Лабораторная работа №10

Вариант 36

1. Решить ур-ие в целых числах:

$$61111x - 63973y = 1$$

I способ:

1) НОД. Найдём по алгоритму Евклида методом деления:

1. $\frac{63973}{61111} = 1$ (2862 - остаток)

$$63973 = 61111 \cdot 1 + 2862$$

2. $\frac{61111}{2862} = 21$ (остаток 1009)

$$61111 = 2862 \cdot 21 + 1009$$

3. $2862 : 1009 = 2$ (остаток 844)

$$2862 = 1009 \cdot 2 + 844$$

4. $1009 : 844 = 1$ (остаток 165)

$1009 = 844 \cdot 1 + 165$

• 5. $844 : 165 = 5$ (19)

$844 = 165 \cdot 5 + 19$

• 6. $165 : 19 = 8$ (13)

$165 = 19 \cdot 8 + 13$

• 7. $19 : 13 = 1$ (6)

$19 = 13 \cdot 1 + 6$

• 8. $13 : 6 = 2$ (1)

$13 = 6 \cdot 2 + 1$

$6 : 1 = 6$ (0)

т.к. $6 = 1 \cdot 6 + 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ НОД: 1.

Цепные дроби:

$$\frac{63973}{61111} = 1 + \frac{2862}{61111} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.\ 1 + \frac{1}{\frac{61111}{2862}}$$

• 2. $$1 + \frac{1}{21 + \frac{1009}{2862}}$$

3. $1 + \cfrac{1}{21 + \cfrac{1}{\cfrac{2862}{1009}}}$

4. $1 + \cfrac{1}{21 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{844}{1009}}}$

5. $1 + \cfrac{1}{21 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{1009}{844}}}}$

6. $1 + \cfrac{1}{21 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{165}{844}}}}$

7. $1 + \cfrac{1}{21 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{19}{165}}}}}$

8. $1 + \cfrac{1}{21 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\;}}}}$

$$5+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{\frac{19}{13}}}$$

9. $$1+\cfrac{1}{21+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{13}{6}}}}}}}}$$

10. $$1+\cfrac{1}{21+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cancel{\frac{1}{6}}}}}}}}}$$

цепная дробь

11. $$1+\cfrac{1}{21+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+0}}}}}}}$$

=

$= \frac{10081}{9630} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 10081 \\ y_0 = 9630 \end{cases}$$

$$\forall \begin{cases} x = x_0 + b \cdot k, \\ y = y_0 - a \cdot k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 10081 + 63973 \cdot k, \\ y = 9630 - 61111 \cdot k \end{cases}}, \text{ где}$$

k – целое число.

I способ:

НОД$(61111, 63973) = 1$.

Выразим остатки в обратном порядке:

$1 = 13 - 2 \cdot 6$

$(6 = 19 - 13)$

$1 = 13 - 2 \cdot (19 - 13) = 3 \cdot 13 - 2 \cdot 19$

$(13 = 165 - 8 \cdot 19)$

$1 = 3 \cdot (165 - 8 \cdot 19) - 2 \cdot 19 = 3 \cdot 165 - 26 \cdot 19$

$(19 = 844 - 5 \cdot 165)$

$1 = 3 \cdot 165 \cdot (844 - 5 \cdot 165) = 133 \cdot 165 -$

$- 26 \cdot 844$

$(165 = 1009 - 844)$

$1 = 133 \cdot (1009 - 844) - 26 \cdot 844 =$

$= 133 \cdot 1009 - 159 \cdot 844$

$(844 = 2862 - 2 \cdot 1009)$

$1 = 133 \cdot 1009 - 159 \cdot (2862 - 2 \cdot 1009) =$

$= 451 \cdot 1009 - 159 \cdot 2862$

$(1009 = 61111 - 21 \cdot 2862)$

$1 = 451 \cdot (61111 - 21 \cdot 2862) - 159 \times$

$\times 2862 = 451 \cdot 61111 - 9630 \cdot 2862$

$(2862 = 63973 - 61111)$

$1 = 451 \cdot 61111 - 9630 \cdot (63973 -$

$- 61111) = \underbrace{10081} \cdot 61111 - \underbrace{9630} \cdot 63973$

$\Rightarrow x_0 = 10081; \; y_0 = 9630 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 10081 - 63973k, \\ y = 9630 - 61111k \end{cases}$$

2. Решить ур-ие в целых числах:

$x^2 - 114y^2 = 1$ – ур-ие Пелля.

