Chapitre I:
Outils fondamentaux pour les probabilités

Module PROBABILITÉS I

4$^{\text{ème}}$ année
DATA Sciences & INFINI

A.U: 2020-2021

esprit
Se former autrement

Introduction

✳ La **théorie des probabilités** constitue un cadre mathématique pour la description du hasard (la chance), ainsi que pour le raisonnement en univers incertain.

✳ Ses concepts, ses méthodes et ses résultats interviennent dans de très nombreux domaines des sciences et des technologies tels que :

- La physique (*mécanique quantique : mouvement des particules*,...).
- La médecine (*la propagation des épidémies*,...).
- L'économie (*marchés boursiers, politiques d'assurance*,...).
- La théorie du signal (*codage, compression, débruitage*,...).
- L'intelligence artificielle (*reconnaissance de formes, réseaux neuronaux*,...).
- ...

Vocabulaire probabiliste

1-**Expérience aléatoire** : C'est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance. Ce résultat est incertain ou inconnu par l'expérimentateur avant que celui-ci n'effectue l'expérience ou ne la subisse.

Vocabulaire probabiliste

1-**Expérience aléatoire** : C'est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance. Ce résultat est incertain ou inconnu par l'expérimentateur avant que celui-ci n'effectue l'expérience ou ne la subisse.

Exemples :

- Lancer d'un dé cubique au "hasard" est une expérience aléatoire et le résultat est l'un des nombres de 1 à 6.
- Lancer une pièce de monnaie est une expérience aléatoire et le résultat est la face Pile (P) ou bien la face Face (F).

Vocabulaire probabiliste

2- **Espace d'états (ou Univers)** : C'est l'ensemble non vide (fini ou dénombrable), noté Ω, de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire qu'on réalise. Chaque élément de Ω est dit une **éventualité (ou issue)** qu'on la note ω.

Vocabulaire probabiliste

2- **Espace d'états (ou Univers)** : C'est l'ensemble non vide (fini ou dénombrable), noté Ω, de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire qu'on réalise. Chaque élément de Ω est dit une **éventualité (ou issue)** qu'on la note ω.

Exemples :

- Lancer d'un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$.
- Relever l'état d'une case mémoire : $\Omega = \{0, 1\}$.
- Interroger un électeur avant un référendum : $\Omega = \{oui, non\}$.
- Compter les clients d'une file d'attente : $\Omega = \mathbb{N}$.
- Observer la durée de fonctionnement d'une machine : $\Omega = \mathbb{R}_+$.
- Observer le nombre d'articles défectueux dans un lot de 15 articles : $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots, 15\}$.

Vocabulaire probabiliste

3- **Un événement** : - C'est tout sous-ensemble de Ω. Également c'est une proposition (propriété) dépendant du résultat d'une expérience aléatoire dont on peut dire si elle est vraie ou non une fois l'expérience est réalisée.

- L'élément $\{\omega\}$ s'appelle un événement élémentaire.

Vocabulaire probabiliste

3- **Un événement** : - C'est tout sous-ensemble de Ω. Également c'est une proposition (propriété) dépendant du résultat d'une expérience aléatoire dont on peut dire si elle est vraie ou non une fois l'expérience est réalisée.

- L'élément $\{\omega\}$ s'appelle un événement élémentaire.

Exemple : Lancer d'un dé, alors :

$$A = \text{"la face apparente du dé est paire"}$$

est un événement.

- On dit qu'un événement A est réalisé au cours d'une expérience lorsque l'issue de celle-ci rend la proposition vraie. c'est-à-dire :

$$A = \{\omega \in \Omega / A \text{ est réalisé si } \omega \text{ est le résultat de l'expérience}\}$$

Vocabulaire probabiliste

4-**Une tribu** :

Soit Ω un ensemble quelconque. On appelle tribu ou $\sigma-$algèbre sur Ω, toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ (l'ensemble de toutes les parties de Ω) tels que :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. $\forall A \in \mathcal{A}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par complémentarité).
3. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ alors $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable) .

Vocabulaire probabiliste

4-Une tribu :

Soit Ω un ensemble quelconque. On appelle tribu ou $\sigma-$algèbre sur Ω, toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ (l'ensemble de toutes les parties de Ω) tels que :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. $\forall A \in \mathcal{A}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par complémentarité).
3. $\forall \left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ alors $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable) .

☞ Une tribu modélise l'information que l'on peut obtenir à partir des résultats de l'expérience.

