第三章　矩阵分析及其应用

3.1　矩阵序列

3.2　矩阵级数

3.3　矩阵函数

3.4　矩阵的微分和积分

3.5　矩阵函数的一些应用

3.1 矩阵序列

定义3.1 设有矩阵序列 $\left\{\boldsymbol{A}^{(k)}\right\}$，其中 $\boldsymbol{A}^{(k)}=\left(a_{ij}^{(k)}\right)\in C^{n\times n}$ 当 $k\to\infty, a_{ij}^{(k)}\to a_{ij}$ 时，称 $\left\{\boldsymbol{A}^{(k)}\right\}$ 收敛，并称矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)$ 为 $\left\{\boldsymbol{A}^{(k)}\right\}$ 的极限，或称 $\left\{\boldsymbol{A}^{(k)}\right\}$ 收敛于 A，记为

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A} \text{ 或 } \boldsymbol{A}^{(k)}\to\boldsymbol{A}$$

不收敛的矩阵序列称为发散.

性质1 设 $\boldsymbol{A}^{(k)} \to \boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}^{(k)} \to \boldsymbol{B}_{m\times n}$，则

$$\lim_{k\to\infty}\left(\alpha \boldsymbol{A}^{(k)} + \beta \boldsymbol{B}^{(k)}\right) = \alpha \boldsymbol{A} + \beta \boldsymbol{B}$$

性质2 设 $\boldsymbol{A}^{(k)} \to \boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}^{(k)} \to \boldsymbol{B}_{n\times l}$，则

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{B}^{(k)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

性质3 设$\boldsymbol{A}^{(k)}$与$\boldsymbol{A}$都是可逆矩阵，且$\boldsymbol{A}^{(k)} \to \boldsymbol{A}_{m\times n}$，则 $\left(\boldsymbol{A}^{(k)}\right)^{-1} \to \boldsymbol{A}^{-1}$.

定理 3.1 设 $\boldsymbol{A}^{(k)} \in C^{m\times n}$，则

（1）$\boldsymbol{A}^{(k)} \to \boldsymbol{O} \Leftrightarrow \left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\| \to 0$

（2）$\boldsymbol{A}^{(k)} \to \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \left\|\boldsymbol{A}^{(k)} - \boldsymbol{A}\right\| \to 0$

其中 $\|\bullet\|$ 是 $\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 上的任何一种范数.

定义3.2 矩阵序列 $\left\{\boldsymbol{A}^{(k)}\right\}$ 称为有界的，如果存在常数 $M>0$，使得对任意 k 都有

$$\left|a_{ij}^{(k)}\right| < M \ (\ i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n)$$

定义3.3 设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，且当 $k \to \infty$ 时，有 $\boldsymbol{A}^k \to \boldsymbol{O}$，则称$\boldsymbol{A}$ 为收敛矩阵.

定理3.2 $A^k \to O \Leftrightarrow \rho(A) < 1$

证 设 A 的Jordan 标准形为J, 则存在可逆矩阵P 使 $A = PJP^{-1}$， 于是有 $A^k = PJ^kP^{-1}$

因为 $$J^k = diag\left(J_1^k(\lambda_1), J_2^k(\lambda_2), \cdots, J_s^k(\lambda_s)\right)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是A的特征值.

因为 $$J_i^k(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{m_i-1}\lambda_i^{k-m_i+1} \\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & C_k^1\lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{pmatrix}$$

这里规定 $C_k^l = 0\ (l > k)$.

充分性. 因为 $\rho(\boldsymbol{A})<1$，所以 $|\lambda_i|<1$，因而有

$$C_k^l\lambda^{k-l}\to 0\quad(l=0,1,2,\cdots,m_i-1)$$

故 $\boldsymbol{J}_i^k(\lambda_i)\to\boldsymbol{O}$，

所以 $\boldsymbol{J}^k\to\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{A}^k\to\boldsymbol{O}$.

必要性. 因为 $\boldsymbol{A}^k\to\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{J}^k\to\boldsymbol{O}$，

即 $\boldsymbol{J}_i^k(\lambda_i)\to\boldsymbol{O}$，

因此 $|\lambda_i|<1\,(i=1,2,\cdots,s)$，即 $\rho(\boldsymbol{A})<1$

证毕

定理3.3 $\boldsymbol{A}^k \to \boldsymbol{O}(k \to \infty)$ 的充分条件是只要有一种矩阵范数 $\|\bullet\|$，使 $\|\boldsymbol{A}\| < 1$.

例3.1 判断 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$ 是否为收敛矩阵.

3.2 矩阵级数

定义3.4 设矩阵序列$\left\{\boldsymbol{A}^{(k)}\right\}$，则无穷和

$\boldsymbol{A}^{(0)}+\boldsymbol{A}^{(1)}+\cdots+\boldsymbol{A}^{(k)}+\cdots$ 称为矩阵级数，记为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$，

即有 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}^{(0)}+\boldsymbol{A}^{(1)}+\cdots+\boldsymbol{A}^{(k)}+\cdots$

定义3.5 设 $S^{(N)}=\sum\limits_{k=0}^{N}A^{(k)}$，称其为矩阵级数的部分和. 如果矩阵序列$\left\{S^{(N)}\right\}$收敛，且有

$$\lim_{N\to\infty}S^{(N)}=S$$

则称矩阵级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$收敛，且和是$\boldsymbol{S}$，记为$S=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$，不收敛的矩阵级数称为是发散的.

例3.2 已知 $\boldsymbol{A}^{(k)}=\begin{pmatrix} 1/2^k & \pi/3\times 4^k \\ 0 & 1/k(k+1) \end{pmatrix} \quad (k=1,2,\cdots)$

研究矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 的收敛性.

解 因为

$$S^{(N)}=\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{A}^{(k)}=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N} 1/2^k & \sum_{k=1}^{N} \pi/3\times 4^k \\ 0 & \sum_{k=1}^{N} 1/k(1+k) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1-\left(1/2\right)^N & \pi/9\left[1-\left(1/4\right)^N\right] \\ 0 & N/1+N \end{pmatrix}$$

,故有 $S=\lim_{N\to\infty}S^{(N)}=\begin{pmatrix} 1 & \pi/9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

所以，级数收敛.

