MINDS' ACADEMY

Cours : Equation Différentielle

ELABORE PAR : Ouday BenAbid

chap 1 :

"Equation différentielle Linéaire"

I - Vocabulaire et Notation

a) Généralité

* Une équation différentielle (ED) est une égalité où il y a une fonction f, avec sa dérivé première et sa dérivée seconde f'' souvent pour simplifier on écrit y, y', y'' au lieu de $f(x), f'(x)$... C'est plus simple à Ecrire Heinn !!

* Remarque :

On note y mais c'est sous-entendu $y(x)$ où y est une fonction et non pas une Variable.

⇒ Il s'agit donc d'une équation où l'inconnue n'est pas la Variable x mais la fonction y

*

* Résoudre une équation différentielle revient à trouver la ou les fonctions y solution de cette équation.

b) Particularité

* Equation différentielle est dite d'ordre 1 quand l'équation comporte uniquement sa dérivé première (y')

EXP : $y' + 3y = 3x - 2$

$8y' = 8x^3 - 6x + 3$

$-y' = 8\sqrt{x} + |x^2| + 9!$

→ Le terme y n'est pas une obligation

→ Il n'y a pas d'y''

* Une équation différentielle est dite d'ordre 2 si elle comporte le terme y''

EXP : $3y'' = 9\sqrt{x} + 3$

$-y'' + y' + y = |x^3| - 9$

→ La présence de y et y' n'est pas une obligation

c) Le terme LINÉAIRE

* Ces équations sont dites Linéaires car Il n'y a que y, y', y'' et non-pas y^2, $\sqrt{y}$, $\frac{1}{y}$ ou autre

→ Ces équations Ne sont pas linéaires

$(y')^2 - 2y = 4x$

$y' - \frac{1}{y} = e^{5x}$

II - ETude d'une EDL 1 et d'une EDL 2

1) Methodologie

* Cas d'une EDL 1 *

EXP : * et EDL 2 *

$3x - 2y + 4y' = 4 - 8y''$

Etape 1 : On passe les y à gauche et tout le reste à droite (On range dans l'ordre y'', y', y)

$8y'' + 4y' - 2y = 4 - 3x$

ouday.benabid@Esprit.tn

Etape 2 :

*) On divise par le coeff dominant (Celui de y')

→ L'équation devient :

II - Etude d'une équation diff Linéaire (EDL) d'ordre 1

Exp :

$-3x + y = 8y' - 4$

Etape 1 : On passe les y à gauche et le reste à droite.

$$+8y' + y = 3x - 4$$

Etape 2 : On divise par le coefficient dominant (à coté de y')

$$y' + \frac{y}{8} = \boxed{\frac{3}{8}x - \frac{4}{8}}$$

→ Cette étape sert à avoir un coefficient dominant égal à 1 ce qui simplifiera le calcul par la suite

Ouday.Benabid@Esprit.tn

→ Cette partie (à droite) est appelée le second membre.

* Ce second membre sera notée g qui est une fct qui ne dépend que la variable x.

* La forme générale d'une équation diff d'ordre 1 sera donc : $y' + \alpha y = g(x)$

* NB : le coeff α peut être une fonction qu'on note $\alpha(x)$

* On note toujours que le coeff de y' est 1 car on divise toujours par le coeff dominant

VI - Résolution d'une équation

"Principe Générale"

Etape 1 : Résoudre l'équation homogéne

* En appliquant les formules (qu'on va voir à la suite) : La solution y_H est la solution de l'équation homogéne
A noter que y_H comporte des constantes qu'il faudra déterminer.

Etape 2 : trouver une solution Particulière de l'équation totale (c'est à dire avec second membre)
* y_p est la solution Particulière.
* Il y'a plusieurs Methodes pour trouver y_p.

Etape 3 : La solution y cherchée est sous la forme

$$y = y_h + y_p$$

Etape 4 : Trouver les constantes.

