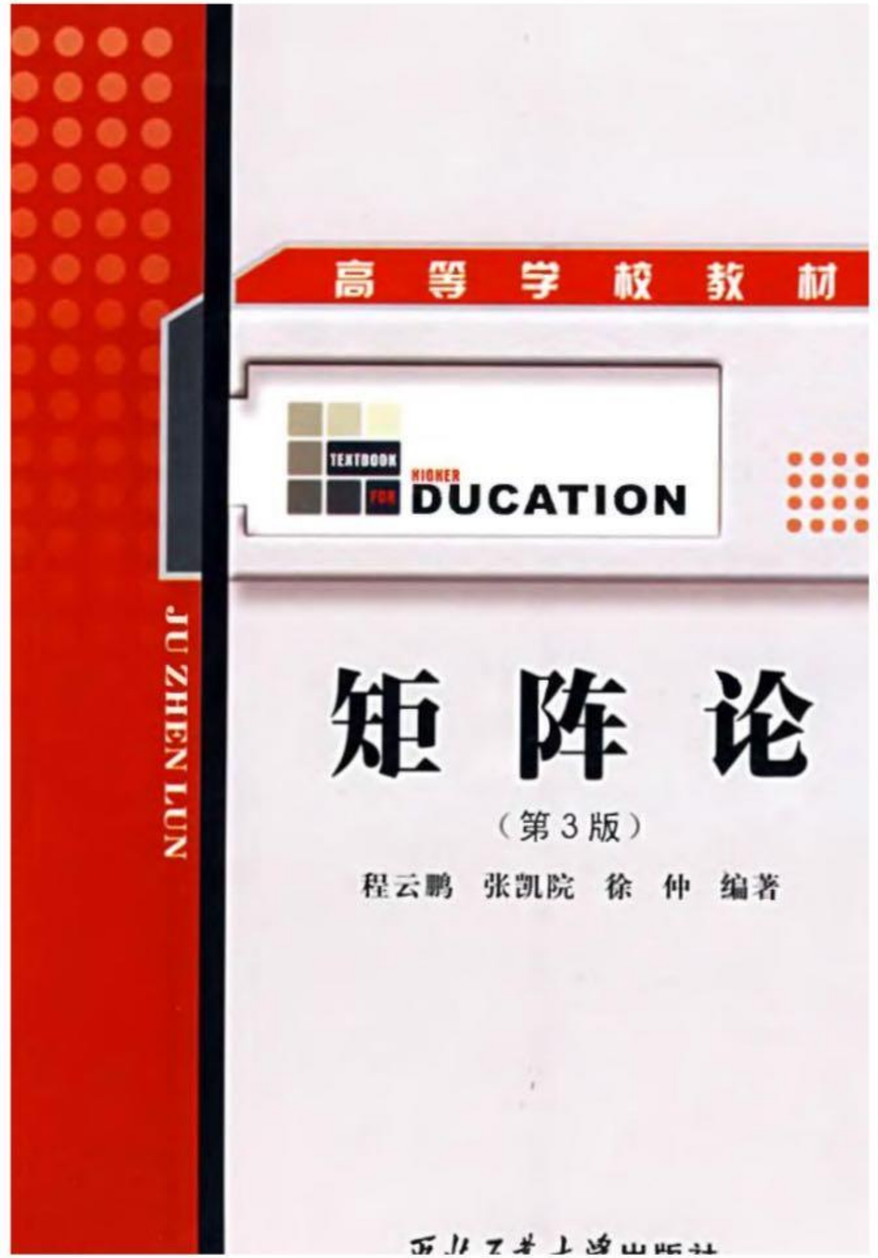
矩阵论

教材

- 第4版或第3版
- 略有差异
- 微信分享第3版



目录

1. 线性空间与线性变换
2. 范数理论及其应用
3. 矩阵分析及其应用
4. 矩阵分解
5. 特征值的估计及对称矩阵的极性
6. 广义逆矩阵
7. 若干特殊矩阵类介绍*

60课时　4*15周

授课方式：

1、PPT+录播+讨论（网络）

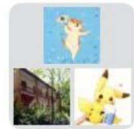
2、PPT+讲授+讨论（现场）

考核方式：

1、期中开卷测试（4.13 周一）　50%

2、期末闭卷测试（6.01 周一）　50%

课程微信群：



矩阵论2020

10:30-12:10

录播~75分钟

讨论~25分钟

该二维码7天内(2月23日前)有效，重新进入将更新

教师：张世华 zsh@amss.ac.cn

助教：张 瑞、张文豪

第一章　线性空间与线性变换

1.1　线性空间

一. 集合与映射

1. 集合

集合：作为整体看的一堆东西.

