,5	2,7	2,8	4,409	5,051
1	1,5	2,8	1,3	2,1	2,2	2,693	2, 776
2	1,5	2.2	0,7	1,8	1,9	2,756	2,69
3	1.8	2,2	0,4	1,95	2,05	2,6726	2,673
4	1,8	2,05	0,25	1,875	1,975	2,7032	2,6682
5	1,875	2,05	0,175				

Ответ: $x^* = 1{,}9625$.

8.6.2. МЕТОД ФИБОНАЧЧИ

Найти приближенное решение задачи минимизации $f(x)$ на интервале $[a,b]$, отличающееся от точного решения x^* не более чем на ε:

$$\left|x - x^*\right| \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – заданная точность.

Последовательность чисел F_n, $n = 0,1,2,\ldots$, определяемая условиями

$$F_0 = F_1 = 1,\ F_2 = F_0 + F_1,\ F_3 = F_1 + F_2, \ldots,\ F_{n+1} = F_{n-1} + F_n, \ldots$$

называется *последовательностью Фибоначчи.*

Алгоритм метода Фибоначчи

Подготовительный этап. Формируем последовательно числа Фибоначчи до тех пор, пока не найдем некоторое число F_N, такое что $F_N \ge \dfrac{b-a}{\varepsilon}$. Обозначим $\Delta = \dfrac{b-a}{F_N} \le \varepsilon, a_0 = a, b_0 = b$. Полагаем $x_1^0 = a_0 + F_{N-2}\Delta,\ x_2^0 = b_0 - F_{N-2}\Delta,$ вычисляем значения $f(x_1^0),\ f(x_2^0)$, полагаем $k = 0$ и переходим к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Если $f(x_1^k) > f(x_2^k)$, то переходим к шагу 2, если $f(x_1^1) \le f(x_2^1)$, то переходим к шагу 3.

Шаг 2. Полагаем $a_{k+1} = x_1^k$, $b_{k+1} = b_k$. Длина полученного интервала $\ell_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1} = F_{N-K-1}\Delta$. Если $k = N-3$, то переходим к шагу 5; в противном случае полагаем $x_1^{k+1} = x_2^k$, $x_2^{k+1} = b_{k+1} - F_{N-k-2}\Delta$, вычисляем $f(x_2^{k+1})$ и переходим к шагу 4.

Шаг 3. Полагаем $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_2^k$. Длина полученного интервала $\ell_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1} = F_{N-K-1}\Delta$. Если $k = N-3$, то переходим к шагу 5; в противном случае полагаем $x_2^{k+1} = x_1^k$, $x_1^{k+1} = a_{k+1} + F_{N-k-2}\Delta$, вычисляем $f(x_1^{k+1})$ и переходим к следующему шагу 4.

Шаг 4. Заменяем k на $k+1$ и переходим к шагу 1.

Шаг 5. В результате получается интервал неопределенности $[a_{N-2}, b_{N-2}]$ длиной

$$\ell_{N-2} = F_2\Delta = 2\Delta \le 2\varepsilon.$$

Приближенным решением задачи является тогда $\tilde{x} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$.

8.6.2.1. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ФИБОНАЧЧИ

Найти минимум функции $f(x)$ из примера раздела 8.6.2, используя метод Фибоначчи.

Строим последовательность чисел Фибоначчи до выполнения неравенства

$$F_N \ge \frac{4-1{,}5}{0{,}1} = 25.$$

Получаем $F_0 = F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 13, F_7 = 21, F_8 = 34.$ Следовательно, $N = 8$. Полагаем $\Delta = \dfrac{b-a}{F_8} = \dfrac{2{,}5}{34} \cong 0{,}07353$.

В соответствии с вычислительной схемой метода находим

$$a_0 = 1{,}5;\ b_0 = 4,$$

$$x_1^0 = a_0 + F_6\Delta = 1{,}5 + 13\Delta = 2{,}45588,\ x_2^0 = b - F_6\Delta = 4 - 13\Delta = 3{,}04412.$$

Вычисляем $f(x_1^0)$ и $f(x_2^0)$: $f(x_1^0)=3{,}323356$, $f(x_2^0)=7{,}206973$

Так как $f(x_1^0)>f(x_2^0)$, то $a_1=a_0=1{,}5$, $b_1=3{,}04412$.

Находим $x_1^1=a_1+F_5\Delta=1{,}5+8\Delta=2{,}08824, x_2^1=b_1-8\Delta=x_1^0=2{,}45588$.

Вычисляем только $f(x_1^1)$, так как $f(x_2^1)=f(x_1^0)=3{,}323356$.

В результате получаем $f(x_1^1)=2{,}6868.$

Снова $f(x_1^1)>f(x_2^1)$. Следовательно, полагаем

$$a_2=a_1=1{,}5,$$

$b_2=x_2^1=2{,}45588, x_2^1=a_2+F_4\Delta=1{,}5+5\Delta=1{,}8676, x_2^2=b_2-F_4\Delta=2{,}08823\cong x_1^1.$

Вычисляем только $f(x_1^2)$ и т.д. Результаты вычислений даны в таблице 2.

Таблица 2. Результаты вычислений в методе Фибоначчи

k	a_k	b_k	ℓ_k	x_1^k	x_2^k	$f(x_1^k)$	$f(x_2^k)$
0	1,5	4	2,5	2,45588	3,04412	3,323356	7,206973
1	1,5	3,04412	1,54412	2,08824	2,45588	2,6868	3,323356
2	1,5	2,45588	0,95586	1,8676	2,08824	2,7081	2,6868
3	1, 8676	2,45588	0,58828	2,08824	2,23530	2,6868	2,8228
4	1, 8676	2,2353	0,3677	2,01466	2,08824	2,6698	2,6868
5	1, 8676	2,08824	0,22064	1,94113	2,01466	2,6690	2,6698
6	1, 8676	2,01466	0,147				

Процесс решения закончился на 5-м шаге. При этом был получен интервал неопределенности [1,8676; 2,01466] длиной 0,147 < 2ε = 0,2.

Ответ: x^* =1, 94113.

Отметим, что, несмотря на то, что метод Фибоначчи для решения данной задачи требует большего числа шагов по сравнению с методом дихотомии, количество вычислений значений функции $f(x)$ в нем составило семь, в то время как в примере раздела 8.6.2 (в методе дихотомии) это количество равно десяти. Это обстоятельство является характерным для рассмотренных методов.

8.6.3. МЕТОД ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

Найти приближенное решение задачи минимизации $f(x)$ на интервале $[a,b]$, отличающееся от точного решения x^* не более чем на ε:

$$\left|x - x^*\right| \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – заданная точность.

Метод золотого сечения подобно методу Фибоначчи также требует на каждом шаге, кроме нулевого, вычисления значения функции $f(x)$ лишь в одной новой точке. Это достигается путем деления интервалов неопределенности в одной и той же пропорции, задаваемой константой $\alpha = (3 - \sqrt{5})$ и получившей название «золотого сечения».

Алгоритм метода золотого сечения

Подготовительный этап. Пусть $a_0 = a, b_0 = b$, тогда $[a_0, b_0]$ – начальный интервал неопределенности. Полагаем $x_1^0 = a_0 + \alpha\, \ell_0$, $x_2^0 = b_0 - \alpha\, \ell_0$, где $\ell_0 = b_0 - a_0$. Вычисляем значения $f(x_1^0)$, $f(x_2^0)$, полагаем $k = 0$ и переходим к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Если $b_k - a_k \le 2\varepsilon$, то остановиться; оптимальная точка принадлежит интервалу $[a_k, b_k]$. В качестве приближенного решения может быть выбрано $\tilde{x} = (a_k + b_k)/2$. В противном случае, если $f(x_1^k) > f(x_2^k)$, то перейти к шагу 2, а если $f(x_1^k) \le f(x_2^k)$, то перейти к шагу 3.

Шаг 2. Полагаем $a_{k+1} = x_1^k, b_{k+1} = b_k$. В итоге приходим к интервалу $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ длиной $\ell_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1} = (1-\alpha)^{k+1} \ell_0$. Полагаем $x_1^{k+1} = x_2^k$, $x_2^{k+1} = b_{k+1} - \alpha\, \ell_{k+1}$. Вычисляем $f(x_2^{k+1})$ и переходим к шагу 4.

Шаг 3. Полагаем $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_2^k$. В итоге приходим к интервалу $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ длиной $\ell_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1} = (1-\alpha)^{k+1} \ell_0$. Полагаем $x_2^{k+1} = x_1^k$, $x_1^{k+1} = a_{k+1} + \alpha\, \ell_{k+1}$. Вычисляем $f(x_1^{k+1})$ и переходим к шагу 4.

Шаг 4. Заменяем k на $k+1$ и переходим к шагу 1.

Очевидно, минимальное число шагов k, которое требуется сделать в методе, определяется из условия

$$k > \frac{\ln(2\varepsilon) - \ln \ell_0}{\ln(1-\alpha)} - 1 .$$

8.6.3.1. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

Найти минимум функции $f(x)$ из примера раздела 8.6.2, используя метод золотого сечения.

Определим минимальное число шагов, исходя из условия $\ell_{k+1} = (1-\alpha)^{k+1}\ell_0 \le 2\varepsilon$:

$$k > \frac{\ln 0.2 - \ln 2.5}{\ln(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2})} - 1 \cong 4.26 .$$

Выписываем исходные данные подготовительного этапа:

$$k = 5,\ a_0 = 1{,}5;\ b_0 = 4,$$

$$x_1^0 = a_0 + \alpha \cdot 2{,}5 = 1{,}5 + 0{,}382 \cdot 2{,}5 = 2{,}455,\ x_2^0 = b_0 - \alpha \cdot 2{,}5 = 4 - 0.382 \cdot 2{,}5 = 3{,}045 .$$

Вычисляем $f(x_1^0)$ и $f(x_2^0)$: $f(x_1^0)$ =3,3203, $f(x_2^0)$ =7,207.

Так как $f(x_1^0) < f(x_2^0)$, то полагаем $a_1 = a_0 = 1{,}5$, $b_1 = x_2^0 = 3{,}045$,

$$x_1^1 = a_1 + \alpha \cdot 1{,}545 = 1{,}5 + 0{,}382 \cdot 1{,}545 = 2{,}0902,$$

$$x_2^1 = b_1 - \alpha \cdot 1{,}545 = 3{,}045 - 0{,}382 \cdot 1{,}545 = 2{,}4548 \cong x_1^0 .$$

Значит $f(x_2^1) \cong f(x_1^0) = 3{,}3203$, и остается вычислить $f(x_1^1) = 2{,}687$. Снова $f(x_1^1) < f(x_2^1)$ и, следовательно, $a_2 = a_1 - 1{,}5$, $b_2 = x_2^1 = 2{,}4558$. И так далее.

Полученный на 5-м шаге интервал [1,951; 2,09] имеет длину

$$\ell_6 = 0{,}139 < 0{,}2 = 2\varepsilon ,$$

приближенное решение можно тогда взять равным $\tilde{x}$ = 2,021.

Число шагов в рассмотренном примере оказалось таким же, как и число шагов в методе Фибоначчи. Однако здесь нет необходимости в выполнении подготовительного этапа, что упрощает процесс решения задач.

Результаты вычислений приведены в таблице 3.

Таблица 3. Результаты вычислений в методе золотого сечения

k	a_k	b_k	ℓ_k	x_1^k	x_2^k	$f(x_1^k)$	$f(x_2^k)$
0	1,5	4	2,5	2,455	3,045	3,3203	7,207
1	1,5	3,045	1,545	2,090	2,455	2,687	3,3203
2	1,5	2,455	0,955	1,865	2,090	2,72	2,687
3	1,865	2,455	0,59	2,090	2,230	2,687	2,805
4	1,865	2,230	0,365	2,004	2,090	2,667	2,687
5	1,865	2,090	0,225	1,951	2,004	2,678	2,667
6	1,951	2,090	0,139				

Ответ: $x^* = 2{,}021$.

8.6.4. МЕТОД ДЕЛЕНИЯ ПОПОЛАМ

Найти приближенное решение задачи минимизации дифференцируемой функции $f(x)$ на интервале [*a, b*], отличающееся от точного решения x^* не более чем на ε:

$$\left|x - x^*\right| \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – заданная точность.

Алгоритм метода деления пополам

Подготовительный этап. Пусть $[a_0, b_0]$ – начальный интервал неопределенности, а $l = 2\varepsilon$ – требуемая длина конечного интервала. Полагаем n равным наименьшему положительному целому, для которого $\left(\frac{1}{2}\right)^n \le l/(b_0 - a_0)$. Полагаем $k = 0$ и переходим к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Полагаем $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ и вычисляем $\nabla f(x_k)$. Если $\nabla f(x_k) = 0$, то остановиться; x_k – оптимальное решение. В противном случае, переходим к шагу 2, если $\nabla f(x_k) > 0$, и к шагу 3, если $\nabla f(x_k) < 0$.

Шаг 2. Полагаем $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$. Переходим к шагу 4.

Шаг 3. Полагаем $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Если $k = n - 1$, то остановиться. Минимум содержится в интервале $[a_n, b_n]$. В противном случае, заменяем k на k+1 и возвращаемся к шагу 1.

8.6.4.1. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ДЕЛЕНИЯ ПОПОЛАМ

Найти минимум функции $f(x) = x^2 + 2x$ на интервале [-3; 6] с точностью ε=0,1 методом деления пополам.

Определим минимальное число шагов, исходя из условия $\left(\frac{1}{2}\right)^n \le l/(b_0 - a_0)$=0,2/9=0,02222: $n \ge \frac{\ln 0{,}02222}{\ln 2 - \ln 1}$. Отсюда n=6. Результаты вычислений приведены в таблице 4.

Таблица 4. Результаты вычислений в методе деления пополам

k	a_k	b_k	ℓ_k	x_k	$\nabla f(x_k)$
0	–3	6	9	1,5	5,0
1	–3	1,5	4,5	–0,75	0,5
2	–3	–0,75	2,25	–1,875	–1,75
3	–1,875	–0,75	1,125	–1,3125	–0,625
4	–1,3125	–0,75	0,5625	–1,0313	–0,0625
5	–1,0313	–0,75	0,2813	–0,8907	0,2186
6	–1,0313	–0,8907	0,1406		

Полученный на 6-м шаге интервал [–1,0313; –0,8907] имеет длину $\ell_6 = 0{,}1406 < 0{,}2 = 2\varepsilon$, приближенное решение можно тогда взять $\tilde{x}$=– 0,961.

Ответ: x^* = – 0,961.

8.6.5. МЕТОД НЬЮТОНА

Найти приближенное решение задачи минимизации дважды дифференцируемой функции $f(x)$ на интервале [a,b], отличающееся от точного решения x^* не более чем на ε:

$$\left|x - x^*\right| \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – заданная точность.

Метод Ньютона основывается на использовании квадратичной аппроксимации функции $f(x)$ в заданной точке x_k. Квадратичная аппроксимация задается равенством

$$q(x) = f(x_k) + \nabla f(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}\nabla^2 f(x^k)(x - x_k)^2.$$

В качестве x_{k+1} берется точка, в которой производная функции $q(x)$ равна нулю: $\nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x^k)(x - x_k) = 0$. Таким образом,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\nabla f(x_k)}{\nabla^2 f(x_k)}.$$

Процесс останавливается, когда $\left|x_{k+1} - x_k\right| < \varepsilon$, или когда $\nabla f(x_k) < \varepsilon$.

Заметим, что приведенная выше процедура может быть использована только для дважды дифференцируемых функций и определена только в том случае, если $\nabla^2 f(x_k) \ne 0$ для каждого k. Более того, в общем случае метод Ньютона не сходится к стационарной точке при произвольной начальной точке, начальная точка должна быть достаточно близка к стационарной точке.

8.6.5.1. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Найти, используя метод Ньютона, минимум функции $f(x) = 4x^3 - 3x^4$, если $x \ge 0$ и $f(x) = 4x^3 + 3x^4$, если $x < 0$.

Применим метод Ньютона для минимизации $f(x)$, начиная из двух различных точек. Результаты вычислений при x =0,4 приведены в таблице 5. После шести итераций получена точка x_{k+1}=0,002807, которую можно взять приближенным решением. Процесс сходится к стационарной точке x =0.

Результаты вычислений при x = 0,6 приведены в таблице 6. Генерируемые точки попеременно принимают значения 0,6 и –0,6. Процесс расходится.