定义3.6 如果 $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}$ 中的 mn 个数项级数都是绝对收敛的，则称 $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}$ 是绝对收敛的.

性质1 若 $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}$ 是绝对收敛的，则它也一定收敛，并且任意调换其项的顺序所得的级数还是收敛的，且其和不变.

性质2 $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}$ 为绝对收敛的 $\Leftrightarrow$ 正项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \boldsymbol{A}^{(k)} \right\|$ 收敛.

证 必要性. 因为 $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}$ 为绝对收敛的,则存在一个 $M > 0$ ，它与N，i，j 无关，使得

$$\sum_{k=0}^{N} \left| a_{ij}^{(k)} \right| < M \left(N \geq 0; i = 1,2,\cdots m; j = 1,2,\cdots,n \right)$$

从而有 $$\sum_{k=0}^{N} \left\| \boldsymbol{A}^{(k)} \right\|_{m_1} = \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij}^{(k)} \right| \right) < mnM$$

故 $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \boldsymbol{A}^{(k)} \right\|_{m_1}$ 为收敛级数. 由矩阵范数的等价性和正项级数的比较判别法知 $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \boldsymbol{A}^{(k)} \right\|$ 为收敛级数.

充分性. 因为 $\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\|$ 收敛，所以 $\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\|_{m_1}$ 收敛，那么由

$$\left|a_{ij}^{(k)}\right| \le \left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\|_{m_1} \quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

可知 $\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ mn 个数项级数都绝对收敛，故该矩阵级数绝对收敛.　　证毕

性质3 如果 $\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$ 是收敛（或绝对收敛）的，那么 $\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{Q}$ 也是收敛（或绝对收敛）的，并且有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}\right)\boldsymbol{Q}$$

证　因为 $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}$ 收敛，设其和为$\boldsymbol{S}$，令

$\boldsymbol{S}^{(N)} = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{A}^{(k)}$，则有 $\lim_{N\to\infty} \boldsymbol{S}^{(N)} = \boldsymbol{S}$，于是，

当$N \to \infty$时，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}^{(N)}\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{P}\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}$，所以它 是收敛.

且

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}\right)\boldsymbol{Q}.$$

如果 $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}$ 又是绝对收敛的，那么 $\sum_{k=0}^{\infty} \left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\|$

是收敛的. 因为 $\left\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{Q}\right\| \le \left\|\boldsymbol{P}\right\|\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\|\left\|\boldsymbol{Q}\right\| \le M\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\|$

其中M与k无关. 从而 $\sum_{k=0}^{\infty} \left\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{Q}\right\|$ 也收敛，故

$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{Q}$ 是绝对收敛的.　　　　证毕

性质4 设 $C^{n\times n}$ 中的两个矩阵级数

$$S_1:\ \boldsymbol{A}^{(0)}+\boldsymbol{A}^{(1)}+\cdots+\boldsymbol{A}^{(k)}+\cdots$$

$$S_2:\ \boldsymbol{B}^{(0)}+\boldsymbol{B}^{(1)}+\cdots+\boldsymbol{B}^{(k)}+\cdots$$

都绝对收敛，其和分别为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$. 则级数 S_1与级数 S_2按项相乘所得的矩阵级数

$$S_3:\ \boldsymbol{A}^{(0)}\boldsymbol{B}^{(0)}+\left(\boldsymbol{A}^{(0)}\boldsymbol{B}^{(1)}+\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{B}^{(0)}\right)+$$

$$+\left(\boldsymbol{A}^{(0)}\boldsymbol{B}^{(2)}+\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{B}^{(1)}+\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{B}^{(0)}\right)+\cdots$$

$$+\left(\boldsymbol{A}^{(0)}\boldsymbol{B}^{(k)}+\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{B}^{(k-1)}+\cdots+\boldsymbol{A}^{(k)}\boldsymbol{B}^{(0)}\right)+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}\boldsymbol{A}^{(i)}\boldsymbol{B}^{(k-i)}\right)$$

绝对收敛，且和为$\boldsymbol{AB}$.

证 因为 $\sum_{k=0}^{\infty}\left\|A^{(k)}\right\|$ 与 $\sum_{k=0}^{\infty}\left\|B^{(k)}\right\|$ 都收敛，所以

$$\left\|A^{(0)}\right\|\left\|B^{(0)}\right\|+\left(\left\|A^{(0)}\right\|\left\|B^{(1)}\right\|+\left\|A^{(1)}\right\|\left\|B^{(0)}\right\|\right)+$$

$$+\left(\left\|A^{(0)}\right\|\left\|B^{(2)}\right\|+\left\|A^{(1)}\right\|\left\|B^{(1)}\right\|+\left\|A^{(2)}\right\|\left\|B^{(0)}\right\|\right)+\cdots$$

$$+\left(\left\|A^{(0)}\right\|\left\|B^{(k)}\right\|+\left\|A^{(1)}\right\|\left\|B^{(k-1)}\right\|+\cdots+\left\|A^{(k)}\right\|\left\|B^{(0)}\right\|\right)+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{i=0}^{k}\left\|A^{(i)}\right\|\left\|B^{(k-i)}\right\|\right)\le\sum_{k=0}^{N}\left\|A^{(k)}\right\|\sum_{k=0}^{N}\left\|B^{(k)}\right\|$$

收敛. 所以 S_3 绝对收敛.

根据性质1，取 S_3 的一种特殊排法

$$\boldsymbol{A}^{(0)}\boldsymbol{B}^{(0)}+\left(\boldsymbol{A}^{(0)}\boldsymbol{B}^{(1)}+\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{B}^{(1)}+\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{B}^{(0)}\right)+\cdots+$$

$$\left(\sum_{i=0}^{k}\boldsymbol{A}^{(i)}\cdot\sum_{j=0}^{k}\boldsymbol{B}^{(j)}-\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^{(i)}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{B}^{(j)}\right)+\cdots$$

设 S_1 与 S_2 的$\boldsymbol{k}$项部分和为 $S_1^{(k)}$与$S_2^{(k)}$，则 S_3

的部分和矩阵序列为

$$S_1^{(1)}S_2^{(1)},S_1^{(2)}S_2^{(2)},\cdots,S_1^{(k)}S_2^{(k)},\cdots$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{S}_1^{(k)}\boldsymbol{S}_2^{(k)}=\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{S}_1^{(k)}\cdot\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{S}_2^{(k)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$

故 矩阵级数 S_3 的和为$\boldsymbol{AB}$. 证毕

定理3.4 方阵A 的幂级数（Neuman级数）

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^k + \cdots$$

收敛 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 为收敛矩阵，且在收敛时，其和为$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$.

