

算法基础 HW1

PB18111697 王章瀚

2020 年 9 月 30 日

1. (a). 线性查找伪代码如下:

Algorithm 1 线性查找

```
1: function LIN_FIND( $A, v$ )
2:    $n = \text{len}(A)$ 
3:   for  $i = 1, 2, \dots, n$  do
4:     if  $a_i == v$  then
5:       return  $i$ 
6:   return NIL
```

使用循环不变式证明算法正确性:

- **初始化:** 每次循环开始前, 必然有 $A[1..i-1] \neq v$, 这就是循环不变式
- **保持:** 如果 $a_i \neq v$, 那么可以推出下次迭代有 $A[1..i] \neq v$, 即下次迭代也为真
- **终止:** 如果 $a_i == v$, 那么就得到了正确的 i , 直接返回它. 如果循环迭代结束了还没有找到等于 v 的 a_i 那么就会返回 NIL 表示找不到.

- (b). 若 v 在 A 中第 i 个, 那就需要查找 i 个元素, 按题述不需要考虑 v 不在 A 的情况. 因此平均需要检查元素个数为:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2}$$

最坏情况就是每次都是最后一个元素, 那么需要查找元素个数为: n

因此有

平均情况	$\Theta(\frac{n+1}{2}) = \Theta(n)$
最坏情况	$\Theta(n)$

2. 假定 $f(n)$ 与 $g(n)$ 都是渐进非负函数, 判断下列等式或陈述是否一定是正确的, 并简要解释你的答案.

a $f(n) = O(f(n)^2)$

b $f(n) + g(n) = \Theta(\max(f(n), g(n)))$

c $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$

d if $f(n) = \Omega(g(n))$, then $f(n) = o(g(n))$

- a. **错误.** 假设 $f(n) = O(f(n)^2)$ 成立, 那么对足够大的 n 就有 $0 \leq f(n) \leq cf(n)^2$, 从而得到 $1 \leq cf(n)$, 因此只要构造 $f(n)$ 为单调递减的函数 (如 $\frac{1}{n}$), 则不能对充分大的 n 满足 $\frac{1}{c} \leq f(n)$.

b. 正确. 记 $\phi(n) = \max(f(n), g(n))$ 只需要证明对于充分大的 n , 存在 $c_1, c_2 > 0$ 使得

$$0 \leq c_1 \phi(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 \phi(n)$$

事实上, 由于 $\phi(n) = \max(f(n), g(n))$, 那么取 $c_2 = 2$ 必然有 $f(n) + g(n) \leq c_2 \phi(n)$

另一方面, 因为有渐进非负性, 必然有 $\phi(n) \leq f(n) + g(n)$, 取 $c_1 = 1$ 即可.

c. 正确. 对于 $O(f(n))$ 有, 对充分大的 n 存在 $0 \leq O(f(n)) \leq c_0 f(n)$, 从而得到

$$f(n) \leq O(f(n)) + f(n) = \Theta(n) \leq (c_0 + 1)f(n)$$

因此 $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$

d. 错误. 不妨取 $f(n) = g(n) = n^2$, 那么显然 $f(n) = \Omega(g(n))$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \neq 0$, 所以 $f(n) \neq o(g(n))$.

3. 证明 $\lg(n!) = \Theta(n \lg(n))$ (课本3.19式), 并证明 $n! = \omega(2^n)$ 且 $n! = o(n^n)$

• 证明 $\lg(n!) = \Theta(n \lg(n))$.

借助斯特林公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

可以得到对于充分大的 n 有

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + c_1 \frac{1}{n}\right) \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + c_2 \frac{1}{n}\right)$$

只考虑左边的不等式, 取对数得到

$$\begin{aligned} \lg(n!) &\geq n \lg\left(\frac{n}{e}\right) + \lg(\sqrt{2\pi n} (1 + c_1 \frac{1}{n})) \\ (\text{第二项显然大于} 0) &\geq n \lg\left(\frac{n}{e}\right) \\ &\geq \frac{1}{e} n \lg(n) \end{aligned}$$

这里最后一步很好证明, 两边除以 n 后, 稍作移项就能得到 $(1 - \frac{1}{e} \lg(n)) \geq \lg(e)$, 这是显然成立的. 而又显然有

$$\lg(n!) = \sum_{i=1}^n \lg(i) \leq n \lg(n)$$

因此对充分大的 n , 我们有

$$\frac{1}{e} n \lg(n) \leq \lg(n!) \leq n \lg(n)$$

因此可以说明 $\lg(n!) = \Theta(n \lg(n))$

• 证明 $n! = \omega(2^n)$ 且 $n! = o(n^n)$

根据刚才得到的不等式, 即对充分大的 n 有

$$\frac{1}{e} n \lg(n) \leq \lg(n!) \leq n \lg(n)$$

而对 n 充分大的时候, 其不等号严格成立是显然的, 即

$$\frac{1}{e} n \lg(n) < \lg(n!) < n \lg(n)$$

稍作变换得到

$$\lg((n^{\frac{1}{e}})^n) < \lg(n!) < \lg(n^n)$$

当 n 充分大, 显然有 $2 < n^{\frac{1}{e}}$, 因此

$$0 \leq 2^n < n! < n^n$$

故 $n! = \omega(2^n)$ 且 $n! = o(n^n)$, 证毕!