Таблица 5. Результаты вычислений в методе Ньютона. Процесс сходится

k	x_k	$\nabla f(x_k)$	$\nabla^2 f(x_k)$	x_{k+1}
0	0,4	1,152	3,84	0,1
1	0,1	0,108	2,04	0,047059
2	0,047059	0,025324	1,049692	0,022934
3	0,022934	0,006167	0,531481	0,011331
4	0,011331	0,001523	0,267322	0,005634
5	0,005634	0,000379	0,134073	0,002807

Таблица 6. Результаты вычислений в методе Ньютона. Процесс расходится

k	x_k	$\nabla f(x_k)$	$\nabla^2 f(x_k)$	x_{k+1}
0	0,6	1,728	1,44	–0,6
1	–0,6	1,728	–1,44	0,6
2	0,6	1,728	1,44	–0,6
3	–0,6	1,728	–1,44	0,6

8.7. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МНОГОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

Рассмотрим приближенные методы решения задач безусловной минимизации функции n переменных $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Методы позволяют строить последовательность векторов $x^k = (x_1^k, ..., x_n^k)$, k=1,2,.., начиная с некоторого заданного вектора $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, при этом, если выполнены определенные условия на функцию $f(x)$, то x^k сходится к точке минимума x^*.

Последовательности $\{x^k\}$, удовлетворяющие условию

$$f(x^0) > f(x^1) > \ldots > f(x^k) > f(x^{k+1}) > \ldots,$$

называются *релаксационными*, а методы их построения – *методами спуска*.

Построение (k+1)-го приближения x^{k+1} в методе спуска осуществляется на основе уже построенного k-го приближения x^k по формуле

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k,$$

где $s^k = (s_1^k, ..., s_n^k)$ – направление спуска, α_k – величина шага вдоль этого направления. Вычисление величины шага α_k реализуется, как правило, решением задачи минимизации функции $f(x^k + \alpha s^k)$, зависящей от переменной α, то есть задачи одномерного спуска.

Важнейшей характеристикой методов спуска является их скорость сходимости. Для ее определения используется понятие нормы вектора.

Нормой вектора $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ называется число вида

$$\|z\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + ... + z_n^2}.$$

Если даны два вектора z^1 и z^2, то число $\|z^2 - z^1\|$ является расстоянием между этими векторами.

Например, расстояние между трехмерными векторами z^2 = (0,2,0), z^1 = (1,2,1) задается числом $\left\|\bar{z}^2 - \bar{z}^1\right\| = \sqrt{(0-1)^2 + (2-2)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{2}$.

Метод спуска имеет *линейную скорость сходимости* (или сходится со скоростью геометрической прогрессии), если

$$\|x^{k+1} - x^*\| \le q\|x^k - x^*\|,$$

где $0<q<1$ – некоторая константа.

Скорость сходимости *сверхлинейная*, если

$$\|x^{k+1} - x^*\| \le q_k\|x^k - x^*\|,$$

где $q_k \to 0$.

Скорость сходимости *квадратичная*, если

$$\|x^{k+1} - x^*\| < C\,\|x^k - x^*\|^2,$$

где $C > 0$ – константа.

В зависимости от максимального порядка производных минимизируемой функции $f(x)$, вычисление которых требует метод, методы принято делить на следующие классы:

- *методы нулевого порядка* – методы, использующие лишь вычисления самой функции;
- *методы первого порядка* – методы, требующие вычисления значений функции и ее первых производных;
- *методы второго порядка* – методы, требующие вычисления значений функции и ее первых и вторых производных.

Так, например, рассмотренные выше методы одномерной минимизации: дихотомии, Фибоначчи и золотого сечения используют вычисления только значений функции $f(x)$ и относятся к методам нулевого порядка, метод деления отрезка пополам и метод Ньютона используют информацию о производной минимизируемой функции $f(x)$ и относятся к методам первого порядка.

В формулировках алгоритмов для рассматриваемых ниже методов для простоты предполагается, что точка минимума существует. Это предположение выполняется при следующих условиях:

– минимум $f(x)$ вдоль любого направления единственен;

– последовательность точек, генерируемых алгоритмом, содержится в компактном множестве.

8.7.1. МЕТОД ЦИКЛИЧЕСКОГО ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКА

Метод циклического покоординатного спуска применяется для минимизации функции нескольких переменных и не требует использования производных. В этом методе в качестве направлений спуска выбираются координатные векторы $s^1,\dots,s^n$, где s^j – вектор, все компоненты которого, за исключением j-й, равны нулю. Таким образом, при поиске по направлению s^j меняется только j-я координата точки, в то время как все остальные переменные остаются зафиксированными. Схематически этот метод проиллюстрирован на рисунке 11. Замедление на последних итерациях объясняется тем, что вдоль оврага, показанного пунктирной линией, делаются очень маленькие шаги по координатным направлениям.

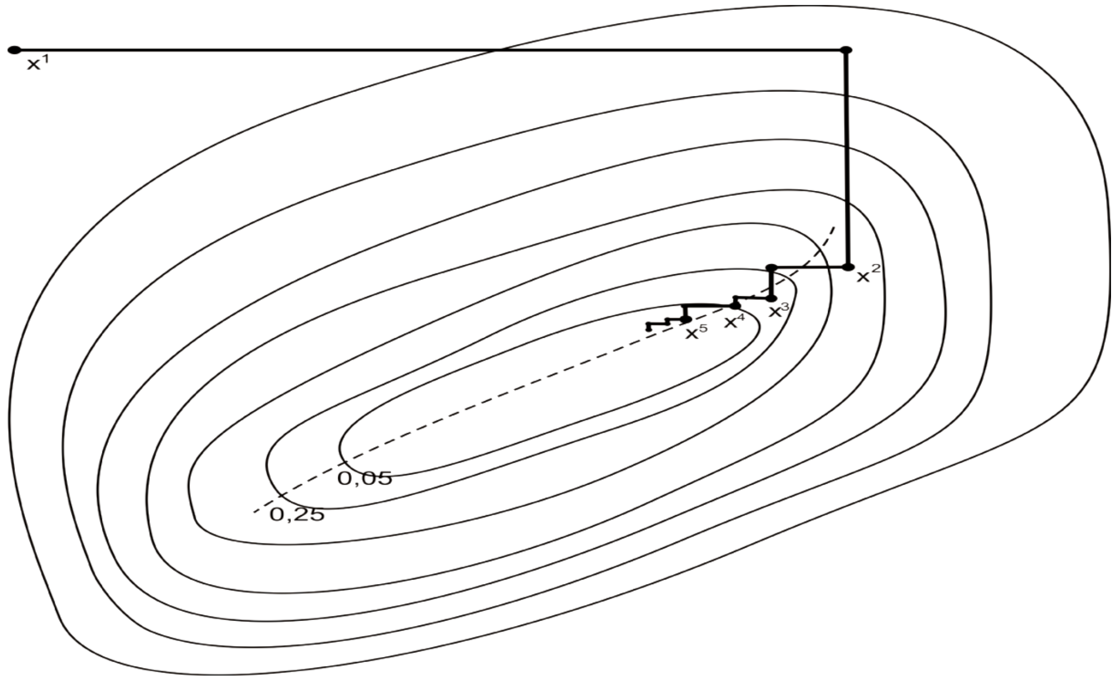

Рис. 11. Иллюстрация к методу циклического покоординатного спуска

Алгоритм метода циклического покоординатного спуска

<u>*Подготовительный этап.*</u> Выбираем число $\varepsilon > 0$, которое будет использоваться для остановки алгоритма, и берем в качестве направлений спуска $s^1,\ldots,s^n$ координатные направления. Выбираем начальную точку x^1, полагаем $y^1 = x^1$, $k = j = 1$ и переходим к основному этапу.

<u>*Основной этап.*</u>

<u>*Шаг* 1</u>. Полагаем α_j равным оптимальному решению задачи минимизации $f(y^j + \alpha s^j)$ при условии $\alpha \geq 0$. Полагаем $y^{j+1} = y^j + \alpha_j s^j$. Если $j < n$, то заменить j на $j+1$ и вернуться к шагу 1. Если $j = n$, то переходим к шагу 2.

<u>*Шаг* 2</u>. Полагаем $x^{k+1} = y^{n+1}$. Если $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| < \varepsilon$, то остановиться. В противном случае полагаем $y^1 = x^{k+1}$, $j = 1$, заменяем k на $k+1$ и переходим к шагу 1.

Сходимость метода к стационарной точке (точка с нулевым значением градиента $\nabla f(x)$) гарантируется при условии дифференцируемости минимизируемой функции $f(x)$.

8.7.2. МЕТОД ХУКА И ДЖИВСА

В отсутствии дифференцируемости метод циклического покоординатного спуска может остановиться в неоптимальной точке. На рисунке 12,*a* поиск вдоль любой координатной оси в точке x^2 не приводит к улучшению целевой функции и в результате метод преждевременно останавливается. Как показано на рисунке 12,*b*, эта трудность может быть преодолена поиском вдоль направления $x^2 - x^1$, такой шаг называют *ускоряющим шагом*.

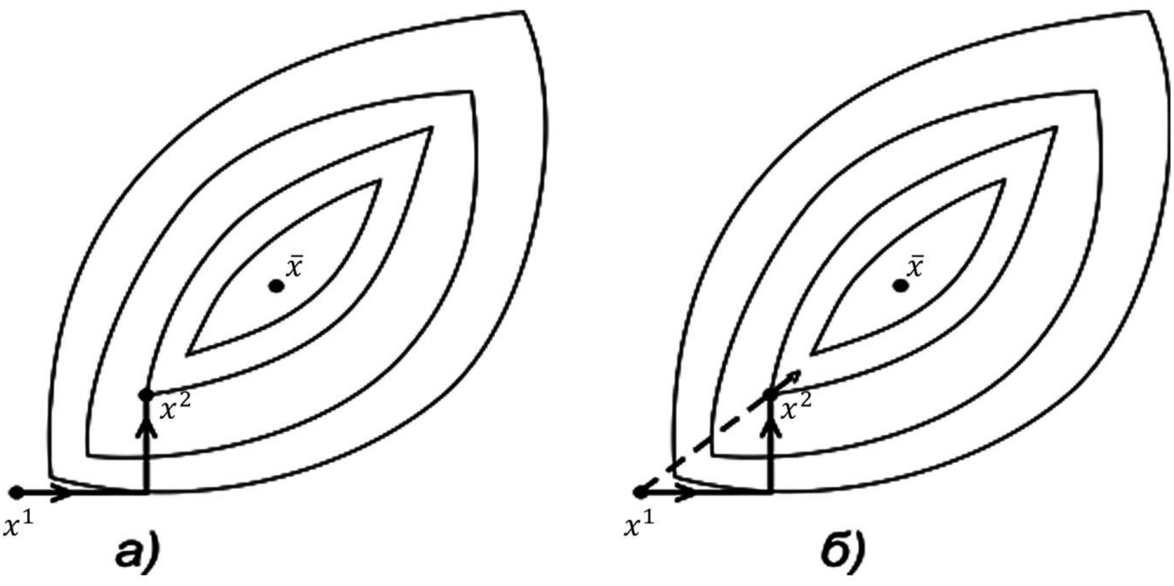

Рис. 12. Эффект овражности:

а) – остановка в точке x^2; б) – поиск вдоль направления $x^2 - x^1$

Поиск вдоль ускоряющего шага часто используется в процедурах циклического покоординатного спуска, даже если функция дифференцируема. Эта модификация метода циклического покоординатного спуска часто ускоряет сходимость, в частности, когда последовательность точек образует зигзагообразную траекторию.

Метод Хука и Дживса, представляющий модификацию метода циклического покоординатного спуска, осуществляет два типа спуска – исследующий поиск и поиск по образцу. *Исследующий поиск* – это спуск по координатным направлениям, *поиск по образцу* – это ускоряющий шаг. Две итерации этого метода показаны на рисунке 13. При заданной начальной точке x^1 исследующий поиск по координатным направлениям приводит в точку x^2, последующий поиск по образцу в направлении $x^2 - x^1$ приводит в точку y. Затем исследующий поиск, начинающийся из точки y, дает точку x^3. Еще одна особенность метода Хука и Дживса: метод не содержит одномерную минимизацию, а использует постоянные шаги по направлениям поиска.

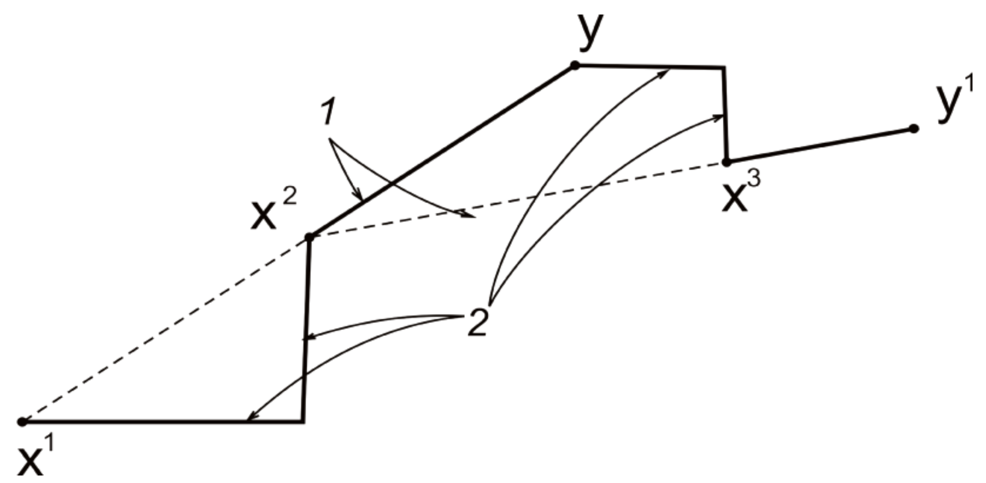

Рис. 13. Метод Хука и Дживса:
1 – поиск по образцу; 2 – исследующий поиск вдоль координатных осей

Алгоритм метода Хука и Дживса

<u>*Подготовительный этап*</u>. Задаем в качестве $d^1, \ldots, d^n$ координатные направления. Выбираем число $\varepsilon > 0$ для остановки алгоритма, начальный шаг $\Delta \geq \varepsilon$ и ускоряющий множитель $\alpha > 0$. Выбираем начальную точку x^1, полагаем $y^1 = x^1$, $k = j = 1$ и переходим к основному этапу.

<u>*Основной этап.*</u>

<u>*Шаг* 1</u>. Если $f(y^j + \Delta d^j) < f(y^j)$, то шаг считается успешным; полагаем $y^{j+1} = y^j + \Delta d^j$ и переходим к шагу 2. Если

$f(y^j+\Delta d^j)\geq f(y^j)$, то шаг считается неудачным. В этом случае, если $f(y^j+\Delta d^j)< f(y^j)$, то полагаем $y^{j+1}=y^j-\Delta d^j$ и переходим к шагу 2, если же $f(y^j-\Delta d^j)\geq f(y^j)$, то полагаем $y^{j+1}=y^j$ и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Если $j<n$, то заменяем j на $j+1$ и возвращаемся к шагу 1. В противном случае переходим к шагу 3, если $f(y^{n+1})< f(x^k)$, и к шагу 4, если $f(y^{n+1})\geq f(x^k)$.

Шаг 3. Полагаем $x^{k+1}=y^{n+1}$, $y^1=x^{k+1}+\alpha(x^{k+1}-x^k)$. Заменяем k на $k+1$, полагаем $j=1$ и переходим к шагу 1.

Шаг 4. Если $\Delta\leq\varepsilon$, то остановиться; x^k – решение. В противном случае заменяем Δ на $\Delta/2$. Полагаем $y^1=x^k$, $x^{k+1}=x^k$, заменяем k на $k+1$, полагаем $j=1$ и возвращаемся к шагу 1.

Легко видеть, что шаги 1 и 2 осуществляют исследующий поиск по координатным направлениям, а шаг 3 является ускоряющим шагом по направлению $x^{k+1}-x^k$. На шаге 4 длина постоянного шага Δ сокращается.

8.7.2.1. МЕТОД ХУКА И ДЖИВСА С ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИЕЙ

Рассмотрим непрерывный вариант метода Хука и Дживса, использующий одномерную минимизацию вдоль координатных направлений, и направлений поиска по образцу. На рисунке 14 показан пример работы алгоритма. Как видно, поиск по образцу улучшает сходимость в результате движения вдоль направления, которое почти параллельно дну оврага, показанному пунктирной линией.