证 必要性. 由于该矩阵幂级数的第i 行第 j 列的元素是数项级数

$$\delta_{ij} + (A)_{ij} + (A^2)_{ij} + \cdots + (A^k)_{ij} + \cdots$$

因为 $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k$ 收敛，所以 $\left(\boldsymbol{A}^k\right)_{ij} \to 0$ 从而

$$\boldsymbol{A}^k \to 0$$

即$\boldsymbol{A}$ 为收敛矩阵.

充分性. 由于 $A^k \to 0$，所以 $\rho(A)<1$ 从而

$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆，又因为

$$\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k\right)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{k+1}$$

所以

$$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{A}^{k+1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$$

$$\to(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$$

证毕

定理3.5 如果方阵A对于某一矩阵范数$\|\bullet\|$有$\|A\|<1$，则对任何非负整数k，以$(I-A)^{-1}$为部分和$I+A+A^2+\ldots+A^k$的近似时，其误差为

$$\left\|(I-A)^{-1}-(I+A+\cdots+A^k)\right\|\le\frac{\|A\|^{k+1}}{1-\|A\|}$$

证 因为$\|A\|<1$，所以$A^k\to O$，于是$(I-A)^{-1}$存在，且有

$$(I-A)^{-1}-\left(I+A+A^2+\cdots+A^k\right)=\sum_{i=k+1}^{\infty}A^i$$

因为

$$\left\|\sum_{i=k+1}^{k+l}A^i\right\|\le\sum_{i=k+1}^{k+l}\|A\|^i=\frac{\|A\|^{k+1}}{1-\|A\|}\left(1-\|A\|^l\right)$$

所以

$$\left\|\sum_{i=k+1}^{\infty}A^i\right\|\le\lim_{l\to\infty}\sum_{i=k+1}^{k+l}\|A\|^i=\frac{\|A\|^{k+1}}{1-\|A\|}$$

证毕

定理3.6 设幂级数 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ 的收敛半径为r，如果方阵 A 满足$\rho(A)<r$，则 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$ 是绝对收敛的；如果$\rho(A)>r$，则 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$ 是发散的.

证 （1）当 $\rho(A)<r$ 时，选取正数 ε 使满足 $\rho(A)+\varepsilon<r$ ，因为存在矩阵范数$\|\bullet\|$使得

$$\|A\|\le\rho(A)+\varepsilon$$

从而有
$$\|c_k A^k\|\le|c_k|\|A\|^k\le|c_k|(\rho(A)+\varepsilon)^k$$

因为 $\rho(A)+\varepsilon<r$ ，所以 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho(A)+\varepsilon)^k$ 绝对收敛，从而 $\sum_{k=0}^{\infty}\|c_k A^k\|$ 收敛. 故 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$ 绝对收敛.

(2) 当 $\rho(\boldsymbol{A})>r$ 时，设$\boldsymbol{A}$ 的$\boldsymbol{n}$ 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则有某个 λ_l 满足 $|\lambda_l|>r$. 又因为 ∃可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & b_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

而 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k\boldsymbol{B}^k$ 的对角元素为 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k\lambda_i^k\,(i=1,2,\cdots,n)$.
因为 $|\lambda_l|>r$, 所以 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k\lambda_l^k$ 发散，从而 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k\boldsymbol{B}^k$ 发散. 由 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k\boldsymbol{A}^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{P}^{-1}$ 可知 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k\boldsymbol{A}^k$ 发散.

证毕

推论 如果 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 在整个复平面上收敛，那么不论 $\boldsymbol{A}$ 是任何矩阵，$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{A}^k$ 总是绝对收敛的.

例 设 $A=\begin{pmatrix}0.5 & 0.2\\ 0.3 & 1\end{pmatrix}$，问矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{2^k}A^k$ 是否收敛？

解 因为

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}z^{k+1}}{\frac{k}{2^k}z^k}\right|=\left|\frac{z}{2}\right|<1,$$

所以，收敛半径 $r=2$. 又 $\|A\|_1=1.2<2$

故矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{2^k}A^k$ 绝对收敛.

3.3 矩阵函数

一. 矩阵函数的定义与性质

定义3.7 设一元函数 $f(z)$ 能够展开为z 的幂级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (|z|<r)$$

其中 $r>0$ 表示该幂级数的收敛半径. 当 n 阶矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)<r$ 时，将收敛的矩阵幂级数的和 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 称为矩阵函数. 记为 $f(\mathbf{A})$

即

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$$

例如，函数

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

对 $\forall \boldsymbol{A} \in \mathrm{C}^{n\times n}$，则有矩阵函数

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}}{1!} + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{A}^3}{3!} + \frac{\boldsymbol{A}^5}{5!} - \cdots$$

并且由此可推得： $e^{iA} = \cos \boldsymbol{A} + i \sin \boldsymbol{A}$

$$\cos \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\left(e^{iA} + e^{-iA}\right), \sin \boldsymbol{A} = \frac{1}{2i}\left(e^{iA} - e^{-iA}\right)$$

$$\cos(-\boldsymbol{A}) = \cos \boldsymbol{A}\ ,\ \sin(-\boldsymbol{A}) = -\sin \boldsymbol{A}$$

注：一般情况下， $e^{A}e^{B} \neq e^{B}e^{A} \neq e^{A+B}$

例如，令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

易知 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}^3 = \cdots,\quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}^3 = \cdots$

