第一讲：最优控制问题介绍

最优控制介绍之一

王飞跃

人工智能学院
中国科学院大学

复杂系统管理与控制国家重点实验室
中国科学院自动化研究所

2017 年 9 月 12 日

关注：微信号“国科大最优控制”
课程微信群“国科大最优控制 2017”

国科大最优控制2017

该二维码7天内(9月15日前)有效，重新进入将更新

Table of Contents

Table of Contents

教课的三阶段

1. 开始

   “滴水见大海”

   3 次课把最优控制核心问题，概念和方法用简单的例子讲清

2. 过程

   横看成岭侧成峰，远近高低各不同。
   不识庐山真面目，只缘身在此山中。

   展开讲最优控制的数学理论和智能方法，不断与第一阶段内容回联

3. 结果

   荡胸生层云，决眦入归鸟。
   会当凌绝顶，一览众山小。

   把第一阶段的问题，概念，方法回头"一网打尽"。学生做一个 Course Project，以实际应用加计算仿真重走一遍

课时和学分

- 从第二周（9.12）开始上课
- 每周二、周四上午三四节
- 周二在教 2-105，周四在教 2-104
- 共计 20 次，40 课时，2 学分

作业和考试

- 每周 1-2 次作业
  公众号 (国科大最优控制) 和课程网站 (parallelcontrol.com) 发布（择一即可，帐号和信息共享），课前提交作业
- 课程设计或文献阅读报告自选其一
- 11 月末闭卷期末考试

成绩

- 随堂测验 + 作业 + 学习资料阅读：40
- 课程设计 / 文献阅读报告：20
- 考试：40

课程内容

- 最优控制的数学理论
  - 经典变分法
  - 庞特里亚金极值原理
  - 动态规划方法
  - 微分博弈
- 最优控制的智能方法
  - 强化学习与自适应动态规划
  - 模型预测控制
  - 模糊控制
  - 平行控制与平行学习
- 最优控制应用
  - 课程设计/文献阅读报告

授课团队

- 王飞跃教授，中科院自动化所
- 王立新教授，中国科学院大学
- 张杰副研究员，中科院自动化所
- 助教：王雨桐

预备知识

- 微积分
- 基本的常微分方程
- 基本的线性代数
- 基本的 MATLAB 编程

上课时间表

	周二	周四
第 2 周	I-1. 最优控制问题介绍	I-2. 最优控制问题介绍
第 3 周	I-3. 最优控制的数学理论	I-4. 最优控制的智能方法
第 4 周	II-1. 变分基础	II-2. 变分求解最优控制
第 5 周	- 国庆放假 -	- 国庆放假 -
第 6 周	II-3. 极小值原理	II-4. 动态规划
第 7 周	II-5.HJB 方程	II-6.LQR 和微分博弈
第 8 周	III-1. 最优控制的数值方法	III-2. 模型预测控制
第 9 周	III-3. 强化学习基础	III-4. 深度强化学习
第 10 周	III-5. 自适应动态规划基础	III-6. 模糊逻辑与模糊系统
第 11 周	III-7. 模糊控制	IV-1. 平行控制 / 课堂辩论
第 12 周	IV-2. 最优控制回顾	- -
第 13 周	考试（学院安排，待定）	- -

教材与课件

- 上课课件可于公众号【国科大最优控制】注册下载
- 《最优控制: 数学理论与智能方法》上册，清华大学出版社，2017

工具

- 一套课件
- 一本讲义
- 一个 app（微信公众号，同学查收提交作业）
- 一个网站（老师批阅作业，了解学生情况）
- 一个微信群（师生交流、答疑）

2015 年度最优控制课程纪念册

文字整理自同学们在微信群中的留言

> “教学三境界”——第一次接触到这般教学思想，从整体到局部，再从局部回归整体。如今课程结束，那些知识却深深地印在脑海之中。

> 几位老师给我们描绘了一幅控制的完美历史画卷，张老师说他喜欢这种“历史的厚重感”，敢问又有哪位同学能不被这么美妙的“历史”所吸引。在这种强烈的兴趣下我也相信每位同学都愿意深入这门课程去探索科学的真谛。