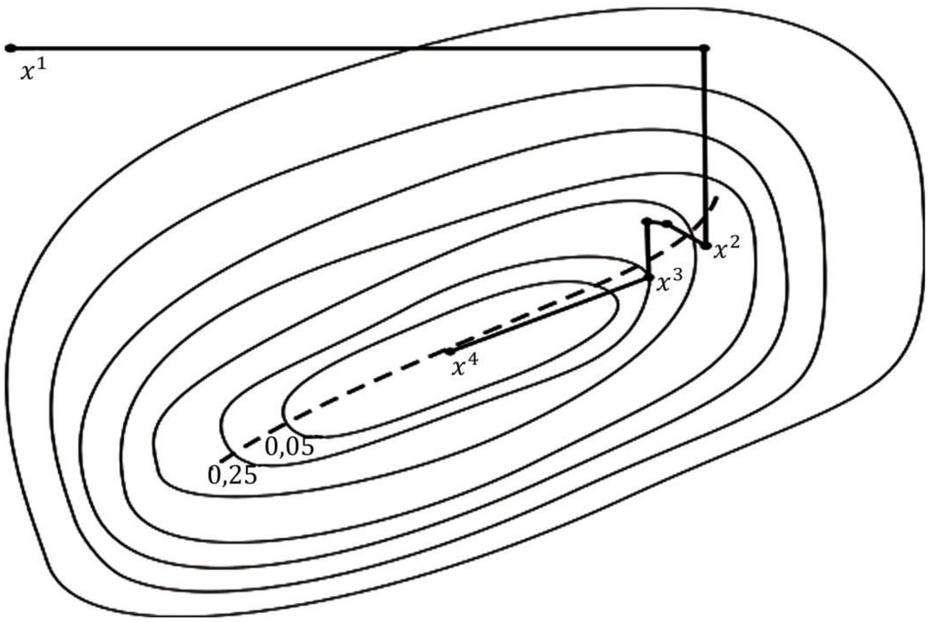

Рис. 14. Иллюстрация к методу Хука и Дживса с использованием одномерной минимизации

8.7.2.2. АЛГОРИТМ ХУКА И ДЖИВСА С ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИЕЙ

Подготовительный этап. Выбираем число $\varepsilon > 0$ для остановки алгоритма. Выбираем начальную точку x^1, полагаем $y^1 = x^1$, $k = j = 1$ и переходим к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Вычисляем α_j – оптимальное решение задачи минимизации $f(y^j + \alpha s^j)$ при условии $\alpha \geq 0$ и полагаем $y^{j+1} = y^j + \alpha_j s^j$. Если $j < n$, то заменяем j на $j+1$ и повторяем шаг 1. Если $j = n$, то полагаем $x^{k+1} = y^{n+1}$. Если $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon$, то остановиться. В противном случае переходим к шагу 2.

Шаг 2. Полагаем $d = x^{k+1} - x^k$ и находим $\tilde{\alpha}$ – оптимальное решение задачи минимизации $f(x^{k+1} + \alpha d)$ при условии $\alpha \geq 0$. Полагаем $y^1 = x^{k+1} + \tilde{\alpha} d,\ j = 1$, заменяем k на $k+1$ и переходим к шагу 1.

8.7.3. МЕТОД РОЗЕНБРОКА

Метод Розенброка предназначается для минимизации функции нескольких переменных и не требует использования производных. В этом методе осуществляется итеративный поиск вдоль n линейно независимых и ортогональных направлений. Когда получена новая точка в конце n итераций, строится новое множество ортогональных векторов. На рисунке 15 новые направления обозначены через $\bar{s}^1$ и $\bar{s}^2$.

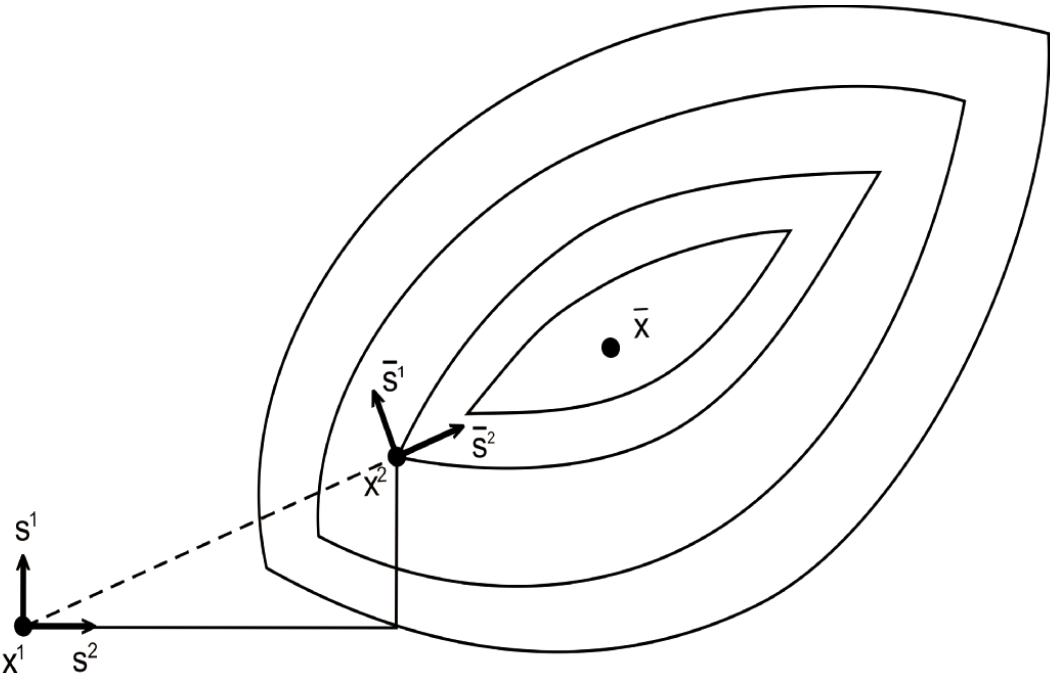

Рис. 15. Построение новых направлений в методе Розенброка

В первоначальном варианте метод Розенброка не использует одномерную минимизацию по направлению, а применяет дискретные шаги вдоль направлений спуска.

Следует заметить, что в методе циклического покоординатного спуска координатные направления, используемые в качестве направлений поиска, тоже линейно независимые и ортогональные, поэтому метод циклического покоординатного спуска можно считать частным случаем метода Розенброка.

Пусть $s^1,\dots,s^n$ – линейно независимые векторы, по норме равные единице. Предположим, что эти векторы взаимно ортогональны, т.е.

$(s^i, s^j)=0$ для $i \neq j$. Начиная из текущей точки x^k, целевая функция последовательно уменьшается вдоль каждого из направлений, в результате чего получается точка x^{k+1}. В частности, $x^{k+1} - x^k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s^j$, где α_j – длина шага по направлению s^j. Новый выбор направлений $\bar{s}^1, \ldots, \bar{s}^n$ строится с помощью *процедуры Грама-Шмидта* следующим образом:

$$z^j = \begin{cases} s^j, \ \textit{если} \ \ \alpha_j = 0, \\ \sum_{i=j}^{n} \alpha_i s^i, \ \textit{если} \ \ \alpha_j \neq 0, \end{cases} \qquad g^j = \begin{cases} z^j, \ \textit{если} \ \ j = 1, \\ z^j - \sum_{i=1}^{j-1} (z^j, \bar{s}^i) \bar{s}^i, \quad \textit{если} \ \ j \geq 2, \end{cases}$$

$$\bar{s}^j = \frac{g^j}{\| g^j \|}.$$

Новые направления $\bar{s}^1, \ldots, \bar{s}^n$ линейно независимы и взаимно ортогональны.

8.7.3.1. АЛГОРИТМ РОЗЕНБРОКА

Подготовительный этап. Выбираем число $\varepsilon > 0$ для остановки алгоритма, коэффициент растяжения $\eta > 1$, и коэффициент сжатия $\beta \in (-1{,}0)$. Берем в качестве $s^1, \ldots, s^n$ координатные направления и выбрать $\bar{\Delta}_1, \ldots, \bar{\Delta}_n > 0$ – начальную длину шага вдоль каждого из направлений. Выбираем начальную точку x^1, полагаем $y^1 = x^1$, $k = j = 1$, $\Delta j = \bar{\Delta}_j$ для всех *j* и переходим к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Если $f(y^j + \Delta_j s^j) < f(y^j)$, то шаг по *j*-му направлению считается успешным; полагаем $y^{j+1} = y^j + \Delta_j s^j$ и заменяем Δ_j на $\eta \, \Delta_j$. Если $f(y^j + \Delta s^j) \geq f(y^j)$, то шаг считается неудачным. Полагаем

$y^{j+1} = y^j$ и Δ_j заменить на $\beta\,\Delta_j$. Если $j < n$, то заменяем j на $j+1$ и повторяем шаг 1. В противном случае, т.е. при $j = n$, переходим к шагу 2.

Шаг 2. Если $f(y^{n+1}) < f(y^1)$, т.е. если хотя бы один спуск по направлению на шаге 1 оказался успешным, полагаем $y^1 = y^{n+1}$, j=1 и повторить шаг 1. Пусть $f(y^{n+1}) = f(y^1)$, т.е. каждый из n последних спусков по направлению на шаге 1 был неудачным. Если $f(y^{n+1}) < f(x^k)$, т.е., по крайней мере, один удачный спуск встретился в течение k-й итерации на шаге 1, то переходим к шагу 3. Если $f(y^{n+1}) = f(x^k)$, т.е. не было ни одного удачного спуска по направлению, то остановиться. При этом x^k является приближенным оптимальным решением, если $\left|\Delta_j\right| < \varepsilon$ для всех j. В противном случае полагаем $y^1 = y^{n+1}$, j=1 и переходим к шагу 1.

Шаг 3. Полагаем $x^{k+1} = y^{n+1}$. Если $\| x^{k+1} - x^k \| < \varepsilon$, то остановиться; x^{k+1} – приближенное оптимальное решение. В противном случае, вычисляем $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ из соотношения $x^{k+1} - x^k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s^j$, строим новые направления с помощью процедуры Грама-Шмидта, обозначаем их через $s^1,\ldots,s^n$, полагаем $\Delta_j = \bar{\Delta}_j$ для всех j, полагаем $y^1 = x^{k+1}$, заменяем k на k+1, полагаем j=1 и переходим к шагу 1.

8.7.3.2. АЛГОРИТМ РОЗЕНБРОКА С МИНИМИЗАЦИЕЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Рассмотрим непрерывный вариант метода Розенброка, состоящий в применении одномерной минимизации по направлению. На рисунке 16 показан процесс минимизации методом Розенброка.

Подготовительный этап. Пусть $\varepsilon > 0$ – скаляр, используемый в критерии остановки. Выбираем в качестве $s^1,\ldots,s^n$ координатные направления, начальную точку x^1, полагаем $y^1 = x^1$, $k = j = 1$ и переходим к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Вычисляем α_j – оптимальное решение задачи минимизации $f(y^j + \alpha s^j)$ при условии $\alpha \geq 0$ и полагаем $y^{j+1} = y^j + \alpha_j s^j$. Если $j<n$, то заменяем j на $j+1$ и повторяем шаг 1. В противном случае переходим к шагу 2.

Шаг 2. Полагаем $x^{k+1} = y^{n+1}$. Если $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon$, то остановиться. В противном случае полагаем $y^1 = x^{k+1}$, j=1, заменяем k на $k+1$, и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Строим новое множество линейно независимых и взаимно ортогональных направлений с помощью процедуры Грама-Шмидта. Обозначаем новые направления через $s^1,..., s^n$ и возвращаемся к шагу 1.

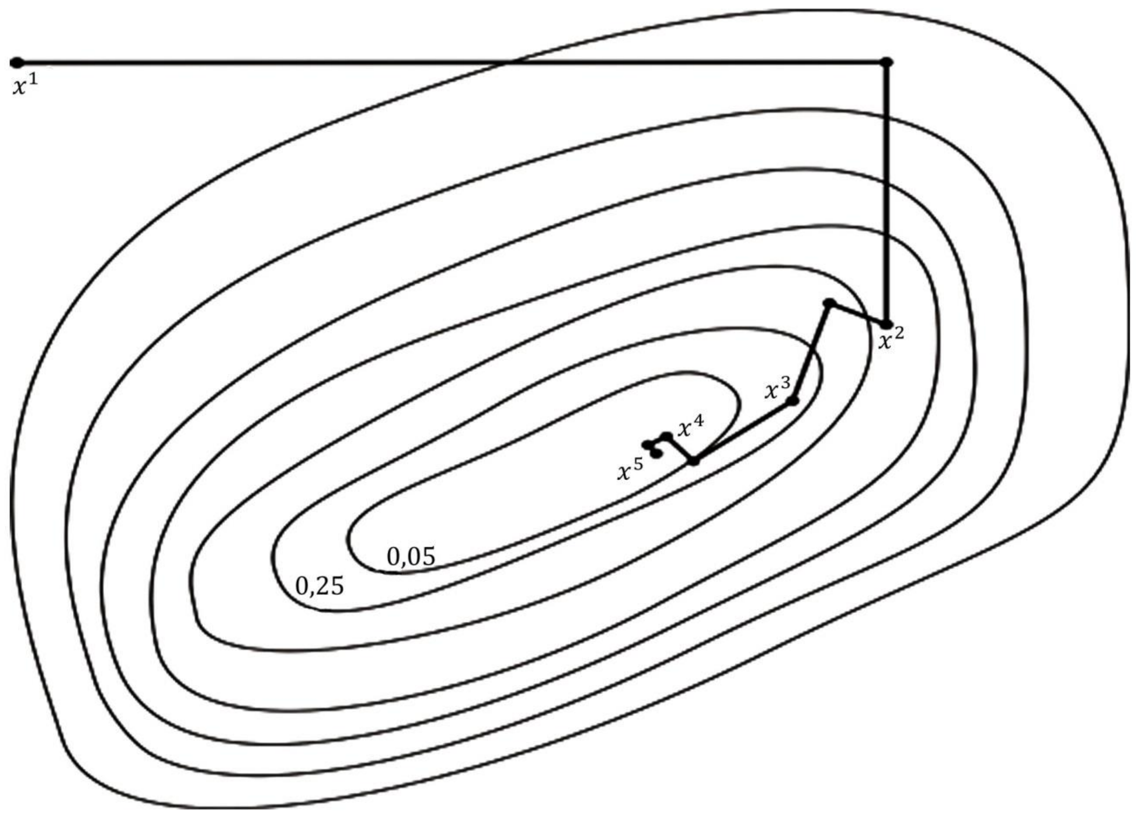

Рис. 16. Иллюстрация к методу Розенброка с минимизацией по направлению

8.7.4. ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД С ДРОБЛЕНИЕМ ШАГА

Градиентные методы, к числу которых относится данный метод и излагаемый ниже метод наискорейшего спуска, представляют семейство методов первого порядка, в которых в качестве направления спуска s^k выбирается антиградиент функции $f(x)$ в точке:

$$s^k = -\nabla f(x^k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^k), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^k), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^k) \right),$$

являющийся направлением наибольшего убывания функции $f(x)$ в точке x^k.

Различие этих методов – в способах выбора величины шага α_k. Критерием окончания процесса решения в алгоритме градиентного метода с дроблением шага является близость двух последующих приближений x^k и x^{k+1}, в методе наискорейшего спуска – близость к нулю градиента $\nabla f(x^k)$.

8.7.4.1. АЛГОРИТМ ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА С ДРОБЛЕНИЕМ ШАГА

Подготовительный этап. Пусть заданы $\varepsilon > 0$ – константа остановки, константа $0<d<1$, $\overline{\alpha}>0$ – начальная величина шага. Выбираем начальную точку x^1, полагаем $k=1$ и переходим к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Вычисляем $s^k = -\nabla f(x^k)$ и полагаем $\alpha = \overline{\alpha}$.

Шаг 2. Полагаем $x = x^k + \alpha s^k$. Если $f(x) - f(x^k) < d\alpha \|s^k\|^2$, то перейти к шагу 4, иначе к шагу 3.

Шаг 3. Уменьшить величину шага $\alpha = \frac{\alpha}{2}$ и перейти к шагу 2.

Шаг 4. Полагаем $x^{k+1} = x$. Если $|| x^{k+1} - x^k || \le \varepsilon$, то приближенное решение задачи равно x^{k+1}, иначе положить $k=k+1$ и перейти к шагу 1.

Сходимость метода обеспечивается следующими условиями:

$f(x)$ – строго выпуклая, дважды непрерывно дифференцируемая функция и собственные числа ее матрицы вторых производных при любом x содержатся в интервале [m,M], $m>0$.

