第一章概论

第 1 题

某公共汽车站停放两辆公共汽车 A 和 B，从 t=1 秒开始，每隔 1 秒有一乘客到达车站。如果每一乘客以概率$\frac{1}{2}$登上 A 车，以概率$\frac{1}{2}$登上 B 车，各乘客登哪一辆车是相互统计独立的，并用ξ_j代表 t=j 时乘客登上 A 车的状态，即乘客登上 A 车则ξ_j＝1，乘客登上 B 车则ξ_j＝0，则$P\{\xi_j=1\}=\frac{1}{2}, P\{\xi_j=0\}=\frac{1}{2}$, 当 t＝n 时在 A 车上的乘客数为$\eta_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j, \eta_n$是一个二项式分布的计算过程。

（1）求η_n的概率，即$P\{\eta_n=k\}=?\ k=0,1,2,...,n;$

（2）当公共汽车 A 上到达 10 个乘客时，A 即开车（例如 t＝21 时$\eta_{21}=9$，且 t＝22 时又有一个乘客乘 A 车，则 t＝22 时 A 车出发），求 A 车的出发时间 n 的概率分布。

解（1）：

$$P\{\eta_n=k\}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

解（2）：

$$\begin{aligned}
&P\{\text{车A在时刻n开车}\}\\
&=P(\text{在n-1时刻，车A有9名乘客；在n时刻第10名乘客登上车A})\\
&=\binom{n-1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\\
&=\binom{n-1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}
\end{aligned}$$

第 2 题

设有一采用脉宽调制以传递信息的简单通信系统。脉冲的重复周期为 T，每一个周期传递一个值；脉冲宽度受到随机信息的调制，使每个脉冲的宽度均匀分布于（0，T）内，而且不同周期的脉宽是相互统计独立的随机变量；脉冲的幅度为常数 A。也就是说，这个通信系统传送的信号为随机脉宽等幅度的周期信号，它是以随机过程$\xi(t)$。图题 1－2 画出了它的样本函数。试求$\xi(t)$的一维概率密度$f_{\xi_t}(x)$。

解：

$$f_{\xi_t}(x)=P_A\delta(x-A)+P_0\delta(x)$$
$$P\{\xi(t)=A\}=P_A \quad P\{\xi(t)=0\}=P_0$$
$$t\in[(n-1)T,nT] \ \ n\text{是任意的,脉冲宽度}\eta_n\in(0,T)$$
$$\begin{aligned}P\{\xi(t)=A\}&=P\{t\in[(n-1)T,nT+\eta_n]\}\\&=P\{\eta_n>[t-(n-1)T]\}\\&=\int_{t-(n-1)T}^{T}\frac{1}{T}d\eta\\&=\frac{T-t+(n-1)T}{T}\\&=\frac{nT-t}{T}\\&=n-\frac{t}{T}\\&=1-\frac{t-(n-1)T}{T}\end{aligned}$$
$$P\{\xi(t)=0\}=1-P\{\xi(t)=A\}=\frac{t-(n-1)T}{T}=\frac{t}{T}-(n-1)$$
$$\begin{aligned}\therefore\ f_{\xi_t}(x)&=P_A\delta(x-A)+P_0\delta(x)\\&=\left(n-\frac{t}{T}\right)\delta(x-A)+\left(\frac{t}{T}-(n-1)\right)\delta(x)\end{aligned}$$

第 3 题

设有一随机过程$\xi(t)$，它的样本函数为周期性的锯齿波。图题 1－3(a)、(b)画出了两个样本函数图。各样本函数具有统一形式的波形，其区别仅在于锯齿波的起点位置不同。设在 t=0 后的第一个零值点位于τ_0，τ_0是一个随机变量，它在（0，T）内均匀分布，即

$f_{\tau_0}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{T} & (0\le t\le T)\\ 0 & \text{(其它值）}\end{cases}$ 若锯齿波的幅度为 A，求随机过程$\xi(t)$的一维概率密度。

解（1）：$\xi(t)$取值在 0，A 之间，且均匀分布

$$f_{\xi(t)}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{A} & (0\le x\le A)\\ 0 & \text{(其它值）}\end{cases}$$

解（2）：

令$\xi(t)$＝x，则 x=k(t-τ_0)，$(0\le x\le A)$，t=$t^{'}-\left\lfloor\dfrac{t^{'}}{T}\right\rfloor T$，k 为斜率。所以$\tau_0$=t-$\dfrac{x}{k}$。

$$f_{\xi(t)}(x)=\begin{cases}=\frac{1}{T}\bullet\left|-\frac{1}{k}\right|=\frac{1}{A} & (0\le x\le A)\\ 0 & (\text{其它值})\end{cases}$$

第 4 题

设有随机过程$\zeta(t)=\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t\quad(-\infty<t<\infty)$其中$\omega$为常数，且$\omega$>0，$\xi$和$\eta$是随机变量，且相互统计独立，它们的概率密度为

$$f_{\xi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}\quad(-\infty<x<\infty)$$
$$f_{\eta}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{y^2}{2}\}\quad(-\infty<y<\infty)$$

即ξ和η是正态分布 N（0，1）随机变量。若把$\zeta(t)$写成$\zeta(t)=V\sin(\omega t+\phi)$的形式，

（1）求 $f_v(v), f_{\varphi}(\varphi), f_{v\varphi}(v,\varphi),$ 问 V 和ϕ是否统计独立。

（2）画出$\zeta(t)$的典型样本函数；

（3）求$\zeta(t)$的一维概率密度 $f_{\xi_t}(z)$；

（4）设有事件 A，$A\underline{\underline{\Delta}}\{\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}\zeta^2(t)dt>c\}$，其中 c 为常数，求出现 A 事件的概率 P(A)。

解（1）：

ξ,η 相互独立，故其联合概率密度为 $f_{\xi\eta}(x,y)=f_{\xi}(x)\cdot f_{\eta}(y)$，利用随机变量变换后的概率密度的公式，可得到$v,\phi$的联合概率密度：

$$f_{v\phi}(v,\phi)=f_{\xi}(v\sin\phi)\cdot f_{\eta}(v\cos\phi)\cdot|J|$$

$$\begin{aligned}\zeta(t)&=V\sin(\omega t+\phi)\\&=V\sin\phi\cos\omega t+V\cos\phi\sin\omega t\\&=\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\xi=V\sin\phi\\ \eta=V\cos\phi\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}V=\sqrt{\xi^2+\eta^2} & (0<V<+\infty)\\ \phi=\tan^{-1}\frac{\xi}{\eta} & (0<\phi<2\pi)\end{cases}$$

Jacobi 行列式：

$$|J| = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(V,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(v\sin\phi)}{\partial v} & \frac{\partial(v\cos\phi)}{\partial v} \\ \frac{\partial(v\sin\phi)}{\partial\phi} & \frac{\partial(v\cos\phi)}{\partial\phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\phi & \cos\phi \\ V\cos\phi & -V\sin\phi \end{vmatrix} = V$$

$$\begin{aligned} f_{V\phi}(v,\varphi) &= f_{\xi\eta}(\xi(v,\varphi),\eta(v,\varphi))\bullet |J| \\ &= f_{\xi\eta}(x,y)\bullet |J| \\ &= f_{\xi}(x) f_{\eta}(y) V \\ &= \frac{V}{2\pi} e^{-\frac{V^2}{2}} \end{aligned}$$

所以v,ϕ的联合概率密度 $f_{v\phi}(v,\phi) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{v^2}{2})\cdot v$。该式分别对$v,\phi$在各自的定义域内积分 ，即得$v,\phi$的概率密度：

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_0^{2\pi} f_{V\phi}(v,\varphi)d\varphi \\ &= Ve^{-\frac{V^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\phi}(\varphi) &= \int_0^{+\infty} f_{V\phi}(v,\varphi)dv \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{V}{2\pi} e^{-\frac{V^2}{2}} dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

因为 $f_v(v)\cdot f_{\phi}(\phi) = f_{v\phi}(v,\phi)$，所以可知二者统计独立。

解（2）：

典型样本函数图形，略。

解（3）：

利用特征函数求解。

在 t 时刻，cos(wt),sin(wt) 值均给定。

高斯随机变量ξ的特征函数为$\Phi_{\xi}(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$

高斯随机变量η的特征函数为$\Phi_{\eta}(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$

因此$\xi\cos\omega t, \eta\sin\omega t$的特征函数分别为，

$$\Phi_\xi(u\cos\omega t)=\exp\left(-\frac{u^2\cos^2(\omega t)}{2}\right),$$

$$\Phi_\eta(u\sin\omega t)=\exp\left(-\frac{u^2\sin^2(\omega t)}{2}\right)$$

又因为 $\zeta(t)=\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t$，故随机变量 ζ 的特征函数为 $\Phi_\xi(u\cos\omega t)\cdot\Phi_\eta(u\sin\omega t)=\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$，所以随机变量 ζ 的概率密度为其特征函数的傅立叶反变换，计算得：

$$f_\zeta(\mathrm{z})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

解（4）：

若 c 小于零，则事件 A 为必然事件，P（A）=1；

若 c 大于等于零，

考察 $\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}\zeta^2(t)dt$，变形为：

$$\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}v^2\sin^2(\omega t+\phi)dt$$
$$=v^2$$

P{A}=P{ $v^2>c$ }=P{ $v>\sqrt{c}$ }= $\int_{\sqrt{c}}^{\infty}v\cdot\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv=\exp\left(-\frac{c}{2}\right)$

第 5 题

求第 4 题所给出的随机过程 $\zeta(t)$ 的均值和自相关函数。

解：

$$\begin{aligned}E\{\zeta(t)\}&=E\{\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t\}\\&=E\{\xi\}\cos\omega t+E\{\eta\}\sin\omega t\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&R_\xi(t_1,t_2)=E\{\zeta(t_1)\zeta(t_2)\}\\&=E\{(\xi\cos\omega t_1+\eta\sin\omega t_1)(\xi\cos\omega t_2+\eta\sin\omega t_2)\}\\&=E\{\xi^2\}\cos\omega t_1\cos\omega t_2+E\{\xi\eta\}\cos\omega t_1\sin\omega t_2\\&\qquad+E\{\xi\eta\}\cos\omega t_2\sin\omega t_1+E\{\eta^2\}\sin\omega t_1\sin\omega t_2\\&=\cos\omega t_1\cos\omega t_2+\sin\omega t_1\sin\omega t_2\\&=\cos(\omega t_1-\omega t_2)\\&=\cos(\omega\tau)\end{aligned}$$

第 6 题

设有随机过程$\xi(t)$，并设 x 是一实数，定义另一个随机过程$\eta(t)$ $\begin{cases}\eta(t)=1 & (\xi(t)<x)\\ \eta(t)=0 & (\xi(t)\ge x)\end{cases}$

试证$\eta(t)$的均值和自相关函数分别为随机过程$\xi(t)$的一维和二维分布函数。

解：

$$\begin{aligned}E\{\eta(t)\}&=1\bullet P\{\xi(t)<x)+0\bullet P\{\xi(t)\ge x\}\\&=P\{\xi(t)<x)\\&=F_\xi(x)\\E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}&=1\bullet 1P\{\xi(t_1)<x_1,\xi(t_2)<x_2)\\&=P\{\xi(t_1)<x_1,\xi(t_2)<x_2)\\&=F_\xi(x_1,x_2)\end{aligned}$$

第 7 题

设有随机过程$\{\xi(t),\quad -\infty<t<\infty\},\xi(t)=\eta\cos t$，其中$\eta$为均匀分布于（0,1）间的随机变量，即 $f_\eta(y)=\begin{cases}1 & (0\le y<1)\\ 0 & (\text{其它y值})\end{cases}$ 试证：

（1）$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=\dfrac{1}{3}\cos t_1\cos t_2$

（2）$C_{\xi\xi}(t_1,t_2)=\dfrac{1}{12}\cos t_1\cos t_2$

解（1）：

$$\begin{aligned}&R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=E\{\eta\cos t_1\eta\cos t_2\}\\&=E\{\eta^2\}\cos t_1\cos t_2\\&=\int_0^1\eta^2 d\eta\cos t_1\cos t_2\\&=\frac{1}{3}\cos t_1\cos t_2\end{aligned}$$

解（2）：

$$E\{\eta\}=\int_0^1\eta d\eta=\frac{1}{2}$$

$$E\{\xi\}=E\{\eta\cos t\}=E\{\eta\}\cos t=\frac{1}{2}\cos t$$

$$C_{\xi\xi}(t_1,t_2)=E\{(\eta\cos t_1-\frac{1}{2}\cos t_1)(\eta\cos t_2-\frac{1}{2}\cos t_2)\}$$

$$
\begin{aligned}
&= E\{\eta^2\}\cos t_1 \cos t_2 - \frac{1}{2}E\{\eta\}\cos t_1 \cos t_2 \\
&\qquad -\frac{1}{2}E\{\eta\}\cos t_1 \cos t_2 + \frac{1}{4}\cos t_1 \cos t_2 \\
&= \frac{1}{3}\cos t_1 \cos t_2 - \frac{1}{4}\cos t_1 \cos t_2 - \frac{1}{4}\cos t_1 \cos t_2 + \frac{1}{4}\cos t_1 \cos t_2 \\
&= \frac{1}{12}\cos t_1 \cos t_2
\end{aligned}
$$

