

第五节 网络分析



知识点



网络分析的基本概念

路径分析

中心选址分析

网络分析

网络数据模型

网络数据模型是现实世界中的网状系统的抽象表示，它可以模拟交通网、通讯网、自来水管网、煤气管网等网络系统。



交通网络



地下管线

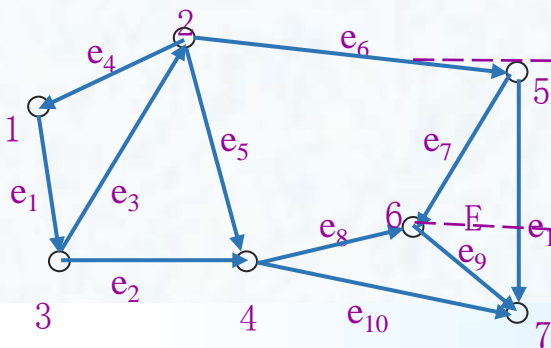
● 网络模型的基本组成

链 (Link)

是构成网络的骨架，是资源传输通道或实体间连接的纽带。

结点 (Node)

结点是链的端点或者交汇点。



链可以代表街道、公路、铁路、航线、电话线、水管、煤气管、河流等

结点可以表示交叉路口、中转站、河流汇合点等。

网络分析

结点中的特殊类型

网络分析的基本概念

障碍 (Barrier)

禁止网络上流动的
点。

拐点 (Turn)

出现在网络中的
分割点上，
其状态有属性
和阻力。

如拐弯的时间
和限制。

中心 (Center)

接受或分配资源
的位置。

如水库、商业
中心，电站等。

站点 (Stop)

在路径选择中
资源增减的结
点。

如库房、车站
等，其状态属
性有资源需求，
如产品数量。

网络分析

主要功能

网络分析的基本概念

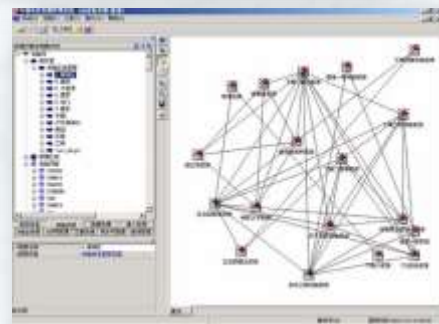
路径分析

路径分析的核心是求解最佳路径。所谓最佳路径，就是将网络中两个指定的结点连接起来的一条阻碍强度最小的路径。



资源分配

资源分配是根据中心的容量以及网线和结点的需求将网线和结点分配给最近的中心，分配过程中阻力的计算是沿最佳路径进行的。



中心选址

中心选址是确定机构设施的最佳地理位置。需要考虑需求与供给在空间上的相互作用，据此选择需求点或者供给点的最佳地理位置，以获得最大的经济效益或最小的运输费用。



Dijkstra算法

最佳路径求解有多种不同的方法，其中Dijkstra算法适合于求解某个起点（源点）到网络中的其它各个结点的最佳路径。

路径分析

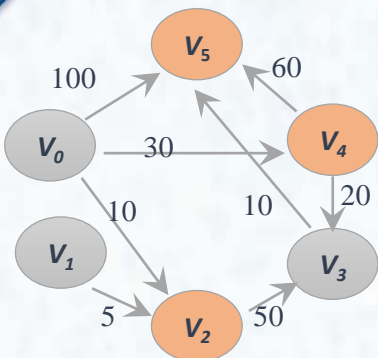
- 引进一个**辅助向量D**。它的每个分量 $D[i]$ 表示当前所找到的从起点 v_m 到每个终点 v_i 的最短路径的长度，将已找到的从 v_m 出发的最短路径的终点的集合记为 S ，它的初始状态为空集。
- 确定一条最短路径及其终点,选择 v_j 。使得： $D[j] = \min\{D[i] \mid v_i \in V-S\}$ ， v_j 就是当前求得的一条从 v_m 出发的最短路径的终点。其中 j 为这条最短路径的终点，将其加入到终点集合 S ，令 $S = S \cup \{j\}$
- 修改**辅助向量D**。即修改从 v_m 出发到集合 $V-S$ 上任一顶点 v_k 可达的最短路径长度。显然，若 $D[j] + \text{arcs}[j][k] < D[k]$ ，则表明从 v_m 出发，经过 v_j 到达 v_k 的路径更短。因此，则修改 $D[k]$ 为 $D[k] = D[j] + \text{arcs}[j][k]$ 。
- 重复操作第二步、第三步共 $n-1$ 次。由此求得从 v 到图上其余各顶点的最短路径是依路径长度递增的序列。