8.7.4.2. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГРАДИЕНТНЫМ МЕТОДОМ С ДРОБЛЕНИЕМ ШАГА

Найти минимум функции $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2+2x_2^2+x_1-x_2$ с помощью градиентного метода с дроблением шага.

Ранее было показано (пример из раздела 8.3), что $f(x)$ строго выпуклая функция, матрица ее вторых производных не зависит от x и имеет положительные собственные числа $\lambda_1=3-\sqrt{2}$, $\lambda_2=3+\sqrt{2}$.

Пусть $x^1=(0,0)$; $\overline{\alpha}=1$; $\varepsilon=0{,}1$; $d=0{,}1$. В соответствии с вычислительной схемой метода находим направление спуска

$$s^1=-\nabla f(x^1)=-(2x_1^1+x_2^1+1,x_1^1+4x_2^1-1)=-(1,-1),\quad \left\|s^1\right\|^2=1^2+(-1)^2=2$$

Полагаем $\alpha=\overline{\alpha}=1$, $x=x^1+\alpha s^1=(-1,1)$ и находим $f(x)=f(-1,1)=0$. Так как

$$f(x^1)=f(0,0)=0\text{, то } f(x)-f(x^1)=0>-d\alpha\left\|s^1\right\|^2=-0{,}2.$$

Уменьшаем величину шага: $\alpha=\frac{1}{2}$, и снова вычисляем $x=x^1+\alpha s^1=(0,0)+\frac{1}{2}(-1,1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $f(x)=-\frac{1}{2}$. В результате $f(x)-f(x^1)=-\frac{1}{2}<-d\alpha\left\|s^1\right\|^2=-0{,}1$. Значит, следующее приближение x^2 равно x: $x^2=x=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Проверяем условие окончания процесса решения задачи $\left\|x^2-x^1\right\|=\sqrt{\frac{1}{2}}>\varepsilon=0{,}1$. Так как условие не выполняется, то полагаем $k=2$ и $s^2=-\nabla f(x^2)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\left\|s^2\right\|^2=\frac{1}{2}$. Далее при $\alpha=\overline{\alpha}=1$ находим

$x = x^2 + \alpha s^2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (-1{,}0)$, $f(x) = f(-1{,}0) = 0$, проверяем $f(x) - f(x^2) = 0 + \frac{1}{2} > -d\alpha\|s^2\|^2 = -0{,}05$, после чего уменьшаем шаг $\alpha = \frac{1}{2}$, находим $x = x^2 + \frac{1}{2}s^2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $f(x) = 0$, проверяем $f(x) - f(x^2) = 0 + \frac{1}{2} > -d\alpha\|s^2\|^2 = -0{,}025$, уменьшаем шаг $\alpha = \frac{1}{4}$, находим $x = x^2 + \alpha s^2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$, проверяем $f(x) - f(x^2) = -\frac{3}{16} < -d\alpha\|s^2\|^2 = -0{,}0125$. Значит $x^3 = x = \left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

Так как $\|x^3 - x^2\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1}32 \cong 0{,}177 > 0{,}1 = \varepsilon$, то полагаем k=3 и все повторяем сначала. Результаты вычислений приведены в таблице 7.

Таблица 7. Результаты вычислений в градиентным методом с дроблением шага

x^k	$f(x^k)$	s^k	α	$x = x^k + \alpha s^k$	$f(x)$	$-d\alpha\|s^k\|^2$	Результаты сравнения $f(x) - f(x^k) -$ $-d\alpha\|s^k\|^2$
(0,0)	0	(1,1)	1 $\frac{1}{2}$	(-1,1) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	0 $-\frac{1}{2}$	- 0,2 - 0,1	> <
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	(-1,0) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ $\left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$	0 0 $-\frac{9}{16}$	- 0,05 - 0,025 - 0,0125	> > <
$\left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$	$-\frac{9}{16}$	$\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$	1 $\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ $\left(-\frac{11}{16}, \frac{7}{16}\right)$	$-\frac{3}{8}$ $-\frac{73}{128}$	- 0,0031 - 0,00155	> <
$\left(-\frac{11}{16}, \frac{7}{16}\right)$	$-\frac{73}{128}$						

Как видно в итоге на втором шаге получена точка

$$x^4 = (-\frac{11}{16}, \frac{7}{16}) = (-0,6875\,;\ 0,4375),$$

такая, что

$$\left\|x^4 - x^3\right\| = \sqrt{\left(-\frac{11}{16} + \frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{16} - \frac{3}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{128}} \cong 0.0884 < 0,1 = \delta.$$

Значит, приближенное решение задачи равно x^4.

Ответ : $\tilde{x} = x^4 = (-0.6875\,;\ 0.4375)$.

Отметим, что точное решение задачи равно

$$x^* = \left(-\frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right) \cong (-0,7142;\ 0,4286),$$

а минимальное значение функции $f(x^*) = -\frac{73}{128} \cong -0,5703$.

8.7.5. МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Метод наискорейшего спуска отличается от градиентного метода с дроблением шага тем, что выбор величины шага α_k производится таким образом, чтобы в получаемой точке x^{k+1} достигался минимум функции $f(x)$ в направлении s^k.

8.7.5.1. АЛГОРИТМ МЕТОДА НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Подготовительный этап. Пусть $\varepsilon > 0$ – константа остановки. Выбираем начальную точку x^1, полагаем k=1 и переходим к основному этапу.

Основной этап. Если $||\nabla f(x^k)\ \ || < \varepsilon$, то остановиться; в противном случае полагаем $s^k = -\nabla f(x^k)$ и находим α_k – оптимальное решение задачи одномерной минимизации $f(x^k + \alpha s^k)$ при $\alpha_k \geq 0$. Полагаем $x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k$, заменяем k на k+1 и повторяем основной этап.

Сходимость метода обеспечивается следующими условиями: $f(x)$ – строго выпуклая, дважды непрерывно дифференцируемая функция и собственные числа ее матрицы вторых производных при любом x содержатся в интервале $[m,M]$, $m>0$.

Скорость сходимости линейная с параметром $q=\dfrac{M-m}{M+m}$.

$$\left\| x^{k+1} - x^* \right\| \le \frac{M-m}{M+m} \left\| x^k - x^* \right\|.$$

8.7.5.2. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Найти минимум функции $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + x_1 - x_2$ из примера в разделе 8.7.7 методом наискорейшего спуска.

Пусть $x^1 = (0{,}0), \varepsilon = 0{,}1$. Учитывая тот факт, что $f(x_1,x_2)$ в данном случае является квадратичной строго выпуклой функцией, найдем решение одномерной задачи $\varphi(\alpha) = f(x^k + \alpha s^k)$ в общем виде, которая так же, как и $f(x_1,x_2)$, выпукла.

Достаточное условие минимума $\varphi(\alpha)$ имеет вид $\nabla\varphi(\alpha) = 0$ и в силу известной теоремы о производной по направлению

$$\nabla\varphi(\alpha) = (\nabla f(x^k + \alpha s^k), s^k).$$

В рассматриваемом случае при $x^k = (x_1^k, x_2^k), s^k = (s_1^k, s_2^k)$ получаем

$$\nabla f(x^k + \alpha s^k) = (2(x_1^k + \alpha s_1^k) + (x_2^k + \alpha s_2^k) + 1, x_1^k + \alpha s_1^k + 4(x_2^k + \alpha s_2^k) - 1).$$

Следовательно,

$$\nabla\varphi(\alpha) = (2(x_1^k + \alpha s_1^k) + (x_2^k + \alpha s_2^k) + 1)s_1^k + (x_1^k + \alpha s_1^k + 4(x_2^k + \alpha s_2^k) - 1)s_2^k =$$

$$= (2(s_1^k)^2 + 2s_1^k s_2^k + 4(s_2^k)^2)\alpha + ((2x_1^k + x_2^k + 1)s_1^k + (x_1^k + 4x_2^k - 1)s_2^k) = 0,$$

откуда получаем выражение для величины шага α_k при всех k

$$\alpha_k = -\frac{(2x_1^k + x_2^k + 1)s_1^k + (x_1^k + 4x_2^k - 1)\,p_2^k}{2(s_1^k)^2 + 2s_1^k s_2^k + 4(s_2^k)^2}$$

В соответствии с алгоритмом метода вначале полагаем k=1 и находим (см. пример в разделе 8.7.7) $s^1 = -\nabla f(x^1) = (-1{,}1)$, тогда

$$\alpha = -\frac{(2\cdot 0 + 0 + 1)(-1) + (0 + 4\cdot 0 - 1)\cdot 1}{2\cdot(-1) + 2\cdot(-1)\cdot 1 + 4\cdot 1} = \frac{1}{2} > 0 \text{ и}$$

$$x^2 = x^1 + \alpha_1 s^1 = (0{,}0) + \frac{1}{2}(-1{,}1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Так как $\left\|x^2 - x^1\right\| = \sqrt{\frac{1}{2}} > \varepsilon = 0{,}1$, то переходим к следующему шагу k=2,

$$s^2 = -\nabla f(x^2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$\alpha_2 = -\frac{\left(2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + 1\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{2}\right) - \left(1\cdot -\frac{1}{2}\right)}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} > 0.$$

Снова $x^3 = x^2 + \alpha_2 s^2 = \left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$ и $\left\|x^3 - x^2\right\| = \sqrt{\frac{1}{32}} \cong 0{,}177 > 0{,}1 = \varepsilon$,

Полагаем k=3, $s^3 = -\nabla f(x^3) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$,

$$\alpha_3 = \frac{\left(2\cdot\left(-\frac{5}{8}\right) + \frac{3}{8}\right) + 1\left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{5}{8} + 4\cdot\frac{3}{8} - 1\right)\cdot\frac{1}{8}}{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{2} > 0,$$

Значит, $x^4 = x^3 + \alpha_3 s^3 = \left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) = \left(-\frac{11}{16}, \frac{7}{16}\right)$.

При этом $\left\|x^4 - x^3\right\| = \sqrt{\frac{1}{128}} \cong 0{,}0884 < 0{,}1 = \varepsilon$.

Ответ: $x^4 = \widetilde{x}$ =(–0,6875; 0,4375). Отметим, что найденный ответ совпадает с полученным ответом в примере из раздела 8.7.7.

8.7.6. МЕТОД НЬЮТОНА

Метод Ньютона относится к числу методов второго порядка и является процедурой, которая отклоняет направление наискорейшего спуска умножением его на матрицу, обратную матрице Гессе. Эта операция мотивируется нахождением подходящего направления для квадратичной аппроксимации функции, в то время как в градиентном поиске выбор направления связан с минимизацией линейной аппроксимации функции. В связи с этим рассмотрим квадратичную аппроксимацию функции $f(x)$ в заданной точке x^k:

$$q(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x - x^k) + \tfrac{1}{2}(x - x^k)^T F(x^k)(x - x^k),$$

где $F(x^k)$ – матрица Гессе функции $f(x)$ в точке x^k. Необходимым условием минимума квадратичной аппроксимации $q(x)$ является равенство $\nabla q(x) = 0$ или $\nabla f(x^k) + F(x^k)(x - x^k) = 0$. Предполагая, что матрица $(F(x^k))^{-1}$, обратная к матрице $F(x^k)$, существует, получаем

$$x^{k+1} = x^k - (F(x^k))^{-1} \nabla f(x^k).$$

Это равенство дает рекуррентную форму для точек, генерируемых методом Ньютона в многомерном случае. Предполагая, что $\nabla f(x^*) = 0$, а матрица Гессе $F(x^*)$ положительно определена в точке локального минимума x^* и функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, получаем, что $F(x^k)$ положительно определена в точках, близких к x^*, и, следовательно, точка x^{k+1} является точкой минимума квадратичной аппроксимации.

В общем случае метод Ньютона может не сходиться. Это объясняется тем, что $F(x^k)$ может быть вырожденной, так что точка x^{k+1} не определена. Даже если $(F(x^k))^{-1}$ существует, $f(x^{k+1})$ не обязательно меньше, чем $f(x^k)$. Однако, если начальная точка достаточно близка к точке x^*, в которой $\nabla f(x^*) = 0$ и $F(x^*)$ – матрица полного ранга, то метод Ньютона сходится к x^*.

8.7.6.1. АЛГОРИТМ МЕТОДА НЬЮТОНА С РЕГУЛИРОВКОЙ ШАГА

<u>*Подготовительный этап*</u>. Пусть $\varepsilon > 0$ – константа остановки. Выбираем начальную точку x^1, полагаем k = 1 и переходим к основному этапу.

<u>*Основной этап.*</u>

<u>*Шаг* 1</u>. Вычисляем $F(x^k)$, $(F(x^k))^{-1}$, $\nabla f(x^k)$ и полагаем $s^k = -(F(x^k))^{-1}\nabla f(x^k)$.

<u>*Шаг* 2.</u> Находим α_k из условия $f(x^k + \alpha_k s^k) = \min\limits_{\alpha \geq 0} f(x^k + \alpha\ s^k)$.

<u>*Шаг* 3.</u> Полагаем $x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k$.

<u>*Шаг* 4</u>. Если $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| \leq \varepsilon,$ то x^{k+1} – приближенное решение задачи, иначе полагаем k=k+1 и переходим к шагу 1.

Подобно методу наискорейшего спуска в данном случае требуется всякий раз на шаге 2 алгоритма решать задачу одномерной минимизации.

Сходимость метода. Пусть $f(x)$ выпуклая, дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что собственные числа ее матрицы вторых производных $F(x)$ при любом x содержатся в интервале [m,M], m>0, и, кроме того, существует константа L (константа Липшица), такая, что для всех $x, y \in R^n$ выполняется условие Липшица

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(y)\right)^2} \leq L\|x - y\|.$$

Тогда при любой начальной точке x^1 последовательность x^k, определяемая методом, сходится к единственной точке минимума x^*, причем скорость сходимости квадратичная с параметром $C = \dfrac{L}{m}$:

$$\left\| x^{k+1} - x^* \right\| \leq \frac{L}{m}\left\| x^k - x^* \right\|^2$$

Таким образом, из числа рассмотренных методов метод Ньютона с регулировкой шага обеспечивает наиболее быструю сходимость к искомому решению. Вместе с тем каждый шаг этого метода требует большего объема вычислений по сравнению с методами первого порядка, так как приходится вычислять матрицу вторых производных $F(x^k)$ и обратную к ней матрицу $(F(x^k))^{-1}$.

8.7.6.2. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Найти минимум функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + x_1 - x_2$ методом Ньютона с регулировкой шага.

Пусть $\bar{x}^0 = (0{,}0)$, $\varepsilon = 0{,}1$. При решении задачи воспользуемся выражением для величины шага α_k из примера п. 8.7.9, дающей величину шага в направлении s^k из условия минимума функции $f(x^k + \alpha s^k)$ в данном направлении ($\alpha \ge 0$).

Применяем алгоритм метода Ньютона. Полагая k =1, находим $\nabla f(x^1) = (1,-1)$,

$$F(x^1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, (F(x^1)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}, \quad s^1 = -(F(x^1))^{-1}\nabla f(x^1) = -\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 = \frac{1\cdot\left(-\frac{5}{7}\right) + (-1)\cdot\frac{3}{7}}{2\cdot\frac{25}{49} - 2\cdot\frac{15}{49} + 4\cdot\frac{9}{49}} = \frac{\frac{8}{7}}{\frac{56}{49}} = 1.$$

Следовательно,

$$x^2 = x^1 + \alpha_1 s^1 = (0{,}0) + 1\cdot\left(-\frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right) = \left(-\frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

Так как $\|x^2 - x^1\| = \sqrt{\frac{25}{49} + \frac{9}{49}} = \sqrt{\frac{34}{49}}$ >0,1= ε , то полагаем k =2 и повторяем процесс вычислений заново. При этом $F(x^2) = F(x^1)$, $(F(x^2))^{-1} = (F(x^1))^{-1}$, но

$\nabla f(x^2) = (2\cdot(-\frac{5}{7}) + \frac{3}{7} + 1, -\frac{5}{7} + 4\cdot\frac{3}{7} - 1) = (0,0).$ Следовательно, $s^2 = (0,0)$ и $x^3 = x^2 + \alpha_2 s^2 = x^2.$

Тогда $\left\|x^3 - x^2\right\| = 0 < 0{,}1 = \varepsilon$. Значит, метод дает решение $x^2 = x^3 = \left(-\frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right)$ уже на первом шаге. Отметим, что это точное решение задачи, то есть $x^2 = x^*$, так как в нем выполнено необходимое и достаточное условие минимума выпуклой функции $\nabla f(x^2) = (0,0).$ Это свойство является характерным для метода Ньютона с регулировкой шага при решении задач минимизации квадратичных функций, т.е. при решении таких задач метод уже на первом шаге дает искомую точку минимума x^*.

9. УСЛОВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

В этой главе рассматриваются два класса методов решения задачи нелинейного программирования с ограничениями в форме равенств и неравенств.

Один класс методов решения оптимизационной задачи с ограничениями основан на движении из одной допустимой точки к другой допустимой точке с лучшим значением целевой функции. Поскольку в течение всего процесса оптимизации сохраняется допустимость текущей точки, эти процедуры называются *прямыми методами*.

Другой подход решения задачи с ограничениями заключается в замене исходной задачи эквивалентной задачей безусловной оптимизации или задачей с простыми ограничениями, для решения которой могут быть использованы алгоритмы предыдущей главы.

9.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Пусть, как и в предыдущем разделе, $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ – функция n-переменных, определенная для всех $x = (x_1,...,x_n) \in R^n$, где R^n – линейное пространство n-мерных векторов x, пусть в пространстве R^n задано непустое выпуклое множество точек – *допустимая область* D, $D \subseteq R^n$

Задача условной минимизации функции $f(x)$ состоит в отыскании такого вектора $x^* \in D$, что для всех $x \in D$ справедливо неравенство

$$f(x^*) \le f(x).$$

Из определения следует, что функция $f(x)$ на векторе $x^* \in D$ принимает наименьшее возможное значение на множестве D. Вектор x^* называется *оптимальным решением* или *точкой минимума.*

Необходимое условие минимума Куна-Таккера

Рассмотрим задачу, в которой допустимая область D задается системой ограничений-неравенств не обязательно линейных:

минимизировать $f(x)$

при условиях $g_i(x) \le 0, i = 1,\dots,m.$

Пусть x – произвольная допустимая точка этой задачи, а I – *множество активных* в этой точке *ограничений*: $I = \{i : g_i(x) = 0\}$ Предположим, кроме того, что функции $f(x)$ и $g_j(x)$ для $j \in I$ дифференцируемы в x, а функции $g_i(x)$ для $i \notin I$ непрерывны в этой точке. Пусть также векторы $\nabla g_i(x)$ при $i \in I$ линейно независимы. Если x – точка локального минимума задачи условной минимизации, то существуют такие числа u_i для $i \in I$, что

$$\nabla f(x)^T + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(x) = 0,\ u_i \ge 0,\ i \in I.$$

Если, кроме того, функции $g_i(x)$ для $i \notin I$ дифференцируемы в точке x, то *условия Куна-Таккера* можно переписать в следующей эквивалентной форме

$$\nabla f(x)^T + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) = 0,$$

$$u_i g_i(x) = 0,\ u_i \ge 0,\ i = 1,\dots,m.$$

Числа $u_i \ge 0,\ i = 1,\dots,m$ называются *множителями Лагранжа*, а равенства $u_i g_i(x) = 0,\ \ i = 1,\dots,m$ – *условиями дополняющей нежесткости*.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию условий Куна-Таккера. Любой вектор, представимый в виде $\sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(x)$, где $u_i \ge 0$ при $i \in I$, принадлежит конусу, натянутому на векторы градиентов тех функций, которые определяют активные ограничения в точке x. Из условий Куна-Таккера следует, что $-\nabla f(x) = \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(x)$, $u_i \ge 0$ при $i \in I$, то есть вектор $-\nabla f(x)$ принадлежит этому конусу.

Рассмотрим две точки x^1 и x^2, изображенные на рисунке 17. Так как вектор $-\nabla f(x^1)$ принадлежит конусу, натянутому на градиенты функций активных в точке x^1 ограничений, то точка x^1 удовлетворяет условиям Куна-Таккера, то есть является *точкой Куна-Таккера*. Вектор $-\nabla f(x^2)$ не принадлежит конусу, натянутому на градиенты функций активных в точке x^2 ограничений, следовательно, условия Куна-Таккера в точке x^2 не выполняются.

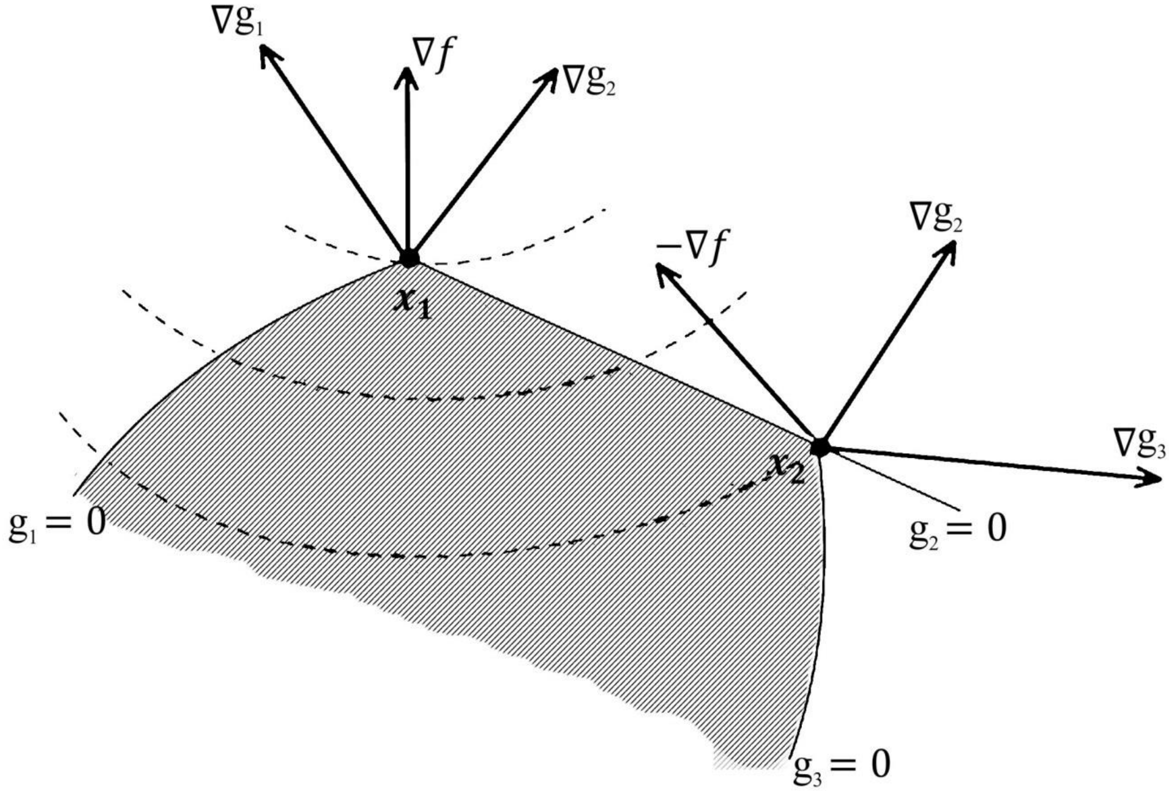

Рис 17. Геометрическая иллюстрация условий Куна-Таккера

Необходимое условие минимума позволяет свести задачу условной минимизации к задаче отыскания решений, вообще говоря, нелинейной системы уравнений. Однако среди решений этой системы могут быть и посторонние, представляющие, например, точки локальных минимумов и максимумов функции $f(x)$. Поэтому рассматриваются дополнительные свойства задачи, при которых необходимое *условие* минимума оказывается *достаточным*:

– это свойства выпуклости функций $f(x)$ и $g_i(x) \le 0, i = 1,...,m.$

Теперь рассмотрим задачу, в которой допустимая область задается системой ограничений-неравенств и равенств:

минимизировать $f(x)$

при условиях $g_i(x) \le 0, i = 1,..., m$,

$h_i(x) = 0, i = 1,..., l.$

тогда *условия Куна-Таккера* записываются в следующей форме

$$\nabla f(x)^T + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^{l} v_i \nabla h_i(x) = 0,$$

$$u_i g_i(x) = 0,\ u_i \ge 0,\ i = 1,..., m .$$

9.2 МЕТОДЫ ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Минимизировать $f(x)$ при условии, что допустимая область в общем случае задается непустым выпуклым множеством $D,\ D \subseteq R^n$.

Типичная стратегия в алгоритмах возможных направлений заключается в следующем. В допустимой точке x^k вычисляется направление s^k, такое, что при достаточно малых $\alpha > 0$ выполняются следующие два требования:

– точка $x^k + \alpha\ s^k$ допустимая;

– значение целевой функции в точке $x^k + \alpha\ s^k$ лучше, чем в точке x^k.

После вычисления такого направления решается задача одномерной минимизации, чтобы определить, как далеко следует двигаться вдоль s^k. Это приводит в новую точку x^{k+1} и процесс повторяется.

Ненулевой вектор s называется *возможным направлением* в точке $x \in D$, если существует такое $\delta > 0$, что $x + \alpha s \in D$ для всех $\alpha \in (0, \delta)$. Вектор s называется *направлением спуска* в точке $x \in D$, если существует такое $\delta > 0$, что $f(x + \alpha s) < f(x)$ и $x + \alpha s \in D$ для всех $\alpha \in (0, \delta)$.

Таким образом, возможное направление гарантирует сохранение допустимой точки, но при этом не обязательно обеспечивает убывание целевой функции; направление спуска, напротив, гарантирует строгое убывание целевой функции, но не обеспечивает сохранение допустимости. И только *возможное направление спуска* обеспечивает одновременно и допустимость точки и убывание целевой функции.

9.2.1. МЕТОД ЗОЙТЕНДЕЙКА

На каждой итерации метода строится возможное направление спуска с помощью некоторой вспомогательной задачи, которая обычно является задачей линейного программирования, и затем проводится оптимизация вдоль этого направления.

9.2.1.1. МЕТОД ЗОЙТЕНДЕЙКА. СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Вначале рассмотрим случай, когда допустимая область D определена системой линейных ограничений, так что рассматриваемая задача имеет вид:

минимизировать $f(x)$ при условиях $Ax \le b$, $Hx = d$.

Здесь A – матрица порядка $m \times n$, H – матрица порядка $l \times n$, b – m-мерный вектор, а d – l-мерный вектор.

Пусть x – допустимая точка, и предположим, что $A_1 x = b^1$ и $A_2 x < b^2$, где $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $b = (b^1, b^2)$. Тогда ненулевой вектор s является возможным направлением в точке x в том и только в том случае, если $A_1 s \le 0$ и $Hs = 0$. Если, кроме того, $\nabla f(x)^T s < 0$, то s является возможным направлением спуска. Проиллюстрируем это геометрически на следующем примере (рис. 18):

$$
\begin{aligned}
&\text{минимизировать} && (x_1-6)^2+(x_2-2)^2 \\
&\text{при условиях} && -x_1+2x_2 \le 4, \\
& && 3x_1+2x_2 \le 12, \\
& && -x_1 \le 0, \\
& && -x_2 \le 0.
\end{aligned}
$$

В точке $x=(2{,}3)^T$ первые два ограничения являются активными, поэтому матрица A_1 равна $A_1=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Следовательно, вектор s является возможным направлением тогда и только тогда, когда $A_1 s\le 0$:

$$-s_1+2s_2\le 0,$$

$$3s_1+2s_2\le 0.$$

Если на рисунке 18 начало координат перенести в точку x, то конус 1 – это конус возможных направлений: если сдвинуться на небольшое расстояние от точки x вдоль любого вектора s, удовлетворяющего двум приведенным выше неравенствам, то останемся в допустимой области.

При выполнении неравенства $\nabla f(x)^T s<0$ вектор s является направлением спуска. Следовательно, направления спуска определяются открытым полупространством $\{(s_1,s_2):-8s_1+2s_2<0\}$. Пересечение конуса возможных направлений с этим полупространством задает множество всех возможных направлений спуска.

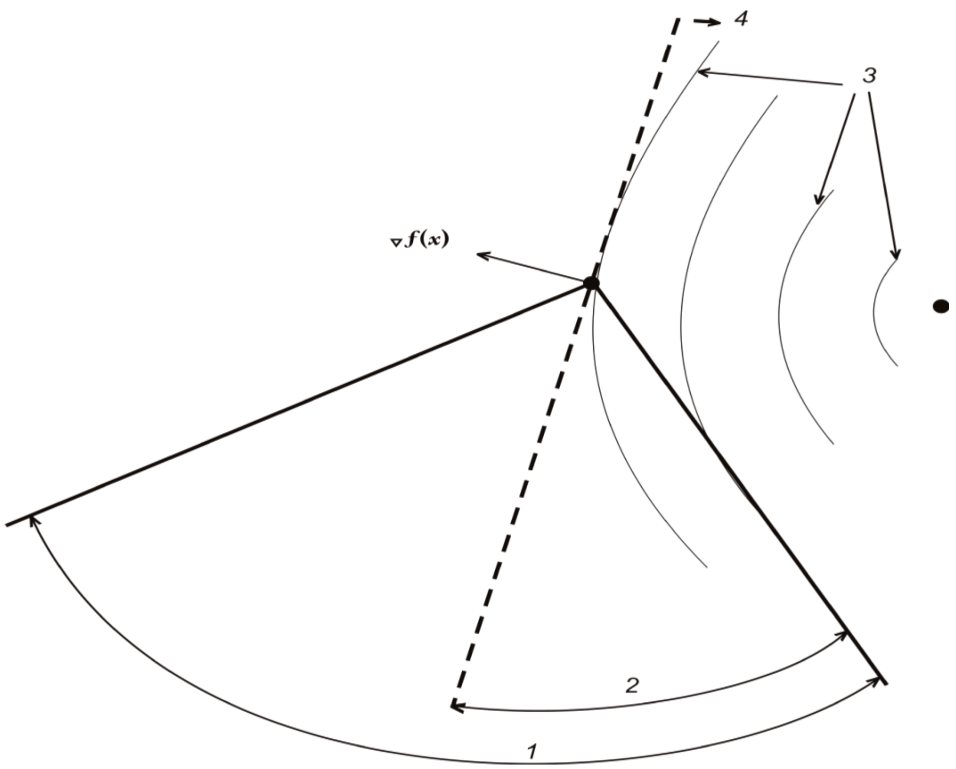

Рис. 18. Возможные направления спуска:

1 – конус возможных направлений; 2 – конус возможных направлений спуска;

3 – линии уровня целевой функции; 4 – полупространство направлении спуска

Итак, ненулевой вектор s является возможным направлением в допустимой точке x, если

$$\nabla f(x)^T s < 0,\ A_1 s \le 0,\ Hs = 0.$$

Естественный подход к построению такого направления заключается в минимизации $\nabla f(x)^T s$ при условиях $A_1 s \le 0$, $Hs = 0$. Заметим, однако, что если существует вектор $\bar{s}$, такой, что

$$\nabla f(x)^T \bar{s} < 0,\ A_1 \bar{s} \le 0,\ H\bar{s} = 0,$$

то оптимальное значение целевой функции в сформулированной задаче равно $-\infty$, так как ограничениям этой задачи удовлетворяет любой вектор $\lambda\bar{s}$, где λ – сколь угодно большое число. Таким образом, в задачу должно быть включено условие, которое ограничивало бы вектор s или оптимальное значение целевой функции. Такое ограничение обычно называют *нормирующим.*

Ниже приведены три задачи построения возможного направления спуска. В каждой из этих задач используются различные формы нормировки.

Задача $P1$

Минимизировать $\nabla f(x)^T s$

при условиях $A_1 s \le 0, Hs = 0, -1 \le s_j \le 1, j = 1,\ldots,n$.

Задача $P2$

Минимизировать $\nabla f(x)^T s$

при условиях $A_1 s \le 0, Hs = 0, s^T s \le 1$.

Задача $P3$

Минимизировать $\nabla f(x)^T s$

при условиях $A_1 s \le 0, Hs = 0, \nabla f(x)^T s \ge -1$.

Задачи $P1$ и $P3$ являются задачами линейного программирования и, следовательно, могут быть решены симплекс-методом. Задача $P2$ содержит квадратичное ограничение, но может быть рассмотрена в несколько упрощенном виде. Так как $s = 0$ является допустимой точкой в каждой из приведенных выше задач и так как значение целевой функции в этой точке равно нулю, то ее оптимальное значение в задачах $P1$, $P2$ и $P3$ не может быть положительным. Если минимальное значение целевой функции в задачах $P1$, $P2$ или $P3$ отрицательно, то построено возможное направление спуска. Если минимальное значение целевой функции равно нулю, то не существует возможного направления спуска и x является точкой Куна-Таккера.