1) Разложим $\sqrt{114}$ в цепную дробь:

$$\sqrt{114} = 10 + (\sqrt{114} - 10); \quad a_0 = 10$$

1. $$\frac{1}{\sqrt{114} - 10} = \frac{\sqrt{114} + 10}{14}$$

$$\sqrt{114} \approx 10{,}677 \Rightarrow \frac{10{,}677 + 10}{14} \approx 1$$

$a_1 = 1.$

2. $$\frac{14}{\sqrt{114} + 10 - 14 \cdot 1} = \frac{14}{\sqrt{114} - 4}$$

$$\frac{14(\sqrt{114} + 4)}{114 - 16} = \frac{14(\sqrt{114} + 4)}{98} = \frac{\sqrt{114} + 4}{7}$$

$$\frac{14{,}677}{7} \approx 2; \quad a_2 = 2.$$

3. $$\frac{7}{\sqrt{114} + 4 - 14} = \frac{7}{\sqrt{114} - 10},$$ что повторяет 1-ый шаг $\Rightarrow$ цепная дробь периодическая $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{114} = [10; \overline{1, 2, 10, 2, 1, 20}]$$

и период имеет длину 4.

2) $\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{cases}$

$\mathcal{X}\ \frac{p_0}{q_0}$:

$a_0 = 10;\ p_0 = a_0 \cdot p_{-1} + p_{-2} = 10 \cdot 1 + 0 = 10$

$\frac{p_0}{q_0} = \frac{10}{1}$

$\mathcal{X}\ \frac{p_1}{q_1}$:

$a_1 = 1;\ p_1 = a_1 \cdot p_0 + p_{-1} = 1 \cdot 10 + 1 = 11$

$q_1 = a_1 \cdot q_0 + q_{-1} = 1 \cdot 1 + 0 = 1$

$\frac{p_1}{q_1} = \frac{11}{1}$

$\mathcal{X}\ \frac{p_2}{q_2}$:

$a_2 = 2;\ p_2 = a_2 \cdot p_1 + p_0 = 2 \cdot 11 + 10 = 32$

$q_2 = a_2 \cdot q_1 + q_0 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$\frac{p_2}{q_2} = \frac{32}{3}$

$\frac{p_3}{q_3}$:

$a_3 = 1$; $p_3 = a_3 \cdot p_2 + p_1 = 1 \cdot 32 + 11 = 43$

$q_3 = a_3\, q_2 + q_1 = 1 \cdot 3 + 1 = 4$

$\frac{p_3}{q_3} = \frac{43}{4}$

$\frac{p_4}{q_4}$:

$a_4 = 20$; $p_4 = a_4 \cdot p_3 + p_2 = 20 \cdot 43 + 32 = 892$

$q_4 = a_4 \cdot q_3 + q_2 = 20 \cdot 4 + 3 = 83$

$\Rightarrow \frac{p_4}{q_4} = \frac{892}{83}$

~~Первое нетривиальное р-ние соот-тет предпоследней подходящей дроби периода: $\Rightarrow K = 3$~~

$\frac{p_5}{q_5}$: $a_5 = 1$; $p_5 = a_5 p_4 + p_3 = 1 \cdot 694 + 331 = 1025$

$q_5 = a_5 q_4 + q_3 = 1 \cdot 65 + 31 = 96$

$\frac{p_6}{q_6}$: $a_6 = 20$; $p_6 = a_6 p_5 + p_4 =$
$= 21194$

$q_6 = a_6 q_5 = 1985$

p_5 и q_5 равные 1025 и 96

подходят:

$1025^2 - 114 \cdot 96^2 = 1050624 -$

$- 1050624 = 1$ - истина

$\nmid \frac{p_7}{q_7}$: $p_7 = a_7 p_6 + p_5 = 22219$

$q_7 = a_7 q_6 + q_5 = 2081$

$\nmid \frac{p_8}{q_8}$: $p_8 = 65632$; $q_8 = 6147$

$\nmid \frac{p_9}{q_9}$: $p_9 = 678539$

$q_9 = 63551$

$\nmid \frac{p_{10}}{q_{10}}$: $p_{10} = 1422710$

$q_{10} = 133249$

$\nmid \frac{p_{11}}{q_{11}}$: $p_{11} = 2101249$

$q_{11} = 196800$

$\nmid \frac{p_{12}}{q_{12}}$: $p_{12} = 43437790$

$q_{12} = 4068129$

p_{11} и q_{11} равные 21012249 и 196800 также подходят:

$1 = 1$.

Ответ: $(X_1, Y_1) = (1025, 96)$; $(X_2, Y_2) = (21012249, 196800)$.

2. Общая ф-ла:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_1 X_n + D Y_1 Y_n, \\ Y_{n+1} = X_1 Y_n + Y_1 X_n \end{cases}$$

← универсальная рекуррентная ф-ла.

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{n+1} = 1025 X_n + 10944 Y_n, \\ Y_{n+1} = 96 X_n + 1025 Y_n \end{cases}$$

где $D = 114$; $Y_1 = 96$; $X_1 = 1025$.

4. Решить сравнение:

$15x \equiv 8 \pmod{109}$

I способ (алгоритм Евклида):

1) НОД$(15, 109)$:

$109 = 7 \cdot 15 + 4$

$15 = 3 \cdot 4 + 3$

$4 = 1 \cdot 3 + 1$

$3 = 3 \cdot 1 + 0$ $\Rightarrow$ НОД$(15, 109) = 1$

2) коэф-ты Безу, выражая 1 через 15 и 109:

$1 = 4 - 1 \cdot 3$; $3 = 15 - 3 \cdot 4$;

$1 = 4 - 1(15 - 3 \cdot 4) = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 15$

$4 = 109 - 7 \cdot 15$;

$1 = 4 \cdot (109 - 7 \cdot 15) - 1 \cdot 15 = 4 \cdot 109 - 29 \cdot 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow -29 \cdot 15 \equiv 1 \pmod{109}$,

но он отр-ный $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ прибавим 109:

$y = -29 + 109 = 80 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15 \cdot 80 = 1200 \equiv 1200 - 11 \cdot 109 =$

$= 1200 - 1199 = 1 \pmod{109}$

Обратный элемент к 15 по модулю 109 равен 80. $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \equiv 15^{-1} \cdot 8 = 80 \cdot 8 \equiv 640 \pmod{109}$

Найдём остаток от деления 640 на 109:

$\frac{640}{109} \approx 5{,}87 \Rightarrow 109 \cdot 5 = 545$

$640 - 545 = 95 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \equiv 95 \pmod{109}$

Ответ: $x \equiv 95$.

