第十二讲：模型预测控制的数值方法

最优控制的智能方法之二

张杰

人工智能学院
中国科学院大学

复杂系统管理与控制国家重点实验室
中国科学院自动化研究所

2017 年 10 月 26 日

Table of Contents

Table of Contents

如何求解模型预测控制？

- 【关键】每个时刻求解开环形式最优控制
- 【上节】无约束线性状态方程、二次性能指标可直接求解！
- 【本节】有约束、非线性等情况如何求解？
  - PMP 得两点边值问题，求解 BVP – 间接法
  - 欧拉的几何方法 – 直接法

MPC 文献

Remark 1 (综述)

- Mayne, David Q., James B. Rawlings, Christopher V. Rao, and Pierre OM Scokaert. "Constrained model predictive control: Stability and optimality." Automatica 36, no. 6 (2000): 789-814.
- Qin, S. Joe, and Thomas A. Badgwell. "A survey of industrial model predictive control technology." Control engineering practice 11, no. 7 (2003): 733-764. (工业)

Table of Contents

泰勒展开

用泰勒公式对函数多项式近似

$$F(x+\Delta x) = F(x) + \Delta x^{\mathrm{T}} \nabla F(x) + \frac{1}{2} \Delta x^{\mathrm{T}} \nabla^2 F(x) \Delta x + \ldots$$

$$\nabla F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}.$$

最优的必要条件（一阶条件）：$\nabla F(x) = 0$

线搜索方法

线搜索方法，Line Search，迭代地通过数值方法求解函数极值：

- 给定：对最优解 $\mathbf{x}$ 的初步估计 $\mathbf{x}_0$
- 迭代：

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k+1} = \widehat{\mathbf{x}}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k \tag{1}$$

其中 α_k 为步长，$\mathbf{d}_k$ 为迭代方向

$\widehat{\mathbf{x}}_{k+1}$ 更接近（甚至达到）最优

最常见搜索步长

- 固定较小步长

$$\alpha_k = \alpha \tag{2}$$

- 衰减至 0 的步长

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k \to 0, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty \tag{3}$$

线搜索方向选择：最速下降法（一阶方法）

泰勒展开 $F(\widehat{\mathbf{x}})$ 得到

$$F(\widehat{\mathbf{x}}_{k+1}) \approx F(\widehat{\mathbf{x}}_k) + \nabla F(\widehat{\mathbf{x}}_k)^T(\widehat{\mathbf{x}}_{k+1} - \widehat{\mathbf{x}}_k) = F(\widehat{\mathbf{x}}_k) + \nabla F(\widehat{\mathbf{x}}_k)^T \alpha_k \mathbf{d}_k \tag{4}$$

假定 $\alpha_k > 0$，若要使得序列单调递减，应有

$$\nabla F(\widehat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{d}_k < 0 \tag{5}$$

只需选择负梯度方向为线搜索方向

$$\mathbf{d}_k = -\nabla F(\widehat{\mathbf{x}}_k)$$

线搜索方向选择：牛顿法（牛顿求根）

函数极值一阶条件，

$$\nabla F(\widehat{\mathbf{x}}) = 0.$$

转化为求函数零点 $c(\widehat{\mathbf{x}}) = 0$，泰勒展开，若“下一步”为零点，

$$0 \approx c(\widehat{\mathbf{x}}_{k+1}) \approx c(\widehat{\mathbf{x}}_k) + \frac{\partial c}{\partial x}(\widehat{\mathbf{x}}_k)(\widehat{\mathbf{x}}_{k+1} - \widehat{\mathbf{x}}_k) \tag{6}$$

其中

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial c_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial c_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial c_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k+1} = \widehat{\mathbf{x}}_k - \frac{\partial c}{\partial x}(\widehat{\mathbf{x}}_k)^{-1} c(\widehat{\mathbf{x}}_k), \quad \mathbf{d}_k = -\frac{\partial c}{\partial x}(\widehat{\mathbf{x}}_k)^{-1} c(\widehat{\mathbf{x}}_k). \tag{7}$$

线搜索方向选择：牛顿法

函数极值一阶条件，

$$\nabla F(\widehat{\mathbf{x}}) = 0.$$

使用牛顿求根公式，

$$0 \approx \nabla F(\widehat{\mathbf{x}}_{k+1}) \approx \nabla F(\widehat{\mathbf{x}}_k) + \nabla^2 F(\widehat{\mathbf{x}}_k)(\widehat{\mathbf{x}}_{k+1} - \widehat{\mathbf{x}}_k) \tag{8}$$

$$\mathbf{d}_k = -\nabla^2 F^{-1}(\widehat{\mathbf{x}}_k)\nabla F(\widehat{\mathbf{x}}_k) \tag{9}$$

拟牛顿法

海塞矩阵计算复杂。拟牛顿法在 x_k 附近考虑 $F(x)$ 的二次逼近

$$\begin{aligned} F(\widehat{\mathbf{x}}_{k+1}) \approx F(\widehat{\mathbf{x}}_k) &+ (\widehat{\mathbf{x}}_{k+1} - \widehat{\mathbf{x}}_k)^T \nabla F(\widehat{\mathbf{x}}_k) \\ &+ \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{x}}_{k+1} - \widehat{\mathbf{x}}_k)^T B_k^{-1}(\widehat{\mathbf{x}}_{k+1} - \widehat{\mathbf{x}}_k) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\widehat{\mathbf{d}}_k = -B_k \nabla F(\widehat{\mathbf{x}}_k) \tag{11}$$

常见的拟牛顿法包括 DFP(Davidon, Fletcher, Powell), BFGS(Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno) 等（可参考袁亚湘《非线性优化计算方法》第四章，或其他最优化、运筹学教材）