Пусть теперь x^k – текущая точка, а s^k – возможное направление спуска. В качестве следующей точки x^{k+1} берется точка $x^k + \alpha_k s^k$, где величина шага α_k определяется из решения следующей задачи одномерной минимизации:

минимизировать $f(x^k + \alpha\, s^k)$

при условиях $A(x^k + \alpha\, s^k) \le b$, $H(x^k + \alpha\, s^k) = d$, $\alpha \ge 0$.

Предположим теперь, что $A_1 x^k = b^1$ и $A_2 x^k < b^2$, где $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $b = (b^1, b^2)$. Тогда задачу одномерной минимизации можно упростить следующим образом. Заметим, что $Hx^k = d$ и $Hs^k = 0$, так что ограничение $H(x^k + \alpha\, s^k) = d$ лишнее. Так как $A_1 x^k = b^1$ и $A_1 s^k \le 0$, то $A_1(x^k + \alpha\, s^k) \le b^1$ для всех $\alpha \ge 0$. Таким образом, рассматриваемая задача приводится к следующей задаче линейного поиска:

минимизировать $f(x^k + \alpha\, s^k)$

при условии $0 \le \alpha \le \alpha_{\max}$,

где $$\alpha_{\max} = \begin{cases} \min\left\{ \dfrac{\tilde{b}_i}{\tilde{s}_i} : \tilde{s}_i > 0 - \right\}, & if \ \ \tilde{s} > 0, \\ \infty, & if \ \ \tilde{s} \le 0, \end{cases}$$

$\tilde{b} = b^2 - A_2 x^k$, $\quad \tilde{s} = A_2 s^k$.

9.2.1.2. АЛГОРИТМ МЕТОДА ЗОЙТЕНДЕЙКА. СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Минимизировать $f(x)$ при условиях $Ax \le b$, $Hx = d$.

<u>*Подготовительный этап*</u>. Выбираем начальную допустимую точку x^1, полагаем k=1 и переходим к основному этапу.

<u>*Основной этап.*</u>

<u>*Шаг* 1.</u> Пусть задана точка x^k так, что $A_1 x^k = b^1$ и $A_2 x^k < b^2$, где $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $b = (b^1, b^2)$. Берем в качестве s^k оптимальное решение следующей задачи (заметим, что вместо этой задачи можно использовать задачу $P2$ или задачу $P3$):

минимизировать $\nabla f(x^k)^T s$

при условиях $A_1 s \le 0, Hs = 0, -1 \le s_j \le 1, j = 1,\dots,n$.

Если $\nabla f(x^k)^T s^k = 0$, то остановиться; x^k – точка Куна-Таккера. В противном случае, переходим к шагу 2.

<u>*Шаг* 2.</u> Полагаем α_k равным оптимальному решению следующей задачи линейного поиска:

минимизировать $f(x^k + \alpha\ s^k)$

при условии $0 \le \alpha \le \alpha_{\max}$,

где $\alpha_{\max}$ определяется в соответствии с формулой выше. Полагаем

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k,$$

определяем новое множество активных ограничений в точке x^{k+1} и переопределяем A_1 и A_2. Заменяем k на k+1 и переходим к шагу 1.

На рисунке 19 изображен процесс поиска решения в соответствии с алгоритмом Зойтендейка.

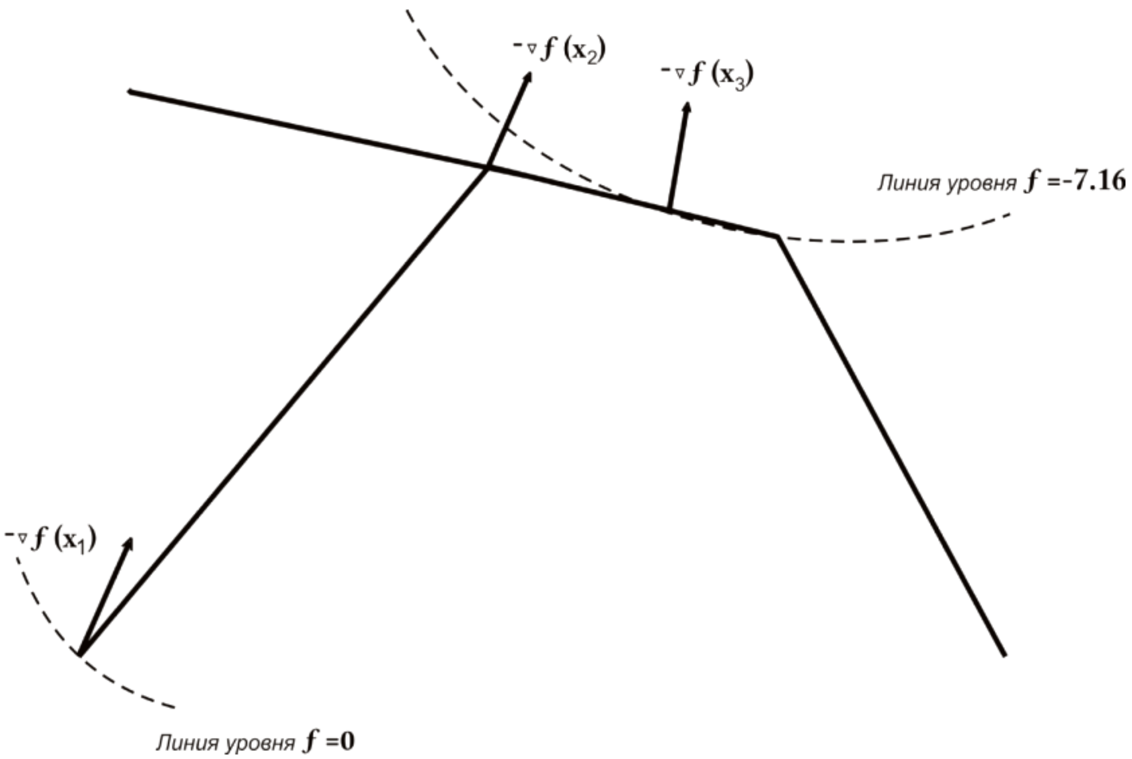

Рис. 19. Поиск решения методом Зойтендейка (случай линейных ограничений)

9.2.1.3. МЕТОД ЗОЙТЕНДЕЙКА. СЛУЧАЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Теперь рассмотрим задачу, в которой допустимая область задается системой ограничений-неравенств не обязательно линейных:

минимизировать $f(x)$

при условиях $g_j(x) \le 0, i = 1,..., m.$

Рассмотрим достаточные условия, при которых вектор s является возможным направлением спуска. Пусть x – допустимая точка, а I – множество индексов активных в этой точке ограничений. Предположим, кроме того, что функции $f(x)$ и $g_j(x)$ для $j \in I$ дифференцируемы в x, а функции $g_i(x)$ для $i \notin I$ непрерывны в этой точке. Если $\nabla f(x)^T s < 0$ и $\nabla g_i(x)^T s < 0$ при $i \in I$, то вектор s является возможным направлением спуска.

На рис. 20 показана совокупность возможных направлений спуска в точке x. Вектор s, удовлетворяющий равенству $\nabla g_i(x)^T s = 0$, является касательным к множеству $\{x : g_i(x) = 0\}$ в точке x. Поскольку функции

$g_i(x)$ в общем случае, нелинейные, то движение вдоль такого вектора s может привести в недопустимую точку, что вынуждает нас требовать выполнения строгого неравенства $\nabla g_i(x)^T s < 0$.

Чтобы найти вектор s, удовлетворяющий неравенствам $\nabla f(x)^T s < 0$ и $\nabla g_i(x)^T s < 0$ при $i \in I$, естественно минимизировать максимум из $\nabla f(x)^T s$ и $\nabla g_i(x)^T s$ для $i \in I$. Обозначим этот максимум через z. Вводя нормирующие ограничения $-1 \le s_j \le 1,\ j = 1,...,n$, получим следующую задачу линейного программирования для нахождения направления:

минимизировать z

при условиях $\nabla f(x)^T s - z \le 0$,

$$\nabla g_i(x)^T s - z \le 0,\ i \in I,\ I = \{i : g_i(x) = 0\},$$

$$-1 \le s_j \le 1,\ j = 1,...,n.$$

Пусть $(\tilde{z}, \tilde{s})$ – оптимальное решение задачи линейного программирования. Если $\tilde{z} < 0$, то очевидно, что $\tilde{s}$ – возможное направление спуска. Если же $\tilde{z} = 0$, то текущая точка является точкой Куна-Таккера.

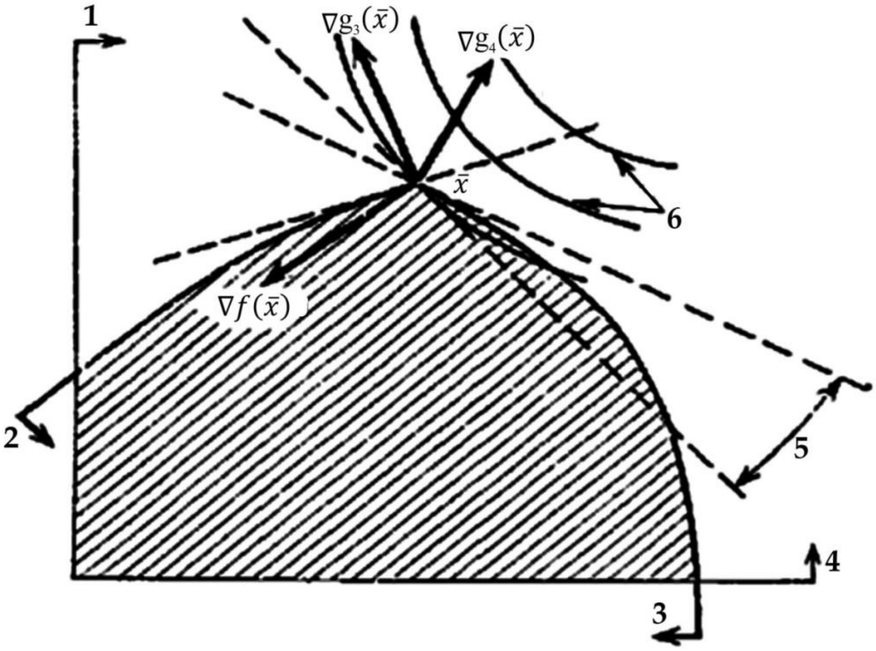

Рис. 20. Возможные направления спуска в задаче с нелинейными ограничениями: 1 – 1-е ограничение; 2 – 3-е ограничение; 3 – 4-е ограничение; 4 – 2-е ограничение; 5 – возможные направления спуска; 6 – линии уровня целевой функции

9.2.1.4. АЛГОРИТМ МЕТОДА ЗОЙТЕНДЕЙКА. СЛУЧАЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ-НЕРАВЕНСТВ

Минимизировать $f(x)$ при условиях $g_j(x) \le 0,\ j = 1,\dots,m.$

Подготовительный этап. Выбираем начальную допустимую точку x^1, полагаем k=1 и переходим к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Полагаем $I = \{i : g_i(x) = 0\}$ и решаем следующую задачу:

минимизировать z

при условиях $\nabla f(x^k)^T s - z \le 0$,

$$\nabla g_i(x^k)^T s - z \le 0,\ i \in I,$$

$$-1 \le s_j \le 1,\ j = 1,\dots,n.$$

Пусть (z^k, s^k) – оптимальное решение. Если оптимальное значение $z^k = 0$, то остановиться; x^k является точкой Куна-Таккера. Если $z^k < 0$, то переходим к шагу 2.

Шаг 2. Берем в качестве α_k оптимальное решение следующей задачи одномерной минимизации:

минимизировать $f(x^k + \alpha\ s^k)$

при условии $0 \le \alpha \le \alpha_{\max}$,

где $\alpha_{\max} = \sup\{\alpha : g_i(x^k + \alpha\ \ s^k) \le 0,\ i = 1,\dots,m\}$. Полагаем

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k,$$

заменяем k на k+1 и переходим к шагу 1.

9.2.1.5. МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ. СЛУЧАЙ СМЕШАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Минимизировать $f(x)$ при условиях

$$g_j(x) \le 0,\ j = 1,\dots,m,\ h_i(x) = 0, i = 1,\dots,l.$$

Пусть x^k – допустимая точка и $I = \{i : g_i(x) = 0\}$. На шаге 1 решается следующая задача линейного программирования:

минимизировать $\nabla f(x^k)^T s$

при условиях $\nabla g_i(x^k)^T s \le 0$, $i \in I$,

$\nabla h_i(x^k)^T s^k = 0$, $i = 1,\dots,l$,

$-1 \le s_j \le 1$, $j = 1,\dots,n$.

Искомое направление s^k является касательным к ограничениям-равенствам $h_i(x) = 0, i = 1,\dots,l$ и к некоторым активным нелинейным ограничениям-неравенствам $g_j(x) \le 0$, $j = 1,\dots,m$. Линейный поиск вдоль s^k и последующее возвращение в допустимую область приводят в точку x^{k+1}, после чего процесс повторяется.

9.2.1.6. МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОЧТИ АКТИВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Если заданная точка близка к границе, определяемой одним из ограничений, и если это ограничение не используется в процессе нахождения направления движения, то может случиться так, что удастся сделать только маленький шаг и мы окажемся на границе, определяемой этим ограничением. На рис. 21 в точке x активным является только первое ограничение. Однако точка x близка к границе, определяемой вторым ограничением. Если множество I в задаче определения направления задать в виде $I = \{1\}$, то оптимальным будет направление s и до выхода на границу допустимой области можно сделать только маленький шаг. Если же в множество активных ограничений включить оба ограничения, т. е. положить $I = \{1, 2\}$, то решение задачи определения направления даст вектор $\bar{s}$, который обеспечивает большие возможности для движения в рамках допустимой области. Таким образом, это наводит на мысль о том, что в качестве множества I следует брать совокупность индексов *почти активных* *ограничений*. Точнее, вместо множества $I=\{i: g_i(x)=0\}$ в качестве I следует брать множество $I_\varepsilon=\{i: g_i(x)+\varepsilon\geq 0\}$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

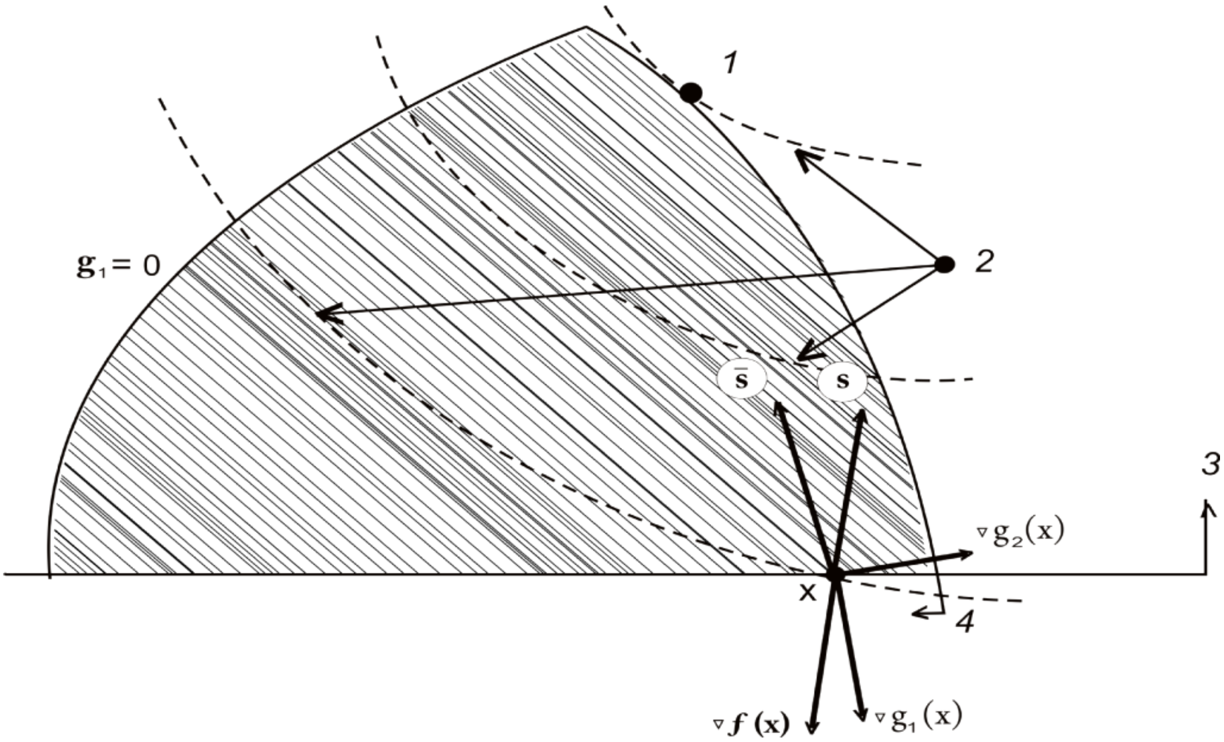

Рис. 21. Использование почти активных ограничений (1– оптимальное решение; 2 – линии уровня целевой функции; 3 – 1-е ограничение; 4 – 2-е ограничение)

9.2.2. МЕТОД ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА РОЗЕНА

Направлением наискорейшего спуска является антиградиент целевой функции. Однако при наличии ограничений движение вдоль направления наискорейшего спуска может привести в недопустимые точки. В методе проекции градиента Розена антиградиент проектируется таким образом, что значение целевой функции улучшается и в то же время обеспечивается допустимость точек траектории движения. Прежде чем изложить метод, рассмотрим некоторые необходимые понятия.