Exemples :

- Tribu grossière : $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$.
- Tribu des parties (appelée aussi tribu discrète) : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- $\Omega = \mathbb{R}$: Tribu borélienne c'est la tribu engendrée par la classe des intervalles de la forme $]-\infty, x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et on la note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Quelques formules de dénombrement

- **Échantillon sans répétition (Arrangement)** : On tire un par un et sans remise k éléments parmi n d'une population S ($k \leq n$).

$$Card(\Omega) = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Échantillon avec répétitions (Permutation) :** On tire un par un et avec remise k éléments de S.

$$Card(\Omega) = n^k$$

- **Sous population (Combinaison) :** On tire en une fois k éléments de S, $k \leq n$. On obtient ce qu'on appelle une sous population de taille k de S.

$$Card(\Omega) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Quelques formules de dénombrement

Application :

- Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$, quel est le nombre des mots à 3 lettres qu'on peut composer à partir de l'ensemble E ?
- Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen. De combien de manières peut-il répondre ?
- Une classe composée de 19 élèves a reçu 4 billets pour un match de football. Calculer le nombre de façons de distribuer ces 4 billets, sachant que les billets sont numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet ?

Quelques formules de dénombrement

Solution :

- Il y a $5^3 = 125$ mots à 3 lettres.
- Il s'agit de trouver le nombre de possibilités qu'il y a de tirer 7 questions parmi 10, donc $C_{10}^{7} = 120$.
- Le premier billet peut choisir entre 19 élèves, le deuxième billet entre 18 et ainsi de suite, le résultat est $A_{19}^{4} = 93024$.

Espace de probabilité fini

Probabilité sur un ensemble fini :

Soit Ω un ensemble fini. On appelle mesure de probabilité sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ toute application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ tels que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B), \quad \text{si } A \cap B = \emptyset.$

Espace de probabilité fini

Probabilité sur un ensemble fini :

Soit Ω un ensemble fini. On appelle mesure de probabilité sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ toute application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ tels que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B), \quad \text{si } A \cap B = \emptyset.$

Propriétés :

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{r} A_i) = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{P}(A_i)$, si $A_1, ..., A_r$, $r \geq 1$, sont des sous-ensembles de Ω deux à deux disjoints.

☞ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où Ω est un ensemble fini, $\mathcal{A}$ est une tribu et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω s'appelle un **espace de probabilité fini**.

Espace de probabilité fini

Exemples :

(1) Un cas particulier important d'espace de probabilité fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est celui où $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω définie par :$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$
Dans ce cas $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

(2) Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. La masse de Dirac δ_x en $x \in \omega$ est la probabilité définie par $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$ et 0 si $x \notin A$. En d'autre terme $\delta_x(A) = 1_A(x)$.

(3) Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la tribu de ses parties et de la mesure $\mathbb{P} = \frac{1}{6} \sum_{1 \leqslant i \leqslant 6} \delta_i$, (proportionnelle à la mesure de comptage). Cette mesure est une probabilité. Cette probabilité sert à modéliser le jet d'un dé.
Intuitivement, si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité que le jet du dé donne un chiffre appartenant à l'ensemble A. Par exemple $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$ pour tout $i \in \Omega$, et aussi la probabilité de tirer un chiffre paire est $\mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{2}$.

Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle pour les événements

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soient A et B deux événements tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors la probabilité conditionelle de A sachant B, notée $\mathbb{P}(A/B)$, est définie par :

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle pour les événements

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soient A et B deux événements tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors la probabilité conditionelle de A sachant B, notée $\mathbb{P}(A/B)$, est définie par :

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarques :

- Soit B un événement, telle que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
  L'application $\mathbb{P}(./B) : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ définie par : $\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$, $\forall A \in \mathcal{A}$.
  est une probabilité sur $\mathcal{A}$, appelée probabilité conditionnelle de A sachant B, qu'on la note également $\mathbb{P}_B$.
- $\forall B \in \mathcal{A}$ telle que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, l'application $\mathbb{P}_B$ est une nouvelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Probabilité conditionnelle

Système complet d'événements

On dit que la famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements de Ω si elle vérifie les deux critères suivants :

- $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \Omega$.

Probabilité conditionnelle

Système complet d'événements

On dit que la famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements de Ω si elle vérifie les deux critères suivants :

- $\forall i, j \in \mathbb{N},\ A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$.

Formule des probabilités totales

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements tous de probabilité non nulle et B un événement alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i).$$

Application : Une compagnie d'assurance estime que les gens peuvent être répartis en deux classes :

- Ceux qui sont enclins aux accidents 'à haut risque', qui représente 30% de la population.
- Ceux qui sont dits 'à risque modéré'.

Les statistiques de cette compagnie montrent qu'un individu 'à haut risque' a une probabilité de 0.40 d'avoir un accident dans un espace d'un an. Cette probabilité tombe à 0.20 pour les gens 'à risque modéré'.
Quelle est la probabilié qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident durant l'année qui suit la signature de son contrat ?

Solution : Définissons les évènements suivants :

B : " Le nouvel assuré a un accident durant l'année qui suit la signature de son contrat".
A_1 : " Le nouvel assuré est '*à haut risque*' ".
A_2 : " Le nouvel assuré est '*à risque modéré*' ".