集合的元素：组成集合的事物.

设S表示集合，a表示S的元素，记为$a \in S$, 读为a属于S;

用记号$a \notin S$表示a不属于S.

集合的表示：(1) 列举法

(2) 特征性质法 $M = \{a \mid a\text{具有的性质}\}$

例如 $P = \{(x, y) \mid x + 2y = 1\}$

空集合：不包含任何元素的集合，记为 ϕ

子集合：设 S_1与S_2 表示两个集合，如果集合 S_1 的元素都是集合 S_2 的元素，即 $\forall a \in S_1 \Rightarrow a \in S_2$ ，那么就称 S_1是S_2 的子集合，记为

$$S_1 \subset S_2 \text{ 或 } S_2 \supset S_1$$

假子集 vs **真子集**：

相等：如果 $S_1 \subset S_2$且$S_1 \supset S_2 \Rightarrow S_1 = S_2$

$$\forall a \in S_1 \Leftrightarrow a \in S_2$$

集合的交： $S_1 \cap S_2 = \{x | x \in S_1 且 x \in S_2\}$

集合的并： $S_1 \cup S_2 = \{x | x \in S_1 或 x \in S_2\}$

集合的和： $S_1 + S_2 = \{x + y | x \in S_1, y \in S_2\}$

例如

$$\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\{1,2,3\} + \{2,3,4\} = \{3,4,5,6,7\}$$

两集合的和集概念不同于其并集概念！

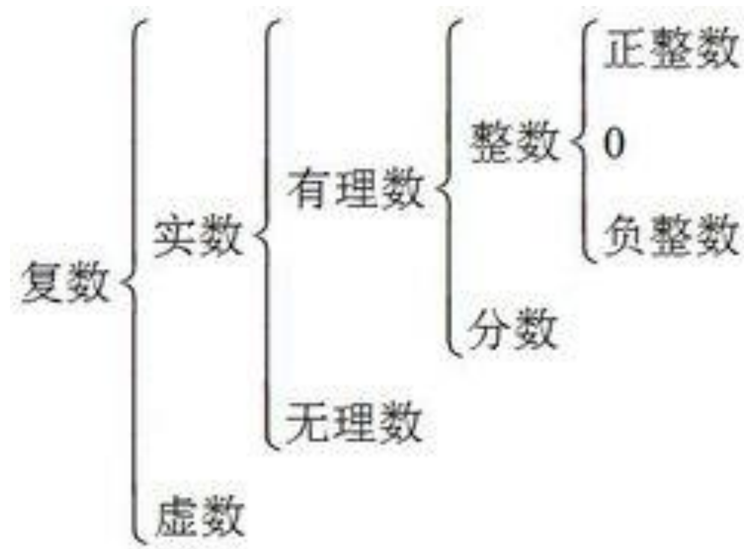
2. 数域

数域：是一个含0和1, 且对加，减，乘，除（0不为除数）**封闭的数集.**

例如：有理数域Q，实数域R，复数域C.

整数集呢？偶数集？

结论：任何数域都含有理数域。



3. 映射

映射：设S 与S' 是两个集合，一个法则（规则）$\sigma: S \to S'$，它使S中的每个元素a 都有S'中一个确定的元素 a' 与之对应，记为

$$\sigma(a) = a' \text{或} a \to a'$$

σ称为集合S到 S' 的**映射**，a' 称为a 在映射 σ 下的**象**，而a 称为 a' 在映射σ下的一个**原象**.

变换：S到S自身的映射.

单射：设σ：$S\to S'$, 如果对$a\neq b$,则$\sigma(a)\neq\sigma(b)$,则称σ为单射； 即$\sigma(a)=\sigma(b)$，则$a=b$.

满射：设σ：$S\to S'$,如果S'中的每个元素都有原像，则称σ为满射.