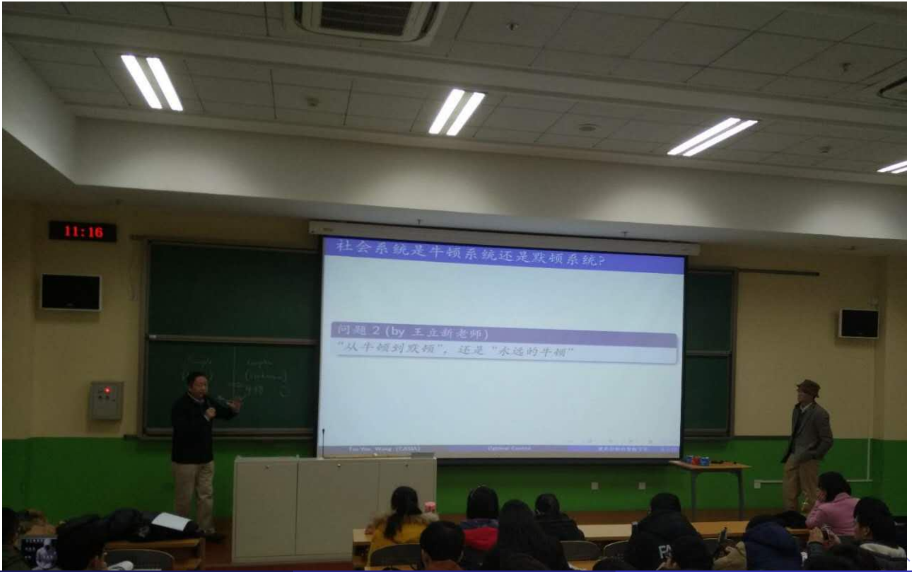
2015 年度最优控制课程纪念册

文字整理自同学们在微信群中的留言

最优控制理论是我十几年的求学过程中上过的最优质的课程。课程内容既扎根本质又放眼前沿,“高大上”的微信公众平台也让我得以随时了解课堂讯息，全面、客观的考核方式更是让我真正做到了“平时努力学，考试轻松过”。

在怀柔国科大，有幸能上“最优控制理论”这门课，遇到那么棒的老师，认识一群那么棒的同学，是我这辈子，学生时代，最美好的回忆!

2016 年课堂辩论：牛顿系统 v.s. 默顿系统



2016 年课后游湖

Table of Contents

早期自动控制：瓦特与麦克斯韦

- 1787 年，瓦特离心式调速器在蒸汽机转速控制上得到普遍应用，真正出现研究控制理论的需求
- 1868 年，英国科学家麦克斯韦（J.C. Maxwell）首先解释了瓦特速度控制系统中出现的不稳定现象，指出不稳定现象的出现同由系统导出的一个代数方程根的分布形态有密切的关系，开辟了用数学方法研究控制系统中运动现象的途径

稳定：Routh

- 少年时跟随 Augustus De Morgan 学习，决定从事数学研究
- 著有 Dynamics of a System of Rigid Bodies (1860, 6th ed. 1897)，影响了 Felix Klein 等
- 1876, Routh–Hurwitz theorem，判定是否多项式的根都在左半平面
- 1877, Routh–Hurwitz stability criterion, linear time invariant (LTI) 系统稳定性

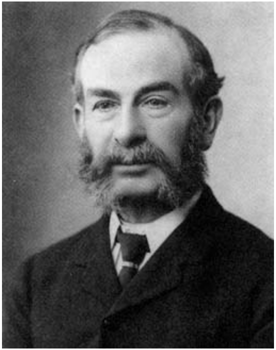


Figure: 英国数学家，现代控制系统的先驱

稳定：李亚普诺夫

- 李雅普诺夫，1857-1918，俄国著名的数学家、力学家。毕业于圣彼得堡大学，师从数学家切比雪夫
- 1892 年，博士论文“运动稳定性的一般问题”(The General Problem of the Stability of Motion, 1892)。提出了李亚普诺夫第一、二方法。可用于线性系统和非线性时变系统的分析与设计