第 8 题

设有一随机过程$\xi(t)$作为图题 1－8 所示的线性系统的输入，系统的输出为$\eta(t)$，若$\xi(t)$的相关函数为$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$，是求输出随机过程$\eta(t)$的自相关函数（用输入过程的相关函数表示）。

解：

$$
\begin{aligned}
&R_{\eta\eta}(t_1,t_2) = E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\} \\
&= E\{[\xi(t_1-T)-\xi(t_1)][\xi(t_2-T)-\xi(t_2)]\} \\
&= E\{\xi(t_1-T)\xi(t_2-T)\} - E\{\xi(t_1-T)\xi(t_2)\} \\
&\qquad - E\{\xi(t_1)\xi(t_2-T)\} + E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} \\
&= R_{\xi\xi}(t_1-T,t_2-T) - R_{\xi\xi}(t_1-T,t_2) \\
&\qquad - R_{\xi\xi}(t_1,t_2-T) + R_{\xi\xi}(t_1,t_2)
\end{aligned}
$$

第 9 题

设$\xi(\omega,t)$是§3 例二所定义的随机电报信号（即任何时刻$\xi(\omega,t)$以概率 1 / 2 取值 0 或 1，单位内时间波形平均变化次数为λ_ξ），$\eta(\omega,t)$也是 0、1 随机电报信号，它在单位内时间波形平均变化次数为λ_η，且$\xi(\omega,t)$和$\eta(\omega,t)$是相互统计独立的；又设随机过程$\zeta(\omega,t)$是$\xi(\omega,t)$、$\eta(\omega,t)$两随机信号之和，即$\zeta(\omega,t)=\xi(\omega,t)+\eta(\omega,t)$。

（1）试画出$\zeta(\omega,t)$的典型样本函数；

（2）试求$\zeta(\omega,t)$的一维概率密度；

（3）设有两时刻 t_1,t_2,求$\zeta(t_1)$和$\zeta(t_2)$的二维联合概率密度。

解（1）：略。

解（2）：

$$P\{\zeta(\omega,t)=0\}=P\{\xi(\omega,t)=0\}P\{\eta(\omega,t)=0\}$$
$$=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$
$$P\{\zeta(\omega,t)=1\}=P\{\xi(\omega,t)=0\}P\{\eta(\omega,t)=1\}$$
$$+P\{\xi(\omega,t)=0\}P\{\eta(\omega,t)=1\}$$
$$=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$P\{\zeta(\omega,t)=2\}=P\{\xi(\omega,t)=1\}P\{\eta(\omega,t)=1\}$$
$$=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$
$$\therefore f_\zeta(z)=\frac{1}{4}\delta(z)+\frac{1}{2}\delta(z-1)+\frac{1}{4}\delta(z-2)$$

解（3）：

随机电报信号 t_1,t_2 之间发生偶数次变化的概率是

$$\sum_{k=even}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$
$$=\frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)})$$
$$=\frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)})$$

随机电报信号 t_1,t_2 之间发生奇数次变化的概率是

$$\sum_{k=odd}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$
$$=\frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)})$$
$$=\frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)})$$

$\zeta(t_1)$ 和 $\zeta(t_2)$ 的二维联合概率密度＝

$$=\frac{1}{4}\delta(z_1)\left\{\begin{array}{l}P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{偶数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{偶数次变化}\}\delta(z_2)\\+[P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{偶数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{奇数次变化}\}\\\qquad+P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{奇数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{偶数次变化}\}]\delta(z_2-1)\\+P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{奇数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{奇数次变化}\}\delta(z_2-2)\end{array}\right\}$$

$$+\frac{1}{4}\delta(z_1-1)\left\{\begin{array}{l}[P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{偶数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{奇数次变化}\}\\\qquad+P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{奇数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{偶数次变化}\}]\delta(z_2)\\+2[P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{奇数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{奇数次变化}\}\\\qquad+P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{偶数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{偶数次变化}\}]\delta(z_2-1)\\+[P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{偶数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{奇数次变化}\}\\\qquad+P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{奇数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{偶数次变化}\}]\delta(z_2-2)\end{array}\right\}$$

$$+\frac{1}{4}\delta(z_1-2)\left\{\begin{array}{l}P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{奇数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{奇数次变化}\}\delta(z_2)\\+[P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{偶数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{奇数次变化}\}\\\qquad+P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{奇数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{偶数次变化}\}]\delta(z_2-1)\\+P\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\text{偶数次变化}\eta_{t_1}\eta_{t_2}\text{偶数次变化}\}\delta(z_2-2)\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\delta(z_1)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}(1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)})^2\delta(z_2)\\\qquad+\frac{1}{2}(1-e^{-4\lambda(t_2-t_1)})\delta(z_2-1)\\\qquad+\frac{1}{4}(1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)})^2\delta(z_2-2)\end{array}\right\}$$

$$+\frac{1}{4}\delta(z_1-1)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}(1-e^{-4\lambda(t_2-t_1)})\delta(z_2)\\\qquad+(1+e^{-4\lambda(t_2-t_1)})\delta(z_2-1)\\\qquad+\frac{1}{2}(1-e^{-4\lambda(t_2-t_1)})\delta(z_2-2)\end{array}\right\}$$

$$+\frac{1}{4}\delta(z_1-2)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}(1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)})^2\delta(z_2)\\\qquad+\frac{1}{2}(1-e^{-4\lambda(t_2-t_1)})\delta(z_2-1)\\\qquad+\frac{1}{4}(1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)})^2\delta(z_2-2)\end{array}\right\}$$

第 10 题

质点在直线上作随机游动，即在 t＝1，2，3，…时质点可以在 x 轴上往右或往左作一个单位距离的随机游动。若往右移动一个单位距离的概率为 p，往左移动一个单位距离的概率为 q，即 $P\{\xi_i=+1\}=p, P\{\xi_i=-1\}=q, p+q=1$，且各次游动是相互统计独立的。经过

n 次游动，质点所处的位置为 $\eta_n = \eta(n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$。

（1）求 $\eta(n)$ 的均值；

（2）求 $\eta(n)$ 的相关函数和自协方差函数 $R_{\eta\eta}(n_1, n_2)$ 和 $C_{\eta\eta}(n_1, n_2)$。

解（1）：

$$
\begin{aligned}
E\{\eta(n)\} &= E\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\{\xi_i\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{1 \times p + (-1) \times q\} \\
&= n(p - q) \\
&= n(2p - 1)
\end{aligned}
$$

解（2）：

$$
\begin{aligned}
R_{\eta\eta}(n_1, n_2) &= E\{\eta(n_1)\eta(n_2)\} \\
&= E\{\sum_{i=1}^{n_1} \xi_i \sum_{j=1}^{n_2} \xi_j\} \\
&= E\{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n_2} \xi_i \xi_j + \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=i}^{n_2} \xi_i \xi_j\} \\
&= n_1 n_2 (2p-1)^2 + \min(n_1, n_2)[1 - (2p-1)^2] \\
&= n_1 n_2 (2p-1)^2 + \min(n_1, n_2) 2p(2-2p)
\end{aligned}
$$

我做的结果：

$$
\begin{aligned}
R_{\eta\eta}(n_1, n_2) &= E\{\eta(n_1)\eta(n_2)\} \\
&= E\{\sum_{i=1}^{n_1} \xi_i \sum_{j=1}^{n_2} \xi_j\} \\
&= E\{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n_2} \xi_i \xi_j + \sum_{i=1}^{\min(n_1,n_2)} \xi_i\} \\
&= E\{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n_2} \xi_i \xi_j\} + E\{\sum_{i=1}^{\min(n_1,n_2)} \xi_i{}^2\} \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n_2} E\{\xi_i \xi_j\} + \sum_{i=1}^{\min(n_1,n_2)} E\{\xi_i{}^2\} \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n_2} E\{\xi_i\} E\{\xi_j\} + \min(n_1, n_2)(p+q) \\
&= n_1 n_2 (2p-1)^2 + \min(n_1, n_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{\eta\eta}(n_1,n_2) &= E\{(\eta(n_1)-E[\eta(n_1)])(\eta(n_2)-E[\eta(n_2)])\\
&= E\{\eta(n_1)\eta(n_2)\}-E\{\eta(n_1)\}E\{\eta(n_2)\}\\
&= R_{\eta\eta}(n_1,n_2)-n_1n_2(2p-1)^2
\end{aligned}
$$

第 11 题

设有§2 例二所定义的四电平随机调幅信号$\xi(t)$，求它的自协方差函数。

解：

$$
E\{\xi(t)\}=2\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+(-2)\times\frac{1}{4}+(-1)\times\frac{1}{4}=0
$$

$$
\begin{aligned}
C_{\xi\xi}(t_1,t_2) &= E\{(\xi(t_1)-E[\xi(t_1)])(\xi(t_2)-E[\xi(t_2)])\\
&= E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}-E\{\xi(t_1)\}E\{\xi(t_2)\}\\
&= R_{\xi\xi}(t_1,t_2)
\end{aligned}
$$

当$|t_1-t_2|<T_0$时

$$
\begin{aligned}
C_{\xi\xi}(t_1,t_2) &= R_{\xi\xi}(t_1,t_2)\\
&= \frac{1}{16}\bullet\frac{|t_1-t_2|}{T_0}\sum_{i=-2,-1,1,2} i\sum_{j=-2,-1,1,2} j+\frac{1}{4}\bullet(1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0})\sum_{i=j=-2,-1,1,2} ij\\
&= 0+\frac{1}{4}\bullet(1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0})(1^2+2^2+(-1)^2+(-2)^2)\\
&= \frac{5}{2}\bullet(1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0})
\end{aligned}
$$

当$|t_1-t_2|>T_0$时

$$
\begin{aligned}
C_{\xi\xi}(t_1,t_2) &= R_{\xi\xi}(t_1,t_2)\\
&= \frac{1}{16}\bullet\sum_{i=-2,-1,1,2} i\sum_{j=-2,-1,1,2} j\\
&= 0
\end{aligned}
$$

第 12 题

设有§2 例五所定义的、幅度服从正态分布的随机调幅信号$\xi(t)$，求它的自协方差函数。

解：

由定义知：

$$
E\{\xi(t)\}=0
$$

$$
\begin{aligned}
C_{\xi\xi}(t_1,t_2) &= E\{(\xi(t_1)-E[\xi(t_1)])(\xi(t_2)-E[\xi(t_2)])\\
&= E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}-E\{\xi(t_1)\}E\{\xi(t_2)\}\\
&= R_{\xi\xi}(t_1,t_2)
\end{aligned}
$$

若丨$t_1-t_2|>T$

$$
C_{\xi\xi}(t_1,t_2)=E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}=E\{\xi(t_1)\}E\{\xi(t_2)\}=0
$$

若丨t_1-t_2|<T

$$
\begin{aligned}
C_{\xi\xi}(t_1, t_2) &= E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} \\
&= \frac{|t_1 - t_2|}{T_0} \times 0 + \left(1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T_0}\right) E\{[\xi(t)]^2\} \\
&= \left(1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T_0}\right) \sigma^2
\end{aligned}
$$

马尔可夫过程（I）－马尔可夫链

第 1 题

设 $\xi(t)$ 是一马尔可夫过程，又设 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \cdots < t_{n+k}$，试证明 $f_{t_n/t_{n+1},\cdots,t_{n+k}}(x_n / x_{n+1},\cdots,x_{n+k}) = f_{t_n/t_{n+1}}(x_n / x_{n+1})$ 即一个马尔可夫过程的反向也具有马尔可夫性。

解：

$$
\begin{aligned}
& f_{t_n/t_{n+1},\cdots,t_{n+k}}(x_n / x_{n+1},\cdots,x_{n+k}) \\
&= \frac{f_{t_n,t_{n+1},\cdots,t_{n+k}}(x_n, x_{n+1},\cdots,x_{n+k})}{f_{t_{n+1},\cdots,t_{n+k}}(x_{n+1},\cdots,x_{n+k})} \\
&= \frac{f_{t_{n+k}/t_{n+k-1}}(x_{n+k} / x_{n+k-1})\cdots f_{t_{n+1}/t_n}(x_{n+1} / x_n) f_{t_n}(x_n)}{f_{t_{n+k}/t_{n+k-1}}(x_{n+k} / x_{n+k-1})\cdots f_{t_{n+2}/t_{n+1}}(x_{n+2} / x_{n+1}) f_{t_{n+1}}(x_{n+1})} \\
&= \frac{f_{t_{n+1}/t_n}(x_{n+1} / x_n) f_{t_n}(x_n)}{f_{t_{n+1}}(x_{n+1})} \\
&= \frac{f_{t_{n+1},t_n}(x_{n+1}x_n)}{f_{t_{n+1}}(x_{n+1})} \\
&= f_{t_n/t_{n+1}}(x_n / x_{n+1})
\end{aligned}
$$