例如：
$$\sigma_1(\boldsymbol{A})=\det\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\in \mathrm{K}^{n\times n}$$
$$\sigma_2(a)=a\boldsymbol{I},a\in \mathrm{K}$$
$$\sigma_3(f(t))=f'(t),f(t)\in P_n$$
其中P_n是次数不超过n的实系数多项式的集合。

相等：设 σ_1 与 σ_2 都是集合 S 到 S' 的映射，如果对于 $\forall a \in S$ 都有 $\sigma_1(a) = \sigma_2(a)$，则称 $\boldsymbol{\sigma_1}$ 与 $\boldsymbol{\sigma_2}$ 相等，记为 $\boldsymbol{\sigma_1 = \sigma_2}$.

乘法：设 σ, τ 依次是集合 S 到 S_1，S_1 到 S_2 的映射，乘积 $\tau\sigma$ 定义如下：

$$(\tau\sigma)(a) = \tau(\sigma(a)),\ a \in S$$

$\tau\sigma$ 是 S 到 S_2 的一个映射.

注：$\tau\sigma \neq \sigma\tau$，$\mu(\tau\sigma) = (\mu\tau)\sigma$（$\mu$ 是 S_2 到 S_3 的映射）

二. 线性空间及其性质

线性空间的概念 是某类事物从量的方面的一个抽象

（I）所有实n维向量的集合R^n

（II）多项式集合P_n：多项 式加法及实数与多项式乘法封闭

（III）所有n阶实矩阵集合R^{nxn}

二. 线性空间及其性质

定义1.1 设V 是一个非空集合，它的元素用x, y, z等表示，K是一个数域，它的元素用k, l, m等表示，如果V满足下列条件：

（I）在V中定义一个加法运算，即当$x, y \in V$时，有唯一的和 $x+y \in V$，且加法运算满足

(1) $(x+y)+z=x+(y+z)$ 结合律

(2) $x+y=y+x$ 交换律

(3) 存在**零元素0**, 使$x+0=x$

(4) 存在**负元素**，即对$x \in V$，存在向量$y \in V$，$x+y=0$，则称y为x的负元素，记为$-x$；

（II）在 V 中定义数乘运算，即当$x\in$**V**，$k\in$**K**时，有唯一的 $kx\in$**V**，且数乘运算满足

$$(5)\quad k(x+y)=kx+ky \qquad \text{数因子分配律}$$

$$(6)\quad (k+l)x=kx+lx \qquad \text{分配律}$$

$$(7)\quad k(lx)=(kl)x \qquad \text{结合律}$$

$$(8)\quad 1x=x.$$

则称 V 为数域**K**上的线性空间或向量空间.

当 K＝R 时，称为实线性空间；

当 K＝C 时，称为复线性空间.

例1.5 设R^+为所有正实数组成的数集，其加法与乘法运算分别定义为

$$m \oplus n = mn,\ \ k \circ m = m^k$$

证明R^+是R上的线性空间.

证 对$\forall a,b \in \mathrm{R}^+, \forall k \in \mathrm{R}$,有$a \oplus b = ab \in \mathrm{R}^+, k \circ a = a^k \in \mathrm{R}^+$

(1) $(a \oplus b) \oplus c = abc = a \oplus (b \oplus c)$;

(2) $a \oplus b = ab = b \oplus a$;

(3)$a \oplus 1 = a, 1 \in \mathrm{R}^+$是零元素；

(4) $a \oplus \dfrac{1}{a} = 1$,所以$\dfrac{1}{a} \in \mathrm{R}^+$是$a$的负元素；

$$(5)\quad k\circ(a\oplus b)=(ab)^k=a^kb^k=(k\circ a)\oplus(k\circ b);$$

$$(6)\quad (k+l)\circ a=a^{k+l}=a^ka^l=a^k\oplus a^l=(k\circ a)\oplus(l\circ a)$$

$$(7)\quad (lk)\circ a=a^{lk}=(a^k)^l=(k\circ a)^l=l\circ(k\circ a)$$

$$(8)\quad 1\circ a=a.$$

故R^+是R上的线性空间。

定理1.1 线性空间V有唯一的零元素，任一元素也有唯一的负元素.

证 设0_1，0_2是V的两个零元素，由于

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

所以零元素唯一.

