1.1 平稳随机过程

$R_X(t,s)=E(X(t)X(s))\overset{w.s.s.}{=}R_X(t-s)$

1.2 均方周期性

$\exists T, R_X(0)=R_X(T)\Rightarrow\forall\tau, R_X(\tau)=X(\tau+T)$。

1.2.1 分析

我们想要证明$R_X(0)=R_X(T)\Rightarrow R_X(\tau)=R_X(\tau+T)$，我们采用如下技术方案：

$R_X(0)=R_X(T)\Rightarrow E|X(\tau)-X(\tau+T)|^2=0\Rightarrow R_X(\tau)=R_X(\tau+T)$

1.2.2 证明

（1） $E|X(t)-X(t+T)|^2$

$=EX^2(t)+EX^2(t+T)-2E(X(t)X(t+T))$

$=R_X(0)+R_X(0)-2R_X(T)=0$

（2） $|R_X(\tau)-R_X(\tau+T)|=|E(X(0)X(\tau))-E(X(0)X(\tau+T))|$

$\le E|X(0)(X(\tau)-X(\tau+T))|$

$\le(EX^2(0)E|X(\tau)-X(\tau+T)|^2)^{1/2}=0$

//柯西不等式

1.2.3 总结

零点处的局部特性会影响全局特性。

1.3 均方连续性

叙述： $\tau\to0, R_X(\tau)\to R_X(0)\Rightarrow\tau\to0, R_X(\tau_0+\tau)\to R_X(\tau_0)$。

证明方案： $\tau\to0, R_X(\tau)\to R_X(0)\Rightarrow\tau\to0, E|(X(\tau_0+\tau)-X(\tau_0))|^2\to0$；

$\tau\to0, E|(X(\tau_0+\tau)-X(\tau_0))|^2\to0\Rightarrow\tau\to0, R_X(\tau_0+\tau)\to R_X(\tau_0)$。

应用： $R_X(\tau)$在0处是连续的$\Rightarrow R_X(\tau)$是连续的。

利用这个性质我们可以判定矩形窗口（Rectangle Window）函数不是相关函数。

1.4 从正定性推导相关函数$R_X(\tau)$的性质

1.4.1 正定性定义

（1）定义R： $\forall n,\forall t_1,\dots,t_n, R\equiv(R_X(\tau_i-\tau_j))_{ij}$， $R\in\mathbb{R}^{n\times n}$；

（2）定义R正定：若$\forall\alpha\in\mathbb{R}^n$， $\alpha^T R\alpha\ge0$，则R是正定的；

（3）定义$R_X(\tau)$正定：若R是正定的，则相关函数$R_X(\tau)$是正定的。

$R_X(\tau_i-\tau_j)=E(X(\tau_i)X(\tau_j))\Rightarrow R=E(XX^T)$

// X是随机列向量

$X=(X(\tau_1),\ldots,X(\tau_n))$

$\Rightarrow\forall\alpha\in\mathbb{R}^n,\alpha^T R\alpha=\alpha^T E(XX^T)\alpha=E(\alpha^T XX^T\alpha)=E(\alpha^T X)^2\geq 0$。

1.4.2 推导

若相关函数$R_X(\tau)$正定，则可得如下性质

（1）性质一： $R_X(0)\geq 0$

令$n=1$，有τ_1，令$\alpha=1$， $R=(R_X(\tau_1))$， 由$\alpha^T R\alpha\geq 0$得$R_X(0)\geq 0$。

（2）性质二： $|R(\tau)|\leq R_X(0)$

令$n=2$，有τ_1,τ_2，令$\alpha=[1,1]^T$， $R=\begin{pmatrix}R_X(\tau_1-\tau_1) & R_X(\tau_1-\tau_2)\\ R_X(\tau_2-\tau_1) & R_X(\tau_2-\tau_2)\end{pmatrix}$，进一步令

$\tau_1-\tau_2=\tau$，得$R=\begin{pmatrix}R_X(0) & R_X(\tau)\\ R_X(-\tau) & R_X(0)\end{pmatrix}$，由$\alpha^T R\alpha\geq 0$得$|R(\tau)|\leq R_X(0)$。

1.4.3 总结

正定性是一个相当强的条件。

1.5 正定性与傅里叶变换

（1）依据函数$f(x)$的傅里叶变换$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)exp(-j\omega t)dt$是否大于 0，判定函数$f(x)$是否具有正定性。

（2）不是在时域上有正定性而是在频域上有正定性。

（3）矩形窗口函数经过傅里叶变换得到$Sa(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$Sa(x)\geq 0$不成立，可知矩形波函数不是相关函数。

1.6 $F(R_X)$的物理意义

相关函数R_X经过傅里叶变换F得到的函数$F(R_X)$的物理意义是什么?下面引入谱分析。

$X(t)$ deterministic

（0） $X(t)=X(t+T)$， T是一个常数;