等式约束的函数极值——Lagrange 乘子法

$$\min F(x)$$
$$\text{s.t.} f(x) = 0.$$

引入 Lagrange 乘子 $\lambda \in \mathbb{R}^m$,

$$\bar{F}(x, \lambda) = F(x) + \lambda^T f(x). \tag{12}$$

则等式约束情况下 $F(x)$ 取极值的必要条件是

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = 0 \tag{13}$$
$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \lambda} = f(x) = 0. \tag{14}$$

不等式约束函数极值——KKT 条件

定理 1 (不等式约束的函数极值)

不等式约束 $f(x) \leq 0$，求 $F(x)$ 极值。引入拉格朗日乘子 λ

$$\bar{F}(x, \lambda) = F(x) + \lambda^T f(x) \tag{15}$$

$F(x)$ 取极值的必要条件是 Karush-Kuhn-Tucker 条件

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = 0 \tag{16}$$

$$\lambda^T f(x) = 0, \ \lambda \geq 0. \tag{17}$$

若 $f(x) = 0$，称激活约束；若 $f(x) < 0$，称非激活约束

二次规划问题（Quadratic Programming, QP）

问题 1 (二次规划问题)

最小化性能指标

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} F(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - x^T b \tag{18}$$

约束条件为

$$A_1 x = a_1 \tag{19}$$

$$A_2 x \leq a_2 \tag{20}$$

等式约束二次规划

问题 2 (等式约束二次规划)

最小化性能指标

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - x^T b \tag{21}$$

约束条件为

$$Ax = a \tag{22}$$

等式约束二次规划

解：

$$\bar{F}(x,\lambda) = \frac{1}{2}x^T Q x - x^T b + \lambda^T (Ax - a) \tag{23}$$

由 KKT 条件有

$$0 = \nabla_x \bar{F} = Qx - b + A^T\lambda \tag{24}$$

$$0 = Ax - a \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \Rightarrow c(X) = 0 \text{形式，牛顿法求解} \tag{26}$$

激活集法（Active set）不等式约束 *

Remark 2

只需断定哪些约束是激活的即可

- 从一个容许解出发
- 开始迭代：
  - 对给定激活集合解 QP，得到解和拉格朗日乘子
  - 去除不满足 KKT 条件的拉格朗日乘子（小于零）
  - 增加未被满足的约束条件
- 停止迭代

序列二次规划, Sequential Quadratic Programming, SQP

对于一般的目标函数 F、约束 f, g，对 F 和 f,g 泰勒展开

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{x}) &\approx F(\widehat{\mathbf{x}}_k) + (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}_k)^T \nabla F(\widehat{\mathbf{x}}_k) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}_k)^T \nabla^2 F(\widehat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}_k) && (27) \\
f(\mathbf{x}) &\approx f(\widehat{\mathbf{x}}_k) + (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}_k)^T \nabla f(\widehat{\mathbf{x}}_k) && (28) \\
g(\mathbf{x}) &\approx g(\widehat{\mathbf{x}}_k) + (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}_k)^T \nabla g(\widehat{\mathbf{x}}_k) && (29)
\end{aligned}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^n} & (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}_k)^T \nabla F(\widehat{\mathbf{x}}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}_k)^T \nabla^2 F(\widehat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}_k) && (30) \\
\text{s.t.} & f(\widehat{\mathbf{x}}_k) + (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}_k)^T \nabla f(\widehat{\mathbf{x}}_k) = 0 && (31) \\
& g(\widehat{\mathbf{x}}_k) + (\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{x}}_k)^T \nabla g(\widehat{\mathbf{x}}_k) \leq 0 && (32)
\end{aligned}
$$

MATLAB 求解无约束非线性规划

Help on Selection

fminunc

Find minimum of unconstrained multivariable function

expand all in page

Equation

Finds the minimum of a problem specified by

$$\min_{x} f(x)$$

where $f(x)$ is a function that returns a scalar.

x is a vector or a matrix; see Matrix Arguments.

Syntax

```
x = fminunc(fun,x0)
x = fminunc(fun,x0,options)
x = fminunc(problem)
[x,fval] = fminunc(...)
```

Open Help Browser

Press Escape to close

MATLAB 求解有约束非线性规划

Help on Selection

fmincon

Find minimum of constrained nonlinear multivariable function

expand all in page

Equation

Finds the minimum of a problem specified by

$$\min_{x} f(x) \text{ such that } \begin{cases} c(x) \le 0 \\ ceq(x) = 0 \\ A \cdot x \le b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \le x \le ub, \end{cases}$$

b and beq are vectors, A and Aeq are matrices, $c(x)$ and $ceq(x)$ are functions that return vectors, and $f(x)$ is a function that returns a scalar. $f(x)$, $c(x)$, and $ceq(x)$ can be nonlinear functions.

Open Help Browser F1 to toggle focus; Escape to close

Table of Contents

极值原理求解最优控制的过程

Remark 3 (极值原理求解最优控制的过程)

- 构造 Hamiltonian
- 求容许控制极值条件，以协态状态表示最优控制
- 最优控制代入规范方程，得到关于最优状态、协态的微分方程组
- 根据边界条件和初值获得微分方程组的边界条件
- 直接求解或 使用数值方法求解两点边值问题

初值问题 v.s. 两点边值问题

例 1 (初值问题，IVP)

仅在 t_0 有边界条件

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{33}$$
$$\dot{x}_2(t) = \lambda \sinh\left(\lambda x_1(t)\right) \tag{34}$$
$$x_1(0) = 0, x_2(0) = -0.518621. \tag{35}$$

例 2 (两点边值问题，BVP)

在 t_0, t_f 两点都有边界条件

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{36}$$
$$\dot{x}_2(t) = \lambda \sinh\left(\lambda x_1(t)\right) \tag{37}$$
$$x_1(0) = 0, x_1(1) = 1 \tag{38}$$