控制论的诞生

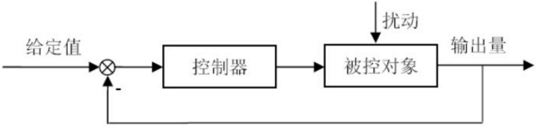
- 维纳（N. Wiener）1948 年
- 《控制论，或关于在动物和机器中控制和通讯的科学》(Cybernetics or Control and Communication in the animal and the machines)
- “以机器的实际演绩而非以其预期演绩为依据的控制就是反馈”

经典控制理论

- 经典控制理论的研究对象是单输入、单输出线性定常系统
- 以传递函数为系统数学模型，采用频率响应法和根轨迹法等图解分析方法，分析系统性能和设计控制装置。数学基础是拉普拉斯变换
- 主要研究系统运动的稳定性、频率域中系统的运动特性、控制系统的设计原理和校正方法
- 代表性的控制方法是 PID （Proportional, Integratal and Differential）

经典自动控制理论

闭环控制系统



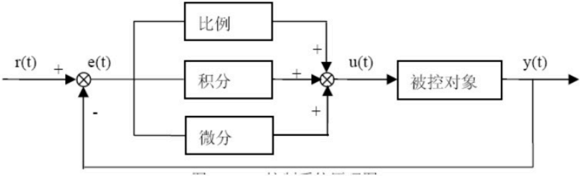
控制律为

$$u(t) = K_P[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(t)dt + T_D\frac{de(t)}{dt}]$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s)$$

PID控制器



最优控制问题

问题 1 (最优控制问题)

1. 被控对象的状态方程为

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \ x(t_0) = x_0.$$

2. 容许控制, $u \in \mathcal{U}, \ x \in \mathcal{X}.$
3. 目标集, $x(t_f) \in \mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = [t_0, \infty) \times \{x(t_f) \in \mathbb{R}^n : m(x(t_f), t_f) = 0\}$$

4. 求最优控制，以最小化性能指标

$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) \, \mathrm{d}t.$$

Table of Contents

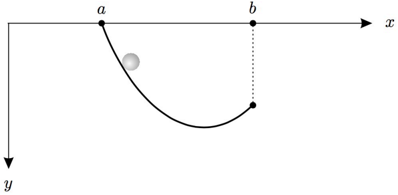
“第一个最优控制问题”：最速降线问题

1696 年，Johann Bernoulli 向欧洲数学家提出最速降线问题挑战，牛顿、莱布尼兹、洛必达、雅各布和他自己都给出了答案

例 1 (最速降线问题, Brachistochrone Curve Problem)

质点在重力作用下，从一个给定点 $a=(0,0)$ 到不在它垂直下方另一点 $b=(1,-1)$, 不计摩擦力，沿着什么曲线滑下所需时间最短

有动态系统，解运动轨迹，使消耗时间最小



最速降线问题转化为变分问题

设质量 m 的质点在 (x, y) 的滑动速度 v，根据物理学定律可知：

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gy}. \tag{1}$$

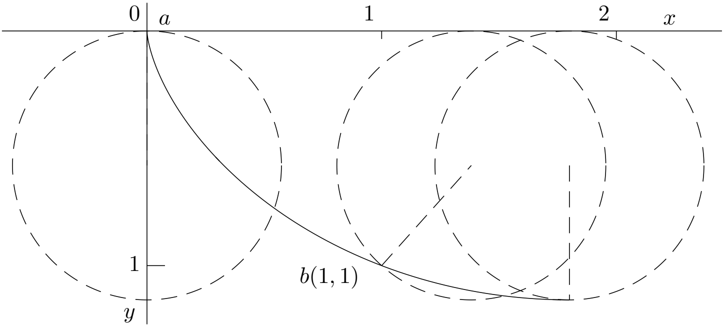
划过弧长 $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}dx$ 需时为距离除以速度

$$dt = \frac{dl}{v} = \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}dx}{\sqrt{2gy}} \Rightarrow T = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{\sqrt{2gy}}dx.$$