设元素x有两个负元素x_1, x_2，由于

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = x_2$$

所以任意元素有唯一负元素. 证毕

利用负元素，定义V中向量的减法为：

$$x - y = x + (-y)$$

可以证明如下性质：

$$\text{若}\boldsymbol{x} \in \mathrm{V}, k \in \mathrm{K}, \text{则} 0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, k\mathbf{0} = \mathbf{0}, (-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}.$$

零元素0

定义　如果$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \cdots, \boldsymbol{x}_m$为线性空间V中的$\boldsymbol{m}$个向量，且存在数域K中一组数$c_1, c_2, \cdots, c_m$，使$\boldsymbol{x} \in \mathrm{V}$

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{x}_m$$

则称$\boldsymbol{x}$为向量组$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m$的线性组合，也称向量$\boldsymbol{x}$可由$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m$线性表示.

定义　对于$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m \in \mathrm{V}$，如果存在不全为零的$m$个数$c_1, c_2, \cdots, c_m$使得$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m = 0$则称向量组$x_1, \cdots, x_m$线性相关，否则称其为线性无关.

定义1.2 如果$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}$中的$\boldsymbol{m}$个元素且满足

(1) $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m$线性无关；

(2) $\forall \boldsymbol{x}\in \mathrm{V}$可由$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m$线性表示。

则 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 称为V的一个**基**。

m称V的维数，记 $\dim V=m.$

维数为m的线性空间V记V^m，

当 $m=+\infty$ 时，称为无限维线性空间.

例如　对 $\mathrm{C}^n, \mathrm{R}^n, \mathrm{K}^{m\times n}, \mathrm{P}_n$ ，有

$$\dim \mathrm{C}^n = n, \dim \mathrm{R}^n = n, \dim \mathrm{K}^{m\times n} = mn, \dim \mathrm{P}_n = n+1$$

例如 如果**V=C**，**K=R**，则 $\dim \mathrm{V} = 2$

如果**V=C**，**K=C**，则 $\dim \mathrm{V} = 1$

维数与所选的数域相关

定义1.4 设线性空间V^n的一个基 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$， $\boldsymbol{x}\in \mathrm{V}^n$

$$\boldsymbol{x}=\xi_1\boldsymbol{x}_1+\xi_2\boldsymbol{x}_2,\cdots,+\xi_n\boldsymbol{x}_n$$

则称 $\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_n$ 为$\boldsymbol{x}$ 在该基下的坐标，记为

$$(\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}$$

定理1.2 设 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 是V^n的一个基， $\boldsymbol{x}\in \mathrm{V}^n$
则$\boldsymbol{x}$可唯一的表示成 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 的线性组合.

三. 基变换与坐标变换

设 $x_1,\cdots,x_n$(基 I), $y_1,\cdots,y_n$ (基 II)是V^n的两个基，则

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \cdots + c_{n1}x_n \\ y_2 = c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{n2}x_n \\ \vdots \\ y_n = c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n \end{cases}$$

或矩阵形式 $\quad (y_1,\cdots,y_n) = (x_1,\cdots,x_n)\boldsymbol{C}$

其中矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由基 I 到基 II 的过渡矩阵. 上式称为基变换公式.

设 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{V}^n$在基 I 与基 II 下的坐标分别为

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}} \text{与} (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^{\mathrm{T}}$$

即

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2 \cdots, x_n)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

所以 $$x = (x_1, x_2 \cdots, x_n)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

则有 $$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^{\mathrm{T}}$$

此式称为**坐标变换公式**.

例1.7 在 R^n中，已知向量 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的坐标为 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}$，求向量 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 下的坐标 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$，其中

$$\boldsymbol{x}_1=(1,1,\cdots,1),\boldsymbol{x}_2=(0,1,\cdots 1),\cdots,\boldsymbol{x}_n=(0,\cdots,0,1)$$

解　因为

$$(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases}\eta_1=\xi_1\\ \eta_i=\xi_i-\xi_{i-1}\ \ (i=2,3,\cdots,n)\end{cases}$$

例1.8 已知矩阵空间$K^{2\times2}$的两个基

$$(\mathrm{I})\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{II})\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

求基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵.