网络分析

Dijkstra算法举例

路径分析

- 以 V_0 为起点，计算它到各顶点的最短路径。



带权有向图

$arcs =$

0	∞	10	∞	30	100
∞	0	5	∞	∞	∞
∞	∞	0	50	∞	∞
∞	∞	∞	0	∞	10
∞	∞	∞	20	0	60
∞	∞	∞	∞	∞	0

邻接矩阵

思路

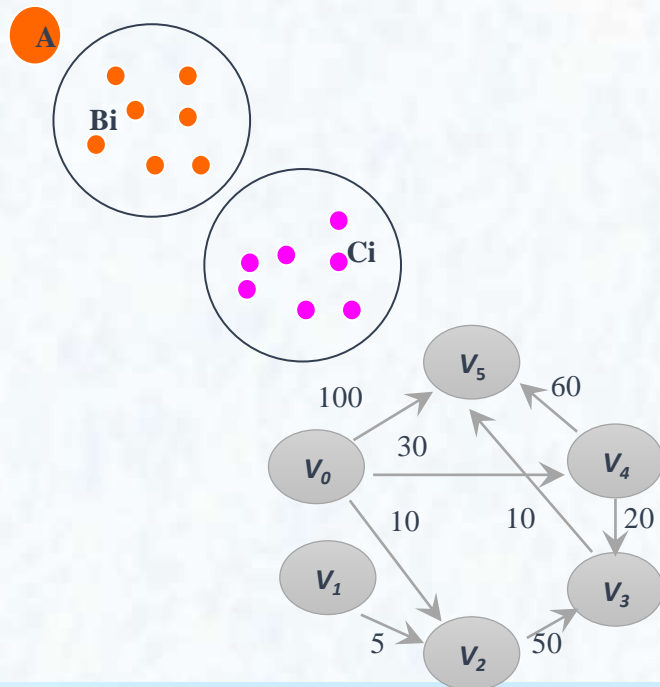
如图3所示，A为所求最短距离的起点，其它 B_i ， C_i 为终点。

我们要求的是一系列最短距离。我们先假定这些最短距离互不相等。那么我们可以把这些最短距离按升序（从小到大）排列。

我们把所有顶点分为两类 C_i 和 B_i 。令A到 B_i 这些顶点的最短距离不为无穷大。A到 C_i 这些顶点的最短距离为无穷大。

这就说明A到 C_i 中的点要么不通，要么通过 B_i 中的点与之连接。

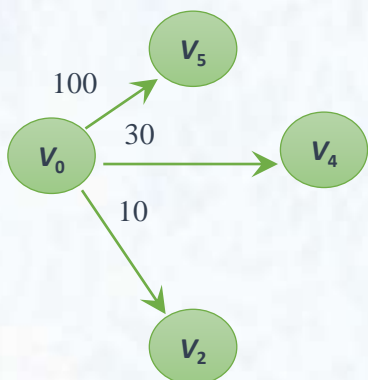
我们可以先不考虑 C_i 中的点。



网络分析

Dijkstra算法

路径分析



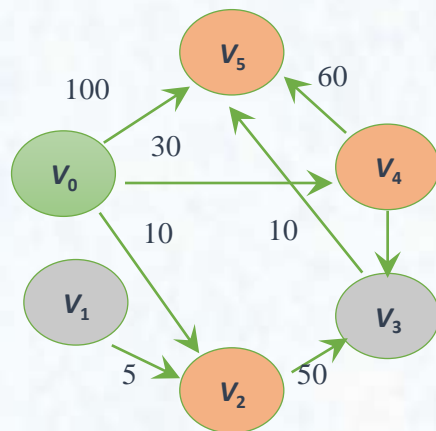
于是，对于左图，我们第一步只考虑右图：

我们用 `mindist[]` 这个数组来保存由 v_0 到其它顶点的最小距离，这些距离按升序排列。考虑右图：

第一步，通过比较，我们知道 $\text{mindis}[v_0][v_2]=10$,

(v_0-v_2) 这是我们求出的 **第一个最小距离**。

一旦我们得到 v_2 ，我们就可以知道：



$B_i=\{v_2, v_4, v_5\}$

第二步，我们把与 v_2 直接连通的点 v_3 考虑进来。

$\text{dis}[0][5]=100; \text{dis}[0][4]=30;$

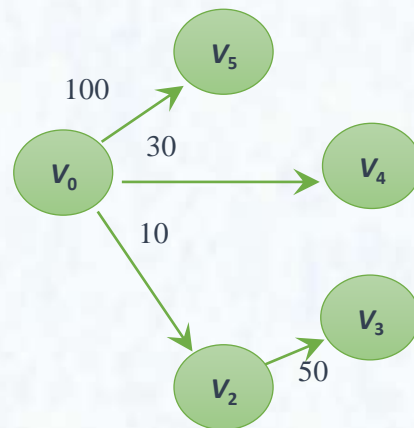
$\text{dis}[0][2]=10; \text{dis}[0][3]=60;$

除10以外，30是最小的。

$D[j] + \text{arc}[j][k] = 10 + 50 = 60 < D[k](\infty)$

$D[k] = 60$

$\text{mindist} = (\infty, X, 60, \underline{30}, 100)$



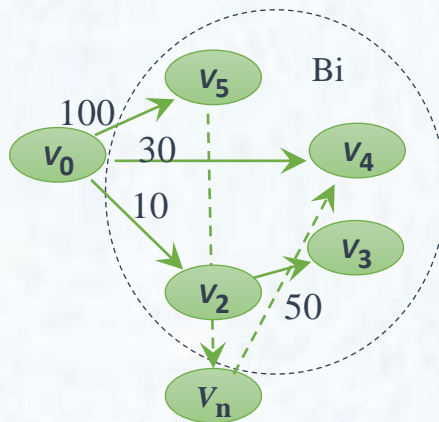