4

ERREUR Commise

* Les constantes sont déterminer à partir de l'étape 4 et non pas la 1ère Etape

Remarque Importante

* Si $g(x) = 0$ c.à.d l'équ diff à Résoudre est directement une équ homogéne, on prend $y_p = 0$ alors la solution sera uniquement la solution homogéne.

Equation différentielle lin d'ordre 1 : Solution générale

- Les EDL 1 sont de la forme

$$y' + a y = g(x)$$

ou $y' + \underline{\underline{a(x)}} y = g(x)$

- Etape 1 : Résoudre l'équation homogène

$$y' + a(x) y = 0$$

~~En ssol~~ (A ne pas isoler y) ATTL

Directement :

$$\boxed{y_h = k e^{-A(x)}, k \in \mathbb{R}}$$

où ;

*) k est une cst Réelle à determiner à la 4 ème Etape.

*) A(x) est une Primitive de a(x) : On prends Toujours une constante Nulle.

EXP :

$$y' + 3y = 0$$

ici $a = 3$

$A(x) = 3x$

On applique alors :

$$y = k e^{-3x} \quad \text{où } k = cst$$

Autre exp :

$$7x^3 y - 5y' = 0$$

$$y' - \frac{7}{5} x^3 y = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{-7}{5} x^3$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{-7}{5} x^4$$

$$\Rightarrow y_h = k e^{\frac{7}{5} x^4}$$

III - Etude Equation différentielle Linéaire d'ordre 2 (EDL 2)

Exl :

$3x - 2y + 4y' = 4 - 8y''$

$\hookrightarrow 8y'' + 4y' - 2y = 4 - 3x$

→ Pour l'EDL 2 on ne divise pas sur le coeff dominant donc la forme générale devient : $\boxed{ay'' + by' + cy = g(x)}$

Rq Importante :

* Contrairement au coefficient de l'EDL 1 qui peut être une fct, les a, b, c que nous verrons dans EDL 2 sont des constantes réelles.

IV - Equation Homogène

* Equation homogène = Equation sans second membre
* Equation homogène = Equation générale en remplaçant le second membre par 0 c'est à dire $g(x) = 0$.

Soit :

$y' + ay = 0$

ou

$a\,y'' + by' + cy = 0.$

Ouday.BenAbid@Esprit.tn

III - Etude Equation différentielle Linéaire d'ordre 2 (EDL 2)

Exl :

$$3x - 2y + 4y' = 4 - 8y''$$

$$\hookrightarrow 8y'' + 4y' - 2y = 4 - 3x$$

→ Pour l'EDL 2 on ne divise pas sur le coeff dominant donc la forme générale devient : $\boxed{\alpha y'' + by' + cy = g(x)}$

Rq Importante :

* Contrairement au coefficient de l'EDL 1 qui peut être une fct, les a, b, c que nous verrons dans EDL 2 sont des constantes réelles.

IV - Equation Homogène

* Equation homogène = Equation sans second membre

* Equation homogène = Equation générale en remplaçant le second membre par 0 c'est à dire $g(x) = 0$.

Soit :

$$y' + \alpha y = 0$$

ou

$$\alpha y'' + by' + cy = 0.$$

Ouday . BenAbid@Esprit.tn

5

IV Equation Différentielle d'ordre 2 "Solution Générale"

. Soit

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

Etape 1 : Résolution de l'équation homogène

$$ay'' + by' + cy = 0$$

→ On pose l'équation caractéristique

$$ar^2 + br + c = 0$$

→ A la place de y''

→ A la place de y'

On Calcule $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$

∃ 2 racines r_1 et r_2 réelles

$$y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

Si $\Delta = 0$

∃ un solution double r_0.

$$y = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}$$

λ et μ à déterminer ds la 4ère étape

$\Delta < 0$

∃ 2 solution $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$

tq r_1 et r_2 sont complexes.

Partie $\in \mathbb{R}$

$$y = e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$$

→ $\in \mathbb{C}$

Application

* Résoudre :

•) $y'' - 10y' + 21y = 0$

•) $y'' - 10y' + 25y = 0$