例子：打靶法

例 3 (直观的例子)

已知 $x(t_f)=x_f$ 但不知 $x(t_0)$，不从 t_f 倒推，要从 t_0 正推！

$$\dot{x}(t)=x(t) \tag{39}$$

$$x(t)=x(t_0)e^{t-t_0} \tag{40}$$

什么初值 $x(t_0)$ 能使得 $x(t_f)=x_f$？假定初值为 x_0，“打靶”误差

$$c(x_0)=x_f-x(t_f)=x_f-x_0e^{t_f-t_0} \tag{41}$$

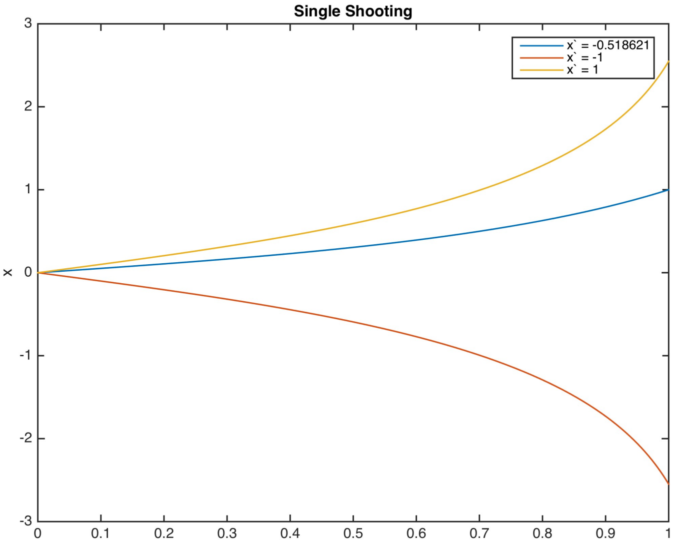
是 x_0 的函数，求解优化问题即可找到合适的初值使 $c(x_0)=0$！

打靶法，Single/Sequential Shooting Method

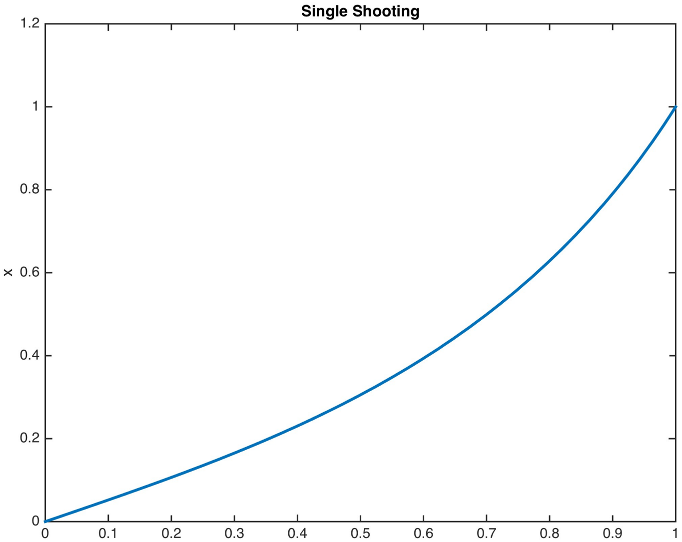
我们将上述过程抽象如下打靶法（单打靶法，顺序打靶法）

- 初始化："猜测"$x_0 = x(t_0)$
- 打靶：求解常微分方程初值问题（IVP），得 $x(t_f; x_0)$
- 得终止时刻的误差：$c(x_0) = x_f - x(t_f; x_0)$
- 使用非线性规划方法求解 $c(x_0) = 0$

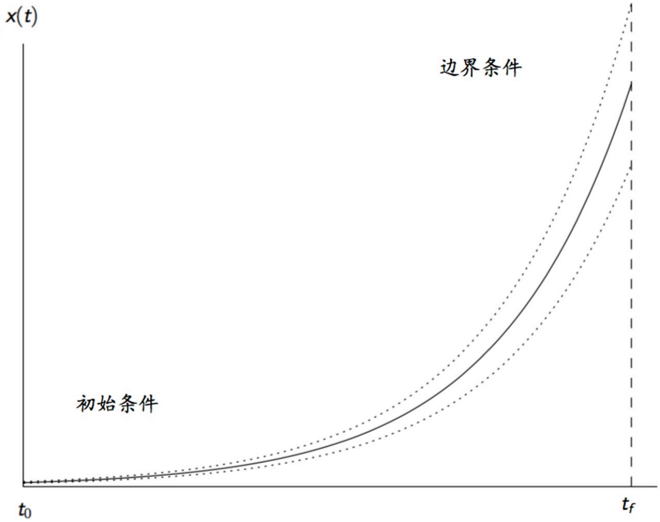
例2: $\lambda = 2.0$ “打靶”（随机选取 $x_2(0)$ 即 $\dot{x}_1(0)$）



例2: $\lambda = 2.0$ 打靶法求解 BVP



例3的误差被放大，打靶法无法处理



单打靶法的问题

Remark 4 (单打靶法的问题)