于是 $e^{A} = I + (e-1)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

$$e^{B} = I + (e-1)B = \begin{pmatrix} e & 1-e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此 $$e^{A}e^{B}=\begin{pmatrix} e^2 & -(e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{B}e^{A}=\begin{pmatrix} e^2 & (e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

又由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，可得

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k=2^{k-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),\ k=1,2,\cdots$$

所以 $$e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(e^2-1)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

定理3.7 如果$AB=BA$，则 $e^{A}e^{B}=e^{B}e^{A}=e^{A+B}$

证 $$e^{A}e^{B}=\left(I+A+\frac{A^{2}}{2!}+\cdots\right)\left(I+B+\frac{B^{2}}{2!}+\cdots\right)$$

$$=I+(A+B)+\frac{1}{2!}\left(A^{2}+2AB+B^{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(A^{3}+3A^{2}B+3AB^{2}+B^{3}\right)+\cdots$$

$$=I+(A+B)+\frac{1}{2!}(A+B)^{2}+\frac{1}{3!}(A+B)^{3}+\cdots$$

$$=e^{A+B}$$

证毕

推论1 $e^{A}e^{-A}=e^{-A}e^{A}=I,\left(e^{A}\right)^{-1}=e^{-A}.$

推论2 设 m 为整数，则 $\left(e^{A}\right)^{m}=e^{mA}.$

例3.3 设 $AB=BA$，证明

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$$

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\sin 2A=2\sin A\cos A$$

例 3.4 设函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}\left(|z|<1\right)$，求矩阵函数 $f(A)$.

解　因为　$f(z)=\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^k\left(\,|z|<1\right)$

所以，当A 的谱半径 $\rho(A)<1$时，有

$$f(A)=\frac{1}{I-A}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k=(I-A)^{-1}$$

二. 矩阵函数值的算法

1. 待定系数法

设$\boldsymbol{n}$ 阶矩阵$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $\phi(\lambda)=det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$

如果首1 多项式

$$\varphi(\lambda)=\lambda^m+b_1\lambda^{m-1}+\cdots+b_{m-1}\lambda+b_m \quad (1\le m\le n)$$

满足：（1）$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

（2）$\varphi(\lambda)\,|\,\phi(\lambda)$ $(\varphi(\lambda)$整除$\phi(\lambda))$

设$\varphi(\lambda)$的互异零点为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，相应的重数为 $r_1,\cdots,r_s$ $(r_1+\cdots+r_s=m)$，则有

$$\varphi^{(l)}(\lambda_i)=0\ (l=0,1,\cdots,r_i-1;\ i=1,2,\cdots,s)$$

设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k=\varphi(z)g(z)+r(z)$，其中

$$\deg(r(z))<m\text{或}r(z)=0.$$

由 $f^{(l)}(\lambda_i)=r^{(l)}(\lambda_i)\ (l=0,1,\cdots,r_i-1;\ i=1,2,\cdots,s)$

确定出 $r(z)$，利用 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$ 可得

$$f(\boldsymbol{A})=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\boldsymbol{A}^k=r(\boldsymbol{A})$$

算法:

（1）求$\varphi(\lambda)$ **(满足$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$)**

（2）设 $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k z^k=q(z)\varphi(z)+r(z)$

其中 $\deg(r(z))<m$或$r(z)=0.$ 利用$\varphi(\lambda)$的根求$r(z)$

（3）计算 $r(\boldsymbol{A})$ **($f(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$).**

例3.5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，求 $e^{\boldsymbol{A}}$与$e^{t\boldsymbol{A}}$.

解 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)(\lambda-2)$

取 $f(\lambda)=e^{\lambda}$，设 $f(\lambda)=\varphi(\lambda)q(\lambda)+a\lambda+b$

由 $\begin{cases}f(1)=e=a+b\\ f(2)=e^2=2a+b\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=e^2-e\\ b=2e-e^2\end{cases}$

所以 $r(\lambda)=(e^2-e)\lambda+2e-e^2,$

从而 $f(\boldsymbol{A})=e^{\boldsymbol{A}}=r(\boldsymbol{A})=(e^2-e)\boldsymbol{A}+(2e-e^2)\boldsymbol{I}$

$$=\begin{pmatrix}e & 0\\ e^2-e & e^2\end{pmatrix}$$

（2） 取 $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, 设

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda) g(\lambda) + a\lambda + b$$

由 $\begin{cases} f(1) = e^{t} = a + b \\ f(2) = e^{2t} = 2a + b \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a = e^{2t} - et \\ b = 2e^{t} - e^{2t} \end{cases}$

所以 $r(\lambda) = (e^{2t} - e^{t})\lambda + 2e^{t} - e^{2t}$,

从而 $$f(\boldsymbol{A}) = e^{\boldsymbol{A}t} = r(\boldsymbol{A}) = \left(e^{2t} - e^{t}\right)\boldsymbol{A} + \left(2e^{t} - e^{2t}\right)\boldsymbol{I}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ e^{2t} - e^{t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

例3.6 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$，求 $\sin At\,(t\in R)$.

解 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3$

因为 $2I-A\neq O$，$(2I-A)^2=O$，所以 A 的最小多项式

$$m(\lambda)=(\lambda-2)^2.$$

取 $f(\lambda)=\sin\lambda t$，设 $f(\lambda)=m(\lambda)g(\lambda)+a\lambda+b$

由 $\begin{cases}f(2)=\sin 2t=2a+b\\ f'(2)=t\cos 2t=a\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=t\cos 2t\\ b=\sin 2t-2t\cos 2t\end{cases}$

所以 $r(\lambda)=(t\cos 2t)\lambda+\sin 2t-2t\cos 2t$,

从而 $\sin At=r(A)$

$$=t\cos(2t)A+(\sin(2t)-2t\cos(2t))I$$

$$=\begin{pmatrix} t\sin(2t) & 0 & 0 \\ t\cos(2t) & \sin(2t)-t\cos(2t) & t\cos(2t) \\ t\cos(2t) & -t\cos(2t) & \sin(2t)+t\cos(2t) \end{pmatrix}$$

2. 数项级数求和法

设 $\varphi(\lambda)=\lambda^m+b_1\lambda^{m-1}+\cdots+b_{m-1}\lambda+b_m \quad (1\le m\le n)$

