算法基础 HW2

PB18111697 王章瀚

2020年10月18日

1 堆排序

对于一个按升序排列的包含n个元素的有序数组A来说,HEAPSORT 的时间复杂度是多少?如果A是降序的呢?请简要分析给出结果.

答:

它们应当都是 $O(n \lg n)$ 的.

- 对于升序排列的数组A来说, 首先要经历一个O(n)的建堆过程
- 对于降序排列的数组*A*,如果程序能够对"降序排列"这个信息作处理,那么这个数组本身就已经是一个最大堆了,这时将有*O*(1)的建堆过程;

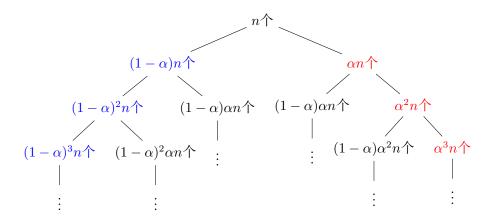
但如果程序不能处理"降序"这个信息,那么依然要遍历非叶子结点来做Max-Heapify,只不过每次判断结果都是不必交换,这个过程依然是O(n)的.

而更为耗时的排序过程都需要 $O(n \lg n)$,因此总的来看,两种情况的HEAPSORT时间复杂度都是 $O(n \lg n)$

2 快速排序

(a). 假设快速排序的每一层所做的划分比例都是 $1-\alpha$; α , 其中 $0<\alpha\le 1/2$ 是一个常数. 试证明: 在相应的递归树中, 叶结点的最小深度大约是 $-\lg n/\lg \alpha$, 最大深度大约是 $-\lg n/\lg (1-\alpha)$ (无需考虑舍入问题) 答:

不考虑舍入, 那么可以认为叶子节点只有一个元素 从根节点开始, 应按如下分支:



• 最小深度: 显然, 由于 $0 < \alpha \le 1/2$, 最快到达叶子节点的分支应当是每次都选右节点的那条路径(图中红色).

如果设深度为h,那么这条路径上的对应叶子节点就有 $\alpha^h n$ 个元素构成,因此我们有

$$\alpha^h n = 1$$
 i.e. $h = \log_\alpha \frac{1}{n} = -\lg n / \lg \alpha$

• 最大深度: 显然, 由于 $0 < \alpha \le 1/2$, 最慢到达叶子节点的分支应当是每次都选左子结点的那条路径(图中蓝色).

如果设深度为h,那么这条路径上的对应叶子节点就有 $(1-\alpha)^h n$ 个元素构成,因此我们有

$$(1-\alpha)^h n = 1$$
 i.e. $h = \log_{(1-\alpha)} \frac{1}{n} = -\lg n / \lg(1-\alpha)$

(b). 试证明: 在一个随机输入数组上, 对于任何常数 $0<\alpha\leq 1/2$, PARTITION产生比 $1-\alpha:\alpha$ 更平衡的划分的概率约为 $1-2\alpha$

答:

在一次PARTITION中,要产生比 $1-\alpha:\alpha$ 更不平衡的划分,则必然是取到的 pivot element为第 αn 大或第 αn 小的数,这个的概率是

$$P(worse) = 2 \times \frac{\alpha n}{n} = 2\alpha$$

因此,产生更平衡的划分的概率为

$$P(better) = 1 - 2\alpha$$