Формула (2) только обозначениями отличается от формулы (1). Забыв на миг о геометрическом смысле $f(\xi_i), \Delta x_i$ и считая x временем, а $f(x)$ скоростью, найдем первообразную $F(x)$ функции $f(x)$ и тогда по формуле (1) получим, что $\sigma = F(1) - F(0)$.

В нашем случае $f(x) = x^2$, поэтому $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ и $\sigma = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$. Это и есть результат Архимеда, который он получил прямым вычислением предела в (2).

Предел интегральных сумм называется *интегралом.* Таким образом, формула (1) Ньютона – Лейбница связывает интеграл и первообразную.

Перейдем теперь к точным формулировкам и проверке того, что на эвристическом уровне было получено выше из общих соображений.

2. Определение интеграла Римана

a. Разбиения

Определение 1. *Разбиением* P отрезка $[a, b]$, $a < b$, называется такая конечная система точек $x_0, ..., x_n$ этого отрезка, что $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, ..., n)$ называются *отрезками разбиения* P.

Максимум $\lambda(P)$ из длин отрезков разбиения называется *параметром разбиения* P.

Определение 2. Говорят, что имеется *разбиение* (P, ξ) *с отмеченными отчками* отрезка $[a, b]$, если имеется разбиение P отрезка $[a, b]$ и в каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения P выбрано по точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, ..., n)$.

Набор $(\xi_1, ..., \xi_n)$ обозначается одним символом ξ.

b. База в множестве разбиений. В множестве P разбиений с отмеченными точками данного отрезка $[a, b]$ рассмотрим следующую базу $B = \{B_d\}$. Элемент $B_d, d > 0$, базы B есть совокупность всех тех разбиений (P, ξ) с отмеченными точками отрезка $[a, b]$, для которых $\lambda(P) < d$.

Проверим, что $\{B_d\}$,$d > 0$, - действительно база в P.

Во-первых, $B_d \neq \varnothing$. В самом деле, каким бы ни было число $d < 0$, очевидно, существует разбиение P отрезка $[a, b]$ с параметром $\lambda(P) < d$ (например, разбиение на n конгруэнтных отрезков). Но тогда существует и разбиение (P, ξ) с отмеченными точками, для которого $\lambda(P) < d$.

Во-вторых, если $d_1 > 0, d2 > 0$ и $d = min\{d1, d2\}$, то, очевидно, $B_{d_1} \cap B_{d_2} = B_d \in B$.

Итак, $B = \{B_d\}$ - действительно база в P.

c. Интегральная сумма

Определение 3. Если функция f определена на отрезке $[a, b]$, а (P, ξ) — разбиение с отмеченными точками этого отрезка, то сумма

$$\sigma(f; P; \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой* функции f, соответствующей разбиению (P, ξ) с отмеченными точками отрезка $[a, b]$.

Таким образом, при фиксированной функции f интегральная сумма $\sigma(f; P, \xi)$ оказывается функцией $\Phi(p) = \sigma(f; p)$ на множестве P разбиений $p = (P, \xi)$ с отмеченными точками отрезка $[a, b]$.

Поскольку в P имеется база B, то можно ставить вопрос о пределе функции $\Phi(p)$ по этой базе.

d. Интеграл Римана. Пусть f - функция, заданная на отрезке $[a, b]$.

Определение 4. Говорят, что число I является *интегралом Римана* от функции f на отрезке $[a, b]$, если для любого $\epsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения (P, ξ) с отмеченными точками отрезка $[a, b]$, параметр которого $\lambda(P) < \delta$, имеет место соотношение

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \epsilon.$$

Поскольку разбиения $p = (P, \xi)$, для которых $\lambda(P) < \delta$, составляют элемент B_δ введенной выше базы B в множестве P разбиений с отмеченными точками, то определение 4 равносильно тому, что

$$I = \lim_{B} \Phi(p),$$

т. е. интеграл I есть предел по базе B значений интегральных сумм функции f, отвечающих разбиению с отмеченными точками отрезка $[a, b]$.

Базу B естественно обозначить символом $\lambda(P) \to 0$, и тогда определение интеграла можно переписать в виде

$$I = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ обозначается символом

$$\int_a^b f(x)dx,$$

в котором числа a, b *называются нижним и верхним пределом интегрирования соответственно;* f *— подынтегральная функция,* $f(x)dx$ *— подынтегральное выражение,* x*—переменная интегрирования.*

Итак,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.}$$

Определение 5. Функция f называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a, b]$, если для нее существует указанный в (5) предел интегральных сумм при $\lambda(P) \to 0$ (т. е. если для нее определен интеграл Римана).

Множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, будет обозначаться через $R[a, b]$.

Поскольку пока мы не будем рассматривать другого интеграла, кроме интеграла Римана, условимся для краткости вместо терминов «интеграл Римана» и «функция, интегрируемая по Риману» говорить соответственно «интеграл» и «интегрируемая функция».