且 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$ ，即

$$\boldsymbol{A}^m+b_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+b_{m-1}\boldsymbol{A}+b_m\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$$

或者 $$\boldsymbol{A}^m=-b_1\boldsymbol{A}^{m-1}-\cdots-b_{m-1}\boldsymbol{A}-b_m\boldsymbol{I}$$

可以求出
$$\begin{cases} \boldsymbol{A}^{m+1}=k_{m-1}^{(1)}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+k_1^{(1)}\boldsymbol{A}+k_0^{(1)}\boldsymbol{I} \\ \qquad\vdots \\ \boldsymbol{A}^{m+l}=k_{m-1}^{(l)}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+k_1^{(l)}\boldsymbol{A}+k_0^{(l)}\boldsymbol{I} \\ \qquad\vdots \end{cases}$$

于是有

$$f(\boldsymbol{A})=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\boldsymbol{A}^k=\left(c_0\boldsymbol{I}+c_1\boldsymbol{A}+\cdots+c_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}\right)$$

$$+c_m\left(k_0\boldsymbol{I}+k_1\boldsymbol{A}+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}\right)+\cdots+$$

$$+c_{m+l}\left(k_0^{(l)}\boldsymbol{I}+k_1^{(l)}\boldsymbol{A}+\cdots+k_{m-1}^{(l)}\boldsymbol{A}^{m-1}\right)+\cdots$$

$$=(c_0+\sum_{l=0}^{\infty}c_{m+l}k_0^{(l)})\boldsymbol{I}+(c_1+\sum_{l=0}^{\infty}c_{m+l}k_1^{(l)})\boldsymbol{A}+\cdots$$

$$+(c_{m-1}+\sum_{l=0}^{\infty}c_{m+l}k_{m-1}^{(l)})\boldsymbol{A}^{m-1}$$

例 3.7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\pi & & & \\ & -\pi & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}$,求 $\sin\boldsymbol{A}$

解 $\phi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\lambda^4-\pi^2\lambda^2.$

由于 $\phi(\boldsymbol{A})=0$，所以 $\boldsymbol{A}^4=\pi^2\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^5=\pi^2\boldsymbol{A}^3,\cdots,$

$\boldsymbol{A}^{2n}=\pi^{2(n-1)}\boldsymbol{A}^2,\ \boldsymbol{A}^{2n+1}=\pi^{2(n-1)}\boldsymbol{A}^3$

于是有 $\sin\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}-\dfrac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\dfrac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5-\cdots$

$$=\boldsymbol{A}-\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{5!}\pi^2\boldsymbol{A}^3-\cdots$$

$$= A + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\pi^2 - \cdots \right) A^3$$

$$= A + \frac{1}{\pi^3}\left(\pi - \frac{1}{3!}\pi^3 + \frac{1}{5!}\pi^5 - \cdots \right) A^3 - \frac{1}{\pi^2} A^3$$

$$= A + \frac{\sin\pi - \pi}{\pi^3} A^3 = A - \pi^{-2} A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Jordan 标准形法

设 A 的Jordan 标准形为 J，则有可逆矩阵P使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$$

则有 $A = PJP^{-1}, A^2 = PJ^2P^{-1}, \cdots,$ 于是有

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k PJ^k P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k J^k\right)P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} c_k J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} c_k J_s^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_s) \end{pmatrix} P^{-1}$$

因为

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{m_i \times m_i}$$

，所以 $f(J_i) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k J_i^k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{m_i-1} \lambda_i^{k-m_i+1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{pmatrix}$$

$$f\left(J_i\right)=$$

$$\begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

例3.8 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$,求$e^{\boldsymbol{A}},e^{t\boldsymbol{A}}(t\in R)$.

解 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

对应 $\lambda_1=-2$，的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$；

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的两个线性无关的特征向量

$\boldsymbol{p}_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.构造矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则有

$$e^{A}=P\begin{pmatrix} e^{-2} & & \\ & e & \\ & & e \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} 2e-e^{-2} & 2e-2e^{-2} & 0 \\ e^{-2}-e & 2e^{-2}-e & 0 \\ e^{-2}-e & 2e^{-2}-2e & e \end{pmatrix}$$

$$e^{At}=P\begin{pmatrix} e^{-2t} & & \\ & e^{t} & \\ & & e^{t} \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 2e^{t}-e^{-2t} & 2e^{t}-2e^{-2t} & 0 \\ e^{-2t}-e^{t} & 2e^{-2t}-e^{t} & 0 \\ e^{-2t}-e^{t} & 2e^{-2t}-2e^{t} & e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\cos \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \cos(-2) & & \\ & \cos 1 & \\ & & \cos 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos 1 - \cos 2 & 2\cos 1 - 2\cos 2 & 0 \\ \cos 2 - \cos 1 & 2\cos 2 - \cos 1 & 0 \\ \cos 2 - \cos 1 & 2\cos 2 - 2\cos 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$$

例如 $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\pi & & & \\ & -\pi & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix},\text{求}\sin\boldsymbol{A},\sin t\boldsymbol{A}.$$

解

$$\boldsymbol{J}_1=\pi,\boldsymbol{J}_2=-\pi,\boldsymbol{J}_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

取 $f(\lambda)=\sin\lambda,\quad f(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}\sin\boldsymbol{J}_1 & & \\ & \sin\boldsymbol{J}_2 & \\ & & \sin\boldsymbol{J}_3\end{pmatrix}$

因为 $\sin \boldsymbol{J}_1 = \sin\pi = 0, \sin \boldsymbol{J}_2 = \sin(-\pi) = 0,$

$$\sin \boldsymbol{J}_3 = \begin{pmatrix} \sin 0 & \cos 0 \\ 0 & \sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $$\sin \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

取 $f(\lambda) = \sin t\lambda,$ $f(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} \sin(t\boldsymbol{J}_1) & & \\ & \sin(t\boldsymbol{J}_2) & \\ & & \sin(t\boldsymbol{J}_3) \end{pmatrix}$

因为 $\sin(t\boldsymbol{J}_1) = \sin t\pi, \sin(t\boldsymbol{J}_2) = \sin(-t\pi) = -\sin t\pi,$

$$\sin(t\boldsymbol{J}_3) = \begin{pmatrix} \sin 0 & t\cos 0 \\ 0 & \sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $$\sin t\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \sin t\pi & & & \\ & -\sin t\pi & & \\ & & 0 & t \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

*三. 矩阵函数的另一定义

定义 3.8 设 $A\in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的Jordan标准形为 J，即有可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$$

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{m_i\times m_i} \qquad (i=1,2,\cdots,s)$$

如果函数$f(z)$在 λ_i 处具有直到 m_i-1阶导数($i=1,2,\ldots,s$)

令 $$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{J}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\boldsymbol{J}_s) \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$f(\boldsymbol{J}_i)=\begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

那么，称***f*** **(*A*)**为对应于***f*** **(*z*)**的矩阵函数.