- 难以处理不稳定的系统（例2中 $\lambda > 2$ 和例3）
- 对高度非线性问题收敛较慢
- 初值猜测太差会导致无解

多重打靶法

单打靶法在较长区间上难以收敛，多重打靶将时间区间分割

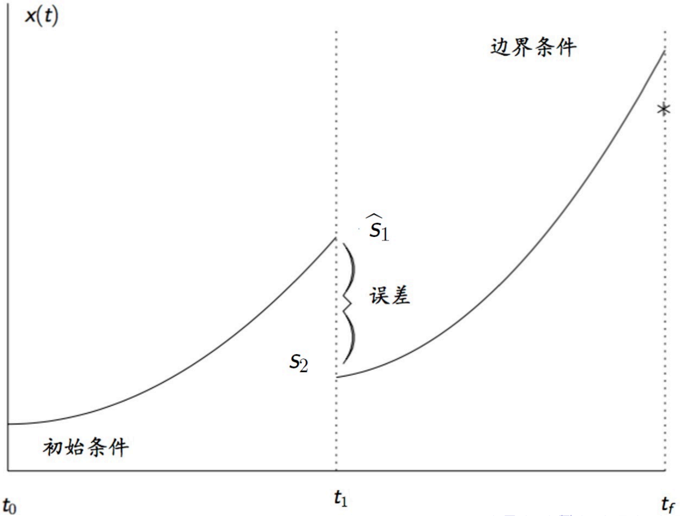
例 4 (多重打靶法)

在一半时间 $t_1 = (t_0 + t_f)/2$ 再立一靶。猜测 t_0 点取值为 $s_1 = x(t_0)$，猜测 t_1 点取值为 $s_2 = x(t_1)$，$s = (s_1, s_2)^T$。于是应满足二维的约束条件

$$0 = c_1(s_1, s_2) = s_2 - s_1 e^{t_1 - t_0} \tag{42}$$

$$0 = c_2(s_1, s_2) = x_f - s_2 e^{t_f - t_1} \tag{43}$$

多重打靶法



多重打靶法，Multiple Shooting Method

将时间轴划分为 $t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = t_f$，则

$$0 = c_1(s) = s_2 - \widehat{s}_1 \tag{44}$$

$$0 = c_2(s) = s_3 - \widehat{s}_2 \tag{45}$$

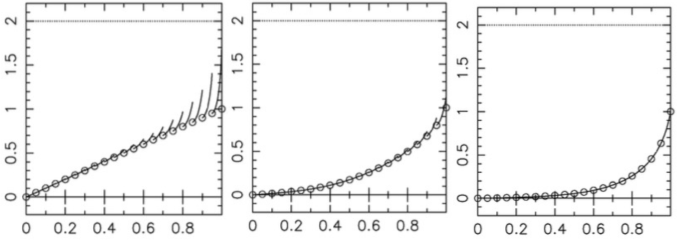
$$\ldots \tag{46}$$

$$0 = c_N(s) = x_f - \widehat{s}_{N-1} \tag{47}$$

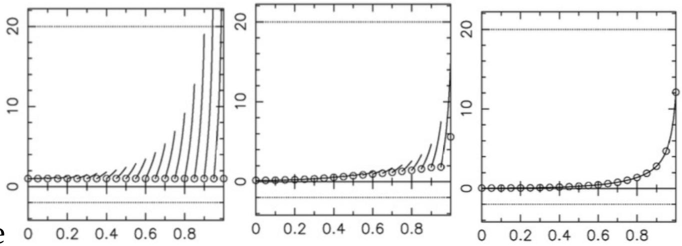
其中 $\widehat{s}_i$ 是第 i 个区间上求解 IVP 问题得到的终值，s_1 的函数

例2: $\lambda = 5.0, N = 20$ 多重打靶法求解边值问题

x_1[0,1]linspace



x_2[0,0]linspace



多重打靶法的优势劣势

Remark 5 (多重打靶法的优势)

- 一般系统均可处理
- 分块使得每个子系统更加线性，收敛更快
- 初值中可运用对轨迹的已知信息

Remark 6 (多重打靶法的劣势)

- 需要猜测整个状态轨迹作为初值

Table of Contents

考察最优控制问题

问题 3 (固定终端时刻的最优控制问题)

$$
\begin{aligned}
&\min_u h(x(T)) + \int_0^T g(x(t), u(t))dt. \\
&s.t. x(0) = x_0 \\
&\quad \dot{x}(t) - f(x(t), u(t)) = 0 \\
&\quad c(x(t), u(t)) \leq 0 \\
&\quad m(x(T)) = 0
\end{aligned}
$$

T 确定

时间依赖可通过增加一维状态（为时间）解决

自由终止时间转化为固定终止时间 *

引入对时间的变换

$$t = \tau T, \tau \in [0, 1]. \quad \bar{x}(\tau) := x(\tau T) = x(t) \tag{48}$$

$$\frac{d}{d\tau}\bar{x}(\tau) = \frac{d}{dt}x(t)\frac{dt}{d\tau} = Tf(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) \tag{49}$$

于是自由终止时间的最优控制问题转化为固定终止时间（1）

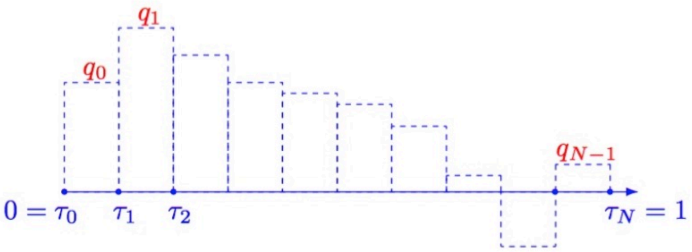
问题 4 (时间变换)

$$\begin{aligned}
&\min_{u,T} h(\bar{x}(1)) + \int_0^1 Tg(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))d\tau. \\
&s.t. \bar{x}(0) = x_0 \\
&\quad \dot{\bar{x}}(\tau) - Tf(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) = 0 \\
&\quad c(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) \le 0 \\
&\quad m(\bar{x}(1)) = 0
\end{aligned}$$