解　采用中介基方法.　引入$K^{2\times 2}$的简单基（Ⅲ）

$$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$$

则 $$(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{C}_1$$

$$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{C}_2$$

其中

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以有 $(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2$

于是得由基（Ⅰ）到基（Ⅱ）的过渡矩阵

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&1&1&1\\0&1&1&1\\2&2&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

四. 线性子空间

定义1.5 设$\mathbf{V_1}$是数域K上的线性空间V的一个非空子集合，且对已有的线性运算满足

(1) 如果$\boldsymbol{x} \in V_1, k \in K$，则$k\boldsymbol{x} \in V_1$

(2) 如果$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_1$，则$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V_1$

则称$\mathbf{V_1}$为V的线性子空间或子空间.

如果 $V_1 = V$或φ，则V_1称为平凡子空间；否则称为非平凡子空间.

生成(或张成)子空间：

设 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是线性空间V的一组向量，则集合

$$\mathrm{V}_1 = \{k_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{x}_m | k_i \in \mathrm{K}, i = 1,2,\cdots,m\}$$

是V的线性子空间，称为由 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 生成的子空间，记为

$$\mathrm{L}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m) = \{k_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{x}_m | k_i \in \mathrm{K}, i = 1,2,\cdots,m\}$$

结论： $\dim \mathrm{V}_1 = \mathrm{rank}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m), \dim \mathrm{V}_1 \le \dim \mathrm{V}$

定义1.6 设$A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$，以 $\boldsymbol{a}_i(i=1,\cdots,n)$ 表示A的第 i 个列向量，称子空间$L(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 为矩阵A的值域，记为

$$R(\boldsymbol{A})=L(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$$

结论：(1) $R(\boldsymbol{A})\subset \mathrm{R}^m$ (2) $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\dim R(\boldsymbol{A})$

(3) $R(\boldsymbol{A})=\left\{\boldsymbol{Ax}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in \mathrm{R}^n\right\}$

定义1.7 设$A=(a_{ij})\in \mathrm{R}^{m\times n}$，称集合 $\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{Ax}=0\right\}$ 为A的核空间（零空间），记为$N(A)$. A的核空间的维数称为A的零度，记为$n(A)$，即

$$n(\boldsymbol{A})=\dim N(\boldsymbol{A})$$

例1.9 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}$的秩与零度.

解 rank$A$=2，n(A)=3-2=1

结论:（1）rank$A$+n(A)=A的列数；

（2）$n(\boldsymbol{A})-n(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=(\boldsymbol{A}$的列数）-（$\boldsymbol{A}$的行数）

定理1.3 设W 是数域K上的线性空间V^n 的一个m维子空间，$x_1, x_2, \cdots, x_m$是W的基，则这m个基向量必可扩充为 V^n 的一个基.

证　当$n-m=0$时，定理成立. 假定$n-m=k$时,定理成立，当$n-m=k+1$时，由于$x_1, x_2, \cdots, x_m$ 不是V^n 的基，则在V^n 中至少有一个向量 x_{m+1}不能由$x_1, x_2, \cdots, x_m$ 线性表示，所以 $x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}$ 线性无关，子空间 $L(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1})$ 是$m+1$维的.

因为 $n-(m+1)=n-m-1=k$ ，由归纳假设 $L(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1})$的基可以扩充为$V^n$ 的一基.

证毕

例 判断$\mathbf{R}^{2\times2}$的下列子集是否构成子空间：

(1) $V_1=\{A \mid \det A=0,\ A\in\mathbf{R}^{2\times2}\}$

(2) $V_2=\{A \mid A^2=A,\ A\in\mathbf{R}^{2\times2}\}$

(3) $V_3=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a=b, c=d, a,b,c,d\in\mathbf{R}\right\}$

五. 子空间的交与和

定理1.4 如果 V_1, V_2是数域K上的线性空间V的两个子空间，那么$V_1 \cap V_2$也是V 的子空间.

证 $\forall \alpha, \beta \in V_1 \cap V_2$, 有

$$\alpha \in V_1, \alpha \in V_2, \beta \in V_1, \beta \in V_2$$

所以 $\alpha+\beta \in V_1$， $\alpha+\beta \in V_2$， 进而 $\alpha+\beta \in V_1 \cap V_2$

同理 $k\alpha \in V_1 \cap V_2$， 所以 $V_1 \cap V_2$ 是V的子空间.