使用变分法可求得最优解

$$x(\alpha) = r[\alpha - \sin\alpha],\ y(\alpha) = r[1 - \cos\alpha].$$

最速降线问题的解：旋轮线



$a=(0,0)$, $b=(1,1)$，可得待定系数 $r\approx 0.573$，

$$x(\alpha)=r[\alpha-\sin\alpha],\ y(\alpha)=r[1-\cos\alpha].$$

Dido 女王的等周问题

例 2 (等周问题, Isoperimetric Problem)

传说 Dido 女王在北非岸边向当地国王购买“一张牛皮之地栖身”。她把牛皮做成 4 千米长的细条，沿岸围成圆弧建立了迦太基城

尽管古人智慧已知给定弧长，圆形围成的面积最大，其基于微积分的推导直到 1701 年才由雅各布 · 伯努利给出

等周问题作为变分问题

曲线 $y(x)$ 经过 x 轴上两个预先给定的点 $a=(-1,0)$ 和 $b=(1,0)$。在曲线长度为 $L=10\pi/3$ 的约束条件下，确定 $y(x)$ 使其与 x 轴围成的面积最大

考虑一个参数方程 $x(t), y(t)$ 描述围成的曲线

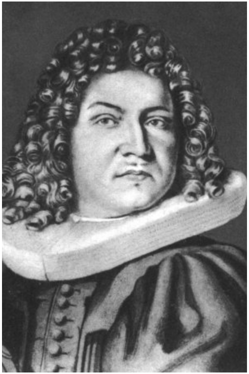
$$S=\int_{t_0}^{t_f}\frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})dt, \tag{2}$$

$$\text{s.t.} \int_{t_0}^{t_f}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=L, \tag{3}$$

$$x(t_0)=x_0=1, y(t_0)=y_0=0, \tag{4}$$

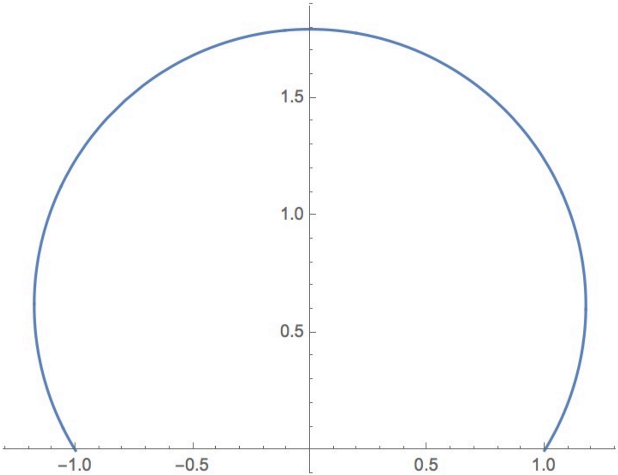
$$x(t_f)=x_f=-1, y(t_f)=y_f=0. \tag{5}$$

有积分等式约束-(3) 的变分问题



雅各布·伯努利

等周问题的解



$$x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 4, y \geq 0.$$

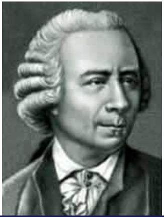
欧拉：最简变分问题

例 3 (最简变分问题)

求 $x(t):[t_0,t_f]\to\mathbb{R}^n$，满足 $x(t_0)=x_0$, $x(t_f)=x_f$，最小化：

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f} g(x(t),\dot{x}(t),t)\,\mathrm{d}t, \tag{6}$$