第 2 题

试证明对于任何一个马尔可夫过程，如“现在”的$\xi(t)$值为已知，则该过程的“过去”和“将来”是相互统计独立的，即如果有$t_1 < t_2 < t_3$，其中 t_2 代表“现在”，t_1 代表“过去”，t_3 代表“将来”，若$\xi(t_2) = x_2$ 为已知值，试证明 $f_{t_1,t_3/t_2}(x_1, x_3 / x_2) = f_{t_1/t_2}(x_1 / x_2) f_{t_3/t_2}(x_3 / x_2)$

解：

$$
\begin{aligned}
f_{t_1,t_3/t_2}(x_1, x_3 / x_2) &= \frac{f_{t_1,t_3,t_2}(x_1, x_3, x_2)}{f_{t_2}(x_2)} \\
&= \frac{f_{t_3/t_2}(x_3 / x_2) f_{t_2/t_1}(x_2 / x_1) f_{t_1}(x_1)}{f_{t_2}(x_2)} \\
&= \frac{f_{t_3/t_2}(x_3 / x_2) f_{t_2,t_1}(x_2, x_1)}{f_{t_2}(x_2)} \\
&= f_{t_1/t_2}(x_1 / x_2) f_{t_3/t_2}(x_3 / x_2)
\end{aligned}
$$

第 3 题

若 $\xi(t)$ 是一马尔可夫过程，$t_1 < t_2 < \cdots < t_m < t_{m+1} < t_{m+2}$，试证明

$$f_{t_{m+1},t_{m+2}/t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_{m+1},x_{m+2}/x_1,x_2,\cdots,x_m)=f_{t_{m=1},t_{m+2}/t_m}(x_{m+1},x_{m+2}/x_m)$$

解：

$$\begin{aligned}
&f_{t_{m+1},t_{m+2}/t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_{m+1},x_{m+2}/x_1,x_2,\cdots,x_m)\\
&=\frac{f_{t_{m+1},t_{m+2},t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_{m+1},x_{m+2},x_1,x_2,\cdots,x_m)}{f_{t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_1,x_2,\cdots,x_m)}\\
&=\frac{f_{t_{m+2}/t_{m+1}}(x_{m+2}/x_{m+1})f_{t_{m+1}/t_m}(x_{m+1}/x_m)\cdots f_{t_2/t_1}(x_2/x_1)f_{t_1}(x_1)}{f_{t_m/t_{m-1}}(x_m/x_{m-1})\cdots f_{t_2/t_1}(x_2/x_1)f_{t_1}(x_1)}\\
&=f_{t_{m+2}/t_{m+1}}(x_{m+2}/x_{m+1})f_{t_{m+1}/t_m}(x_{m+1}/x_m)\\
&=f_{t_{m=1},t_{m+2}/t_m}(x_{m+1},x_{m+2}/x_m)
\end{aligned}$$

第 4 题

若有随机变量序列$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$，且$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$为相互统计独立的随机变量，$\xi_n$的概率密度为$f_{\xi_n}(x_n)=f_n(x_n),E\{\xi_n\}=0,n=1,2,\cdots$。定义另一随机变量序列$\{\eta_n\}$如下：

$$\begin{aligned}
&\eta_1=\xi_1\\
&\eta_2=\xi_1+\xi_2\\
&\eta_3=\xi_1+\xi_2+\xi_3\\
&\cdots\cdots\\
&\eta_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

试证明：

（1）序列$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots$具有马尔可夫性；

（2）$E\{\eta_n/\eta_1=y_1,\eta_2=y_2,\cdots,\eta_{n-1}=y_{n-1}\}=E\{\eta_n/\eta_{n-1}=y_{n-1}\}=y_{n-1}$

解（1）：略（附后）

解（2）：略（附后）

第 5 题

设有随机过程$\xi(n),n=1,2,3,\cdots$，它的状态空间 I：{x: 0<x<1}是连续的，它的参数 T 为离散的，T＝n，n=1,2,…。设$\xi(1)$为(0,1)间均匀分布的随机变量，即$\xi(1)$的概率密度为

$$f_1(x_1)=f_{\xi(1)}(x_1)=\begin{cases}1 & (0<x_1<1)\\ 0 & (\text{其它})\end{cases}$$，$\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(\mathrm{m})$的联合概率密度为

$$\begin{cases} f_{1,2,\cdots,m}(x_1,x_2,\cdots,x_m) \\ \qquad = f_{\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(m)}(x_1,x_2,\cdots,x_m) \\ \qquad = \dfrac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{m-1}} \quad (0 < x_m < x_{m-1} \cdots < x_1 < 1) \\ f_{1,2,\cdots,m}(x_1,x_2,\cdots,x_m) = 0 \quad (\text{其它}x_i\text{值}) \end{cases}$$

（1）求$\xi(2)$的边际概率密度;

（2）试问该过程是否为马尔可夫过程;

（3）求转移概率密度 $f_{2/1}(x_2/x_1),\cdots\cdots, f_{m/m-1}(x_m/x_{m-1})$。

（4）求 $P\{\xi(1)<\frac{3}{4},\xi(3)<\frac{1}{3}\}$。

解（1）:

$$f_{\xi(1),\xi(2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{x_1} \quad (0 < x_2 < x_1 < 1)$$

$$f_{\xi(2)}(x_2) = \int_{x_2}^{1} f_{\xi(1),\xi(2)}(x_1,x_2)dx_1 = \int_{x_2}^{1}\frac{1}{x_1}dx_1 = -\ln x_2$$

解（2）:

$$\begin{aligned} & f_{\xi(m)/\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(m-1)}(x_m/x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}) \\ &= \frac{f_{\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(m)}(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{f_{\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(m-1)}(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})} \\ &= \frac{1}{x_1 x_2\cdots x_{m-1}} / \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{m-2}} \\ &= \frac{1}{x_{m-1}} \quad (0 < x_m < x_{m-1} \cdots < x_1 < 1) \end{aligned}$$

$f_{\xi(m)/\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(m-1)}(x_m/x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})$只与$\xi(m-1)$有关，该过程是马尔可夫过程。

解（3）:

$$f_{2/1}(x_2/x_1) = \frac{1}{x_1} \quad (0 < x_2 < x_1 < 1),$$

$\cdots\cdots,$

$$f_{m/m-1}(x_m/x_{m-1}) = \frac{1}{x_{m-1}} \qquad (0 < x_m < x_{m-1} < \cdots < 1)$$

解（4）：略（附后）

第 6 题

设有一参数离散、状态连续的随机过程 $\xi(n), n=1,2,3,\cdots$， 它的状态空间为：

$I:\{x;x\geq 0\}$，又$\xi(1)$的概率密度为

$$f_{\xi(1)}(x_1)=f_1(x_1)=\begin{cases}e^{-x_1} & (x_1\geq 0)\\ 0 & (其它x_i值)\end{cases}$$

$\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(\mathrm{m})$的 m 维联合概率密度为

$$\begin{cases}\mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m}}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_\mathrm{m})\\ \quad=\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\cdots\mathrm{x}_{\mathrm{m}\text{-}1}\bullet\exp\{-(x_m x_{m-1}+x_{m-1}x_{m-2}+\cdots+x_2x_1+x_1)\}\\ \qquad\qquad (x_1\geq 0,x_2\geq 0,\cdots,x_m\geq 0)\\ \mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m}}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_\mathrm{m})=0\ \ (其它x_i值)\end{cases}$$

（1）求$\xi(2)$的概率密度;

（2）求边际概率密度函数$\mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m}\text{-}1}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_{\mathrm{m}\text{-}1})$；

（3）说明该过程是马尔可夫过程，并求其转移概率密度$f_{m/m-1}(x_m/x_{m-1})$；

解（1）：

$$\mathrm{f}_{\xi(1),\xi(2)}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)=x_1\exp\{-(x_2x_1+x_1)\}\quad (x_2\geq 0,x_1\geq 0)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{f}_{\xi(2)}(\mathrm{x}_2)&=\int_0^\infty \mathrm{f}_{\xi(1),\xi(2)}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)dx_1\\ &=\int_0^\infty x_1\exp\{-(x_2x_1+x_1)\}dx_1\\ &=\frac{1}{(x_2+1)^2}\end{aligned}$$

解（2）：

$$\begin{cases}\mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m}\text{-}1}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_{\mathrm{m}\text{-}1})\\ =\int_0^\infty \mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m}}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_\mathrm{m})\mathrm{dx}_\mathrm{m}\\ =\int_0^\infty \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\cdots\mathrm{x}_{\mathrm{m}\text{-}1}\bullet\exp\{-(x_m x_{m-1}+x_{m-1}x_{m-2}+\cdots+x_2x_1+x_1)\}\mathrm{dx}_\mathrm{m}\\ =\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\cdots\mathrm{x}_{\mathrm{m}\text{-}2}\bullet\exp\{-(x_{m-1}x_{m-2}+\cdots+x_2x_1+x_1)\}\ \ (x_1\geq 0,x_2\geq 0,\cdots,x_m\geq 0)\\ \mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m}\text{-}1}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_{\mathrm{m}\text{-}1})\\ =0\ \ (其它x_i值)\end{cases}$$

解（3）：略

$$\begin{aligned}&\mathrm{f}_{\mathrm{m}/1,2,\cdots,\mathrm{m}\text{-}1}(\mathrm{x}_\mathrm{m}/\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_{\mathrm{m}\text{-}1})\\ &=\frac{\mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m}}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_\mathrm{m})}{\mathrm{f}_{1,2,\cdots,\mathrm{m}\text{-}1}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_{\mathrm{m}\text{-}1})}\\ &=\frac{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\cdots\mathrm{x}_{\mathrm{m}\text{-}1}\bullet\exp\{-(x_m x_{m-1}+x_{m-1}x_{m-2}+\cdots+x_2x_1+x_1)\}}{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\cdots\mathrm{x}_{\mathrm{m}\text{-}2}\bullet\exp\{-(x_{m-1}x_{m-2}+\cdots+x_2x_1+x_1)\}}\\ &=\mathrm{x}_{\mathrm{m}\text{-}1}\bullet\exp\{-x_m x_{m-1}\}\ \ (x_m\geq 0,x_{m-1}\geq 0)\end{aligned}$$

$\mathrm{f}_{\xi(\mathrm{m})/\xi(1),\xi(2),\cdots,\xi(\mathrm{m-1})}(\mathrm{x}_\mathrm{m}/\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\cdots,\mathrm{x}_{\mathrm{m-1}})$ 只与 $\xi(m-1)$ 有关，该过程是马尔可夫过程。

第 7 题

有三个黑球和三个白球。把这六个球任意等分给甲、乙两个袋中，并把甲袋中的白球数定义为该过程的状态，则有四种状态：0，1，2，3。现每次从甲、乙两袋中各取一球，然后相互交换，即把从甲袋取出的球放入乙袋，把从乙袋取出的球放入甲袋，经过 n 次交换，过程的状态为 $\xi(n), n=1,2,3,\cdots$。

（1）试问该过程是否为马尔可夫链；

（2）计算它的一步转移概率矩阵。

解（1）：

该过程是马尔可夫链；

解（2）：

$P_{00}=P_{02}=P_{03}=0$

$P_{01}=\{$甲袋全为黑球，乙袋全为白球$\}=1$

$P_{10}=\{$甲袋2个黑球,1个白球，取白球；乙袋2个白球,1个黑球，取黑球$\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$P_{11}=\{$甲袋2个黑球,1个白球，取黑球；乙袋2个白球,1个黑球，取黑球$\}$

$\cup\{$甲袋2个黑球,1个白球，取白球；乙袋2个白球,1个黑球，取白球$\}$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

$P_{12}=\{$甲袋2个黑球,1个白球，取黑球；乙袋2个白球,1个黑球，取白球$\}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

$P_{13}=0$

$P_{20}=0$

$P_{21}=\{$甲袋2个白球，取白球；乙袋2个黑球,1个白球，取黑球$\}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=$

$P_{22}=\{$甲袋2个白球,1个黑球，取黑球；乙袋2个黑球,1个白球，取黑球$\}$

$\cup\{$甲袋2个白球,1个黑球，取白球；乙袋2个黑球,1个白球，取白球$\}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

$P_{23}=\{$甲袋2个白球,1个黑球，取黑球；乙袋2个黑球,1个白球，取白球$\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$P_{30}=P_{31}=0$

$P_{32}=1$

$P_{33}=0$

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

第 8 题

设｛$\xi(n)$｝是一马尔可夫链，它的状态空间为 I：{0,1,2},它的初始状态的概率分布为 $P\{\xi(0)=0\}=\frac{1}{4}, P\{\xi(0)=1\}=\frac{1}{2}, P\{\xi(0)=2\}=\frac{1}{4}$；它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