4. 使用代入法证明 $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ 的解为 $O(\lg n)$

- 首先对于 $n = 1$ 的情况, 等式是不成立的, 不必考虑
- 对于初始情况 $n=2$, 有 $0 \leq T(2) = T(1) + 1 \leq c \lg(n)$, 这里只需要 c 充分大即可, 因此初始情况成立
- 假设当 $2 \leq k < n$ 时均有 $T(k) = T(\lceil k/2 \rceil) + 1$, 那么

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c \lg(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c \lg(n) + c \lg\left(\frac{\lceil n/2 \rceil}{n}\right) + 1 \end{aligned}$$

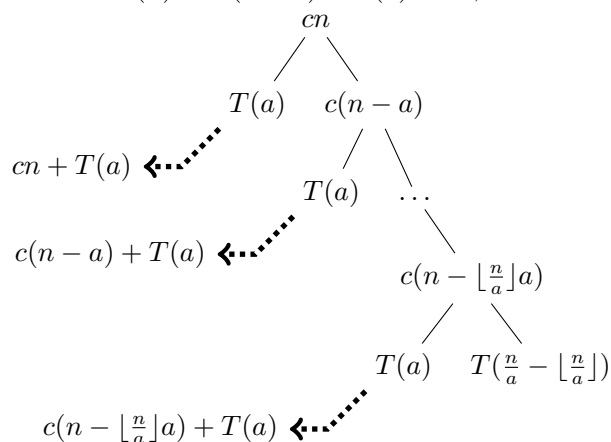
这里 $\lceil n/2 \rceil \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n})$, 因此对于 $n \geq 2$, 必然有 $\lg\left(\frac{\lceil n/2 \rceil}{n}\right) \leq 0$, 这意味着对于充分大的 c 可以有

$$T(n) \leq c \lg(n) + c \lg\left(\frac{\lceil n/2 \rceil}{n}\right) + 1 \leq c \lg(n)$$

因此当 $k = n$ 时也成立

综合上述几点通过代入法就知: $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ 的解为 $O(\lg n)$

5. 对递归式 $T(n) = T(n-a) + T(a) + cn$, 利用递归树给出一个渐进紧确解, 其中 $a \geq 1$ 和 $c > 0$ 为常数.



从图中可以知道(如果令n为a的倍数, 先去估计一个解)

$$\begin{aligned}
 T(n) &= \Theta(\lfloor \frac{n}{a} \rfloor (cn + T(a)) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor} ia + T(\frac{n}{a} - \lfloor \frac{n}{a} \rfloor)) \\
 &= \Theta(\lfloor \frac{n}{a} \rfloor (cn + T(a)) - \frac{1}{2}(\lfloor \frac{n}{a} \rfloor)(\lfloor \frac{n}{a} \rfloor + 1)a + T(\frac{n}{a} - \lfloor \frac{n}{a} \rfloor)) \\
 &= \Theta(\frac{n}{a}(cn + T(a)) - \frac{1}{2}(\frac{n}{a})(\frac{n}{a} + 1)a + T(\frac{n}{a} - \frac{n}{a})) \\
 &= \Theta(\frac{n^2}{a}((c - \frac{1}{2})) + (\frac{T(a)}{a} - \frac{1}{2})n) \\
 &= \Theta(n^2)
 \end{aligned}$$

下面用归纳法证明 $T(n) = \Theta(n^2)$.

- 假设当 $k < n$ 的时候都有 $T(k) \in [c_1 k^2, c_2 k^2]$, 那么考虑 $k = n$ 的情况有:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= T(n-a) + T(a) + cn \in [c_1(n-a)^2 + a^2 + cn, c_2(n-a)^2 + a^2 + cn] \\
 &= [c_1 n^2 + c_1(a^2 - 2an) + a^2 + cn, c_2 n^2 + c_2(a^2 - 2an) + a^2 + cn] \\
 &\subset [c_1 n^2, c_2 n^2] \text{ (这里取 } c_1(a^2 - 2an) + a^2 + cn \geq 0, c_2(a^2 - 2an) + a^2 + cn \leq 0 \text{)}
 \end{aligned}$$

以上当 $c_1 \leq \frac{a^2 + cn}{2an - a^2} \leq c_2$ (其中 $n \geq \frac{a}{2}$)时成立.