Матрица P порядка $n\times n$ называется *матрицей проектирования*, если $P=P^T$ и $PP=P$.

Справедливы следующие утверждения, определяющие свойства матрицы проектирования:

– Если P –матрица проектирования, то она положительно полуопределена.

– Для того чтобы P была матрицей проектирования, необходимо и достаточно, чтобы $(I–P)$ была матрицей проектирования.

– Пусть P – матрица проектирования, а $Q=(I–P)$. Тогда подпространства $L=\{Px : x\in R^n\}$ и $L_1=\{Qx : x\in R^n\}$ являются ортогональными. Кроме того, любая точка $x\in R^n$ может быть представлена однозначно в виде $p+q$, где $p\in L, q\in L_1$.

Рассмотрим задачу нелинейного программирования с линейными ограничениями:

минимизировать $f(x)$ при условиях $Ax\le b$, $Hx=d$.

Здесь A – матрица порядка $m\times n$, H – матрица порядка $l\times n$, b – m-мерный вектор, а d – l-мерный вектор.

Пусть x – допустимая точка, и предположим, что $A_1x=b^1$ и $A_2x<b^2$, где $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}b^1\\b^2\end{pmatrix}$. В заданной допустимой точке x направлением наискорейшего спуска является вектор $-\nabla f(x)$. Однако движение вдоль направления $-\nabla f(x)$ может нарушить допустимость. Чтобы ее сохранить, спроектируем $-\nabla f(x)$ так, чтобы двигаться вдоль направления $s=-P\nabla f(x)$, где P – соответствующая матрица проектирования.

Определим вид соответствующей матрицы проектирования P. Если матрица $M=\begin{pmatrix}A_1\\H\end{pmatrix}$ имеет полный ранг и если $P=I-M^T(MM^T)^{-1}M$, то вектор $s=-P\nabla f(x)$ – возможное направление спуска для функции $f(x)$ в точке x. Действительно матрица P является матрицей проектирования, удовлетворяющей равенствам $P=P^T$ и $PP=P$. Кроме того, $MP=0$, то есть $A_1P=0, HP=0$. Таким образом, матрица P проектирует каждую вектор-строку матриц A_1, H в нулевой вектор. А так как строками матриц A_1, H являются градиенты функций активных ограничений, то P – это матрица, проектирующая градиенты функций активных ограничений в нулевой вектор. На рисунке 22 показан процесс проектирования градиента для задачи с ограничениями-неравенствами. В точке x активным является только одно ограничение, градиент которого равен A_1, при этом $s = -P\nabla f(x)$ – возможное направление спуска.

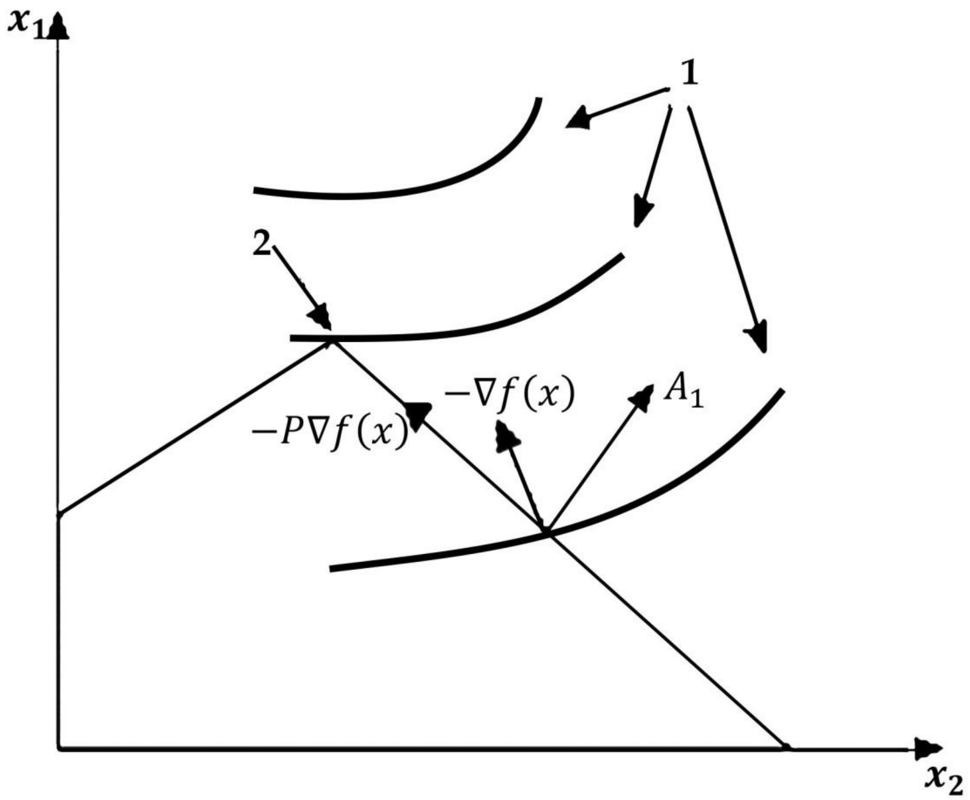

Рис. 22. Проектирование градиента:
1 – линии уровня целевой функции; 2 – оптимальное решение

Итак, если $P\nabla f(x) \neq 0$, то вектор $s = -P\nabla f(x)$ является возможным направлением спуска. Рассмотрим теперь случай

$$P\nabla f(x) = 0 .$$

Тогда

$$P\nabla f(x) = (I - M^T (MM^T)^{-1} M)\nabla f(x) = \nabla f(x) + M^T w =$$

$$= \nabla f(x) + A_1^T u + H^T \nu = 0$$

где $w = -(MM^T)^{-1} M\nabla f(x) = \begin{pmatrix} u \\ \nu \end{pmatrix}$.

Если $u \geq 0$, то точка x удовлетворяет условиям Куна-Таккера. Иначе определим новую матрицу проектирования $\tilde{P}$ такую, что вектор $s = -\tilde{P}\nabla f(x)$ будет возможным направлением спуска. Пусть некоторая компонента u_j вектора u отрицательна, а $\tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ H \end{pmatrix}$. Здесь $\tilde{A}_1$ получили из матрицы A_1 вычеркиванием строки, соответствующей u_j. Обозначим $\tilde{P} = I - \tilde{M}^T(\tilde{M}\tilde{M}^T)^{-1}\tilde{M}$, и пусть $\tilde{s} = -\tilde{P}\nabla f(x)$. Тогда вектор $\tilde{s}$ является возможным направлением спуска.

9.2.2.1. АЛГОРИТМ МЕТОДА ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА РОЗЕНА. СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Минимизировать $f(x)$ при условиях $Ax \leq b$, $Hx = d$.

Подготовительный этап. Выбираем начальную допустимую точку x^1: $Ax^1 \leq b, Hx^1 = d$. Представим A и b в виде $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}$, соответственно $A_1x^1 = b^1$ и $A_2x^1 < b^2$. Полагаем $k=1$ и переходим к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Полагаем $M = \begin{pmatrix} A_1 \\ H \end{pmatrix}$. Если матрица M пуста, т.е. не содержит ни одного столбца, то положить $P=I$ В противном случае положить $P = I - M^T(MM^T)^{-1}M$. Положить $s^k = -P\nabla f(x^k)$. Если $s^k \neq 0$, то перейти ко второму шагу. Если $s^k = 0$ и M пуста, то остановиться. Если же M не пуста, то положить $w = -(MM^T)^{-1}M\nabla f(x^k)$. Пусть $w = \begin{pmatrix} u \\ \nu \end{pmatrix}$. Если $u \geq 0$, то остановиться; x^k – точка Куна-Таккера. Иначе, выбрать отрицательную компоненту u_j этого вектора и переопределить матрицу A_1, вычеркивая строку, соответствующую u_j, и повторить первый шаг.

<u>*Шаг* 2.</u> Берем в качестве α_k оптимальное решение следующей задачи одномерной минимизации:

минимизировать $f(x^k + \alpha\ s^k)$

при условии $\quad 0 \le \alpha \le \alpha_{\max}$,

где $\alpha_{\max} = \begin{cases} \min\left\{ \dfrac{\tilde{b}_i}{\tilde{s}_i} : \tilde{s}_i > 0 - \right\}, \ if \ \ \tilde{s} > 0, \\ \infty, \quad if \ \ \tilde{s} \le 0, \end{cases}$

$$\tilde{b} = b^2 - A_2 x^k, \qquad \tilde{s} = A_2 s^k.$$

Полагаем $x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k$, определяем новое множество активных ограничений в x^{k+1} и переопределяем A_1 и A_2. Заменяем k на k+1 и переходим к первому шагу.

9.2.3. МЕТОД ПРИВЕДЕННОГО ГРАДИЕНТА ВУЛФА

Метод приведенного градиента основан на сокращении размерности задачи с помощью представления всех переменных через подмножество независимых переменных.

Рассмотрим следующую задачу:

минимизировать $f(x)$ при условиях $Ax \le b$, $x \ge 0$.

Здесь матрица A – матрица порядка $m \times n$ ранга m; b – m-мерный вектор, а функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема. Сделаем следующее предположение о невырожденности матрицы A. Любые m столбцов A линейно независимы, и каждая крайняя точка допустимой области имеет ровно m положительных переменных и не более чем (n – m) нулевых компонент.

Пусть x – допустимая точка. По предположению о невырожденности матрица A может быть представлена в виде (B, N), где B –невырожденная матрица $m \times m$, а вектор $x = \begin{pmatrix} x^B \\ x^N \end{pmatrix}$, где $x^B > 0$ – базисный вектор, а x^N – небазисный вектор. Пусть $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \nabla_B f(x) \\ \nabla_N f(x) \end{pmatrix}$, где $\nabla_B f(x)$ – градиент функции $f(x)$ по базисным переменным. Так как ненулевой вектор s является возможным направлением спуска для функции $f(x)$ в точке x, если $\nabla f(x)^T s < 0$, $A s = 0$ и $s_j \geq 0$, если $x_j = 0$, то определим возможное направление спуска s в данной задаче следующим образом.

Пусть вектор $s = \begin{pmatrix} s^B \\ s^N \end{pmatrix}$. Заметим, что равенство $0 = A\,s = Bs^B + Ns^N$ автоматически выполняется, если для любого s^N положить $s^B = -B^{-1} N s^N$.

Пусть $r^T = (r_B^T, r_N^T) = \nabla f(x)^T - \nabla_B f(x)^T B^{-1} A = \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla_N f(x)^T - \nabla_B f(x)^T B^{-1} N \end{pmatrix}$ – приведенный градиент. Так как

$$\nabla f(x)^T s = \nabla_B f(x)^T s^B + \nabla_N f(x)^T s^N = (\nabla_N f(x)^T - \nabla_B f(x)^T B^{-1} N) s^N = r_N^T s^N,$$

то s^N необходимо выбрать так, чтобы $r_N^T s^N < 0$ и $s^j \geq 0$ если $x^j = 0$. Для этого вводится следующее правило. Для каждой небазисной компоненты j положим $s^j = -r^j$, если $r^j \leq 0$, и возьмем $s^j = -x^j r^j$, если $r^j > 0$. Это обеспечивает выполнение неравенства $s^j \geq 0$, если $x^j = 0$. Кроме того, $\nabla f(x)^T S \leq 0$ и строгое неравенство имеет место при $s^N \neq 0$.

Если $s^N \neq 0$, то – это возможное направление спуска. Кроме того, $s = 0$ тогда и только тогда, когда x – точка Куна-Таккера.

9.2.3.1. АЛГОРИТМ МЕТОДА ПРИВЕДЕННОГО ГРАДИЕНТА

Минимизировать $f(x)$ при условиях $Ax \leq b$, $x \geq 0$.

Подготовительный этап. Выбираем начальную допустимую точку x^1 ($Ax^1 \le b, x^1 \ge 0$).Полагаем k=1 и переходим к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Полагаем $s^k = \begin{pmatrix} s^B \\ s^N \end{pmatrix}$, где s^B и s^N получены по следующим формулам. Пусть I_k – множество индексов m наибольших компонент вектора x^k,

$$B = \{a^j : j \in I_k\},\ N = \{a^j : j \notin I_k\},\ r^T = \nabla f(x^k)^T - \nabla_B f(x^k)^T B^{-1} A,$$

$$s_j^N = \begin{cases} -r^j, & if \quad j \notin I_k,\ r^j \le 0, \\ -x^j r^j, & if \quad j \notin I_k,\ r^j > 0, \end{cases} \qquad s^B = -B^{-1} N s^N.$$

Если $s^k = 0$, то остановиться; x^k – точка Куна-Таккера. В противном случае переходим к шагу 2.

Шаг 2. Полагаем α_k равным оптимальному решению следующей задачи одномерной минимизации (здесь $x_j^k, s_j^k - j$ -е компоненты векторов x^k, s^k):

минимизировать $f(x^k + \alpha\ s^k)$

при условии $0 \le \alpha \le \alpha_{\max}$,

где $$\alpha_{\max} = \begin{cases} \min\limits_{1 \le j \le n} \left\{ \dfrac{x_j^k}{s_j^k} : s_j^k < 0 - \right\}, & if \quad s^k < 0, \\ \infty, & if \quad s^k \ge 0, \end{cases}$$

Находим $x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k$, заменяем k на k+1 и переходим к шагу 1.

9.3. МЕТОДЫ ШТРАФНЫХ И БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

9.3.1. ПОНЯТИЕ ШТРАФНОЙ ФУНКЦИИ

Метод штрафных функций основан на преобразовании исходной функции с ограничениями в одну или последовательность задач безусловной оптимизации. С помощью функций, задающих ограничения, строится так называемый штраф, который добавляется к целевой функции основной задачи так, что нарушение какого-либо из ограничений становится невыгодным с точки зрения полученной задачи безусловной оптимизации. Для обоснования этого подхода рассмотрим следующую задачу с единственным ограничением:

минимизировать $f(x)$

при условии $h(x)=0$.

Преобразуем эту задачу в задачу безусловной оптимизации:

минимизировать $f(x)+\mu h^2(x)$

при условии $x \in R^n$

где $\mu > 0$ – некоторое большое число. Интуитивно ясно, что на оптимальном решении x последней задачи значение $h^2(x)$ должно быть близким к нулю, так как в противном случае всегда можно сдвинуться в другую точку $\bar{x}$, в которой приращение $f(x)$ окажется при достаточно большом μ меньше, чем $\mu h^2(x)$.

Рассмотрим теперь задачу с единственным ограничением-неравенством $g(x) \le 0$:

минимизировать $f(x)$

при условии $g(x) \le 0$.

Приемлемой задачей безусловной оптимизации здесь является следующая:

минимизировать $f(x)+\mu \max\{0, g(x)\}$

при условии $x \in R^n$.

Обычно подходящая штрафная функция должна определять положительный штраф в недопустимых точках и не штрафовать допустимые точки. Если ограничения имеют форму $g_i(x) \le 0$, $i = 1,\ldots,m$ и $h_i(x) = 0$, $i = 1,\ldots,l$, то целесообразна *штрафная функция* следующего вида:

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi[g_i(x)] + \sum_{i=1}^{l} \psi[h_i(x)],$$

где φ и ψ – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям:

$\varphi(y) = 0$, если $y \le 0$, и $\varphi(y) > 0$, если $y > 0$;

$\psi(y) = 0$, если $y = 0$, и $\psi(y) > 0$, если $y \ne 0$.

