2. Найти р-ние рекуррентного соотношения:

$$x_{n+3} = A x_{n+2} + B x_{n+1} + C x_n + D,$$ где

$A = -3$; $B = 1$; $C = 3$; $D = 3$;

$x(0) = 3$; $x(1) = 4$; $x(2) = 1$.

$\cancel{x}$ $x_{n+3} = -3x_{n+2} + x_{n+1} + 3x_n + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n+3} + 3x_{n+2} - x_{n+1} - 3x_n = 3$

$\leftarrow$ ЛНДУ с постоянными коэф-ми справа

1) Ч. однородное ур-ие:

$$x_{n+3} + 3x_{n+2} - x_{n+1} - 3x_n = 0$$

$\exists\ x_n = k^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow k^{n+3} + 3k^{n+2} - k^{n+1} - 3k^n = 0 \,|\, : k^n \neq 0$$

$$\Rightarrow k^3 + 3k^2 - k - 3 = 0 \quad | \pm 1; \pm 3$$

	1	3	-1	-3
1	1	4	3	0

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow k^2 + 4k + 3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} k = -1, \\ k = -3 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = 1;\ k_2 = -1;\ k_3 = -3$$

~~Ч. $\Rightarrow$ $y_0 = C_1 e^x + C_2 \frac{1}{e^x} + C_3 \frac{1}{e^{3x}}$~~

$\Rightarrow$ Общее р-ние:

$$x_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot (-1)^n + C_3(-3)^n =$$
$$= C_1 + C_2(-1)^n + C_3(-3)^n$$

2) Ч.

2) ✗ Неоднородное ур-ие:
т.к. $D = 3 - 4$

$\Rightarrow x_n = K \Rightarrow$

$K^n \neq 0$ $\Rightarrow K = -3K + K + 3K + 3$

$K = (-3K + K + 3K) + 3 = K + 3$

$K = K + 3 \Rightarrow 0 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ неверно

Найти р-ние в виде:

$x_n = Kn$

$K(n+3) = -3K(n+2) + K(n+1) + 3Kn + 3$

$\cancel{Kn} + 3K = -3\cancel{Kn} - 6K + \cancel{Kn} + K + 3\cancel{Kn} + 3$

$8K = 3 \Rightarrow K = \frac{3}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n.ч.} = \frac{3}{8} n$ – ч.р.

3) $x_o = x_n + x_{n.ч.} = C_1 + C_2(-1)^n + C_3(-3)^n +$
$+ \frac{3}{8} n.$

✗ $\overset{(1)}{x(0) = 3}$; $\overset{(2)}{x(1) = 4}$; $\overset{(3)}{x(2) = 1}$;

Из (1): $3 = C_1 + C_2 + C_3$

(2): $4 = C_1 - C_2 - 3C_3 + \frac{3}{8}$

$$(3):\quad 1 = C_1 + C_2 + 9C_3 + \frac{6}{8}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 9C_1 = \frac{1}{4}, \\ C_1 + C_2 + C_3 = 3, \\ C_1 - C_2 - 3C_3 = \frac{29}{8} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 9 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & \frac{29}{8} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 9 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -8 & \frac{11}{4} \\ 0 & -2 & -12 & \frac{27}{8} \end{array}\right) \sim$$

$\Rightarrow C_3 = -\frac{11}{32}$; $C_2 = \frac{3}{8}$ и $C_1 = \frac{95}{32}$.

$\Rightarrow x_n = \frac{95}{32} + \frac{3}{8}(-1)^n - \frac{11}{32}(-3)^n + \frac{3}{8}n$

$\nexists$ $x_{10} = -20291$

$\nexists$ a_{10}:

$n=0$:

$x_3 = 13$

$n=1$:

$x_4 = -23$

$n=2$:

$x_5 = 88$

$n=3$:

$x_6 = -245$

$n=4$:

$x_7 = 757$

$n=5$:

$x_8 = -2249$

$n=6$:

$x_9 = 6772$

$n=7$:

$x_{10} = -20291$

$\Rightarrow a_{10} = x_{10}$, что подтверждает правильность ф-лы.

3. Д-ть для чисел Фибоначчи следующее соот-ние:

$$F_1+F_3+F_5+\ldots+F_{2n-1}=F_{2n}$$

1) $\forall$ $n=1$:

$F_1=1$

$F_{2\cdot1}=F_2=1$ $\Big\} \Rightarrow$ F_1 и $F_{2\cdot1}$

равны и база индукции выполняется.

2) $\exists$ для некоторого $k\geq1$ выполняется:

$$F_1+F_3+F_5+\ldots+F_{2k-1}=F_{2k}$$

Докажем, что для $n=k+1$ соот-ние также выполняется:

$$F_1+F_3+F_5+\ldots+F_{2k-1}+F_{2(k+1)-1}=$$
$$=F_{2(k+1)}$$

Подставим индукционное предположение: $F_{2k}+F_{2k+1}=F_{2k+2}$

Из определения чисел Фибоначчи:

$$F_{2k+2} = F_{2k+1} + F_{2k} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ получили тождество $\Rightarrow$

$\Rightarrow F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$ – верно.

т. к. согласно индукционному предположению сумма первых k нечётных членов равна F_{2k}

4. Вычислить:

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n$$

$\forall$ биномиальную теорему:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Возьмём n-ную:

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} (k+1) C_n^k = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = n \cdot 2^{n-1} + 2^n = 2^{n-1}(n+2)$$

$\forall$ $n = 2$:

1) $C_2^0 + 2C_2^1 + 3C_2^2 = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8$

2) $2^{n-1}(n+2)$ при $n = 2$:

$2^{2-1}(2+2) = 8. \Rightarrow$!!

Ответ: $2^{n-1}(n+2)$.