（1）计算概率 $P\{\xi(0)=0, \xi(1)=1, \xi(2)=1\}$；

（2）计算 $P_{01}{}^{(2)}$。

解（1）：

$$\begin{aligned} & P\{\xi(0)=0, \xi(1)=1, \xi(2)=1\} \\ & =P\{\xi(0)=0\} P\{\xi(1)=1 / \xi(0)=0\} P\{\xi(2)=1 / \xi(1)=1\} \\ & =\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}=\frac{1}{16} \end{aligned}$$

解（2）：

$$P^{(2)}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{36} & \frac{16}{36} & \frac{13}{36} \\ \frac{4}{48} & \frac{13}{48} & \frac{31}{48} \end{pmatrix}$$

$$P_{01}{}^{(2)}=\frac{7}{16}$$

第 9 题

设有马尔可夫链，它的状态空间为 I：{0，1，2}，它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1-p & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

（1）试求 $P^{(2)}$，并证明 $P^{(2)}=P^{(4)}$；

（2）求 $P^{(n)}, n\ge 1$。

解（1）：

$$P^{(2)}=P\bullet P$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1-p & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1-p & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1-p & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\\ 1-p & 0 & p\end{pmatrix}$$

$$P^{(4)}=P^{(2)}\cdot P^{(2)}$$
$$=\begin{pmatrix}1-p & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\\ 1-p & 0 & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-p & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\\ 1-p & 0 & p\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1-p & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\\ 1-p & 0 & p\end{pmatrix}$$
$$\therefore P^{(4)}=P^{(2)}$$

解（2）：

$$P^{(3)}=P^{(2)}\cdot P=\begin{pmatrix}1-p & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\\ 1-p & 0 & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1-p & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1-p & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

若 n 为奇数，$P^{(n)}=P, n\ge 1$；若 n 为偶数，$P^{(n)}=P^{(2)}, n\ge 1$

第 10 题

设有马尔可夫链，它的状态空间为 I:｛0，1｝，它的一步转移概率矩阵为 $P=\begin{pmatrix}p & 1-p\\ 1-p & p\end{pmatrix}$ $(0<p<1)$ 试用数学归纳法证明：

$$P^{(n)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n\end{pmatrix}$$

解：

$$n=1$$

$$P=\begin{pmatrix}p & 1-p\\ 1-p & p\end{pmatrix}\quad (0<p<1)$$

$$P^{(n)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n\end{pmatrix}$$

$$P^{(n+1)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & 1-p\\ 1-p & p\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1}\end{pmatrix}$$

$$\therefore P^{(n)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n\end{pmatrix}$$

第 11 题

设有马尔可夫链，它的状态空间为 I:｛0，1｝，它的一步转移概率矩阵为 $P=\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}$ $(0<a<1,0<b<1)$ 试求 $P^{(n)}$（利用矩阵的特征值、特征矢量方法计算）

解：

对一步转移概率矩阵作特征值分解，其特征值为 λ_1,λ_2 相应的特征矢量是 u_1,u_2，

考虑 1 步转移概率矩阵，

$$Pu_1=\lambda_1 u_1 \qquad Pu_2=\lambda_2 u_2$$

$$P\left(u_1\,u_2\right)=\left(\lambda_1 u_1\,\lambda_2 u_2\right)=\left(u_1\,u_2\right)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\left(u_1\,u_2\right)\Lambda$$

进一步考虑 1 步转移概率矩阵，则有

$$P = P\left(u_1 u_2\right)\left(u_1 u_2\right)^T = \left(u_1 u_2\right)\Lambda\left(u_1 u_2\right)^T$$

再考虑 n 步转移概率矩阵，有

$$\begin{aligned}P^{(n)} = P^n &= \left[\left(u_1 u_2\right)\Lambda\left(u_1 u_2\right)^T\right]^n \\ &= \left(u_1 u_2\right)\Lambda\left(u_1 u_2\right)^T \cdot \left(u_1 u_2\right)\Lambda\left(u_1 u_2\right)^T \cdots \left(u_1 u_2\right)\Lambda\left(u_1 u_2\right)^T \\ &= \left(u_1 u_2\right)\Lambda^n\left(u_1 u_2\right)^T \\ &= \left(u_1 u_2\right)\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}\left(u_1 u_2\right)^T\end{aligned}$$

将 λ_1, λ_2， u_1, u_2 代入上式可以得到最后的结果。

第 12 题

天气预报问题。其模型是：今日是否下雨依赖于前三天是否有雨（即一连三天有雨；前两天有雨，第三天是晴天；…），问能否把这个问题归纳为马尔可夫链。如可以，问该过程的状态有几个？如果过去一连三天有雨，今天有雨的概率为 0.8；过去三天连续为晴天，而今天有雨的概率为 0.2；在其它天气情况时，今日的天气和昨日相同的概率为 0.6。求这个马尔可夫链的转移矩阵。

解：

设下雨为 1，晴天为 0，共有 8 种状态，转移概率矩阵（竖排依次为昨天、前天、大前天；横排依次为今天、昨天、前天）

	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0.8	0	0	0	0.2	0	0	0
001	0.6	0	0	0	0.4	0	0	0
010	0	0.6	0	0	0	0.4	0	0
011	0	0.6	0	0	0	0.4	0	0
100	0	0	0.4	0	0	0	0.6	0
101	0	0	0.4	0	0	0	0.6	0
110	0	0	0	0.4	0	0	0	0.6
111	0	0	0	0.2	0	0	0	0.8

第 13 题

设有马尔可夫链，它的状态空间为 I:｛0，1｝，它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

试求 $f_{00}^{(1)}, f_{00}^{(2)}, f_{00}^{(3)}, f_{01}^{(1)}, f_{01}^{(2)}, f_{01}^{(3)}$

解：

$$f_{00}^{(1)} = P_{00} = \frac{1}{2}$$

$$f_{00}^{(2)} = P_{01}P_{10} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$f_{00}^{(3)} = P_{01}P_{11}P_{10} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$f_{01}^{(1)} = P_{01} = \frac{1}{2}$$

$$f_{01}^{(2)} = P_{00}P_{01} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$f_{01}^{(3)} = P_{00}P_{00}P_{01} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

第 14 题

设有一个三状态 I:｛0，1，3｝的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 \\ q_3 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

试求 $f_{00}^{(1)}, f_{00}^{(2)}, f_{00}^{(3)}, f_{01}^{(1)}, f_{01}^{(2)}, f_{01}^{(3)}$。

解：

$$\begin{aligned}
f_{00}^{(1)} &= P_{00} = p_1 \\
f_{00}^{(2)} &= P_{01}P_{10} + P_{02}P_{20} = q_1\cdot 0 + 0\cdot q_3 = 0 \\
f_{00}^{(3)} &= P_{01}P_{11}P_{10} + P_{01}P_{12}P_{20} + P_{02}P_{22}P_{20} + P_{02}P_{21}P_{10} \\
&= q_1 p_2 \cdot 0 + q_1q_2q_3 + 0 + 0 \\
&= q_1q_2q_3 \\
f_{01}^{(1)} &= P_{01} = q_1 \\
f_{01}^{(2)} &= P_{00}P_{01} + P_{02}P_{21} \\
&= p_1q_1 + 0 \\
&= p_1q_1 \\
f_{01}^{(3)} &= P_{00}P_{00}P_{01} + P_{00}P_{02}P_{21} + P_{02}P_{22}P_{21} + P_{02}P_{20}P_{01} \\
&= p_1^2 q_1
\end{aligned}$$

第 15 题

设有一电脉冲序列，脉冲的幅度是随机的，其幅度的变域为｛1，2，3，…，n｝，且在变域上均匀分布。现用一电表测量其幅度，每个一单位时间测量一次，从第一次测量计算起，求仪器记录到最大值 n 的期望时间。

解：

用 T_{ij} 表示从状态 I 首次进入状态 J 的时间。设为开始测量时的状态为 0 状态。题目即是要求 $E(T_{0n})$

$$E(T_{0n}) = \sum_{m=1}^{\infty} P\{T_{0n} = m) \cdot m$$
$$= \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot 2 + \frac{1}{n} \cdot (\frac{n-1}{n})^2 \cdot 3 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot (\frac{n-1}{n})^k \cdot (k+1) + \cdots$$

令 $p = \frac{1}{n}, x = \frac{n-1}{n}$。考察函数项级数 $px, px^2, \cdots$，易证其对 x（在其收敛域内）一致收敛。

$$f(x) = px + px^2 + \cdots = \frac{px}{1-x},$$

$$f'(x) = p \cdot 1 + px \cdot 2 + px^2 \cdot 3 + \cdots = \frac{p}{(1-x)^2}$$

从而

$$E(T_{0n}) = \frac{1}{n} / (1 - \frac{n-1}{n})^2 = n$$

第 16 题

确定下列马尔可夫链的状态分类，哪些属于常返的，哪些属于非常返的。已知该链的一步转移概率矩阵为

（1）$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

（2）$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

（3）$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

（4）$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解（1）：略（附后）
解（2）：略（附后）
解（3）：略（附后）
解（4）：略（附后）

第 17 题

一质点沿圆周游动。圆周按顺时针、等距排列五个点（0，1，2，3，4）把圆周分成五格。质点每次游动或顺时针或逆时针移动一格，顺时针移动一格的概率为 p，逆时针移动一格的概率为 1-p。设$\xi(n)$代表经过 n 次转移后质点所处的位置（即状态），$\xi(n)$是一个齐次马尔可夫链。试求

（1）一步转移概率矩阵；
（2）极限概率分布。

解（1）：

设状态为 0，1，2，3，4（顺时针旋转），则一步转移概率矩阵为，

$$P=\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

解（2）：

设达到稳态的分布是 $\pi=(\pi(0) \quad \pi(1) \quad \pi(2) \quad \pi(3) \quad \pi(4))$ ，则有

$$\pi P = \pi$$

$$\pi = (\frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5})$$

第 18 题

求习题 7 所给出的概率模型的极限分布。

解：

设达到稳态的分布是 $\pi = (\pi(0) \quad \pi(1) \quad \pi(2) \quad \pi(3) \quad \pi(4))$ ，则有

$$\pi P = \pi$$

已知

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

可以解出

$$\pi = (\frac{1}{21} \ \frac{3}{7} \ \frac{3}{7} \ \frac{1}{21} \ \frac{1}{21})$$

第 19 题

设质点在 xy 平面内的 x 方向或 y 方向上作随机游动。在 xy 平面上安排着整数点格，质点每次转移只能沿 x 方向向左或向右移一格，或沿 y 方向向上或向下移一格，设这四种转移方式的概率均相等。若质点从（0，0）出发游动，求经过 2n 次转移质点回到（0，0）点的概率，问这种对称的二维的随机游动是常返的、还是非常返的？

解：

经过 2n 次随机游动，返回（0，0）点，其往上与往下、向左与向右的随机游动次数分别相等。设上下移动了 2k 次，左右必移动了 2(n-k)次。k=0,1,2,…,n。

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{k} (\frac{1}{4})^{k} C_{2n-k}^{k} (\frac{1}{4})^{k} C_{2n-2k}^{n-k} (\frac{1}{4})^{n-k} C_{n-k}^{n-k} (\frac{1}{4})^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2n!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} (\frac{1}{4})^{2n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2n!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} 2^{-4n}$$

$$\because \sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2n!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} (\frac{1}{4})^{2n} < \infty$$

所以，同一维的随机游动一样，二维随机游动是非常返的。

第 20 题

设有马尔可夫链，它的状态空间为 I:｛0，1，2，…｝，且设当|i-j|>1 时 $P_{ij}=0$,在其它的 i,j 值时 P_{ij} 是任意的正数，对每个 j>0 必须满足 $P_{j,j-1}+P_{jj}+P_{j,j+1}=1$。当 j=0 时，$P_{00}+P_{01}=1$ 这类过程可以称为离散参数的生灭过程。求该链为正常返的条件。

解：

设 $p_{j,j-1}=q_j, p_{j,j+1}=p_j$ 画出该链的状态转移图，设该链存在极限分布 $\pi(0),\pi(1),\pi(2),\cdots$，于是有，

$$q_1\pi(1)=p_0\pi(0),$$

$$p_{i-1}\pi(i-1)+q_{i+1}\pi(i+1)=(p_i+q_i)\pi(i), \qquad i\ge 1$$

上面第二式可改写为：

$$q_{i+1}\pi(i+1)-q_i\pi(i)=p_i\pi(i)-p_{i-1}\pi(i-1), i\ge 1$$

所以两边同时对 i 求和，有

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[q_{i+1}\pi(i+1)-q_i\pi(i)\right]=\sum_{i=1}^{n-1}\left[p_i\pi(i)-p_{i-1}\pi(i-1)\right], \qquad n\ge 2$$