En appliquant la formule des probabilités totales (F.P.T), elle entraîne que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B/A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B/A_2)\mathbb{P}(A_2) \\ &= 0.4 \times 0.3 + 0.2 \times 0.7 \\ &= 0.26\end{aligned}$$

Probabilité conditionnelle

Théorème de Bayes

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de Ω alors :

$$\forall B \in \mathcal{A} \; tq \; \mathbb{P}(B) \neq 0, \quad \mathbb{P}(A_i/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

Probabilité conditionnelle

Théorème de Bayes

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de Ω alors :

$$\forall B \in \mathcal{A} \; tq \; \mathbb{P}(B) \neq 0, \quad \mathbb{P}(A_i/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

Indépendance

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et A et B deux événements de $\mathcal{A}$. On dit que A et B sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Probabilité conditionnelle

Théorème de Bayes

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de Ω alors :

$$\forall B \in \mathcal{A} \; tq \; \mathbb{P}(B) \neq 0, \quad \mathbb{P}(A_i/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

Indépendance

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et A et B deux événements de $\mathcal{A}$. On dit que A et B sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

☞ A et B sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$.

Probabilité conditionnelle

Exemple : On jette deux dés, un bleu et un rouge. On considère les évènements ci-dessous :

$A =$ "On obtient un nombre inférieur ou égal à 4 sur le dé rouge".
$B =$ "On obtient un 6 sur le dé bleux".

Une modélisation du tirage des deux dés : $\Omega = \{(i,j) : 1 \leqslant i,j \leqslant 6\}$ muni de la tribu de ses parties et de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

Alors , $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$.
De plus, l'événement $A \cap B = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6)\}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, qui est bien le produit de $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

$\rightarrow$ Les événements A et B sont indépendants.

Variables aléatoires

Définition

On appelle X une variable aléatoire (en abrégé v.a.) de $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ une tribu sur E, toute application mesurable :

$$X : \Omega \to E$$

Variables aléatoires

Définition

On appelle X une variable aléatoire (en abrégé v.a.) de $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ une tribu sur E, toute application mesurable :

$$X : \Omega \to E$$

Propriétés

- Lorsque l'image de Ω par X est un ensemble fini ou infini dénombrable, la v.a est dite discrète.
- Lorsque l'image de Ω par X est un ensemble non dénombrable, la v.a est dite continue.
- Lorsque $E = \mathbb{R}$, la v.a est dite réelle.

Variables aléatoires

Définition

On appelle X une variable aléatoire (en abrégé v.a.) de $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ une tribu sur E, toute application mesurable :

$$X : \Omega \to E$$

Propriétés

- Lorsque l'image de Ω par X est un ensemble fini ou infini dénombrable, la v.a est dite discrète.
- Lorsque l'image de Ω par X est un ensemble non dénombrable, la v.a est dite continue.
- Lorsque $E = \mathbb{R}$, la v.a est dite réelle.

Exemples :

1. Le nombre des bactéries dans 100 ml de préparation.
2. Le nombre des mutations dans une séquence de l'ADN.
3. Le taux du glucose dans le sang...

Loi d'une variable aléatoire

On suppose dorénavant que $E = \mathbb{R}$.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, on appelle loi de probabilité d'une v.a. X, notée $\mathbb{P}_X$, l'application qui a toute partie $B \in \mathbb{R}$ associe :

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

Loi d'une variable aléatoire

On suppose dorénavant que $E = \mathbb{R}$.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, on appelle loi de probabilité d'une v.a. X, notée $\mathbb{P}_X$, l'application qui a toute partie $B \in \mathbb{R}$ associe :

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

☞ $\mathbb{P}_X$ est une mesure de probabilité sur $X(\Omega)$ (c'est l'image de $\mathbb{P}$ par l'application X.)

Définition

Dans le cas d'une v.a **discrète**, la loi de X est déterminée par :

$$\forall B \in X(\Omega), \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x \in B} \mathbb{P}(X = x)$$

Exemple 1 :

* On met au hasard trois boules **distinctes** a, b et c dans trois urnes différentes. L'ensemble des issues possibles est :

$$\Omega = \{(abc|-|-), (-|abc|-), (-|-|abc), (ab|c|-), \cdots\}$$

On a $|\Omega| = 3^3 = 27$ et les issues étant équiprobables, d'où on munit Ω de la probabilité $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{27}$.