Типичными являются следующие *формы функций* φ и ψ:

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= [\max\{0, y\}]^p \\ \psi(y) &= [y]^p \end{aligned},$$

где p – целое положительное число. Таким образом, штрафная функция $\alpha = \alpha(x)$ обычно имеет вид:

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} [\max\{0, g_i(x)\}]^p + \sum_{i=1}^{l} [h_i(x)]^p$$

Функцию $f(x) + \mu\alpha(x)$ называют *вспомогательной*. Соответственно задачу со штрафом называют *вспомогательной задачей*.

9.3.2. МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Минимизировать $f(x)$

при условиях

$$g_j(x) \le 0,\ j = 1,\ldots,m,\ h_i(x) = 0, i = 1,\ldots,l,\ x \in X.$$

Здесь g и h – вектор-функции с компонентами $g_1,\ldots,g_m$, и $h_1,\ldots,h_l$ соответственно. Функции f, $g_1,\ldots,g_m$, $h_1,\ldots,h_l$ непрерывны на R^n, X – непустое множество из R^n, определяемое простыми ограничениями, которые легко выписываются (например, двусторонние ограничения на переменные).

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ штрафная функция. Подход, связанный со штрафной функцией, состоит в решении следующей задачи:

максимизировать $\theta(\mu)$

при условии $\mu \geq 0$,

где $\theta(\mu) = \inf\{ f(x) + \mu\alpha(x) : x \in X \}$.

Тогда

$$\inf\{ f(x) : x \in X, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} = \sup_{\mu \geq 0} \theta(\mu) = \lim_{\mu \to \infty} = \theta(\mu).$$

Отсюда следует, что можно сколь угодно близко подойти к оптимальному значению целевой функции исходной задачи, вычисляя $\theta(\mu)$ при достаточно больших $\mu \geq 0$. Однако если выбрать очень большое μ и попытаться решить вспомогательную задачу, то можно столкнуться с некоторыми вычислительными трудностями.

При большом значении μ наибольшее внимание уделяется допустимости текущей точки и большинство процедур безусловной оптимизации приведут к быстрому движению по направлению к допустимой точке и даже если эта точка оказывается далеко от оптимальной, может произойти преждевременная остановка процесса.

Учитывая трудности, связанные с использованием большого параметра штрафа, большинство алгоритмов штрафных функций применяют последовательность возрастающих параметров.

Для каждого нового значения параметра штрафа используется алгоритм оптимизации, начинающийся от оптимального решения, соответствующего предыдущему значению параметра.

Метод не накладывает каких-либо ограничений на функции f, g и h помимо непрерывности. Однако он может эффективно использоваться только в тех случаях, когда имеется эффективная процедура решения задачи на шаге 1 основного этапа.

9.3.2.1. АЛГОРИТМ МЕТОДА ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Подготовительный этап. Выбираем $\varepsilon > 0$ в качестве критерия остановки. Выбираем начальную точку x^1, штрафной параметр $\mu_1 > 0$ и число $\beta > 1$. Полагаем $k = 1$ и переходим к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. При начальной точке x^1 решаем задачу:

минимизировать $f(x) + \mu_k \alpha(x)$

при условии $x \in X$

Полагаем x^{k+1} равным оптимальному решению этой задачи и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Если $\mu_k \alpha(x^{k+1}) < \varepsilon$, то остановиться; в противном случае полагаем $\mu_{k+1} = \beta\mu_k$, заменяем k на k+1 и переходим к шагу 1.

На рисунке 24 изображен процесс поиска решения в соответствии с алгоритмом метода штрафных функций. Решается следующая задача:

минимизировать $(x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$

при условиях $x_1^2 - x_2 = 0,\ \ x \in X = R^2$.

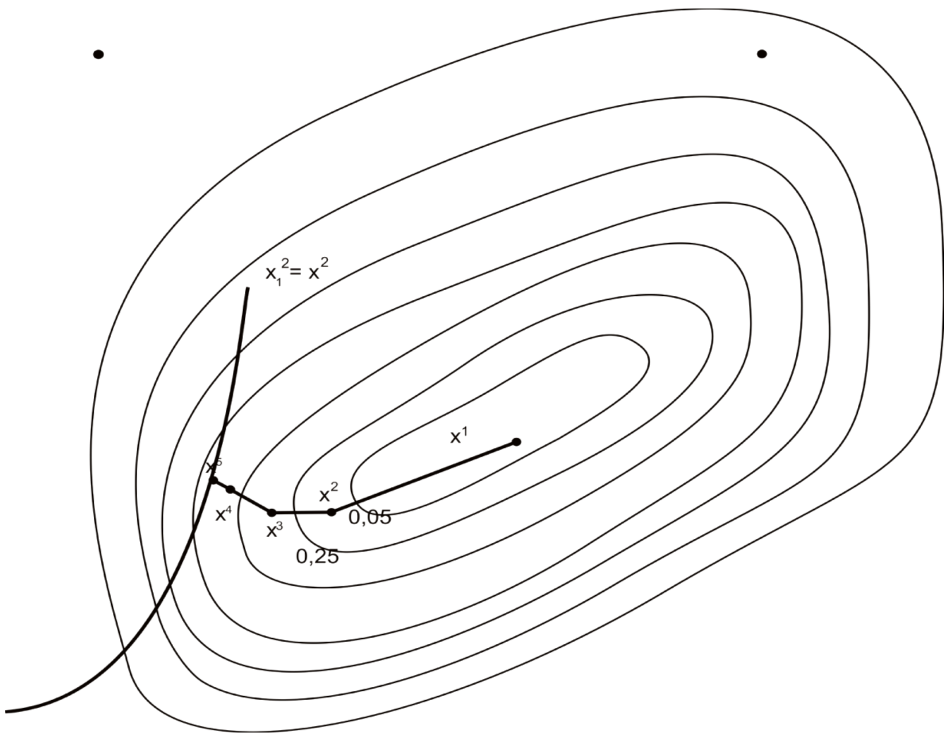

Рис. 14. Метод штрафных функций

Заметим, что на k-й итерации при заданном значении параметра штрафа μ_k для получения x^{μ_k} должна решаться задача:

минимизировать $(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2+\mu_k(x_1^2-x_2)^2$

при условиях $x \in R^2$.

В качестве начальной точки взята точка $x^1=(2.0,1.0)$, в которой значение целевой функции равно 0.0. В качестве начального значения параметра штрафа взято число $\mu_1=0.1$, а $\beta=10.0$. Процесс остановлен после четырех итераций при $\alpha(x^{\mu^k})=0{,}00027$.

9.3.3. МЕТОД БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

Подобно штрафным функциям, барьерные функции также используются для преобразования задачи с ограничениями в задачу безусловной оптимизации или в последовательность таких задач. Барьерные функции как бы препятствуют выходу из допустимой области. Если оптимальное решение оказывается на границе допустимой области, то процедура приводит к движению изнутри области к границе. Сформулируем исходную и вспомогательную (барьерную) задачи.

минимизировать $f(x)$

при условиях $g_j(x) \le 0,\ j=1,\dots,m$, $x \in X$.

Здесь g – вектор-функция с компонентами $g_1,\dots,g_m$. Функции f, $g_1,\dots,g_m$ непрерывны на R^n.

Обратим внимание на то, что отсутствуют ограничения-равенства. Если бы задача содержала ограничения $h(x)=0$, то метод, использующий барьерные функции, должен был бы потребовать, чтобы внутренность множества $\{x : g(x) \le 0, h(x)=0\}$ была непустой, что обычно не выполняется.

Вспомогательная (барьерная) задача имеет следующий вид:

минимизировать $\theta(\mu)$

при условии $\mu \ge 0$,

где $\theta(\mu) = \inf\{ f(x) + \mu B(x) : g(x) < 0, x \in X \}$.

Здесь B – *барьерная функция*, неотрицательная, непрерывная в области $\{x : g(x) < 0\}$ и стремящаяся к бесконечности при приближении изнутри к границе области $\{x : g(x) \le 0\}$. Более точно барьерная функция определяется следующим образом:

$$B(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi[g_i(x)],$$

где φ – функция одной переменной, непрерывная на множестве $\{y : y < 0\}$ и удовлетворяющая условиям: $\varphi(y) \ge 0$, если $y < 0$ и $\lim\limits_{y \to 0} \varphi(y) = \infty$.

Типичная барьерная функция имеет вид

$$B(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{-1}{g_i(x)}.$$

Функцию $f(x) + \mu B(x)$ называют *вспомогательной функцией.*

В идеальном случае желательна функция, которая обращается в нуль в области $\{x : g(x) < 0\}$ и равна бесконечности на границе этой области. Это гарантировало бы от выхода за пределы множества $\{x : g(x) \le 0\}$ при условии, что задача минимизации начинает решаться из внутренней точки. Однако эта потеря непрерывности ставит серьезные трудности для любой вычислительной процедуры. Поэтому идеальная конструкция функции B заменяется более реальным требованием, чтобы B была неотрицательна и непрерывна в области $\{x : g(x) < 0\}$ и стремилась к бесконечности при приближении из внутренней точки к границе области. Заметим, что μB стремится к идеальной барьерной функции, когда $\mu \to 0$. При заданном $\mu > 0$ вычисление

$$\theta(\mu) = \inf\{ f(x) + \mu B(x) : g(x) < 0, x \in X \}$$

кажется не менее простым, чем решение исходной задачи, поскольку содержит ограничение $g(x) < 0$. Однако если оптимизация начинается из точки в области $S = \{x : g(x) < 0\} \cap X$, а ограничение $g(x) < 0$ игнорируется, то в силу структуры B оптимальная точка окажется в S. Это следует из того, что при приближении из внутренней точки к границе $\{x : g(x) \le 0\}$ значение функции B стремится к бесконечности, что будет препятствовать выходу из области S.

9.3.3.1. АЛГОРИТМ МЕТОДА БАРЬЕРОВ

Подготовительный этап. Выбираем $\varepsilon > 0$ в качестве константы остановки и выбираем точку $x^1 \in X$, для которой $g(x^1) < 0$, выбираем скаляры $\mu_1 > 0, \beta \in (0,1)$. Полагаем $k = 1$ и переходим к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. При начальной точке x^k решить следующую задачу:

минимизировать $f(x) + \mu_k B(x)$

при условиях $g_j(x) < 0, j = 1,...,m$, $x \in X$.

Положить x^{k+1} равным оптимальному решению и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Если $\mu_k B(x^{k+1}) < \varepsilon$, то остановиться. В противном случае продолжить $\mu_{k+1} = \beta\mu_k$, заменить k на $k+1$ и повторить шаг 1.

Задача, сформулированная на шаге 1, содержит ограничение $g(x) < 0$. При $g(x^k) < 0$, поскольку барьерная функция стремится к бесконечности при приближении к границе области $G = \{x : g(x) < 0\}$, ограничение $g(x) < 0$ может не учитываться в том случае, если используемый метод безусловной оптимизации будет гарантировать, что оптимальная точка $x^{k+1} \in G$. Но поскольку большинство методов линейного поиска использует дискретные шаги, то вблизи границы шаг может привести в точку вне допустимой области, где значение барьерной функции является большим отрицательным числом. Следовательно, задача может трактоваться как задача безусловной оптимизации только в том случае, если явно проверяется допустимость точки на каждой итерации.

На рисунке 25 изображен процесс поиска решения в соответствии с алгоритмом метода барьерных функций. Решается следующая задача:

минимизировать $(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2$

при условиях $x_1^2-x_2\le 0,\ x\in X=R^2$.

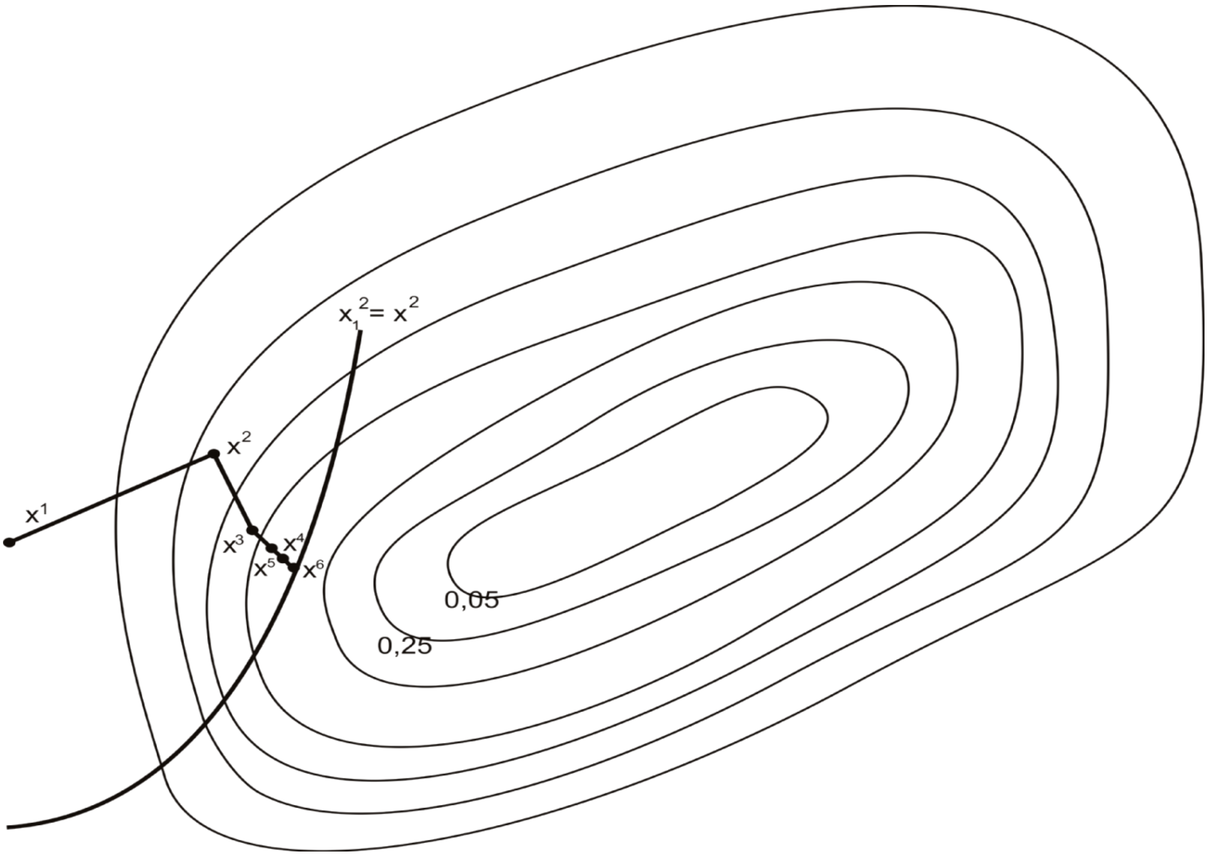

Рис. 15. Метод барьеров

Вычисления начаты при начальном значении параметра штрафа. $\mu_1=10.0$ В качестве начальной точки взята допустимая точка $x^1=(0.0,1.0)$ и параметр $\beta=0.1$. После шести итераций получена точка $x^7=(0.944,0.896)$ при $\mu_6 B(x^7)=0.0184$ и алгоритм остановлен.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Базара, М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / М. Базара, К. Р. Шетти. – М. : Мир, 1982. - 583 с.

2. Давыдов, Э. Г. Исследование операций / Э. Г. Давыдов – М.: Высшая школа, 1996. - 383 с.

3. Дягтерев, Ю. И. Системный анализ и исследование операций / Ю. И. Дягтерев – М. : Высшая школа, 1996. – 335 с.

4. Зайченко, Ю. П. Исследование операций / Ю. П. Зайченко – Киев : Высш. шк., 1975. – 320 с.

5. Зыкина, А. В. Математическое программирование: учеб. пособие / А. В. Зыкина – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2000. – 64 с.

6. Зыкина, А. В. Теория принятия решений : задачи нелинейной оптимизации : учеб. пособие / А. В. Зыкина. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2008. – 60 с.

7. Зыкина, А. В. Методы оптимизации и исследование операций : учеб. пособие / А. В. Зыкина. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2013. – 84 с. - ISBN 978-5-8149-1561-0.

8. Карманов, В. Г. Математическое программирование : учеб. пособие / В. Г. Карманов. - 5-е изд., стер. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 264 с.

9. Мину, М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Мину. – М. : Наука, 1990. – 488 с.

10. Поляк, Б. Т. Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. - 2-е изд. - М. : Наука, 2014. - 384 с.

11. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М.: Наука, 1975. – 534 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