化简后即为：

$$q_n\pi(n)-q_1\pi(1)=p_{n-1}\pi(n-1)-p_0\pi(0)$$

又因为

$$q_1\pi(1)=p_0\pi(0)$$

所以有

$$q_n\pi(n)=p_{n-1}\pi(n-1), n\ge 1$$

即

$$\pi(n)=\frac{p_{n-1}}{q_n}\pi(n-1), n\ge 1$$

从而有

$$\pi(n)=\prod_{r=1}^{n}\left(\frac{p_{r-1}}{q_r}\right)\bullet\pi(0), n\ge 1$$

因为极限分布的归一化，$\sum_{m=0}^{\infty}\pi(m)=1$，所以

$$\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{r=1}^{m}\frac{p_{r-1}}{q_r}\right]\bullet\pi(0)=1$$

可见当 $1+\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{r=1}^{m}\left(\frac{p_{r-1}}{q_r}\right)$ 收敛时 $\pi(0)$ 不为 0，是正常返；反之如它不收敛，为 0，是零常返。

因此该链正常返的条件是：

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{r=1}^{m}(\frac{p_{r-1}}{q_r})\text{ 收敛}$$

第 21 题

设$\xi(n), n=1,2,3,\cdots$是伯努利过程。定义另一随机过程{ $\eta(n), n=1,2,3,\cdots$ }: 如果$\xi(n)$＝0，则$\eta(n)$＝0；如果$\xi(n)=\xi(n-1)=\cdots=\xi(n-k+1)=1$，而$\xi(n-k)=0$，则$\eta(n)$＝k (k=1,2,…,n)；即$\eta(n)$代表在 n 时和 n 前连续出现$\xi(m)$=1 次数。

（1）试证明$\eta(n)$是一马尔可夫链，并求其一步转移概率

（2）从零状态出发，经 n 步转移，求首次返回零状态的概率 $f_{00}^{(n)}$ 和 n 步转移概率 $P_{00}^{(n)}$；

（3）该链是常返的还是非常返的？

（4）设 T 代表连续两个η＝0 间的时间，则 T 为一随机变量。求 T 的均值和方差

解（1）：

$\eta(n)$的状态空间是 I:{0,1,2…}。其一步转移概率是，

从状态 n（n=0,1,2…）出发，

$$P_{n0}=\frac{1}{2}, P_{n,n+1}=\frac{1}{2},$$

从状态 n 到其他状态的转移概率为 0。

解（2）：

$$\begin{aligned} f_{00}^{(n)} &= P\{\xi(0)=0;\xi(k)=1, k=1,2,\cdots,n-1;\xi(n)=0\} \\ &= (\frac{1}{2})^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{00}^{(n)} &= P\{\xi(n)=0;\xi(k)=0\text{或}1, k=1,2,\cdots,n-1;\xi(n)=0\} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1}(\xi(k)=0\text{或}1)\cdot\xi(n)=0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

解（3）：

该链是常返的。

解（4）：

$$P\{T=m\}=(\frac{1}{2})^m=2^{-m}$$

$$E\{T\}=\sum_{m=1}\left(\frac{1}{2}\right)^m\cdot m=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{ds}\left(\sum_{m=1}^{\infty}s^m\right)_{s=\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
E\{T\} &= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{1-s}\right)\Big|_{s=\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(1-s)+s}{(1-s)^2}\Big|_{s=\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-s)^2}\Big|_{s=\frac{1}{2}} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

上述求解认为 1/2，应改为一般的通解。

解（1）：对伯努利过程，设 $P\{\xi(n)=1\}=p,则P\{\xi(n)=0\}=1-p$

$\eta(n)$ 的状态空间是 I:{0,1,2…}。其一步转移概率是，p_{ij} 是

$$
\begin{aligned}
&P_{i0}=1-p, \\
&j不为零时P_{i,j}=p\cdot\delta_{i(j-1)}
\end{aligned},
$$

解（2）：

当 n 为 0 时

$$f_{00}^{(n)}=1$$

$$P_{00}^{(n)}=1$$

当 n 不为 0 时

$$f_{00}^{(n)}=\mathrm{p}^{\mathrm{n}-1}(1-\mathrm{p})$$

$$P_{00}^{(n)}=1\text{-p}$$

解（3）：

因为 $\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\mathrm{P}_{00}^{(\mathrm{n})}=\infty$，故零状态常返，又各态是相通的，故该链是常返的。

解（4）：

$$
\begin{aligned}
P\{T=\mathrm{n}\} &= (\mathrm{p})^{\mathrm{n}-1}(1-\mathrm{p})^2 \\
E\{T\} &= \sum_{\mathrm{n}=1}(\mathrm{p})^{\mathrm{n}-1}(1-\mathrm{p})^2\cdot\mathrm{n} \\
&= \frac{1}{1-\mathrm{p}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D(T)} &= \sum_{\mathrm{n}=1}(\mathrm{p})^{\mathrm{n}-1}(1-\mathrm{p})^2\cdot\mathrm{n}^2-\frac{1}{(1-\mathrm{p})^2} \\
&= \frac{\mathrm{p}}{(1-\mathrm{p})^2}
\end{aligned}
$$

第三章 马尔可夫过程（II）

状态离散参数连续的马尔可夫过程

第 1 题

设有一泊松过程$\{N(t), t \ge 0\}$， 若有两时刻 s,t，且 s<t，试证明

$$P\{N(s)=k/N(t)=n\}=\binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k} \text{ 其中 } k=0,1,2,\dots,n$$

解：

$$\begin{aligned}P\{N(s)=k/N(t)=n\}&=P\{N(s)=k,N(t)=n\}/P\{N(t)=n\}\\&=P\{N(s)=k,N(t-s)=n-k\}/P\{N(t)=n\}\\&=\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}\cdot\frac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(t-s)}\Bigg/\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\\&=\binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

第 2 题

设顾客按泊松分布抵达银行，其到达速率为λ。若已知在第一小时内有两个顾客抵达银行，问：

（1）此顾客均在最初的 20 分钟内抵达银行的概率为何？

（2）至少有一个顾客在最初的 20 分钟内抵达银行的概率为何？

解（1）：

$$\begin{aligned}P\{N(s)=k/N(t)=n\}&=P\{N(20)=2/N(60)=2\}\\&=\binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}\\&=\left(\frac{20}{60}\right)^2\left(1-\frac{20}{60}\right)^{2-2}\\&=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

解（2）：

$$\begin{aligned}P&=1-P\{N(20)=0/N(60)=2\}\\&=1-\left(\frac{20}{60}\right)^0\left(1-\frac{20}{60}\right)^2\\&=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

第 3 题

设$\{N(t), t \ge 0\}$为泊松过程，其参数为λ。设$\psi_{N(t)}(s)$是随机变量 N(t)的母函数，证明

（1）$\psi_{N(t+\Delta t)}(s) = \psi_{N(t)}(s)\psi_{N(\Delta t)}(s)$

（2）$\dfrac{\partial \psi_{N(t)}(s)}{\partial t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\psi_{N(t+\Delta t)}(s) - \psi_{N(t)}(s)}{\Delta t} = \psi_{N(t)}(s) \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\psi_{N(\Delta t)}(s) - 1}{\Delta t}$

（3）当|s|<1 时 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\psi_{N(\Delta t)}(s) - 1}{\Delta t} = \lambda(s-1)$ 或 $\dfrac{\partial \psi_{N(t)}(s)}{\partial t} = \lambda(s-1)\psi_{N(t)}(s)$

（在证明过程中运用泊松过程的四个假设）

解（1）：

$$
\begin{aligned}
\psi_{N(t)}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t=n)\} \cdot s^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} s^n \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t s)^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda t} e^{\lambda t s} \\
&= e^{\lambda t (s-1)}
\end{aligned}
$$

$$\psi_{N(t+\Delta t)}(s) = e^{\lambda(t+\Delta t)(s-1)}$$

$$\psi_{N(\Delta t)}(s) = e^{\lambda(\Delta t)(s-1)}$$

$$\therefore \psi_{N(t+\Delta t)}(s) = \psi_{N(t)}(s) \cdot \psi_{N(\Delta t)}(s)$$

解（2a）：

$$\frac{\partial \psi_{N(t)}(s)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(e^{\lambda t(s-1)}) = \lambda(s-1)e^{\lambda t(s-1)}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\psi_{N(t+\Delta t)}(s) - \psi_{N(t)}(s)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{\lambda(t+\Delta t)(s-1)} - e^{\lambda t(s-1)}}{\Delta t} \\
&= e^{\lambda t(s-1)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{\lambda \Delta t(s-1)} - 1}{\Delta t} \\
&= e^{\lambda t(s-1)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\lambda \Delta t(s-1) + 0(\Delta t)}{\Delta t} \\
&= e^{\lambda t(s-1)} \cdot \lambda(s-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_{N(t)}(s) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\psi_{N(\Delta t)}(s) - 1}{\Delta t} &== e^{\lambda t(s-1)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\lambda \Delta t(s-1) + 0(\Delta t)}{\Delta t} \\
&= e^{\lambda t(s-1)} \cdot \lambda(s-1)
\end{aligned}
$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\psi_{N(t+\Delta t)}(s) - \psi_{N(t)}(s)}{\Delta t} = \psi_{N(t)}(s) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\psi_{N(\Delta t)}(s) - 1}{\Delta t}$$

方法（2b）：

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\psi_{N(t+\Delta t)}(s)-\psi_{N(t)}(s)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\lambda(t+\Delta t)(s-1)}-e^{\lambda t(s-1)}}{\Delta t}\\ &= e^{\lambda t(s-1)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\lambda\Delta t(s-1)}-1}{\Delta t}\\ &= \psi_{N(t)}(s)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\psi_{N(\Delta t)}(s)-1}{\Delta t}\end{aligned}$$

解（3）：

$$\begin{aligned}\psi_{N(t)}(s)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\psi_{N(\Delta t)}(s)-1}{\Delta t} &= e^{\lambda t(s-1)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\lambda\Delta t(s-1)}-1}{\Delta t}\\ &= e^{\lambda t(s-1)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\lambda\Delta t(s-1)+0(\Delta t)}{\Delta t}\\ &= e^{\lambda t(s-1)}\cdot\lambda(s-1)\end{aligned}$$

第 4 题

利用习题 3 得到的偏微分方程式求：

（1）泊松过程$\{N(t), t\geq 0\}$的母函数$\psi_{N(t)}(s)$的表示式；

（2）P{N(t)=k},k=0,1,2,….的表示式。

解（1）：

$$\frac{\partial\psi_{N(t)}(s)}{\partial t}=\lambda(s-1)\psi_{N(t)}(s)$$

$$\frac{1}{\psi_{N(t)}(s)}\frac{\partial\psi_{N(t)}(s)}{\partial t}=\lambda(s-1)$$

$$\begin{aligned}\ln\psi_{N(t)}(s) &= \lambda(s-1)t\\ \psi_{N(t)}(s) &= e^{\lambda(s-1)}\\ &= e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda st}\\ &= e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda st)^k}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}s^k\end{aligned}$$

解（2）：

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

第 5 题

设有非齐次泊松过程$\{N(t), t\geq 0\}$，它的均值函数 m(t)可以表示为$m(t)=t^2+2t, t\geq 0$，求

在 t=4,t=5 间出现 n 个事件的概率。
解：

$$\begin{aligned}&\int_4^5 m(t)dt=\int_4^5 (t^2+2t)dt\\&=[\frac{1}{3}t^3+t^2]_4^5\\&=\left(\frac{125}{3}+25\right)-\left(\frac{64}{3}+16\right)\\&=\frac{61}{3}+9\\&=\frac{88}{3}\end{aligned}$$

$$P\{N(5)-N(4)=n\}=\frac{\left(\frac{88}{3}\right)^n}{n!}e^{-\frac{88}{3}}$$

第 6 题

设ξ,η是两个非负整值随机变量，定义二元离散随机变量的母函数为

$$\phi_{\xi\eta}(z_1,z_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{z_1}^k{z_2}^n P\{\xi=k,\eta=n\}$$ k、n 均为非负整数。

（1）求$\phi_\xi(z)$，用$\phi_{\xi\eta}(z_1,z_2)$表示之；

（2）若ξ,η是彼此统计独立的随机变量，试证明$\phi_{\xi\eta}(z_1,z_2)=\phi_\xi(z_1)\phi_\eta(z_2)$

（3）设有随机变量$w=\xi+\eta$，求随机变量 w 的母函数，用$\phi_{\xi\eta}(z_1,z_2)$表示之；

（4）设有二元随机变量ξ,η，其母函数为$\phi_{\xi\eta}(z_1,z_2)=\exp\{-a_1-a_2-b+a_1z_1+a_2z_2+bz_1z_2\}$其中 $a_1,a_2,b>0$,问ξ的分布是否符合泊松分布？η的分布是否符合泊松分布？ξ,η是否统计独立？若$w=\xi+\eta$，问 w 是否符合泊松分布？