例3.8 设 $f(z)=\dfrac{1}{z}, \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$，求 $f(\boldsymbol{A})$.

解 因为

$$f(2)=1/2, f'(2)=-1/4, f''(2)=1/4, f'''(2)=-3/8$$

所以

$$f(\boldsymbol{A})=\frac{1}{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/8 & -1/16 \\ & 1/2 & -1/4 & 1/8 \\ & & 1/2 & -1/4 \\ & & & 1/2 \end{pmatrix}$$

例3.9 设 $f(z)=\sqrt{z}, \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$,求$f(\boldsymbol{A})$.

解 由 $\boldsymbol{J}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{J}_2=2,$

得 $f(\boldsymbol{J}_1)=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ & 1\end{pmatrix}, f(\boldsymbol{J}_2)=\sqrt{2}$

所以 $f(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{J}_1) & \\ & f(\boldsymbol{J}_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}.$

3.4 矩阵的微分和积分

一. 矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 的导数与积分

定义3.9 如果矩阵 $\boldsymbol{A}(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{m\times n}$ 的每一个元素是变量t 的可微函数，则称 $a_{ij}(t)$可微，其导数(微商)定义为 $\boldsymbol{A}(t)$

$$\boldsymbol{A}'(t)=\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)=\left(\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right)_{m\times n}$$

定理3.8 设 $\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t)$ 是进行运算的两个可微矩阵，则以下的运算规则成立

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t)\right)=\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)+\frac{d}{dt}\boldsymbol{B}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)\right)=\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)\right)\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{B}(t)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(a\boldsymbol{A}(t)\right)=\left(\frac{da}{dt}\right)\boldsymbol{A}(t)+a\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)\right)$$

其中 $a=a(t)$ 为 t 的可微函数.

定理3.9 设$\boldsymbol{n}$ 阶矩阵$\boldsymbol{A}$ 与$\boldsymbol{t}$ 无关，则有

$$\frac{d}{dt}e^{t\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}e^{t\boldsymbol{A}} = e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$$

$$\frac{d}{dt}\cos(t\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{A}\sin(t\boldsymbol{A}) = -\sin(t\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}$$

$$\frac{d}{dt}\sin(t\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\cos(t\boldsymbol{A}) = \cos(t\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}$$

例 3.10 已知 $\sin t\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \sin t\pi & & & \\ & -\sin t\pi & & \\ & & 0 & t \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}$

解　因为 $\frac{d}{dt}\sin(t\boldsymbol{A})\big|_{t=0}=\boldsymbol{A}\cos(t\boldsymbol{A})\big|_{t=0}=\boldsymbol{A}$

所以 $\boldsymbol{A}=\frac{d}{dt}\sin(t\boldsymbol{A})\big|_{t=0}=\begin{pmatrix} \pi & & & \\ & -\pi & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

定义3.10 如果矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 的每个元素 $a_{ij}(t)$ 都是区间 $[t_0, t_1]$ 上的可积函数，则定义 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上的积分为

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{A}(t)dt = \left(\int_{t_0}^{t_1} a_{ij}(t)dt\right)_{m\times n}$$

运算规律：

$$\int_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))dt = \int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{A}(t)dt + \int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{B}(t)dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}dt = \left(\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{A}(t)dt\right)\boldsymbol{B} \quad （\boldsymbol{B}与t无关）$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}(t)dt = \boldsymbol{A}\left(\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{B}(t)dt\right) \quad （\boldsymbol{A}与t无关）$$

当 $a_{ij}(t)$ 都在 [*a*, *b*] 上连续时，就称 **A**(*t*)在 [*a*, *b*] 上连续，且有

$$\frac{d}{dt}\int_a^t \boldsymbol{A}(s)ds = \boldsymbol{A}(t)$$

当 $a'_{ij}(t)$ 都在 [*a*, *b*] 上连续时，则

$$\int_a^b \boldsymbol{A}'(t)dt = \boldsymbol{A}(b) - \boldsymbol{A}(a)$$

*二. 其它微分概念

1. 函数对矩阵的导数

定义3.11 设 $\boldsymbol{X}=(\xi_{ij})_{m\times n}$，$mn$ 元函数 $f(\boldsymbol{X})=f(\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1n},\xi_{21},\cdots,\xi_{mn})$，$f(\boldsymbol{X})$ 对 $\boldsymbol{X}$ 的导数

$$\frac{df}{d\boldsymbol{X}}=\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_{ij}}\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi_{11}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial \xi_{1n}} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f}{\partial \xi_{m1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial \xi_{mn}} \end{pmatrix}$$

例3.10 设 $\boldsymbol{x}=\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right)^{\mathrm{T}}$，$n$元函数$f\left(x\right)=$

$$f\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right),\text{求}\frac{df}{dx}\text{与}\frac{df}{dx^{\mathrm{T}}}$$

解

$$\frac{df}{dx}=\left(\frac{\partial f}{\partial\xi_1},\frac{\partial f}{\partial\xi_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial\xi_n}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{df}{dx^T}=\left(\frac{\partial f}{\partial\xi_1},\frac{\partial f}{\partial\xi_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial\xi_n}\right)$$

例3.11 设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, n元函数

$$f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \text{求} \frac{df}{d\boldsymbol{x}}.$$

解 因为 $$\frac{\partial f}{\partial \xi_i}=\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i=\left(\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}\right)_i$$

所以 $$\frac{df}{dx}=\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1},\frac{\partial f}{\partial \xi_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial \xi_n}\right)^T=\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}$$

例3.12 设 $x(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t),\cdots,\xi_n(t))^T$，一元函数$f(x(t))=f(\xi_1(t),\xi_2(t),\cdots,\xi_n(t))$，求 $\dfrac{df}{dt}$.