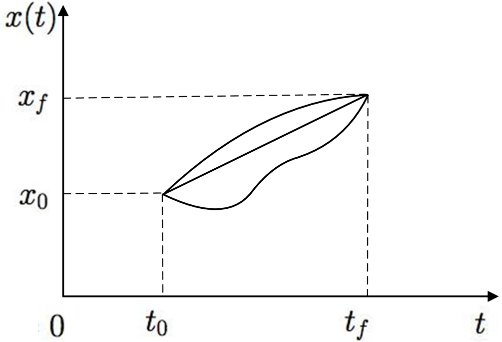
其中函数 g 取值于 $\mathbb{R}$，二阶连续可微，J 是从 $[t_0,t_f]\to\mathbb{R}^n$ 的连续可微函数全体到 $\mathbb{R}$ 的映射，是一个泛函。



- 1740-1744 年，Leonhard Euler 提出了变分问题的几何解法
- 1755 年，19 岁的 Joseph-Louis Lagrange 给出不依赖于几何结构的分析，其提出的方法被 Euler 称为“变分法, calculus of variations”

欧拉-拉格朗日方程

- 最优解满足欧拉-拉格朗日方程
- 变分问题中一般考察连续可微或分段连续可微的函数



必要条件：状态 x 满足微分方程

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t),t)-\frac{d}{dt}[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t),t)]=0$$

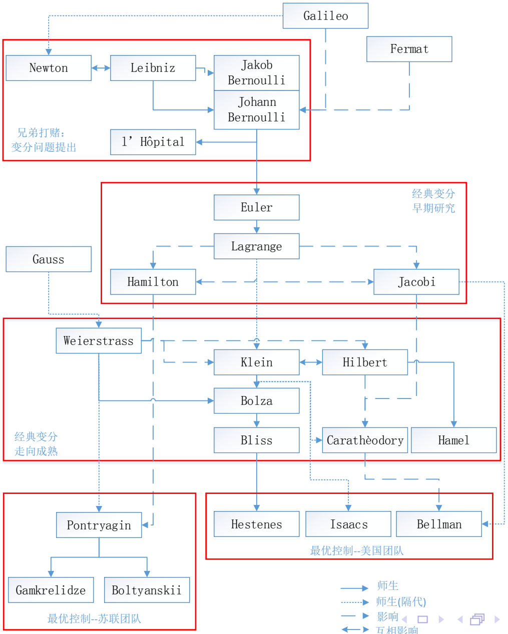

Galileo
Fermat
Newton
Leibniz
Jakob Bernoulli
Johann Bernoulli
兄弟打赌：
变分问题提出
l' Hôpital
经典变分
早期研究
Euler
Lagrange
Gauss
Hamilton
Jacobi
Weierstrass
Klein
Hilbert
Bolza
Bliss
Carathèodory
Hamel
经典变分
走向成熟
Pontryagin
Gamkrelidze
Boltyanskii
最优控制--苏联团队
Hestenes
Isaacs
Bellman
最优控制--美国团队
师生
师生(隔代)
影响
互相影响

Table of Contents

最优控制问题

回顾一下最优控制问题的四个要素

问题 (最优控制问题)

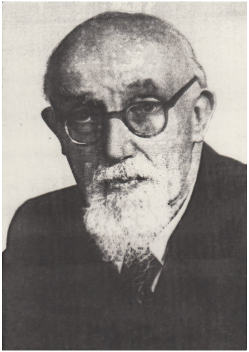
1. 被控对象的状态方程为
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),\ x(t_0) = x_0.$$
2. 容许控制, $u \in \mathcal{U}, x \in \mathcal{X}$.
3. 目标集, $x(t_f) \in \mathcal{S}$
$$\mathcal{S} = [t_0, \infty) \times \{x(t_f) \in \mathbb{R}^n : m(x(t_f), t_f) = 0\}$$
4. 性能指标
$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t), \mathrm{d}t.$$

最优控制问题的早期探索

- 1919 年，美国火箭先驱 Robert Hutchings Goddard 提出：以让火箭达到指定最高速度为控制目标，如何设计火箭上升时的控制策略，才能最小化需要携带的燃料
- 其中有明确的性能指标（燃料最省）、控制目标（给定速度）和状态方程，是一个典型的最优控制问题
- Goddard 最初的数学模型有误，未能给出合理解答，他提出的问题却倍受关注