解（1）：

$$\begin{aligned}\phi_\xi(z)&=\sum_{k=0}^{\infty}P(\xi=k)z^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{n=0}^{\infty}P(\xi=k,\eta=n))z^k\cdot 1^n\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}P(\xi=k,\eta=n)z^k\cdot 1^n\\&=\phi_{\xi\eta}(z_1=z,z_2=1)\end{aligned}$$

解（2）：

$$\begin{aligned}\phi_{\xi\eta}(z_1,z_2)&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{z_1}^k{z_2}^n P\{\xi=k,\eta=n\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{z_1}^k{z_2}^n P\{\xi=k\}P\{\eta=n\}\\&=\phi_\xi(z_1)\phi_\eta(z_2)\end{aligned}$$

解（3）：

$$
\begin{aligned}
\phi_w(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi+\eta=k) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [\sum_{n=0}^{\infty} P(\xi=n,\eta=k-n)] z^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(\xi=n,\eta=k-n) z^n \cdot z^{k-n} \\
&\underline{\underline{k^{'}=k-n}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi=n,\eta=k^{'}) z^n \cdot z^{k^{'}} \\
&= \phi_{\xi\eta}(z_1=z, z_2=z)
\end{aligned}
$$

解（4）：

$$
\begin{aligned}
\phi_\xi(z) &= \phi_{\xi\eta}(z_1=z, z_2=1) \\
&= \exp(-a_1-a_2-b+a_1 z+a_2+bz) \\
&= \exp[(z-1)(a_1+b)]
\end{aligned}
$$

ξ 　符合泊松分布。

$$
\begin{aligned}
\phi_\eta(z) &= \phi_{\xi\eta}(z_1=1, z_2=z) \\
&= \exp(-a_1-a_2-b+a_1+a_2 z+bz) \\
&= \exp[(z-1)(a_2+b)]
\end{aligned}
$$

η 　符合泊松分布

$$
\begin{aligned}
\phi_w(z) &= \phi_{\xi\eta}(z_1=z, z_2=z) \\
&= \exp(-a_1-a_2-b+a_1 z+a_2 z+bzz) \\
&= \exp[(z-1)(a_1+a_2+b)+bz(z-1)] \\
&= \exp[(z-1)(a_1+a_2+b+bz)]
\end{aligned}
$$

w 不符合泊松分布。

第 7 题

设 $\{N_1(t), t\ge 0\}$ 和 $\{N_2(t), t\ge 0\}$ 是相互统计独立的泊松过程，其参数分别为 λ_1 和 λ_2。若 $N_0(t)=N_1(t)-N_2(t)$ 问 $\{N_0(t), t\ge 0\}$ 是否为泊松过程？

解：

$$
\begin{aligned}
\phi_{N_0}(v) &= \exp\{\lambda t(e^{jv}-1)\} \\
\phi_{N_0}(v) &= E\{\exp\{jvN_0(t)\} \\
&= E\{\exp\{jv(N_1(t)-N_2(t)\} \\
&= E\{\exp\{jvN_1(t)\cdot \exp\{-jvN_2(t)\} \\
&= E\{\exp\{jvN_1(t)\} E\{\exp\{-jvN_2(t)\} \\
&= \phi_{N_1}(v)\phi_{N_2}(-v) \\
&= \exp\{\lambda_1 t(e^{jv}-1)\}\exp\{\lambda_2 t(e^{-jv}-1)\} \\
&= \exp\{\lambda_1 t e^{jv}+\lambda_2 t e^{-jv}+(\lambda_1+\lambda_2)t\}
\end{aligned}
$$

无法写成泊松过程特征函数的形式

$$
\exp\{\lambda t(e^{jv}-1)\}
$$

由于特征函数与概率有相同的特性

$\therefore N_0(t)=N_1(t)-N_2(t)$不符合泊松过程的分布规律.

第 8 题

有复合泊松过程$\{X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}Y_n, t\geq 0\}$，其中$Y_n, n=1,2,3,\cdots$是彼此统计独立、同分布的随机变量，$\{N(t), t\geq 0\}$是一泊松过程，$Y_n$和 N(t)也是统计独立的。求复合泊松过程$\{X(t), t\geq 0\}$的特征函数。如果$Y_n, n=1,2,3,\cdots$的概率分布为

$$P\{Y_n=1\}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P\{Y_n=-1\}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

而泊松过程$\{N(t), t\geq 0\}$的参数$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$，试证明$\{X(t), t\geq 0\}$的特征函数为$\phi_{X(t)}(v)=\exp\{\lambda_1 te^{jv}+\lambda_2 te^{-jv}-(\lambda_1+\lambda_2)t\}$。试比较此结果与 7 提所得的结果，说明 7 题中的$N_0(t)=N_1(t)-N_2(t)$是一复合泊松过程。

解：

$$\begin{aligned}
\phi_{X(t)}(v) &= E\{e^{jvX}\} \\
&= E\{\exp\{jv\sum_{n=1}^{N9t)}Y_n\} \\
&= E\{\prod_{n=1}^{N(t)}\exp\{jvY_n\}\} \\
&= E_N\{\prod_{n=1}^{N(t)}E_Y\{\exp\{jvY\}\} \\
&= E_N\{\prod_{n=1}^{N(t)}\phi_Y(v)\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}[\phi_Y(v)]^n \\
&= \exp\{(\phi_Y(v)-1)\lambda t\}
\end{aligned}$$

$$\phi_Y(v)=e^{jv}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+e^{-jv}\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{X(t)}(v) &= \exp\{(\phi_Y(v)-1)\lambda t\} \\
&= \exp\{(e^{jv}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+e^{jv}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}-1)\lambda t\} \\
&= \exp\{\lambda_1 te^{jv}+\lambda_2 te^{-jv}-(\lambda_1+\lambda_2)t\}
\end{aligned}$$

$N_1(t), N_2(t)$相互独立。
$N_1(t), N_2(t)$之和是泊松过程。

$N_1(t), N_2(t)$之差是复合泊松过程，$N_1(t)$对应 Y_n=1, $N_2(t)$ 对应 Y_n=-1。

第 9 题

在某交通道上设置了一个车辆记录器，记录南行、北行车辆的总数。设 X(t)代表在$[0,t)$内南行的车辆数，Y(t)代表在$[0,t)$内北行的车辆数，X(t) 、Y(t)均服从泊松分布，且相互统计独立；设λ和η分别代表在单位时间内通过的南行、北行车辆平均数。如果在 t 时车辆记录器记录的车辆数为 n，问其中 k 辆属于南行车的概率为何？]

解：

$$
\begin{aligned}
&P\{X(t)=k/X(t)+Y(t)=n\}\\
&=P\{X(t)=k,X(t)+Y(t)=n\}/P\{X(t)+Y(t)=n\}\\
&=P\{X(t)=k,Y(t)=n-k\}/P\{X(t)+Y(t)=n\}\\
&=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\eta t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\eta t}/\{\frac{[(\lambda+\eta)t]^n}{n!}e^{-(\lambda+\eta)t}\}\\
&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\eta}\right)^k\left(\frac{\eta}{\lambda+\eta}\right)^{\text{n-k}}
\end{aligned}
$$

第 10 题

设$\{X_1(t),t\geq 0\}$和$\{X_2(t),t\geq 0\}$ $\{X_3(t),t\geq 0\}$为三个相互统计独立的泊松过程，λ_1、λ_2和λ_3分别为 $X_1(t)$、$X_2(t)$和 $X_3(t)$的参数。若 $X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n$ 时，求 $X_1(t)=k$ 、$X_2(t)=j$ 的条件概率，即求$P\{X_1(t)=k,X_2(t)=j/X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n\}$。

解：

$$
\begin{aligned}
&P\{X_1(t)=k,X_2(t)=j/X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n\}\\
&=P\{X_1(t)=k,X_2(t)=j,X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n\}/P\{X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n\}\\
&=P\{X_1(t)=k,X_2(t)=j,X_3(t)=n-k-j\}/P\{X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n\}\\
&=\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}e^{-\lambda_1 t}\cdot\frac{(\lambda_2 t)^j}{j!}e^{-\lambda_2 t}\,\frac{(\lambda_3 t)^{n-k-j}}{(n-k-j)!}e^{-\lambda_3 t}/\left\{\frac{[(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t]^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}\right\}\\
&=\frac{n!}{k!\,j!(n-k-j)!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^k\left(\frac{\lambda_{21}}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^j\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^{\text{n-k-j}}
\end{aligned}
$$

第 11 题

有一个有两个元件组成的系统，这两种元件当遇到下列不同类型的振动时遭受损坏。如出现第一种类型振动，将使甲失效；如出现第二类型振动，将使元件乙失效；如出现第三种类型振动，将使甲乙两元件同时失效。在（0，t）内出现一、二、三种类型振动的事件均服从泊松分布；出现二、三种类型振动的出现率分别为λ_1、λ_2和λ_3。又设 X_1 代表元件甲的寿命，X_2 代表元件乙的寿命。试证明：

（1）$P\{X_1\geq s,X_2\geq t\}=\exp\{-\lambda_1 s-\lambda_2 t-\lambda_3\max(t,s)\}$

（2）$P\{X_1\geq s\}=\exp\{-(\lambda_1+\lambda_3)s\}$

（3） $P\{X_2 \ge t\} = \exp\{-(\lambda_2+\lambda_3)t\}$

解（1）：

$$P\{X_1 \ge s, X_2 \ge t\}$$

在(0,t)时间内没有第一和第三种振动、在(0,s)时间内没有第二和第三种振动，即在(0,t)时间内没有第一种振动、在(0,s)时间内没有第二种振动、在(0,t)以及(0,s)时间内没有第三种振动；

$$\begin{aligned}&= \exp\{-\lambda_1 s\}\cdot\exp\{-\lambda_2 t\}\cdot\exp\{-\lambda_3 \max(t,s)\}\\ &= \exp\{-\lambda_1 s-\lambda_2 t-\lambda_3\max(t,s)\}\end{aligned}$$

解（2）：

$$P\{X_1 \ge s\} = P\{X_1 \ge s, X_3 \ge s\}$$

在(0,t)时间内没有第一和第三种振动，
即在(0,t)时间内没有第一种振动、在(0,t)时间内没有第三种振动；

$$\begin{aligned}&= \exp\{-\lambda_1 s\}\exp\{-\lambda_3 s\}\\ &= \exp\{-(\lambda_1+\lambda_3)s\}\end{aligned}$$

解（3）：

$$P\{X_2 \ge t\} = P\{X_3 \ge t, X_2 \ge t\}$$

在(0,s)时间内没有第二和第三种振动，
即在(0,t)时间内没有第二种振动、在(0,t))时间内没有第三种振动；

$$\begin{aligned}&= \exp\{-\lambda_2 t\}\exp\{-\lambda_3 t\}\\ &= \exp\{-(\lambda_2+\lambda_3)t\}\end{aligned}$$

第 12 题

设有一脉冲串送入计数器，在$[0,t)$出现的脉冲数服从泊松分布，其脉冲的出现率为λ。脉冲到达计数器可以被记录，也可能不被记录。每一个脉冲能被记录的概率为 P_r。不同脉冲是否被记录是相互统计独立的。设 X(t)是在$[0,t)$内被记录的脉冲数，
（1）求$P\{X(t)=k\},\quad k=0,1,2,\cdots$
（2）$\{X(t), t\ge 0\}$是否服从泊松分布？
解（1）：

$$\begin{aligned}P\{X(t)=k\} &= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}P_r^k(1-P_r)^{n-k}C_n^k\\ &= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{((1-p)\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

解（2）：

$\{X(t), t\ge 0\}$是复合泊松过程，相当于 Y_n=1 被记录，Y_n=0 不被记录。

第 13 题

设有一非齐次泊松过程$\{N(t), t\ge 0\}$，其中$\lambda(t)=\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)$，$\omega$为常数。求：

（1）过程$\{N(t), t\ge 0\}$的均值 E{N(t)};

（2）过程$\{N(t), t\ge 0\}$的方差 D{N(t)}。

解：

$$\lambda(t)=\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)$$
$$m(t)=\int_0^t \lambda(u)du=\int_0^t \frac{1}{2}(1+\cos\omega u)du$$
$$=\frac{t}{2}+\frac{1}{2\omega}\sin\omega t$$

非齐次泊松过程在（0,t）时间内发生 n 个事件的概率是

$$\frac{\left[m(t)\right]^n}{n!}e^{-m(t)}$$

非齐次泊松过程在（0,t）时间内的母函数是

$$P(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)s^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[m(t)\right]^n}{n!}e^{-m(t)}s^n$$
$$=e^{-m(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[m(t)s\right]^n}{n!}$$
$$=e^{-m(t)}e^{m(t)s}$$
$$=e^{m(t)(s-1)}$$

