算法基础 HW2

PB18111697 王章瀚

2020 年 10 月 14 日

1 堆排序

对于一个按升序排列的包含n个元素的有序数组A来说, HEAPSORT 的时间复杂度是多少? 如果A是降序的呢? 请简要分析给出结果.

答:

它们应当都是 $\Theta(n \lg n)$的.

- 对于升序排列的数组A来说, 首先要经历一个$O(n)$的建堆过程
- 对于降序排列的数组A, 如果程序能够对"降序排列"这个信息作处理, 那么这个数组本身就已经是一个最大堆了, 这时将有$O(1)$的建堆过程;
  但如果程序不能处理"降序"这个信息, 那么依然要遍历非叶子结点来做MAX-HEAPIFY, 只不过每次判断结果都是不必交换, 这个过程依然是$O(n)$的.

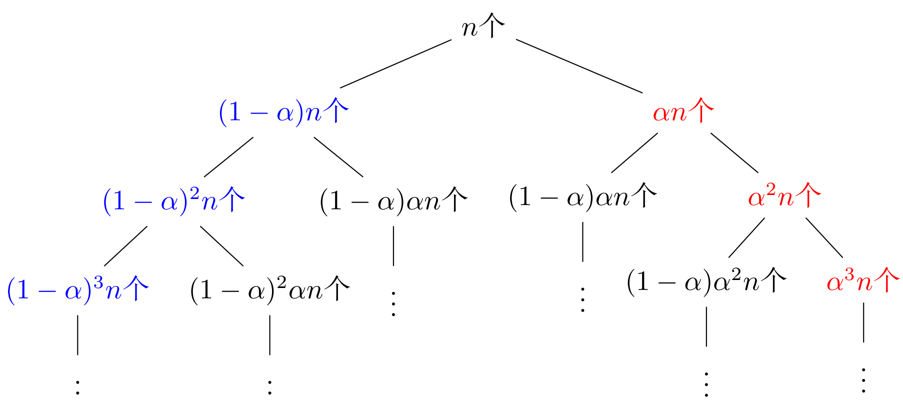
而更为耗时的排序过程都需要$\Theta(n \lg n)$, 因此总的来看, 两种情况的HEAPSORT时间复杂度都是 $\Theta(n \lg n)$ □

2 快速排序

(a). 假设快速排序的每一层所做的划分比例都是 $1-\alpha;\alpha$, 其中$0 < \alpha \leq 1/2$是一个常数. 试证明: 在相应的递归树中, 叶结点的最小深度大约是$-\lg n/\lg \alpha$, 最大深度大约是 $-\lg n/\lg(1-\alpha)$(无需考虑舍入问题)

答:

不考虑舍入, 那么可以认为叶子节点只有一个元素 从根节点开始, 应按如下分支:



- 最小深度: 显然, 由于$0 < \alpha \leq 1/2$, 最快到达叶子节点的分支应当是每次都选右节点的那条路径(图中红色).

如果设深度为h, 那么这条路径上的对应叶子节点就有$\alpha^h n$个元素构成, 因此我们有

$$\alpha^h n = 1 \quad i.e. \quad h = \log_\alpha \frac{1}{n} = -\lg n / \lg \alpha$$

- 最大深度: 显然, 由于$0 < \alpha \le 1/2$, 最慢到达叶子节点的分支应当是每次都选左子结点的那条路径(图中蓝色).
  如果设深度为h, 那么这条路径上的对应叶子节点就有$(1-\alpha)^h n$个元素构成, 因此我们有

$$(1-\alpha)^h n = 1 \quad i.e. \quad h = \log_{(1-\alpha)} \frac{1}{n} = -\lg n / \lg(1-\alpha)$$

□

(b). 试证明: 在一个随机输入数组上, 对于任何常数$0 < \alpha \le 1/2$, Partition产生比$1-\alpha : \alpha$更平衡的划分的概率约为$1-2\alpha$

答:

在一次Partition中, 要产生比$1-\alpha : \alpha$更不平衡的划分, 则必然是取到的 pivot element为第αn大或第αn小的数, 这个的概率是

$$P(worse) = 2 \times \frac{\alpha n}{n} = 2\alpha$$

因此, 产生更平衡的划分的概率为

$$P(better) = 1 - 2\alpha$$

□