MINDS' ACADEMY

Cours : Diagonalisation des matrices

Elaboré Par : Ouday BenAbid

I- Introduction

Nous allons voir dans ce chapitre une des principales applications des matrices : la diagonalisation.
La diagonalisation des matrices est en effet très courante dans les exercices ou les sujets portant sur les matrices.
Nous verrons aussi à quoi sert la diagonalisation d'une matrice.
Après une première partie assez théorique axée sur le vocabulaire, nous verrons concrètement comment diagonaliser une matrice, et les vidéos disponibles en fin de chapitre t'aideront encore plus à comprendre !
A noter que pour bien comprendre ce chapitre, il faut déjà maîtriser les bases des matrices

II- Vocabulaire & Notions de Base :

Saches tout d'abord qu'on ne peut diagonaliser que des matrices carrées, donc toutes les matrices que l'on cherchera à diagonaliser seront carrées (on ne le précisera donc pas à chaque fois).

Mais diagonaliser une matrice, qu'est-ce-que cela signifie ?

Si l'on a une matrice M, diagonaliser cette matrice revient à chercher une matrice diagonale D ainsi qu'une matrice inversible P telle que :

$$M = P\,D\,P^{-1}$$

Autrement dit, on cherche une base dans laquelle la matrice M est diagonale.

La matrice P est alors la matrice de changement de base (ce pourquoi elle est inversible).

Les Elements Propres

Les éléments propres sont les valeurs propres, les vecteurs propres et les sous-espaces propres associés aux valeurs propres..

Une valeur propre est un scalaire (souvent un réel) : elle est souvent notée λ.

Un vecteur propre est un vecteur colonne, il est souvent noté X.

Un sous-espace propre est un espace vectoriel, il est souvent noté E_λ s'il est associé à la valeur propre λ.

$$E_\lambda = \{X \text{ dans } M_{n,1}(IR) \;/\; AX = \lambda X\}$$

Une valeur propre ne peut pas exister sans vecteur propre et réciproquement.

En effet, si on a une valeur propre λ associée au vecteur propre X, on a :

$$MX = \lambda X$$

Le vecteur propre et la valeur propre sont reliés par cette égalité.

X est un vecteur propre de M si X ≠ 0 et s'il existe un réel λ tel que MX = λX.

MINDS ACADEMY

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice est appelé le spectre de la matrice.

Le spectre d'une matrice M est noté Sp(M).

Si par exemple les valeurs propres de M sont 6 et 15, on a Sp(M) = {6 ; 15}

Retiens bien tout ce vocabulaire car il ne faut pas tout mélanger !

Nous verrons plus tard comment calculer les valeurs propres, les vecteurs propres et les espaces propres associés, mais voyons d'abord certaines propriétés liées à la diagonalisation.