控制参数化

将时间轴划分为 N 份, $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_N=1$,

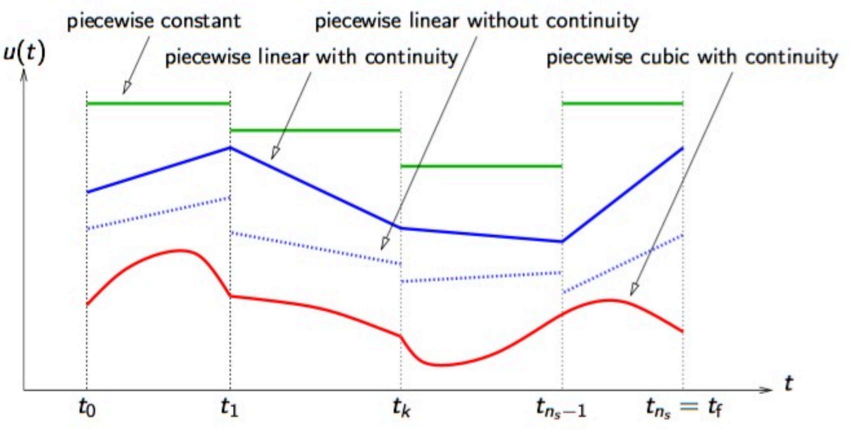
$$u(\tau)=q_i, \tau\in[\tau_i,\tau_{i+1}] \tag{50}$$



用 $q_0,\ldots,q_{N-1}$ 近似控制变量

控制参数化

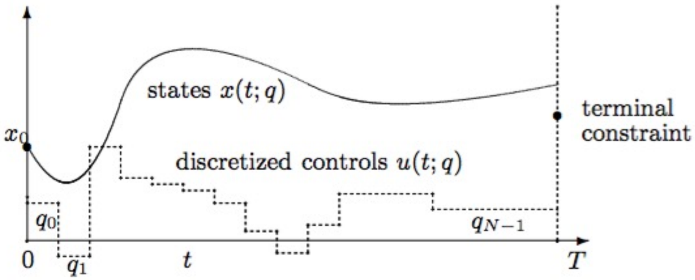
可使用更加自由的参数化方式，分段函数、神经网络或模糊系统



直接法求解：直接序列打靶法

利用打靶法，可将最优控制问题转化为非线性规划问题

- 自变量为控制 $u(t;q)$ 的参数 q
- 状态 $x(t;q)$ 可表示为 q 的函数（常微分方程数值解）



直接打靶法的非线性规划问题

问题 5 (直接打靶法的非线性规划问题)

控制参数化、状态变量使用 IVP 数值解，原最优控制问题转化为

$$\begin{aligned}\min_q F(q) =& h(x(T;q)) + \int_0^T g(x(t;q),u(t;q))dt.\\ & s.t. c(x(t_i;q),u(t_i;q)) \leq 0, i = 0,\ldots,N\\ & m(x(T;q)) = 0\end{aligned}$$

使用序列二次规划（Sequential Quadratic Programming）求解形如下式的方程

$$\min_q F(q) \quad \text{s.t.} g(q) \leq 0, \quad f(q) = 0. \tag{51}$$

例子：直接打靶法解最优控制

例 5 (直接打靶法解最优控制)

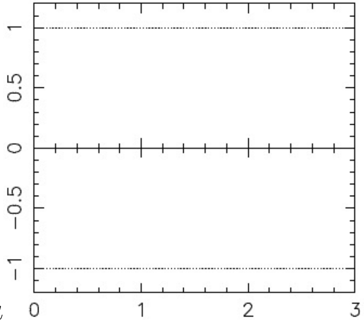
$$\begin{aligned}
&\min_u \int_0^3 [x^2(t) + u^2(t)]dt \\
&\text{s.t.} \dot{x} = (1+x)x + u, x(0) = 0.05 \\
&-1 \le x \le 1 \\
&-1 \le u \le 1
\end{aligned}$$

