算法基础 HW6

PB18111697 王章瀚

2020 年 11 月 24 日

1

我们对钢条切割问题进行一点修改，除了切割下的钢条段具有不同价格 p_i 外，每次切割还要付出固定的成本 c．这样，切割方案的收益就等于钢条段的价格之和减去切割的成本．设计一个动态规划算法解决修改后的钢条切割问题．

Algorithm 1 考虑切割成本的钢条切割问题

Require: 长度为 i 的钢条价格为 p_i, 每次切割有固定成本 c, 钢管长度为 n

```
function BOTTOM-UP-CUT-ROD(p, c)
    let r[0..n] be a new array
    r[0] = 0
    for j = 1 → n do
        q = −∞
        for i = 1 → j do
            q = max(q, p[i] + r[j − i] − c)        ▷ 固定成本 c 在这里被考虑
        r[j]=q
    return r[n]
```

2

给定一个有向无环图 $G=(V;E)$，边权重为实数，给定图中两个顶点 s 和 t. 设计动态规划算法，求从 s 到 t 的最长加权简单路径.

这里我们显然有: 如果某结点 v 是该路径上的, 那么沿着这个路径, s 到 v 和 v 到 t 也分别是最长加权简单路径. 否则一旦有更长的, 换上去就行了.

这是因为这个更长 $v \rightsquigarrow_{new} t$ (或 $s \rightsquigarrow_{new} v$) 的显然不会经过 $s \rightsquigarrow v$ (或 $v \rightsquigarrow t$) 上的顶点.3

假设经过, 比如是 $s \rightsquigarrow_{new} v$ 经过了 $v \rightsquigarrow t$ 上的顶点 ω, 那么就有 $\omega \rightsquigarrow_{new} v$ 和 $v \rightsquigarrow \omega$, 这样一来就构成了环, 与题设矛盾. 另一种情况同理.

故确实可以利用上述思想做动态规划.

Algorithm 2 有向无环图的最长加权简单路径

```
Require: 给定有向无环图 G = (V, E), 两个顶点 s, t
function LONGEST-WEIGHTED-PATH(V, E, s, t)
    for v in V do
        v.val = −∞
        v.last = NULL
    s.val = 0
    let S = {s}
    while S is not ∅ do
        for v in S do
            S = S/{v}
            for w in v.to_list do
                if w.val < edge(v, w).weight + v.val then
                    w.val = edge(v, w).weight + v.val
                    w.from = v
                S = S ∪ {w}
    let path = a list
    v = t
    while visnotNULL do
        path.insert(v, path.begin)                ▷ 把 v 插入列表首部
        v = v.last
    return path
```

3

在最优二叉搜索树问题中，若给定 7 个关键字的概率如下所示，求其最优二叉搜索树的结构和代价.(p，q 定义和课本相同)

i	0	1	2	3	4	5	6	7
p_i		0.04	0.06	0.08	0.02	0.10	0.12	0.14
q_i	0.06	0.06	0.06	0.06	0.05	0.05	0.05	0.05

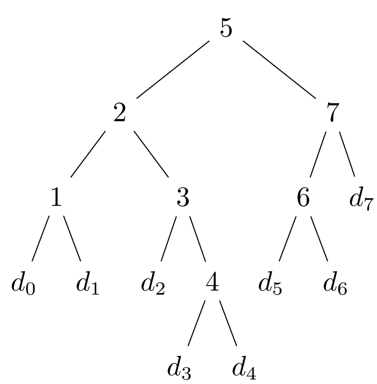
首先可以画出以下三个表:

w \ i, j	1	2	3	4	5	6	7	8
7	1.0	0.90	0.78	0.64	0.56	0.41	0.24	0.05
6	0.81	0.71	0.59	0.45	0.37	0.22	0.05	
5	0.64	0.54	0.42	0.28	0.20	0.05		
4	0.49	0.39	0.27	0.13	0.05			
3	0.42	0.32	0.20	0.06				
2	0.28	0.18	0.06					
1	0.16	0.06						
0	0.06							

e \ i, j	1	2	3	4	5	6	7	8
7	3.12	2.61	2.12	1.55	1.20	0.78	0.34	0.05
6	2.44	1.96	1.48	1.01	0.72	0.32	0.05	
5	1.83	1.41	1.04	0.57	0.30	0.05		
4	1.34	0.93	0.57	0.24	0.05			
3	1.02	0.68	0.32	0.06				
2	0.62	0.30	0.06					
1	0.28	0.06						
0	0.06							

root \ i, j	1	2	3	4	5	6	7
7	5	5	5	6	6	7	7
6	3	5	5	5	6	6	
5	3	3	4	5	5		
4	2	3	3	4			
3	2	3	3				
2	2	2					
1	1						

从而能够得出最优二叉搜索树:



其代价即为 $e[1,7] = 3.12$

4

一位公司主席正在向 Stewart 教授咨询公司聚会方案．公司的内部结构关系是层次化的，即员工按主管-下属关系构成一棵树，根结点为公司主席．人事部按"宴会交际能力"为每个员工打分，分值为实数．为了使所有参加聚会的员工都感到愉快，主席不希望员工及其直接主管同时出席．
公司主席向 Stewart 教授提供公司结构树，采用左孩子右兄弟表示法 (参见课本 10.4 节) 描述．每个节点除了保存指针外，还保存员工的名字和宴会交际评分．设计算法，求宴会交际评分之和最大的宾客名单．分析算法复杂度．

