นายรชพล พงศ์กิตติศักดิ์ B6216184

การบ้านครั้งที่ 4

จาก
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

1) จงหา M (composite tranformation)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta + 0 + 0 & -\sin\theta + 0 + 0 & 0 + 0 + x_r \\ 0 + \sin\theta + 0 & 0 + \cos\theta + 0 & 0 + 0 + y_r \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_r \\ \sin\theta & \cos\theta & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta + 0 + 0 & 0 - \sin\theta + 0 & -x_r\cos\theta + y_r\sin\theta + x_r \\ \sin\theta + 0 + 0 & 0 + \cos\theta + 0 & -x_r\sin\theta - y_r\cos\theta + y_r \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_r(1-\cos\theta) + y_r\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_r(1-\cos\theta) - x_r\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ※

2) จงหา M^{-1}

จาก
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

ใช้วิธีการหาการเลื่อนแบบ inverse โดย ถ้าเลื่อนไป x_r, y_r
ดังนั้นการเลื่อนกลับ คือ $-x_r, -y_r$
ใช้วิธีการหาการหมุนแบบ inverse โดย ถ้าหมุนไป θ
ดังนั้นการหมุนกลับ คือ $-\theta$
และ $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

มีต่อหน้าถัดไป →

จะได้ $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta + 0 + 0 & \sin\theta + 0 + 0 & 0 + 0 + x_r \\ 0 - \sin\theta + 0 & 0 + \cos\theta + 0 & 0 + 0 + y_r \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & x_r \\ -\sin\theta & \cos\theta & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta + 0 + 0 & \sin\theta + 0 + 0 & -x_r\cos\theta - y_r\sin\theta + x_r \\ -\sin\theta + 0 + 0 & 0 + \cos\theta + 0 & x_r\sin\theta - y_r\cos\theta + y_r \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & x_r(1-\cos\theta) - y_r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & y_r(1-\cos\theta) + x_r\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ #

3) อธิบายว่า M^{-1} คือ การทำอะไร

M^{-1} จะเป็นการหมุนย้อนกลับไปในทิศตรงข้ามการหมุนของ M
ซึ่งการหมุนของ M จะหมุนเป็นมุมขนาด θ แต่
การหมุนของ M^{-1} จะหมุนเป็นมุมขนาด $-\theta$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \overbrace{\underset{3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{2}{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}^{M^{-1}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

การหมุนของ M^{-1} เป็นไปตามลำดับ ดังนี้

1. เริ่มจากเลื่อนจุดอ้างอิงการหมุนไปยังจุดกำเนิด
2. ทำการหมุนวัตถุรอบจุดอ้างอิงการหมุนด้วยมุม $-\theta$
3. เลื่อนจุดอ้างอิงการหมุนกลับไปยังตำแหน่งเดิม

$\therefore$ M^{-1} คือ การหมุนย้อนกลับ #