固定终值 $x(3) = 0$

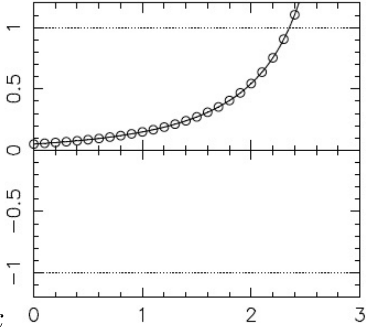
取 $N = 30$，均分 $[0,3]$。初始估计 $q_i = 0$

直接打靶法解最优控制 1/8

迭代 $k = 0$



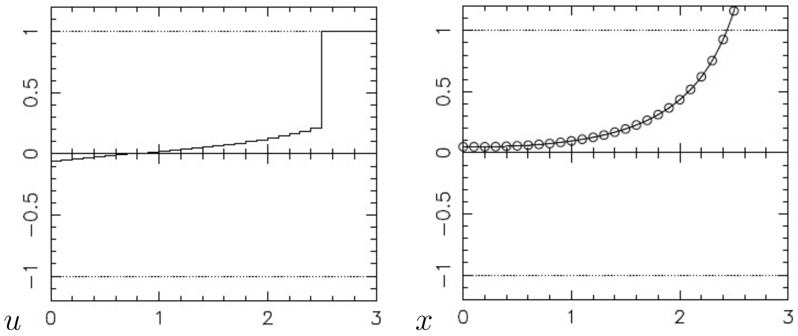
u



x

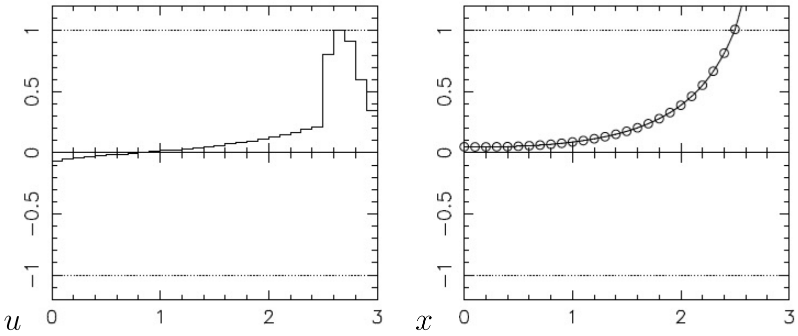
直接打靶法解最优控制 2/8

迭代 $k=1$



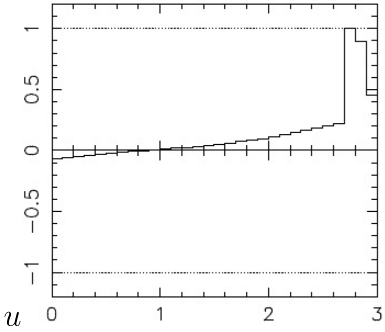
直接打靶法解最优控制 3/8

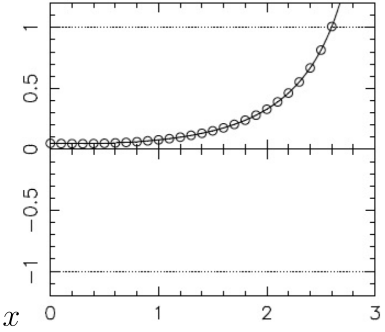
迭代 $k = 2$



直接打靶法解最优控制 4/8

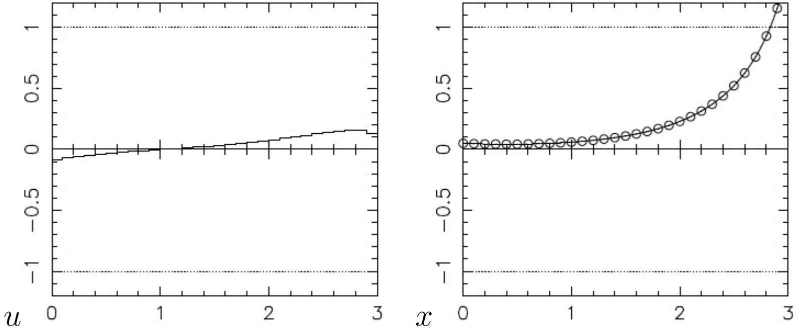
迭代 $k = 3$





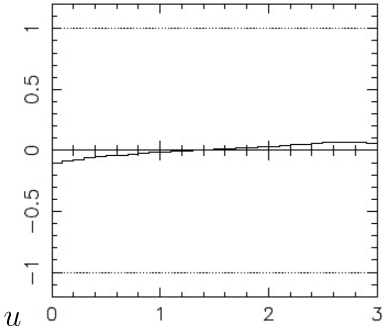
直接打靶法解最优控制 5/8

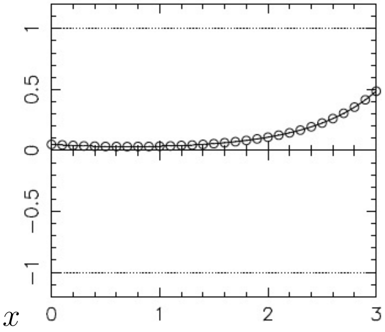
迭代 $k = 4$



直接打靶法解最优控制 6/8

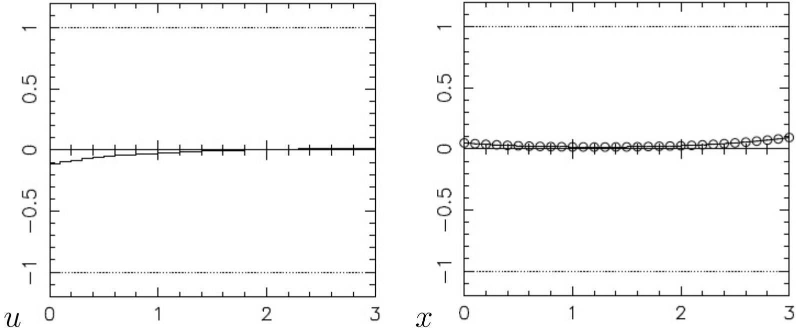
迭代 $k = 5$





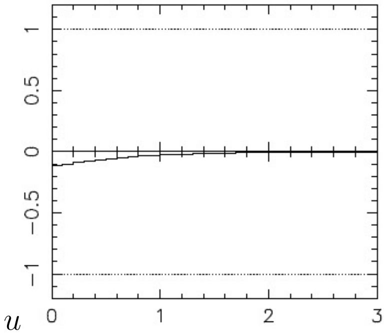
直接打靶法解最优控制 7/8

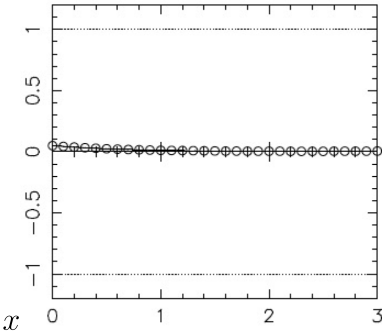
迭代 $k = 6$



直接打靶法解最优控制 8/8

迭代 $k=7$

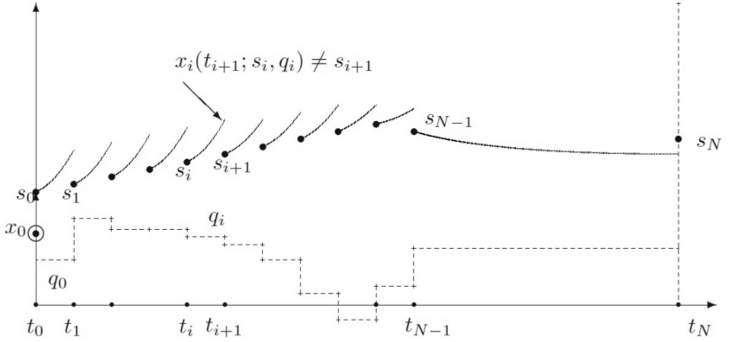




直接法求解：直接多重打靶法

多重打靶，将区间划分为多段

- 增加对每个区间初值的猜测 $x(t_i) = s_i$
- 控制 $u(t;q) = q_i, t \in [t_i, t_{i+1}]$
- 状态 $x(t;s,q), t \in [t_i, t_{i+1}]$ 依然使用 IVP 求解