证毕

定义1.8 设 V_1,V_2 都是V的子空间，则集合

$$\{z \mid z = x + y, x \in V_1, y \in V_2\}$$

称为V_1与V_2的和，记为V_1+V_2

定理1.5 如果 V_1,V_2 都是V的子空间，那么V_1+V_2也是V的子空间.

证明 $\forall \alpha,\beta \in V_1+V_2$，有$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta=\beta_1+\beta_2$，$\alpha_i \in V_i$，$\beta_i \in V_i, (i=1,2)$. 所以$\alpha+\beta= \alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2$

$$=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2) \in V_1+V_2,$$

又$k\alpha=k(\alpha_1+\alpha_2)=k\alpha_1+k\alpha_2 \in V_1+V_2$, 故$V_1+V_2$是V的子空间。

证毕

结论:（1） $V_1 \cap V_2$是包含在V_1, V_2 中的最大子空间;

（2） V_1+V_2是包含V_1, V_2的最小子空间.

例　已知 V_1与V_2是V的两个子空间，其中

$V_1=L(a_1,a_2,\ldots,a_m)$， $V_2=L(b_1,b_2,\ldots b_l)$,

求证　$V_1+V_2=L(a_1,a_2,\ldots,a_m,b_1,b_2,\ldots b_l)$

证　显然 $V_1+V_2 \supset L(a_1,a_2,\ldots,a_m,b_1,b_2,\ldots b_l)$,

又对$\forall x \in V_1+V_2$，有 $x=x_1+x_2$, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$.

所以 $x_1=k_1a_1+\ldots+k_ma_m$， $x_2=p_1b_1+\ldots+p_lb_l$

因而 $x \in L(a_1,a_2,\ldots,a_m,b_1,b_2,\ldots b_l)$,

可得$V_1+V_2 \subset L(a_1,a_2,\ldots,a_m,b_1,b_2,\ldots b_l)$，结论成立.

定理1.6 （维数公式）如果V_1, V_2是V的两个子空间，那么有

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

证　设 $\dim V_1 = n_1, \dim V_2 = n_2, \dim V_1 \cap V_2 = m$

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 是$V_1 \cap V_2$的一个基，将它依次扩充为 V_1, V_2 的基.

V_1基： $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_{n_1-m}$

V_2基： $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{n_2-m}$

由于 $V_1 + V_2 = L(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_{n_1-m}, \boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_{n_2-m})$

假定 $k_1x_1+\cdots+k_mx_m+p_1y_1+\cdots+p_{n_1-m}y_{n_1-m}$

$+q_1z_1+\cdots+q_{n_2-m}z_{n_2-m}=0$

则有 $k_1x_1+\cdots+k_mx_m+p_1y_1+\cdots+p_{n_1-m}y_{n_1-m}$

$=-q_1z_1-\cdots-q_{n_2-m}z_{n_2-m}$

所以 $-q_1z_1-\cdots-q_{n_2-m}z_{n_2-m}\in V_1\bigcap V_2$

于是有 $-q_1z_1-\cdots-q_{n_2-m}z_{n_2-m}=l_1x_1+\cdots+l_mx_m$

因而 $q_1=\cdots=q_{n_2-m}=0$ 由此推出

$k_1=\cdots=k_m=p_1=\cdots=p_{n_1-m}=0$

所以 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_{n_1-m},\boldsymbol{z}_1,\cdots,\boldsymbol{z}_{n_2-m}$ 线性无关.

即 $\dim(\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2)=n_1+n_2-m$ 证毕

定义1.9 如果 V_1+V_2 中的任一向量只能唯一地表示为 V_1的一个向量与V_2 的一个向量的和，则称V_1+V_2 为 V_1与V_2 的直和，记为$V_1 \oplus V_2$.