4. χ метод Эйлера:

$$15x = 8 \pmod{109}$$

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

$$НОД(15, 109) = 1$$

Ф-ция Эйлера:

$$\varphi(109) = 109 - 1 = 108$$

По т. Эйлера:

$$15^{108} \equiv 1 \pmod{109}$$

$$15x = 8 \pmod{109} \quad \Big| \cdot 15^{107}$$

$$x = 8 \cdot 15^{107}$$

$$79 \cdot 10^{-7}$$

$$15^{-1} = 15^{107} \pmod{109}$$

$15^{108} \equiv 1 \pmod{109}$;

$15 \cdot 15^{107} \equiv 1 \pmod{109}$

$\not\exists\ 15^{-1} \pmod{109}$

$109 = 7 \cdot 15 + 4$

$15 = 3 \cdot 4 + 3$

$4 = 1 \cdot 3 + 1$

$3 = 3 \cdot 1 + 0$

$1 = 4 - 1 \cdot 3$

$3 = 15 - 3 \cdot 4$

$4 = 109 - 7 \cdot 15$

$1 = 4 - 1(15 - 3 \cdot 4) = 4 \cdot 4 - 15$

$1 = 4(109 - 7 \cdot 15) - 15 = 4 \cdot 109 - 29 \cdot 15$

$\Rightarrow -29 \cdot 15 \equiv 1 \pmod{109}$

$15^{-1} \equiv 1 \bmod (109)$

$-29 \equiv 80 \pmod{109}$

$15^{-1} \equiv 80 \pmod{109}$

$x \equiv 8 \cdot 80 \pmod{109}$

$x \equiv 640 \pmod{109}$

$\frac{640}{109} \approx 5,871$

$109 \cdot 5 = 545$

$640 - 545 = 95$

Ответ: 95.

3. Разложить в цепную дробь число $5^{1/3}$, найти подходящую дробь с номером 10 и оценить погрешность приближения, используя св-ва подходящих дробей

(а не храние вычисления).

Р-ние:

Разложим $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ в цеп. дробь:

$\sqrt[3]{5} \approx 1,7099\ldots$

$a_0 = 1$; $\sqrt[3]{5} = 1 + \frac{1}{x_1}$; $x_1 \approx 1,408$

$a_1 = 1$; $x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$; $x_2 \approx 2,45$

$a_2 = 2$; $x_2 = 2 + \frac{1}{x_3}$; $x_3 \approx 2,22$

$a_3 = 2$; $x_3 = 2 + \frac{1}{x_4}$; $x_4 \approx 4,5$

$a_4 = 4$

и т.д. $a_5 = 1$; $a_6 = 3$; $a_7 = 1$;

$a_8 = 5$; $a_9 = 1$; $a_{10} = 1$.

! $\sqrt[3]{5} = [1, 1, 2, 2, 4, 1, 3, 1, 5, 1, 1, \ldots]$

Найдём подходящую дробь с каналом 10:

$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$; $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$

$\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{1}$; $\frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{1}$; $\frac{p_2}{q_2} = \frac{5}{3}$; $\frac{p_3}{q_3} = \frac{12}{7}$;

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{53}{31}; \quad \frac{p_5}{q_5} = \frac{65}{38}; \quad \frac{p_6}{q_6} = \frac{248}{145};$$

$$\frac{p_7}{q_7} = \frac{313}{183}; \quad \frac{p_8}{q_8} = \frac{1813}{1060}; \quad \frac{p_9}{q_9} =$$

$$= \frac{2126}{1243}; \quad \frac{p_{10}}{q_{10}} = \frac{3939}{2303}$$

! т.о. $\dfrac{p_{10}}{q_{10}} = \dfrac{3939}{2303} \approx 1,710377768$

Согласно св-вам цепных дробей:

$$\left| \sqrt[3]{5} - \frac{p_{10}}{q_{10}} \right| < \frac{1}{q_{10} q_{11}}:$$

$$\left| \sqrt[3]{5} - \frac{3939}{2303} \right| < \frac{1}{2303 \cdot q_{11}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2303 \cdot 3546} \approx 1,22 \cdot 10^{-7}$$

т.к. $\exists\, a_{11} \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow q_{11} \geq 2303 + 1243 = 3546$

или же $\left| \sqrt[3]{5} - \dfrac{3939}{2303} \right| < \dfrac{1}{2303^2} \approx 1,89 \cdot 10^{-7}$