直接多重打靶法的非线性规划问题

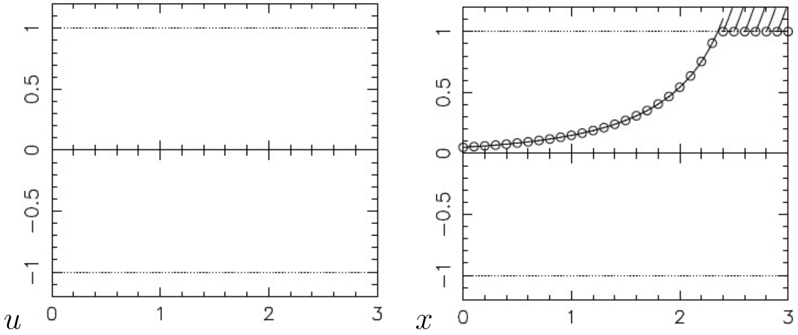
问题 6 (直接多重打靶法的非线性规划问题)

原最优控制问题转化为非线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min_q F(q) = & h(x(T;q_N)) + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(x(t;s_i,q_i),q_i)dt. \\
& s.t. c(x(t_i;s_i,q_i),q_i) \leq 0, i = 0,\dots,N \\
& m(x(T;q_N)) = 0 \\
& s_0 = x_0 \\
& s_{i+1} - x_-(t_{i+1};s_i,q_i) = 0
\end{aligned}
$$

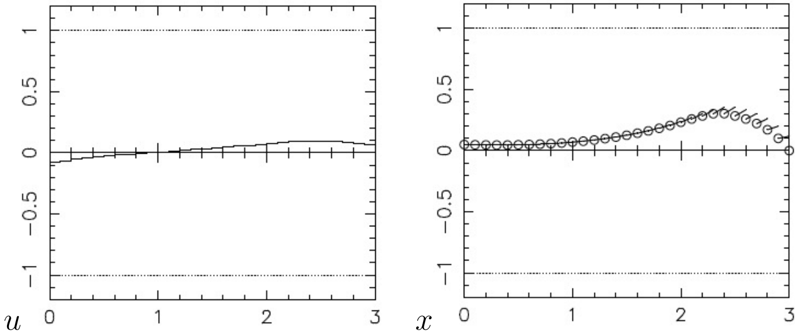
直接多重打靶法解最优控制 1/4

迭代 $k=0$，q_i 初始化为零，s_i 初始化为 IVP 解在 $[-1,1]$ 的限制



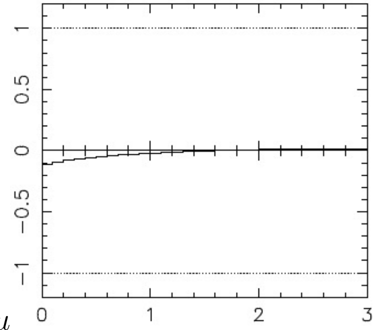
直接多重打靶法解最优控制 2/4

迭代 $k = 1$

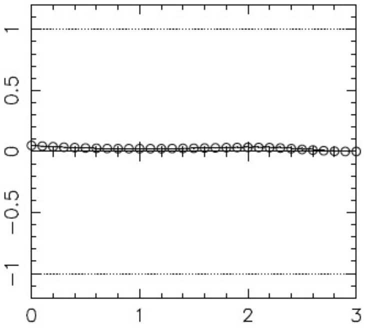


直接多重打靶法解最优控制 3/4

迭代 $k = 2$



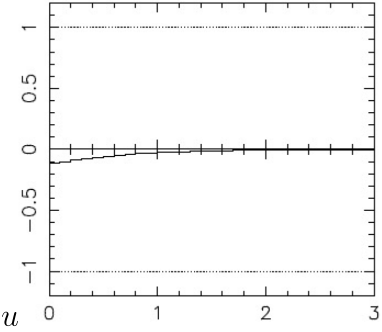
u

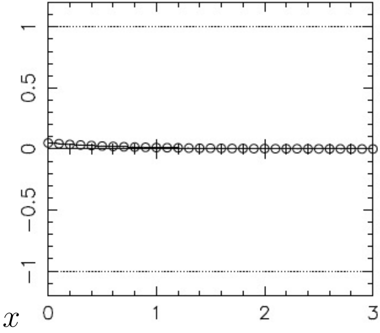


x

直接多重打靶法解最优控制 4/4

迭代 $k = 3$





直接打靶法的优势劣势

Remark 7 (直接打靶法的优势)

- 充分利用现代非线性规划技术
- 初值中可运用对轨迹的已知信息
- 尚未收敛的解也很可能是容许的

Remark 8 (直接打靶法的劣势)

- 需要猜测整个状态轨迹作为初值
- 容易收敛到局部最优，非最优控制

Table of Contents

非线性预测控制求解方法

- 使用间接法求解最优控制问题
- 使用直接法求解最优控制问题

线性模型使用非线性预测方法

例 6 (线性模型使用非线性预测方法)

状态方程

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{52}$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + u \tag{53}$$