解

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial \xi_1}\frac{d\xi_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial \xi_2}\frac{d\xi_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial \xi_n}\frac{d\xi_n}{dt}$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1},\frac{\partial f}{\partial \xi_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial \xi_n}\right)\left(\frac{d\xi_1}{dt},\frac{d\xi_2}{dt},\cdots,\frac{d\xi_n}{dt}\right)^T$$

$$=\frac{df}{dx^{\mathrm{T}}}\frac{dx}{dt}$$

2. 函数矩阵对矩阵的导数

定义3.12 设 $\boldsymbol{X}=\left(\xi_{ij}\right)_{m\times n}$，$\boldsymbol{mn}$元函数 $f_{ij}\left(\boldsymbol{X}\right)=$

$f_{ij}\left(\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1n},\xi_{21},\cdots,\xi_{mn}\right)\left(i=1,2,\cdots,r;\ j=1,2,\cdots,s\right).$

函数矩阵

$$F(X)=\begin{pmatrix} f_{11}(X) & \cdots & f_{1s}(X) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{r1}(X) & \cdots & f_{rs}(X) \end{pmatrix}$$

对函数X的导数如下：

$$\frac{dF}{d\boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \xi_{11}} & \frac{\partial F}{\partial \xi_{12}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial \xi_{1n}} \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_{21}} & \frac{\partial F}{\partial \xi_{22}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial \xi_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_{m1}} & \frac{\partial F}{\partial \xi_{m2}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial \xi_{mn}} \end{pmatrix}$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_{ij}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial \xi_{ij}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial \xi_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{1s}}{\partial \xi_{ij}} \\ \frac{\partial f_{21}}{\partial \xi_{ij}} & \frac{\partial f_{22}}{\partial \xi_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{2s}}{\partial \xi_{ij}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{r1}}{\partial \xi_{ij}} & \frac{\partial f_{r2}}{\partial \xi_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{rs}}{\partial \xi_{ij}} \end{pmatrix}$$

例3.13 设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}$，$n$元函数$f(x)=f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，求$\dfrac{d}{dx^{\mathrm{T}}}\left(\dfrac{df}{dx}\right)$.

解 因为 $\dfrac{df}{dx}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial \xi_1},\dfrac{\partial f}{\partial \xi_2},\cdots,\dfrac{\partial f}{\partial \xi_n}\right)^{\mathrm{T}}$

所以
$$\frac{d}{dx^T}\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{dF}{d\mathbf{x}^{\mathrm{T}}}=\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_1},\frac{\partial F}{\partial \xi_2},\cdots,\frac{\partial F}{\partial \xi_n}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_2 \partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_n \partial \xi_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_n \partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_n^2} \end{pmatrix}$$

例3.15 设 $f(x)$是$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}$的函数，

而 $\xi_i=\xi_i(u)(i=1,2,\cdots,n),u=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)^T$，

证明：$\dfrac{df}{du}=\dfrac{dx^{\mathrm{T}}}{du}\dfrac{df}{dx}$

证

$$\frac{df}{du}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial\zeta_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial\zeta_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial\zeta_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial\xi_1}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial\zeta_1}+\dfrac{\partial f}{\partial\xi_2}\dfrac{\partial\xi_2}{\partial\zeta_1}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial\xi_n}\dfrac{\partial\xi_n}{\partial\zeta_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial\xi_1}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial\zeta_2}+\dfrac{\partial f}{\partial\xi_2}\dfrac{\partial\xi_2}{\partial\zeta_2}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial\xi_n}\dfrac{\partial\xi_n}{\partial\zeta_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial\xi_1}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial\zeta_n}+\dfrac{\partial f}{\partial\xi_2}\dfrac{\partial\xi_2}{\partial\zeta_n}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial\xi_n}\dfrac{\partial\xi_n}{\partial\zeta_n}\end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \zeta_1} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial \zeta_1} & \cdots & \dfrac{\partial \xi_n}{\partial \zeta_1} \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \zeta_2} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial \zeta_2} & \cdots & \dfrac{\partial \xi_n}{\partial \zeta_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \zeta_n} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial \zeta_n} & \cdots & \dfrac{\partial \xi_n}{\partial \zeta_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \xi_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial \xi_n} \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{dx^T}{du} \frac{df}{dx}
$$

3.5 矩阵函数的一些应用

一. 一阶线性常系数齐次微分方程组

设一阶线性常系数齐次微分方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{d\xi_n}{dt} = a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n \end{cases}$$

其中t为自变量，$\xi_i = \xi_i(t)$ 是t 的函数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$，a_{ij}是复数$(i, j = 1, 2, \cdots, n)$.令$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$， 方程组改写为矩阵方程

$$\boldsymbol{x}'=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

定理3.10 满足初始条件 $\xi_1(0)=\gamma_1,\cdots,\xi_n(0)=\gamma_n$ 的一阶线性常系数齐次微分方程组 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 有且仅有唯一解 $\boldsymbol{x}=e^{tA}\boldsymbol{c}$, 其中 $c=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)^T$.

证 当 $x=e^{tA}c$ 时， $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}e^{tA}c=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 所以

$\boldsymbol{x}=e^{tA}\boldsymbol{c}$ 是该方程组的解.