（1） $X(t)$有周期性可以进行傅里叶展开

$X(t)=\sum_k \alpha_k \exp(j\frac{2k\pi}{T}t)$ 傅里叶级数

$\alpha_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} X(t)\exp(-j\frac{2k\pi}{T}t)dt$

（2）将傅里叶级数表示成积分形式

$X(t)=\sum_k \frac{1}{T}(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} X(S)\exp(-j\frac{2k\pi}{T}Sds)\exp(j\frac{2k\pi}{T}t)$

（3）取极限令$T\to\infty$

$$X(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_k\frac{2\pi}{T}(\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}X(S)\exp(-j\frac{2k\pi}{T}Sds)\exp(j\frac{2k\pi}{T}t)$$

（4）得到频域表示方式

从整体上看，傅里叶这一部分的核心操作是在将时域转化为频域。

1.6.1 随机过程谱分析

$$\frac{1}{T}E|\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}X(t)\exp(-j\omega t)dt|^2\xrightarrow{T\to\infty}?$$

$$\frac{1}{T}E|\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}X(t)\exp(-j\omega t)dt|^2$$

$$\frac{1}{T}E(\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}X(t)\exp(-j\omega t)dt)(\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}X(S)exp(-j\omega s)ds)^*$$

$$=\frac{1}{T}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}E(X(t)X^*(S))\exp(-j\omega(t-s))dtds$$

$$=\frac{1}{T}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}R_X(t-s)\exp(-j\omega(t-s))dtds$$

积分换元注意三件事:

（1）变元

$u=t-s$， $v=t+s$， $(t,s)\to(u,v)$

（2）d 积分元

$dtds=|\det(\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)})|dudv$， 其中 $\det(\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)})$ 是雅可比行列式。

此处 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)}$ 比 $\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)}$ 好计算，最终倒数倒过来 1/2。

（3）积分区间

由于此处换元是线性变换，所以我们只需要关注四个顶点 $(\frac{T}{2},\frac{T}{2})$，$(\frac{-T}{2},\frac{T}{2})$ $(\frac{T}{2},\frac{-T}{2})$ $(\frac{-T}{2},\frac{-T}{2})$ 即可得到新的积分区间。

$$=\frac{1}{T}\int\int\frac{1}{2}R_X(u)\exp(-j\omega u)dvdu$$

$$=\frac{1}{T}(\int_{-T}^{0}\int_{-u-t}^{u+t}+\int_{0}^{T}\int_{u-t}^{-u+t})\frac{1}{2}R_X(u)\exp(-j\omega u)dvdu$$

$$=\frac{1}{T}(\int_{-T}^{0}\int_{|u|-t}^{-|u|+t}+\int_{0}^{T}\int_{|u|-t}^{-|u|+t})\frac{1}{2}R_X(u)\exp(-j\omega u)dvdu$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}(2T-2|u|)R_X(u)\exp(-j\omega u)du$$

$$\int_{-T}^{T}(1-\frac{|u|}{T})R_X(\tau)\exp(-j\omega u)du$$

（） 令 $T\to\infty$，我们得到相关函数的傅里叶变换

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}X(t)\exp(-j\omega t)dt\right|^2=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(u)\exp(-j\omega u)du$$

通过量纲分析，我们可以知道相关函数经傅里叶变换得到的是能量。

频率谱密度定义： $S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(u)\exp(-j\omega u)du$ ；

频率谱密度非形式化含义：每一个频点 ω 上的功率大小 $S_X(\omega)$；

能量=功率/密度。

1.7　推导功率谱密度 $S_X(\omega)$ 与 $S_Y(\omega)$ 关系

输入确定信号 $\{X(t),H,Y(t)\}$： $Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$；

输入随机信号 $\{S_X(\omega),H,S_Y(\omega)\}$： $S_Y(\omega)=?S_X(\omega)$ ；

下面推导输入功率谱密度 $S_X(\omega)$ 与通过线性变换 H 之后得到的功率谱密度 $S_Y(\omega)$ 之间的关系。

卷积 $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)X(\tau)d\tau$

$$R_Y(t,s)=E(Y(t)Y(s))=E\left(\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)X(\tau)d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}h(s-r)X(r)dr\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)h(s-r)E(X(\tau)X(r))d\tau dr$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)h(s-r)R_X(\tau-r)d\tau dr$$

令 $\tilde{h}(t)=h(-t)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\tilde{h}(r-s)R_X(\tau-r)d\tau dr$$

$$=(h\otimes\tilde{h}\otimes R_X)(t-s)$$

又 $S_Y(\omega)=H(\omega)\tilde{H}(\omega)S_X(\omega)$

由 $\tilde{H}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{h}(t)\exp(-j\omega t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}h(-t)\exp(-j\omega t)dt$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\exp(j\omega t)dt=\overline{\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\exp(-j\omega t)dt}=\overline{H(\omega)}$$

可得 $S_Y(\omega)=H(\omega)\tilde{H}(\omega)S_X(\omega)=H(\omega)\overline{H(\omega)}S_X(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega)$，最终我们得到的结论是 $S_Y(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega)$ 。