“不连续”的变分问题

- 1927 年，希尔伯特的学生德国数学家 Georg Hamel 重新建模了 Goddard 的问题
- 以位置 $s(t):[t_0,t_f]\to\mathbb{R}^n$ 为状态变量；以速度 $u(t):[t_0,t_f]\to\mathbb{R}^m$ 为控制变量
- Hamel 考虑了非常精简的模型，将所需初始燃料推导为求性能指标 M 最小化的变分问题



“不连续”的变分问题

Band 7, Heft 6
Dezember 1927　　Vorträge des Kissinger Versammlung　　451

11. Über eine mit dem Problem der Rakete zusammenhängende Aufgabe der Variationsrechnung.

Von G. HAMEL in Berlin.

Läßt man einen starren Körper von der augenblicklichen Masse M unter der Wirkung der Schwere, des Luftwiderstandes W und der Reaktionswirkung ausströmender Materie (also eine Rakete) in die Höhe steigen, so erhält man aus dem Newtonschen Grundgesetz der Mechanik und dem Gesetz der Massenerhaltung die Differentialgleichung

$$M\frac{du}{dt} + C\frac{dM}{dt} + W(s, u) + Mg = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dabei ist s der Weg, t die Zeit, $u = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit, C die relative Ausströmgeschwindigkeit der Raketenfüllung.

Es sind folgende Vernachlässigungen gemacht: 1. In Anbetracht dessen, daß man nur Höhen von 100 bis 200 km erreichen will, ist g konstant genommen. 2. In W ist der Einfluß der ausströmenden Masse fortgelassen. 3. Die Aenderung des Impulses im Innern der Rakete durch Fortschreiten der Brennfläche (oder Aehnliches) ist als belanglos weggelassen. 4. Von der Erdrotation ist abgesehen.

M_e sei die Endmasse, M_α die Anfangsmasse. Gegeben seien: M_e, die gesamte Steighöhe h, ferner die Anfangsgeschwindigkeit u_α zur Zeit $t_\alpha = 0$, $s_\alpha = 0$, die konstante Ausströmgeschwindigkeit C. Gefragt ist nach dem Minimum von M_α, der Anfangsmasse.

Diese Aufgabe wurde von Goddard[1]) gestellt und zu lösen versucht, aber mit anfechtbaren mathematischen Hilfsmitteln. Sie soll hier mit den Mitteln der Variationsrechnung gelöst werden.

Aufgefaßt als lineare Differentialgleichung in M, läst sich Gl. (1) integrieren und nach Einsetzen der Endwerte nach M_α auflösen:

$$\boxed{M_\alpha = e^{-\frac{u_\alpha}{c}} \int^{t_e} \frac{1}{c} W(s, u) \cdot e^{\frac{u}{c} + \frac{gt}{c}} dt + M_e\, e^{-\frac{u_\alpha}{c} + \frac{u_e}{c} + \frac{gt_e}{c}}}$$

“不连续”的变分问题

- Hamel 首次发现:“由于燃尽时空气阻力不连续，上述问题超出了经典变分的范围”
- 对于面向实际问题的控制任务，性能指标和控制变量等经常难以保证连续和可微的性质，早期完美的数学世界与“不连续”的现实世界之间出现了鸿沟
- 很遗憾，Hamel 引入了与工程实践不符的假设，未解决这一问题

最优控制问题的早期探索

- 1951 年，钱学森先生在该问题迈出重要一步。对空气阻力与速度线性相关及呈二次关系的两种特殊情况给出最优控制
- 考察了控制变量有界情况：

$$M_1 \leq u(t) \leq M_2,\ t \in [t_0, t_f].$$

- 1944 年，前苏联火箭专家 Dmitry Okhotsimsky 解决了 Goddard-Hamel 问题的一个特殊情况
- 经多年努力，他和 Timur Eneev 为 1957 年第一颗成功发射的人造卫星斯普特尼克 1 号设计了控制轨迹

最优控制问题的早期探索往往是针对 具体问题 尝试解决最优控制 “不连续” 以及 有界 给经典变分带来的困扰