唯一性. 设$\tilde{\boldsymbol{x}}=(\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2,\cdots,\tilde{\xi}_n)$是方程的解，则

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\tilde{x},\frac{d^2\tilde{\boldsymbol{x}}}{dt^2}=\boldsymbol{A}\frac{d\tilde{\boldsymbol{x}}}{dt}=\boldsymbol{A}^2\tilde{\boldsymbol{x}},\cdots$$

所以 $\tilde{\boldsymbol{x}}'(0)=\boldsymbol{Ac},\tilde{\boldsymbol{x}}''(0)=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{c},\cdots$

于是有 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\tilde{\boldsymbol{x}}(0)+t\tilde{\boldsymbol{x}}'(0)+\frac{1}{2!}t^2\tilde{\boldsymbol{x}}''(0)+\cdots$

$$=\boldsymbol{c}+t\boldsymbol{Ac}+\frac{t^2}{2!}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{c}+\cdots=e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c}$$

从而满足初始条件方程组有唯一解. 证毕

考虑向量集合$S=\{\boldsymbol{x}(t)|\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{Ax}\}$,$\boldsymbol{S}$ 构成一个向量空间，称为$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{Ax}$的解空间.

因为e^{tA}可逆，所以它的n 个列向量

$x_1(t), x_2(t), \cdots x_n(t)$ 线性无关，又 $\forall x(t) \in S$,

可由 $x_1(t), x_2(t), \cdots x_n(t)$ 线性表示，故

$x_1(t), x_2(t), \cdots x_n(t)$ 是S 的一个基，称为 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

基础解系,

$$x(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) + \cdots + k_n x_n(t)$$

为其一般解（或通解）.

例3.16 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$, 求微分方程组 $\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ 的基础解系及满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0)=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 的解。

解 $$\varphi(\lambda)=det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^3$$

因为 $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^2=\boldsymbol{O}$，所以$\boldsymbol{A}$的最小多项式 $$m(\lambda)=(\lambda-2)^2.$$

设 $f(\lambda)=e^{t\lambda}$，满足 $f(\lambda)=m(\lambda)g(\lambda)+a\lambda+b$

由 $\begin{cases}f(2)=e^{2t}=2a+b\\f'(2)=te^{2t}=a\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=te^{2t}\\b=e^{2t}-2te^{2t}\end{cases}$

则有 $$r(\lambda)=te^{2t}\lambda+e^{2t}-2te^{2t},$$

所以 $$e^{At}=r(\boldsymbol{A})=te^{2t}\boldsymbol{A}+\left(e^{2t}-2te^{2t}\right)\boldsymbol{I}$$
$$=e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\t&1-t&t\\t&-t&1+t\end{pmatrix}$$

基础解系为
$$x_1(t)=\begin{pmatrix}e^{2t}\\te^{2t}\\te^{2t}\end{pmatrix},x_2(t)=\begin{pmatrix}0\\(1-t)e^{2t}\\-te^{2t}\end{pmatrix},x_3(t)=\begin{pmatrix}0\\te^{2t}\\(1+t)e^{2t}\end{pmatrix}$$

当 $x(0)=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 时, $\boldsymbol{x}(t)=(e^{2t},(1+t)e^{2t},(1+t)e^{2t})^{\mathrm{T}}$

二. 一阶线性常系数非齐次微分方程组

考虑一阶线性常系数非齐次微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n + \beta_1(t) \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n + \beta_2(t) \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{d\xi_n}{dt} = a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n + \beta_n(t) \end{cases}$$

其中t为自变量，$\xi_i = \xi_i(t)(i = 1,2,\cdots,n)$ 是t的函数

$\beta_i(t)(i = 1,2,\cdots,n)$是 t 的已知函数.

方程组可改写为矩阵方程

$$\boldsymbol{x}' = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$$

其中 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{b}(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \cdots, \beta_n(t))^{\mathrm{T}}.$$

设 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}(t)$是方程的一个特解， $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$是方程的一般解，则有 $\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}} = e^{tA}\boldsymbol{c}$ ， 即 $\boldsymbol{x} = e^{tA}\boldsymbol{c} + \tilde{\boldsymbol{x}}$.

如何确定 $\tilde{\boldsymbol{x}}$?

设 $\tilde{\boldsymbol{x}} = e^{tA}\boldsymbol{c}(t)$，代入方程可得

$$\frac{d}{dt}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}e^{tA}\boldsymbol{c}(t) + e^{tA}\frac{d}{dt}\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} + e^{tA}\frac{d}{dt}\boldsymbol{c}(t)$$

从而 $e^{tA}\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{c}(t)=\boldsymbol{b}(t)$, 由此得 $\boldsymbol{c}(t)=\int_{t_0}^{t}e^{-s\boldsymbol{A}}\boldsymbol{b}(s)ds$

故特解 $$\tilde{\boldsymbol{x}}=e^{tA}\int_{t_0}^{t}e^{-sA}\boldsymbol{b}(s)ds$$

所以方程的一般解 $\boldsymbol{x}=e^{tA}\boldsymbol{c}+e^{tA}\int_{t_0}^{t}e^{-sA}\boldsymbol{b}(s)ds$

其中$c=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)^{\mathrm{T}}$是任意常数向量．满足初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$的解为

$$\boldsymbol{x}=e^{(t-t_0)\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_0+e^{t\boldsymbol{A}}\int_{t_0}^{t}e^{-s\boldsymbol{A}}\boldsymbol{b}(s)ds$$

或 $$\boldsymbol{x}=e^{t\boldsymbol{A}}\left(e^{-t_0\boldsymbol{A}}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-s\boldsymbol{A}}\boldsymbol{b}(s)ds\right)$$

例 3.17 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}(t)=\begin{pmatrix}e^{2t}\\e^{2t}\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

求解微分方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(t)$ 满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$ 的解.

解　已求出

$$e^{At}=e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\t&1-t&t\\t&-t&1+t\end{pmatrix}$$

计算

$$e^{-sA}b(s)=e^{-2s}\begin{pmatrix}1&0&0\\-s&1+s&-s\\-s&s&1-s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2s}\\e^{2s}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\int_0^t e^{-sA}\boldsymbol{b}(s)ds = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以 $$\boldsymbol{x} = e^{tA}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} (t-1)e^{2t} \\ (1-t)e^{2t} \\ -2te^{2t} \end{pmatrix}$$

第三章　　总结

一. 矩阵序列与级数

1. 定义与性质

2. 幂级数

3. 矩阵函数

二. 矩阵的微积分

三. 应用（一阶线性常系数微分方程组）