解（1）：过程$\{N(t), t\ge 0\}$的均值 E{N(t)}

$$E\left[N(t)\right]=m(t)=\frac{t}{2}+\frac{1}{2\omega}\sin\omega t$$

解（2）：过程$\{N(t), t\ge 0\}$的方差 D{N(t)}

$$D\left[N(t)\right]=m(t)=\frac{t}{2}+\frac{1}{2\omega}\sin\omega t$$

第 14 题

设有两个相互统计独立的泊松过程$\{X(t), t\ge 0\}$和$\{Y(t), t\ge 0\}$，两个过程的事件出现率分别为$\lambda_x\ \lambda_y$。试证明在过程$\{X(t), t\ge 0\}$中两个相邻事件间，过程$\{Y(t), t\ge 0\}$出现 k 个事件的概率为$P=\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_x+\lambda_y}\right)\left(\frac{\lambda_y}{\lambda_x+\lambda_y}\right)^k \quad (k=0,1,2,\cdots)$

解：

$\{X(t), t\ge 0\}$中两个相邻事件间为 t 的概率密度，等于在$(0,t)$时间间隔内不发生任何事件、而在$(t,t+\Delta t)$发生事件的概率，即$(0,t)$

$$e^{-\lambda_x t}\lambda_x \Delta t$$

在$(0,t)$时间间隔内，过程$\{Y(t), t\ge 0\}$出现 k 个事件的概率为

$$\frac{(\lambda_y t)^k}{k!}e^{-\lambda_y t}$$

在过程$\{X(t), t\ge 0\}$中两个相邻事件间隔内，发生过程$\{Y(t), t\ge 0\}$出现 k 个事件的概率是：

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\infty \frac{(\lambda_y t)^k}{k!}e^{-\lambda_y t}e^{-\lambda_x t}\lambda_x dt \\ &= \int_0^\infty \frac{t^k}{k!}e^{-(\lambda_x+\lambda_y)t}\lambda_y{}^k \lambda_x dt \\ &= \lambda_x \lambda_y{}^k (\lambda_x+\lambda_y)^{-k+1} \\ &= \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_x+\lambda_y}\right)\left(\frac{\lambda_y}{\lambda_x+\lambda_y}\right)^k \quad (k=0,1,2,\cdots) \end{aligned}$$

第 15 题

设有两个通信用信道，每个信道的正常工作时间是一负指数分布的随机变量，其均值为$\frac{1}{\lambda}$。两个信道何时产生中断是相互统计独立的。信道一旦中断，立刻进行维修，其维修时间也是负指数分布的随机变量，其维修平均时间为$\frac{1}{\mu}$。两个信道的维修时间也是统计独立的。设两个信道在 t=0 时均正常工作。

（1）求这两个信道组成的系统 Q 矩阵。

（2）列出前进方程式；

（3）求在 t 时两个信道均处于正常工作状态的概率；

（4）求在$[0,t)$内两个信道连续工作的概率。

解（1）：

系统状态：维修信道数（0，1，2），

$$Q=\begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda \\ 0 & 2\mu & -2\mu \end{pmatrix}$$

解（2）：

$$\dot{P}=PQ$$

$$P=\begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{22} & P_{22} \end{pmatrix}$$

解（3）：

$$\dot{p}=pQ$$

$$p=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

求 p_0 即是在 t 时两个信道均处于正常工作状态的概率。

解（4）：

P｛在 $[0,t)$ 内两个信道连续工作｝＝$e^{-2\lambda t}$

第 16 题

一条电路共给 m 个焊工用电，每个焊工均是间断地用电。现做若下假设：（1）若一焊工在 t 使用电、而在 $(t,t+\Delta t)$ 内停止用电的概率为 $\mu\Delta t+o(\Delta t)$；（2）若一焊工在 t 使没有用电、而在 $(t,t+\Delta t)$ 内用电的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$；每一焊工的工作情况是统计独立的。设 $\xi(t)$ 表示在 t 是正在用电的焊工数。

（1）求该过程的状态空间；

（2）求该过程的 Q 矩阵；

（3）设 $\xi(0)=0$，列出福克－普朗克微分方程式；

（4）当 $t\to\infty$ 时，求极限分布 P_n。

解（1）：

该系统的状态空间是 n=0,1,2,…,m 解（1）：

解（2）：

该过程的转移概率，Q 矩阵

$$
\begin{aligned}
&n=1,2,\cdots,m-1\\
&P_{n-1,n}=(m-n)\lambda\\
&P_{n+1,n}=n\mu\\
&P_{n,n}=-n\mu-(m-n)\lambda\\
&P_{k,n}=0 \quad (k\neq n-1,n,n+1);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&n=0\\
&P_{0,1}=m\lambda\\
&P_{0,0}=-m\lambda\\
&P_{k,n}=0 \quad (k\neq n,n+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&n=m\\
&P_{m,m-1}=m\mu\\
&P_{m,m}=-m\mu\\
&P_{k,n}=0 \quad (k\neq n-1,n)
\end{aligned}
$$

解（3）：

$$
\begin{aligned}
&\dot{p}=pQ\\
&p=\begin{pmatrix}p_0 & p_1 & p_2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

解（4）：

稳态求解 ，极限分布

$$p_0 \cdot m\lambda = p_1\mu$$
$$p_1(m-1)\lambda = p_2 \cdot 2\mu$$
$$\cdots\cdots$$
$$p_{m-1}\lambda = p_m m\mu$$
$$\therefore p_n = p_0 \frac{m!}{n!(m-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n \quad n = 1,2,\cdots,m$$
$$\sum_{n=0}^{m} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!(m-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n = 1$$

第 17 题

设由一“生、移民及灭”过程，其中$\begin{matrix}\lambda_n = n\lambda + a & (\lambda > 0, a > 0) \\ \mu_n = n\mu & (\mu > 0)\end{matrix}$起始状态$\xi(0) = n_0$ $n\lambda$代表状态为 n 时的自然增长，a 代表移民。

（1）写出描写这一过程的福克－普朗克微分方程组；

（2）求描写平均值$M_\xi(t) = E\{\xi(t)\}$的微分方程组；

（3）求$M_\xi(t)$。

解（1）：

写出该过程的 Q 矩阵为：

$$\begin{matrix}
-a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu & -(\mu+\lambda+a) & \lambda+a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2\mu & -[2(\mu+\lambda)+a] & 2\lambda+a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n\mu & -[n(\mu+\lambda)+a] & n\lambda+a & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{matrix}$$

因此福克普朗可方程为：

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -ap_0(t) + \mu p_1(t)$$

$$\frac{dp_m(t)}{dt} = [(m-1)\lambda + a]p_{m-1}(t)$$
$$-[m(\mu+\lambda)+a]p_m(t) + (1+m)\mu p_{m+1}(t), m \geq 1$$

解（2）：

$$M_\xi(t) = E\{\xi(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n(t)$$

利用福克普朗克方程

$$\frac{d}{dt}M_{\xi}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{d}{dt}p_n(t)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\mu p_{n+1}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}n[(n-1)\lambda+a]p_{n-1}(t)$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}n[n(\mu+\lambda)+a]p_n(t)$$

整理可得

$$\frac{d}{dt}M_{\xi}(t)=(\lambda-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}np_n(t)+\sum_{n=1}^{\infty}ap_{n-1}(t)$$

从而

$$\frac{d}{dt}M_{\xi}(t)=(\lambda-\mu)M_{\xi}(t)+a$$

此即$M_{\xi}(t)$所满足的微分方程

解（3）：

如果$\lambda=\mu$

则$M_{\xi}(t)=at+d$，其中 d 为待定常数。

由于$M_{\xi}(0)=n_0$所以$d=n_0$

从而　$M_{\xi}(t)=at+n_0$；

如果$\lambda\neq\mu$

设　$M_{\xi}(t)=c(t)\bullet\exp[(\lambda-\mu)t]$

带入微分方程，可得$c'(t)=a\bullet\exp[-(\lambda-\mu)t]$

所以$c(t)=-\frac{a}{\lambda-\mu}\bullet\exp[-(\lambda-\mu)t]+C$其中 C 为待定常数

进而可得$M_{\xi}(t)=C\bullet\exp[(\lambda-\mu)t]-\frac{a}{\lambda-\mu}$

由于$M_{\xi}(0)=n_0$所以$C=n_0+\frac{a}{\lambda-\mu}$

所以$M_{\xi}(t)=(n_0+\frac{a}{\lambda-\mu})\exp[(\lambda-\mu)t]-\frac{a}{\lambda-\mu}$

第 18 题

在“生灭”过程中，如果参数$\lambda_n=0 \quad \mu_n=\mu$，则该过程原是“纯灭”过程。如其起始状态$\xi(0)=n$，求 p_{nj}，n>j>0。

解：

$$j=n-1$$
$$P_{n,j}=\mu$$

$$j=n$$
$$P_{n,j}=-\mu$$

$$j\neq n-1,n$$
$$P_{n,j}=0$$

第 19 题

设有一“生灭”过程，其中$\lambda_n=\lambda,\mu_n=n\mu$，$\lambda,\mu$均为常数，且$\lambda>0,\mu>0$，其起始状态$\xi(0)=0$。

（1）试证明$p_n(t)=P\{\xi(t)=n\}$满足下列方程式：

$$\begin{cases}\dfrac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t)\\[2mm] \dfrac{dp_n(t)}{dt}=\lambda p_{n-1}(t)-(\lambda+n\mu)p_n(t)+(n+1)\mu p_{n+1}(t) \qquad (n\geq 1)\end{cases}$$

（2）设$G(u,t)\underline{\underline{\Delta}}\sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)u^n$，即$G(u,t)$为$\xi(t)$的母函数。试证

$$\frac{\partial G(u,t)}{\partial t}+\mu(u-1)\frac{\partial G(u,t)}{\partial t}=\lambda(u-1)G(u,t)$$

（3）解上述偏微分方程式，证明$G(u,t)=e^{\frac{\lambda}{\mu}uf[e^{-\mu t(u-1)}]}$其中 $f[.]$是任意函数；

（4）利用起始条件$p_0(0)=p\{\xi(0)=0\}=1$或$G(u,0)=1$证明$G(u,t)=e^{\frac{1}{\mu}(\mu-1)(1-e^{-\mu t})}$

（5）证明$p_n(t)=e^{\frac{1}{\mu}(1-e^{-\mu t})}\{\frac{1}{n!}[\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})]^n\}$

（6）求其均值函数$M_\xi(t)=E\{\xi(t)\}=?$

（7）试证明$\lim\limits_{t\to\infty}p_0(t)=e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$。

解（1）：

状态 n=0,1,2,…

$$n = 1,2,\cdots$$
$$P_{n-1,n} = \lambda$$
$$P_{n+1,n} = n\mu$$
$$P_{n,n} = -n\mu - \lambda$$
$$P_{k,n} = 0 \quad (k \neq n-1, n, n+1);$$

$$n = 0$$
$$P_{0,1} = \lambda$$
$$P_{0,0} = -\lambda$$
$$P_{k,n} = 0 \quad (k \neq n, n+1)$$

$$\dot{p} = pQ$$
$$p = \begin{pmatrix} p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) \end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t) \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

解（2）：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial G(u,t)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) u^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial p_n(t)}{\partial t} u^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} u^n [\lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} u^n [\lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t)] + \sum_{n=0}^{\infty} u^n [-\lambda p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t)] \\
&= [\sum_{n=1}^{\infty} u^n \lambda p_{n-1}(t) - \sum_{n=0}^{\infty} u^n \lambda p_n(t)] - \sum_{n=1}^{\infty} u^n n\mu p_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} u^n (n+1)\mu p_{n+1}(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} u^n \lambda (u-1) p_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} u^n n\mu p_n(t) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} u^{n-1} n p_n(t) \\
&= \lambda(u-1) G(u,t) - \mu(u-1) \sum_{n=1}^{\infty} u^{n-1} n p_n(t) \\
&= \lambda(u-1) G(u,t) - \mu(u-1) \frac{\partial G(u,t)}{\partial t}
\end{aligned}$$

解（3）：略

解（4）：略

解（5）：略
解（6）：略
解（7）：略

第 20 题

设有时变、纯增长过程 $\xi(t)$,其参数为 $\lambda_n(t)=\lambda(\frac{1+an}{1+a\lambda t})(n=0,1,2,\cdots,a>0,\lambda>0)$ 过程的起始状态为 $\xi(0)=0$。

（1）设 $p_k(t)=P\{\xi(t)=k\}$,写出描写 $p_k(t)$的福克－普朗克微分方程组；

（2）解该微分方程，证明

$$p_0(t)=(1+a\lambda t)^{-\frac{1}{a}}$$
$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}(1+a\lambda t)^{-k-\frac{1}{a}}\prod_{m=1}^{k-1}(1+am)\quad (k\geq 1)$$