我们可以证明30是 v_0 到其它顶点除10以外最小的。

网络分析

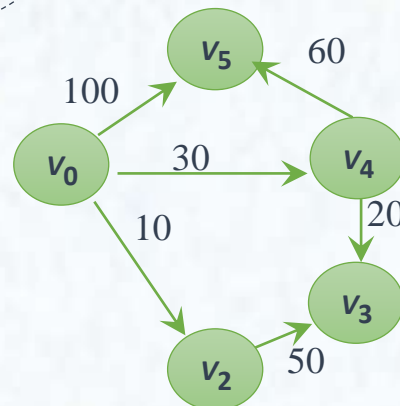
Dijkstra算法

路径分析

- 不可能存在这样一个点 V_n ，使得 $10 < \text{mindistance}[0][n] < 30$ 。



- 这样我们得到我们的第二个最小距离：
 $\text{Mindistance}[v_0][v_4] = \text{mindist}[1] = 30, (v_0 - v_4)$ 。
 接下来，我们把 v_4 与之直接连通的点考虑进来.....



以 v_0 为起点，计算它到其它各顶点的最短路径，计算过程中最短路径长度向量 D 的变化见 $D^0 - D^4$ ，计算出的各条最短路径。

$$D^0 = \begin{bmatrix} \infty \\ \underline{10} \\ \infty \\ 30 \\ 100 \end{bmatrix} \quad D^1 = \begin{bmatrix} \infty \\ X \\ 60 \\ \underline{30} \\ 100 \end{bmatrix} \quad D^2 = \begin{bmatrix} \infty \\ X \\ \underline{50} \\ X \\ 90 \end{bmatrix} \quad D^3 = \begin{bmatrix} \infty \\ X \\ X \\ X \\ \underline{60} \end{bmatrix} \quad D^4 = \begin{bmatrix} \infty \\ X \\ X \\ X \\ X \end{bmatrix}$$

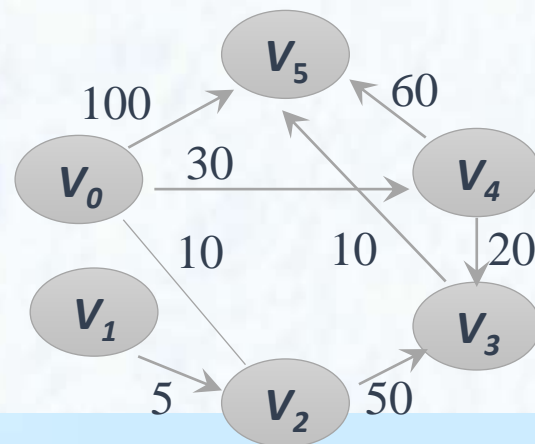
网络分析

Dijkstra算法

路径分析

终点	从v0到其它各结点的最短路径				
V_1	∞	∞	∞	∞	∞
V_2	10 (v_0, v_2)				
V_3	∞	60 (v_0, v_2, v_3)	50 (v_0, v_4, v_3)		
V_4	30 (v_0, v_4)	30 (v_0, v_4)			
V_5	100 (v_0, v_5)	100 (v_0, v_5)	90 (v_0, v_4, v_5)	60 (v_0, v_4, v_3, v_5)	
v_i	v_2	v_4	v_3	v_5	