采用动态规划的思想, 如果最优方案选中了 x, 那么其所有孙子 (因为孩子不会被选) 的选择情况将也是最优的, 否则通过替换即可得到更优解.
因此如果令 $r[x]$ 表示以 x 为根的子树能够构成的最佳宴会名单对应的评分和, 那么就有

$$\text{若不邀请 x: } r_0[x] = \max \begin{cases} \sum_{\text{y in x.children}} r_0[y] \\ \sum_{\text{y in x.grandchildren}} r_0[y] \end{cases}$$

$$\text{若邀请 x: } r_1[x] = x.score + \sum_{\text{y in x.grandchildren}} r_0[y]$$

因此可以写出相应算法[1]:
其通过自上而下递归遍历结点, 且若遇到已经算完的情况就能自动返回 (动态规划的关键), 并且最后计算出名单只需要遍历一遍, 因此**复杂度是** $\Theta(n)$.
具体算法见下页

[1] 参考自`https://blog.csdn.net/yangtzhou/article/details/84305563`

Algorithm 3 宴会邀请

Require: 员工结构树 T, 返回显示是否被邀请的表 $guests$

```
function BEST-INVITATION(T)                          ▷ 此后, 把 guest 中被邀请者提取即为名单
    r0, r1 为结点到 r 值的表, 其初始值均为 −∞
    guest 指示是否被邀请, 初值为 False
    BEST-INVITATION(T, r0, r1, guests)
    if r0[T] > r1[T] then
        guests[T] = False
        return r0[T], guests
    else
        guests[T] = True
        return r1[T], guests

function BEST-INVITATION-SUB(T, &r0, &r1, &guests)
    if T is NULL then
        return
    if r0[T]! = ∞ then                               ▷ 已经算过
        return
    children = T.children
    r0[T] = 0
    r1[T] = T.score
    for x in children do
        BEST-INVITATION(x, r0, r1, guests)
        if r0[x] > r1[x] then                        ▷ 不邀请 T 的情况下, 邀请了 x 能得到更好的结果
            r0[T]+ = r0[x]
        else                                         ▷ 不邀请 T 的情况下, 不邀请 x 能得到更好的结果
            r0[T]+ = r1[x]
        r1[T]+ = T.score + r0[x]                     ▷ 邀请 T 的情况下, 只要直接加上不邀请孩子 x 的 r 值即可
    if r0[T] > r1[T] then
        guests[T] = False
    else
        guests[T] = True
```

5

设计一个高效的算法，对实数线上给定的一个点集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，求一个单位长度闭区间的集合，包含所有给定的点，并要求此集合最小．证明你的算法是正确的．

首先给出算法:

1. 将点集排序得到列表 X, 初始化区间集合为 $sections = \varnothing$

2. 取 X 中最小元 x_i, 并取区间 $s = [x_i, x_i + 1]$
   将 X 中落在区间 s 中的点去掉, 并令 $sections = sections \cup s$

3. 如果 $X \neq \varnothing$, 继续执行第 2 步, 否则进入 第 4 步

4. 此时区间集合 S 即为所求集合

现在证明其正确性:
首先显然如果区间左端点不是点集中的点之一, 那么完全可以使之增大直到达到的第一个点, 这样只可能减小区间集合大小.
其次, 在第一次进入第二步的时候, 不论如何一定要有一个区间包含第一个点 x_1, 那么根据前述, 它必须是 $[x_1, x_1+1]$, 此时显然可以不考虑落在该区间的点了. 然后重复地执行, 每次都是全局最优方案之选, 因此整个算法是正确的. □

6

考虑用最少的硬币找 n 美分零钱的问题. 假定每种硬币的面额都是整数. 设计贪心算法求解找零问题, 假定有 25 美分, 10 美分, 5 美分和 1 美分四种面额的硬币. 证明你的算法能找到最优解.

首先给出算法:

1. 先选 $a = \lfloor n/25 \rfloor$ 个 25 美分硬币
2. 再选 $b = \lfloor (n - 25 * a)/10 \rfloor$ 个 10 美分硬币
3. 再选 $c = \lfloor (n - 25 * a - 10 * b)/5 \rfloor$ 个 5 美分硬币
4. 再选 $d = \lfloor (n - 25 * a - 10 * b - 5 * c) \rfloor$ 个 1 美分硬币
5. 最终得到结果: a 个 25 美分硬币, b 个 10 美分硬币, c 个 5 美分硬币, d 个 1 美分硬币

下面证明算法的最优性: 如果不是最优, 假设 (a', b', c', d') 为一更优解,
若 $a' < a$, 则 $(0, b', c', d')$ 的价值必然至少比 $(0, b, c, d)$ 的刚好大 $25 * (a - a')$, 此时可以从中凑出 $(a - a')$ 个 25, 显然这能够找出比 (a', b', c', d') 更小的结果.
依此类推, 若 $b' < b$, 若 $c' < c$, 若 $d' < d$ 均有类似结论. 所以 $a' \geq a$, $b' \geq b$, $c' \geq c$, $d' \geq d$, 因此 (a, b, c, d) 必然是最优解.
□