- 再考虑初始情况: 对于合适的 n_0 , 当 $n < n_0$ 时必然有 $T(n) = \Theta(1)$ (这是因为在 n_0 给定的情况下, $T(n)$ 必然都是有限的数), 因此只需要找到足够小的 c_1 和足够大的 c_2 就能够满足 $c_1 n^2 < T(n) < c_2 n^2$

至此归纳证明结束.

6. 对下列递归式, 使用主方法求出渐进紧确解:

(a). $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$

(b). $T(n) = 2T(n/4) + n^2$

- (a). 这里 $a=2$, $b=4$, 从而 $n^{\log_b a} = n^{\log_4 2} = \sqrt{n}$, 显然有 $\sqrt{n} = \Theta(\sqrt{n}) = \Theta(n^{\log_b a})$ (自反性)
从而可以使用主定理的第二种情况直接得出

$$T(n) = \Theta(\sqrt{n} \lg(n))$$

- (b). 这里 $a=2$, $b=4$, 从而 $n^{\log_b a + \epsilon} = n^{\log_4 2 + \epsilon} = n^{\frac{1}{2} + \epsilon}$,
因此对于 $\epsilon = \frac{3}{2}$ 有, $f(n) = n^2 = \Omega(n^2) = \Omega(n^{\log_4 2 + \epsilon})$ (自反性).
又有, $af(n/b) = 2f(n/4) = n^2/8 \leq \frac{1}{8}n^2$,
即对充分大的 n , 取 $c = \frac{1}{8}$, 有 $af(n/b) \leq cf(n)$,
故由主定理的第三种情况直接得到,

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

7. 主方法能应用于递归式 $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \lg(n)$ 吗? 请说明为什么可以或为什么不可以. 给出这个递归式的一个渐进上界.

- 这里 $a = 4$, $b = 2$, $n^{\log_b a} = n^2$. 分别考虑主方法的三种情况:

(1). $n^{\log_b a - \epsilon} = n^{2 - \epsilon}$,

若要能应用第一种情况, 则要存在 c , 使得对充分大的 n 都有 $f(n) = n^2 \lg n \leq cn^{2-\epsilon}$, 即 $c \geq n^\epsilon \lg n$, 这显然无法做到.

(2). i. 如果按老师的PPT: 显然有 $n^2 \lg n = \Theta(n^2 \lg n)$, 因此可以应用第二种情况, 直接能够得到

$$T(n) = \Theta(n^2 \lg^2 n)$$

ii. 如果按课本: 那么 $n^2 \lg n! = \Theta(n^2)$, 因此不能使用.

(3). 若要能应用第三种情况, 则要存在 c , 使得对充分大的 n 都有 $f(n) = n^2 \lg n \geq cn^{2+\epsilon}$,

即 $c \leq n^{-\epsilon} \lg n$, 这也是做不到的, 因为 $\epsilon > 0$, 不等式右边是指数衰减的(这里直接描述了, 从数学上也是很好证明的).

综上所述, 如果按老师的PPT来, 就可以; 如果按课本来, 就不行. 原因上面已经说清楚了.

- i. 如果按老师的PPT: 因为刚才已经给出了渐进紧确解, 那么它也是一个渐进上界, 即

$$T(n) = O(n^2 \lg^2 n)$$

ii. 如果按课本: 那么需要手动构造一个渐进上界. 我们可以猜测

$$T(n) = O(n^2 \lg^2 n)$$

– 假设对于 $k < n$, 都有 $T(k) < ck^2 \lg^2 k$ 成立. 那么就有

$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(n/2) + n^2 \lg n \\ &\leq 4c \left(\frac{n}{2}\right)^2 \lg^2 \frac{n}{2} + n^2 \lg n \\ &= cn^2 \lg^2 n - cn^2 \lg 2 + n^2 \lg n \\ &\leq cn^2 \lg^n - n^2 (\lg n - c \lg 2) \\ &\leq cn^2 \lg^2 \quad (\text{当 } \lg n > c \lg 2 \text{ 即 } n > 2^c) \end{aligned}$$

– 再考虑初始情况: 对于合适的 n_0 , 当 $n < n_0$ 时必然有 $T(n) = \Theta(1)$ (这是因为在 n_0 给定的情况下, $T(n)$ 必然都是有限的数), 因此只需要找到足够大的 c 就能够满足 $T(n) < cn^2 \lg^n$