$t_0 = 0, t_f = 10$，初始状态 $(1, 1)$。约束条件

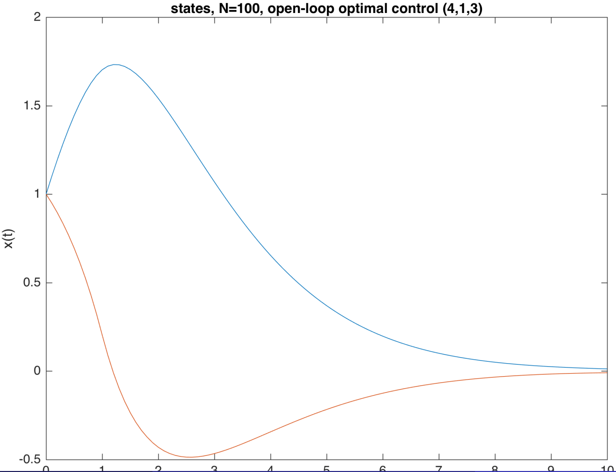
$$|u(t)| \leq 1.5 \tag{54}$$

最小化性能指标

$$J(u) = \frac{h}{2} x_2^2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [\frac{q}{2} x_1^2(t) + \frac{r}{2} u^2(t)] dt \tag{55}$$

使用直接序列打靶法求解最优控制 1/2

Figure: $q = 1, r = 3, h = 4$ 状态



使用直接序列打靶法求解最优控制 2/2

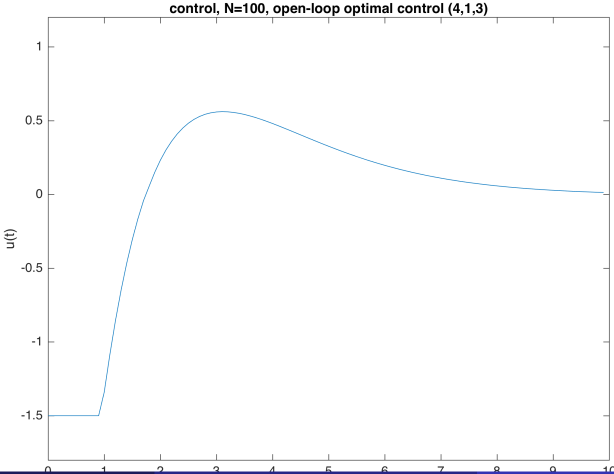
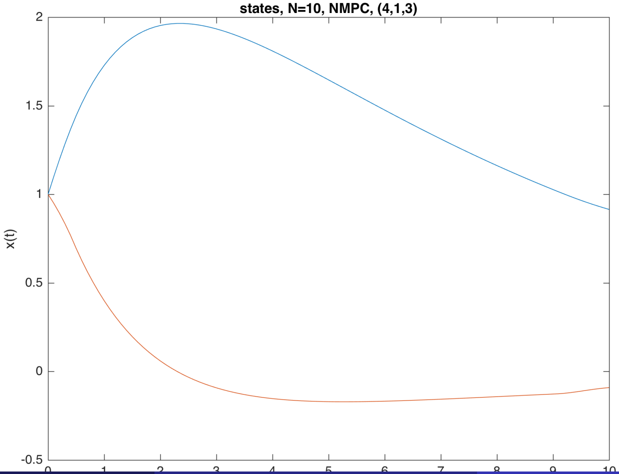


Figure: $q = 1, r = 3, h = 4$ 控制，单次计算 9.934s

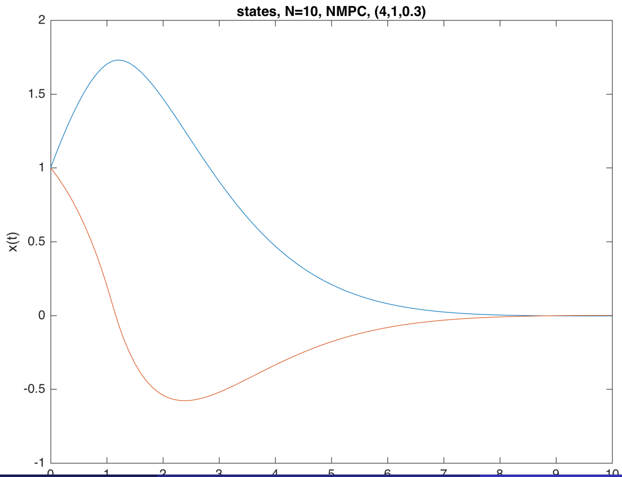
使用直接序列打靶法求解预测控制 1/2

Figure: $q = 1, r = 3, h = 4, T = 1$ 失败!



使用直接序列打靶法求解预测控制 2/2

Figure: 设计性能指标 $q=1, r=0.3, h=4, T=1$



模型预测控制的优势

- 灵活的预测模型
  - 连续模型/离散模型
  - 线性模型/非线性模型
- 善于处理约束
  - 控制变量约束
  - 状态变量约束
- 通过求解开环控制获得近似的闭环控制(弥补了极值原理和直接法数值方法不是闭环的缺陷)

模型预测控制相对于经典最优控制的缺陷

发生下列情形之一则性能指标下降或控制目标难以精确达到

- 预测时段过短
- 预测模型不够精确
- 开环控制求解耗时过长
- 开环控制求解不够精确或求解失败

Table of Contents

```matlab
opts = optimoptions('fmincon','Algorithm','sqp');
q = fmincon(@obj,q0,[],[],[],[],[],[],@nonlcon,opts);

    function J=obj(q)
        J = dt * 0.5 * ( q * q' );
    end
    function [c,ceq] = nonlcon(q)
        X = zeros(2,N+1);
        X(:,1)=[-2  1]';
        for i=1:N
            X(:,i+1) = X(:,i) + dt * f(X(:,i),q(i));
        end
        c = [];
        ceq = X(:,N+1);
    end
    function dxdt = f(x,u)
        dxdt = [ x(2)
                 u ];
    end
```