定理1.7 V_1+V_2 为直和 $\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = L(0).$

证 必要性. 对 $\forall \boldsymbol{x} \in V_1 \cap V_2$，则有$-\boldsymbol{x} \in V_1 \cap V_2$ ，

$0 = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})$, 由于$V_1 + V_2$是直和，所以$\boldsymbol{x} = 0$

即
$$V_1 \cap V_2 = L(0)$$

充分性. 对 $\forall \boldsymbol{x} \in V_1 + V_2$，有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$

其中 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1 \in V_1; \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2 \in V_2.$

因为 $(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{y}_2) = 0$，所以 $(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1) = -(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{y}_2)$,

因而 $x_1 - y_1 \in V_1 \cap V_2$，即 $x_1 = y_1$，同理 $x_2 = y_2$。

所以 V_1+V_2 是直和. 证毕

推论1 设 V_1,V_2 都是V的子空间，则V_1+V_2 是直和 $\Leftrightarrow \dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

推论2 如果 $x_1,\cdots,x_k$ 为 V_1的基，$y_1,\cdots,y_l$ 为V_2的基，且 V_1+V_2 为直和，则 $x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_l$ 为 $V_1\oplus V_2$ 的基.

证 因为$V_1+V_2=L(x_1,x_2,\ldots x_k,y_1,y_2,\ldots y_l)$,

因为 $\dim(V_1\oplus V_2)=\dim V_1+\dim V_2=k+l$,

所以$x_1,x_2,\ldots x_k,y_1,y_2,\ldots y_l$ 为 $V_1\oplus V_2$ 的基。

例 设R^4的两个子空间为

$$V_1 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 = \xi_2 = \xi_3, \xi_i \in R, i = 1,2,3,4\}$$

$$V_2 = L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{x}_1 = (1,0,1,0), \boldsymbol{x}_2 = (0,1,0,1)$$

求 (1)将 V_1+V_2 表示为生成子空间;

(2) V_1+V_2 的基与维数;

(3) $V_1 \cap V_2$ 的基与维数.

解 (1) 因为

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (\xi_1, \xi_1, \xi_1, \xi_4) = \xi_1(1,1,1,0) + \xi_4(0,0,0,1)$$

设 $y_1=(1,1,1,0)$, $y_2=(0,0,0,1)$, 则有$V_1=L(y_1,y_2)$

故 $V_1+V_2=L(y_1,y_2,x_1,x_2)$.

(2) 因为 y_1,y_2,x_1,x_2 的秩为3，且y_1,y_2,x_1 是其极大无关组，所以$\dim(V_1+V_2)=3$, y_1,y_2,x_1是V_1+V_2的一个基。

(3) 设$x\in V_1\cap V_2$, 则有 k_1,k_2,l_1,l_2, 使

$$x=k_1y_1+k_2y_2=l_1x_1+l_2x_2$$

所以 $\begin{cases} k_1-l_1=0 \\ k_1-l_2=0 \\ k_1-l_1=0 \\ k_2-l_2=0 \end{cases}$, 则有 $\begin{cases} k_1=l_2 \\ k_2=l_2 \\ l_1=l_2 \end{cases}$

$$x=k_1y_1+k_2y_2=l_2y_1+l_2y_2=l_2(y_1+y_2)=l_2(1,1,1,1)$$

所以 $(1,1,1,1)$为$V_1\cap V_2$的一个基，$\dim(V_1\cap V_2)=1$.

例 设$\mathbf{R}^{2\times 2}$的两个子空间为

$$V_1=\left\{\mathbf{A}\,\middle|\,\mathbf{A}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}, x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}$$

$$V_2=L(\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2),\ \mathbf{B}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix},\mathbf{B}_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

求 **(1) 将 V_1+V_2 表示为生成子空间;**

(2) V_1+V_2 的基与维数;

(3) $V_1\cap V_2$ 的基与维数.

解：（1）因为 $x_1-x_2+x_3-x_4=0$, 即$x_1=x_2-x_3+x_4$, 所以

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2-x_3+x_4 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

则 $V_1=L(A_1,A_2,A_3)$. 故 $V_1+V_2=L(A_1,A_2,A_3,B_1,B_2)$

(2) 因为 A_1,A_2,A_3, B_1,B_2的秩为3，又A_1,A_2,A_3线性无关，因而A_1,A_2,A_3,是V_1+V_2的一个基。

(3) 因为B_1,B_2可由A_1,A_2,A_3线性表示，所以

$L(B_1,B_2)\subset L(A_1,A_2,A_3)$, 故$V_1\cap V_2= L(B_1,B_2)$,

因为B_1,B_2线性无关，所以 B_1,B_2是$V_1\cap V_2$ 的一个基，$\dim(V_1\cap V_2)=2$。