* On considère l'événement A= "la première urne contient deux boules, la seconde une boule", qu'on le note par $(2|1|0)$. Alors

$$A = \{(ab|c|-), (ac|b|-), (bc|a|-)\}$$

$$D'où \;\; \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((2|1|0)) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

.

$$\mathbb{P}((3|0|0)) = \mathbb{P}((0|3|0)) = \mathbb{P}((0|0|3)) = \frac{1}{27},$$

$$\mathbb{P}((2|1|0)) = \mathbb{P}((1|2|0)) = \mathbb{P}((2|0|1)) = \mathbb{P}((1|0|2))$$

$$= \mathbb{P}((0|2|1)) = \mathbb{P}((0|1|2)) = \frac{1}{9},$$

$$\mathbb{P}((1|1|1)) = \frac{2}{9}.$$

Exemple 2 :

On met au hasard trois boules **indistinctes** dans trois urnes. L'ensemble des issues possibles est :

$$\Omega = \{(3|0|0), (0|3|0), (0|0|3), (2|1|0), (1|2|0), (2|0|1), (1|0|2),$$

$$(0|2|1), (0|1|2), (1|1|1)\}$$

On ne peut pas munir Ω de la probabilité uniforme mais de la probabilité suivante :

$$(\frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9})$$

Exercice :

On lance deux dés, un rouge et un bleu. L'ensemble des issues possibles est

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),\cdots,(6,6)\} = \{(i,j), 1 \leq i,j \leq 6\}$$

On a $|\Omega| = 6^2 = 36$. Les issues étant équiprobables, on munit Ω de la probabilité $P(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$.

Soient X le résultat du dé rouge, Y le résultat du dé bleu et S la somme. Quelle est la loi de chacune de ces variables aléatoires ?

Fonction de répartition d'une v.a. réelle

Définition

On définit la fonction de répartition $\mathbb{F}_X$ d'une v.a réelle X comme la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathbb{F}_X(x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Fonction de répartition d'une v.a. réelle

Définition

On définit la fonction de répartition $\mathbb{F}_X$ d'une v.a réelle X comme la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathbb{F}_X(x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x), \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propriétés

Soient X une v.a réelle et $\mathbb{F}_X$ sa fonction de répartition alors on a :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq \mathbb{F}_X(x) \leq 1,\ \lim_{x \to +\infty} \mathbb{F}_X(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} \mathbb{F}_X(x) = 0.$
2. $\mathbb{F}_X$ est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *avec* $x \leq y$ *on a* :

$$\mathbb{P}(X \in]x, y]) = \mathbb{P}(x < X \leq y) = \mathbb{F}_X(y) - \mathbb{F}_X(x)$$

4. Deux v.a.r X et Y ont la même loi si et seulement si $\mathbb{F}_X = \mathbb{F}_Y$.

Fonction de répartition d'une v.a. réelle

Définition

La fonction de répartition est définie comme suit :

1. Si X est discrète : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{F}_X(x) = \sum_{\{y \in X(\Omega) \ | \ y \leq x\}} \mathbb{P}(X = y).$
2. Si X est continue et $\mathbb{F}_X$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $\mathbb{F}'_X = f_X$ où f_X est la fonction de **densité de probabilité** de X. (On pourra dire que X est une v.a.r **absolument continue**).

Fonction de répartition d'une v.a. réelle

Définition

La fonction de répartition est définie comme suit :

1. Si X est discrète : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{F}_X(x) = \sum_{\{y \in X(\Omega) \ | \ y \leq x\}} \mathbb{P}(X = y).$

2. Si X est continue et $\mathbb{F}_X$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $\mathbb{F}'_X = f_X$ où f_X est la fonction de **densité de probabilité** de X. (On pourra dire que X est une v.a.r **absolument continue**).

Exercice : Donner la fct de répartition de la v.a.r X qui modélise l'expérience du lancer d'une pièce de monnaie.

Un aperçu sur les lois usuelles

1. Loi de Bernouilli : $X \sim \mathcal{B}(p),\ p \in]0,1[$
   $\mathbb{P}(X=1)=p,\ \mathbb{P}(X=0)=1-p.$
2. Loi Binomiale : $X \sim \mathcal{B}(n,p),\ n \in \mathbb{N}^*,\ p \in]0,1[$
   $\mathbb{P}(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k=\{0,...,n\}.$
3. Loi de Poisson : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$
   $\mathbb{P}(X=k)=\lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!},\ k \in \mathbb{N}.$
4. Loi Uniforme : $X \sim \mathcal{U}[a,b],\ a<b$
   $f_X(x)=\frac{1}{b-a}1_{[a,b]}(x)$
5. Loi Exponentielle : $X \sim \mathcal{E}(\lambda),\ \lambda>0$
   $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}1_{]0,+\infty[}(x).$
6. Loi Normale : $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma),\ (\mu,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}).$

J.Jacod et P.Protter : Probability essentials. Springer 2000.

Yves Coudène : Cours de probabilitées, Master 1. Cours disponible en ligne à l'adresse suivante :
http ://www.math.univ-brest.fr/perso/yves.coudene/probabilites.pdf ;