起点	终点	最短路径	路径长度
v_0	v_1	无	
	v_2	(v_0, v_2)	10
	v_3	(v_0, v_4, v_3)	50
	v_4	(v_0, v_4)	30
	v_5	(v_0, v_4, v_3, v_5)	60



中心选址问题

中心点选址问题中，最佳选址位置的判定标准，是使其所在的顶点与图中其它顶点之间的最大距离达到最小。

这个选址问题实际上就是求网络图的中心点问题。这类选址问题适宜于医院、消防站等服务设施的布局问题。

中心选址问题的图论描述

设 $G=(V,E)$ 是一个**无向赋权连通图**，其中 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ， $E=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 。连接两个顶点的边的权值代表该两顶点之间的距离。

对于每个顶点 v_i ，它与各顶点之间的**最短路径长度**为 $d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in}$ 。顶点 v_i 的**最大服务距离**是这几个最短路径长度中的最大值，记为 $e(v_{i0})$ 。

$$e(v_{i0}) = \max(d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in})$$

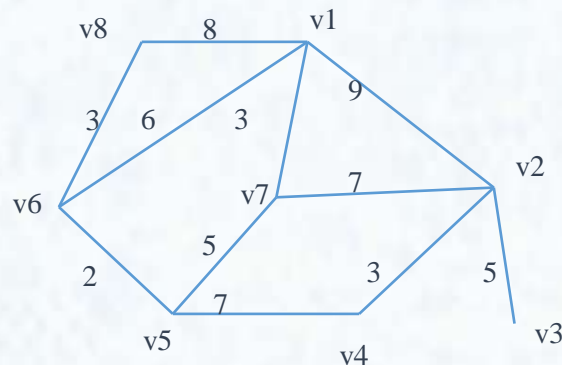
那么，**中心点选址问题**，就是求图 G 的中点 v_{i0} ，使得该顶点的**最大服务距离达到最小**，即： $e(v_{i0}) = \min\{e(v_i)\}$

网络分析

选址问题举例

中心选址分析

例如，某县要在其所辖的8个乡镇之一修建一个消防站，为8个乡镇服务，要求消防站至最远乡镇的距离达到最小。假设该8个乡镇之间的交通网络被抽象为无向赋权连通图，权值为乡镇之间的距离。下面求解消防站应设在哪个乡镇，即哪个顶点？



首先，用Dijkstra算法计算出每一个顶点 v_i 至其它各顶点 v_j 的最短路径长度 d_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, 8$)，写出距离矩阵：

$D =$	$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & d_{17} & d_{18} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & d_{27} & d_{28} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & d_{37} & d_{38} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} & d_{47} & d_{48} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} & d_{57} & d_{58} \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} & d_{67} & d_{68} \\ d_{71} & d_{72} & d_{73} & d_{74} & d_{75} & d_{76} & d_{77} & d_{78} \\ d_{81} & d_{82} & d_{83} & d_{84} & d_{85} & d_{86} & d_{87} & d_{88} \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 14 & 12 & 8 & 6 & 3 & 8 \\ 9 & 0 & 5 & 3 & 10 & 12 & 7 & 15 \\ 14 & 5 & 0 & 8 & 15 & 17 & 12 & 20 \\ 12 & 3 & 8 & 0 & 7 & 9 & 10 & 12 \\ 8 & 10 & 15 & 7 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 6 & 12 & 17 & 9 & 2 & 0 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 12 & 10 & 5 & 7 & 0 & 10 \\ 8 & 15 & 20 & 12 & 5 & 3 & 10 & 0 \end{bmatrix}$
-------	--	-----	--

其次，求距离矩阵中每行的最大值，即各个顶点的最大服务距离，得

$$e(v_1)=14, e(v_2)=15, e(v_3)=20, e(v_4)=12, e(v_5)=15, e(v_6)=17, e(v_7)=12, e(v_8)=20$$

最后，计算最大服务距离的最小值。显然， $e(v_4) = e(v_7) = \min\{e(v_i)\}$ 。所以，消防站应建在 v_4 或 v_7 点所在的乡镇即可。





谢谢大家！