该过程称为卜里耶(polya)过程。

解（1）：

该过程的 Q 矩阵为：

$$\begin{matrix} -\lambda_0(t) & \lambda_0(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1(t) & \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2(t) & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{matrix}$$

福克普朗克方程为：

$$\frac{d}{dt}p_0(t)=-\lambda_0(t)p_0(t)$$
$$\frac{d}{dt}p_n(t)=-\lambda_n(t)p_n(t)+\lambda_{n-1}(t)p_{n-1}(t),n\geq 1$$

解（2）：

解关于 $p_0(t)$ 的微分方程

$$p_0(t)=(1+a\lambda t)^{-\frac{1}{a}}+C$$

其中 C 为待定常数。由于 $p_0(0)=1$，令上式中 t 为零，解得 C 为零。从而有

$$p_0(t)=(1+a\lambda t)^{-\frac{1}{a}}\text{。}$$

对于 $p_n(t)$

$$\frac{d}{dt}p_n(t)=-\lambda_n(t)p_n(t)+\lambda_{n-1}(t)p_{n-1}(t),n\geq 1$$

令

$$f_k(t)=(1+a\lambda t)^{k+\frac{1}{a}}\bullet\frac{1}{\sum_{m=1}^{k-1}(1+am)},k\ge 2$$

$$f_k(t)=(1+a\lambda t)^{k+\frac{1}{a}},k=1$$

于是 $p_n(t)$ 的微分方程可化为：

$$\frac{d}{dt}[f_k(t)\bullet p_k(t)]=\lambda[f_{k-1}(t)\bullet p_{k-1}(t)],k\ge 1$$

令

$$f_k(t)\bullet p_k(t)=\delta_k(t)$$

于是有

$$\frac{d}{dt}(\delta_k(t))=\lambda\delta_{k-1}(t)$$

对上式两边作拉普拉斯变换，有：

$$s\Delta_k(s)-\delta_k(0)=\lambda\Delta_{k-1}(s)$$

又因为

$$\delta_k(0)=0,k\ge 1$$

所以

$$s\Delta_k(s)=\lambda\Delta_{k-1}(s)$$

从而可递推得

$$\Delta_k(s)=(\frac{\lambda}{s})^k\Delta_0(s)$$

而 $\delta_0(t)=1,$ 可得 $\Delta_0(s)=\frac{1}{s}$。所以

$$\Delta_k(s)=\lambda^k(\frac{1}{s})^{k+1}$$

对上式作拉氏反变换可得

$$\delta_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

又

$$f_k(t)\bullet p_k(t)=\delta_k(t)$$

所以

$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}(1+a\lambda t)^{-k-\frac{1}{a}}\sum_{m=1}^{k-1}(1+am),k\ge 1$$

证毕

第 21 题

设$[0,t)$内到达的顾客服从泊松分布，参数为λ。设有单个服务员、服务时间为负指数分布的排队系统（M / M / 1），平均服务时间为$\dfrac{1}{\mu}$。试证明：

（1）在服务员的服务时间内到达顾客的平均数为$\dfrac{\lambda}{\mu}$；

（2）在服务员的服务时间内无顾客到达的概率为$\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$。

解（1）：

服务时间为 t 的概率密度为$\mu e^{-\mu t}$，相应 n 个顾客到达的概率为$\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$.在服务时间内平均到达的顾客数为

$$\begin{aligned}E\{N\} &= \int_0^\infty e^{-\mu t}\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\mu dt\\ &= \int_0^\infty e^{-\mu t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\lambda t\cdot\mu dt\\ &= \int_0^\infty e^{-\mu t}e^{\lambda t}e^{-\lambda t}\lambda t\cdot\mu dt\\ &= \int_0^\infty e^{-\mu t}\lambda t\cdot\mu dt\\ &= \lambda\int_0^\infty -d(e^{-\mu t})t\\ &= \lambda\int_0^\infty e^{-\mu t}dt\\ &= \frac{\lambda}{\mu}\end{aligned}$$

解（2）：

服务时间为 t 的概率为$\mu e^{-\mu t}$，相应没有顾客到达的概率为$e^{-\lambda t}$.

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\mu t}\cdot\mu dt = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

第 22 题

设有单个服务员、服务时间为负指数分布的排队服务系统，平均服务时间为$\dfrac{1}{\mu}$；到达服务点的顾客数服从泊松分布，参数为λ，问顾客到达时排队系统中已有 n 个或 n 个以上顾客的概率为何$(n\ge 0)$？

解：

到达稳定状态后

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \quad p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_0$$

$$\lambda p_1 = \mu p_2 \quad p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$$

… …

$\lambda p_{k-1} = \mu p_k \quad p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_{n-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$

… …

又有

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 = \frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} p_0 = 1$$

$$p_0 = 1-\frac{\lambda}{\mu}$$

顾客到达时排队系统中已有 n 个或 n 个以上顾客的概率

$$\sum_{k=n}^{\infty} p_k = \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

第 23 题

设有如题 22 所给的排队服务系统（M／M／1）。设排队已到达统计平稳状态。服务的规则是先到先服务。设 y 代表一顾客花费在排队等候的时间和服务时间的总和。求 y 的概率密度 $f_y(t)$，并证明：

（1）一个顾客花费在系统内的时间小于或等于 x 的概率为 $1-e^{-(\mu-\lambda)x}$；

（2）一个顾客花费在排队的时间小于或等于 x 的概率为

$$\begin{cases} 1-\frac{\lambda}{\mu} & (x=0) \\ (1-\frac{\lambda}{\mu})+\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-(\mu-\lambda)x}) & (x>0) \end{cases}$$

解（1）：

服务一个用户时间为 t 的概率为 $e^{-\mu t}\cdot \mu dt$；

服务二个用户时间为 t 的概率为 $\mu t e^{-\mu t}\cdot \mu dt$；

服务 k 个用户时间为 t 的概率为 $\frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}\cdot \mu dt$

用户到达系统后，系统内有 k－1 个用户的概率为 p_{k-1}，相应等待及服务时间是 k 个用户的服务时间，因此花费时间为 t 的概率是

$$\begin{aligned}
&\sum_{k-1=0}^{\infty} p_{k-1}\frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}\cdot \mu dt \\
&= \sum_{k-1=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1}\frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}\cdot \mu dt \\
&= \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\mu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\mu t}\cdot dt \\
&= (\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}dt
\end{aligned}$$

因此有

$$f_y(t) = (\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}$$

一个顾客花费在系统内的时间小于或等于 x 的概率为

$$\int_0^x f_y(t)dt$$
$$=\int_0^x (\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}dt$$
$$=1-e^{-(\mu-\lambda)x}$$

解（2）：

若 x=0

$$p_0=1-\frac{\lambda}{\mu}$$

若 x>0

$$f_{y'}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}\cdot\mu dt$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}\cdot\mu dt$$
$$=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\mu\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}\cdot\frac{\lambda}{\mu}dt$$
$$=(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}\frac{\lambda}{\mu}dt$$

排队时间小于等于 x 的概率为

$$\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)+\int_0^x f_{y'}(t)dt$$
$$=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)+\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-(\mu-\lambda)x}\right)$$
$$\therefore\begin{cases}1-\frac{\lambda}{\mu} & (x=0)\\ \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)+\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-(\mu-\lambda)x}\right) & (x>0)\end{cases}$$

第 24 题

设有单个服务员、服务时间为负指数分布的排队服务系统。到达服务点的顾客数服从泊松分布，参数为λ。在这个服务系统中再作如下规定；当顾客被服务结束后，他以概率α离开系统，而以概率$1-\alpha$重新再去排队，于是一顾客可多次被服务，设每次服务的平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$。

（1）建立这个系统的平衡方程，求系统进入统计平稳后取各状态的概率，并说明存在统计平稳的条件；

（2）问顾客从进入系统起到他第一次被服务所花费的排队等候时间的平均值；

（3）求顾客进入系统会一共被服务了 n 次的概率$(n\geq 1)$；

（4）求顾客被服务的时间平均值（不包括该顾客在系统内排队等候的时间）。

解（1）：

$$\lambda p_0=\mu\alpha p_1 \quad p_1=\left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)p_0$$

$$\lambda p_1=\mu\alpha p_2 \quad p_2=\left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)p_1=\left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)^2 p_0$$

… …

$$\lambda p_{k-1}=\mu\alpha p_k \quad p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)p_{n-1}=\left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)^n p_0$$

… …

又有

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)^k p_0=\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)}p_0=1$$

$$p_0=1-\frac{\lambda}{\mu\alpha}$$

$$p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)$$

平稳条件是 $\frac{\lambda}{\mu\alpha}<1$

解（2）：

$$f_{y^{'}}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\frac{(\mu\alpha t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}\cdot\mu\alpha dt$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu\alpha}\right)^{k-1}\frac{(\mu\alpha t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}\cdot\frac{\lambda}{\mu\alpha}\mu\alpha dt$$

$$=(\mu\alpha-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}\frac{\lambda}{\mu\alpha}dt$$

$$\int_0^{\infty}f_{y^{'}}(t)\cdot tdt$$

$$=\int_0^{\infty}(\mu\alpha-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}\frac{\lambda}{\mu\alpha}\cdot tdt$$

$$=\frac{\lambda}{\mu\alpha}(\mu\alpha-\lambda)\cdot\int_0^{\infty}e^{-(\mu-\lambda)t}\cdot tdt$$

$$=\frac{\lambda}{\mu\alpha}(\mu\alpha-\lambda)$$

$$\left[\frac{1}{\mu-\lambda}\int_0^{\infty}-d\left(t\,e^{-(\mu-\lambda)t}\right)+\frac{1}{\mu-\lambda}\int_0^{\infty}e^{-(\mu-\lambda)t}dt\right]$$

$$=\frac{\lambda}{\mu\alpha}\int_0^{\infty}e^{-(\mu\alpha-\lambda)t}dt$$

$$=\frac{\lambda}{\mu\alpha}\cdot\frac{1}{\mu\alpha-\lambda}$$

解（3）：

$$(1-\alpha)^{n-1}\alpha$$

解（4）：

各次服务是相互独立的，总共被服务 n 次的时间平均为 $\frac{n}{\mu}$，被服务时间的平均值是

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha(1-\alpha)^{n-1}\frac{1}{\mu} \\
&=\frac{\alpha}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty} n(1-\alpha)^{n-1} \\
&=\frac{\alpha}{\mu}\frac{d}{d(1-\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha)^{n} \\
&=\frac{\alpha}{\mu}\frac{d}{d(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \\
&=\frac{\alpha}{\mu}\frac{d}{dk}\left(\frac{k}{1-k}\right)/_{k=1-\alpha} \\
&=\frac{\alpha}{\mu}\frac{1}{(1-k)^2}/_{k=1-\alpha} \\
&=\frac{\alpha}{\mu}\cdot\frac{1}{\alpha^2} \\
&=\frac{1}{\mu\alpha}
\end{aligned}$$

第 25 题

某加油站有两台泵，只有当顾客抵达加油站时泵有空闲，方可立刻对该顾客进行服务，顾客才进入系统；否则，如顾客见到两台泵均被占用便立即离去。潜在的顾客按泊松分布规律抵达油站，其参数为 λ；油站对顾客的服务时间是负指数分布的随机变量，其平均服务时间为 $\frac{1}{\mu}$。求进入加油站接受服务的顾客与抵达加油站的潜在顾客的比率。

解：

顾客到达加油站与加油站状态是相互统计独立，所求比率为 $\frac{p_0+p_1}{p_0+p_1+p_2}$ 其中

p_0, p_1, p_2 是加油站有 0，1，2 个顾客的稳态概率。

$$\lambda p_0=\mu p_1 \quad p_1=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_0$$

$$\lambda p_1=2\mu p_2 \quad p_2=\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)p_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$$

$$\frac{p_0+p_1}{p_0+p_1+p_2}=\frac{1+\frac{\lambda}{\mu}}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}$$

第 26 题

某项作业包括三台同一类型的机器和二个维修工。每台机器的正常工作时间（从开始工作到遭受损坏而不能工作的时间间隔）是按负指数规律分布的随机变量，其平均工作时间为 10 个小时。一个维修工维修一台机器所需的时间也是按负指数分布的随机变量，其平均维修时间为 8 小时。求：

（1）不工作机器的数学期望；

（2）两个维修工均忙着维修及其所占的时间。

解：稳态方程

$$3\lambda p_0 = \mu p_1 \quad p_1 = \left(\frac{3\lambda}{\mu}\right) p_0$$

$$2\lambda p_1 = 2\mu p_2 \quad p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_1 = 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$$

$$\lambda p_2 = 2\mu p_3 \quad p_3 = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right) p_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0$$

又有

$$\sum_{k=0}^{3} p_k = \left\{1 + \frac{3\lambda}{\mu} + 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\right\} \cdot p_0 = 1$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{3\lambda}{\mu} + 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{8}} = 0.8$$

$$p_0 \approx 0.164$$

解（1）：

$$\begin{aligned} & E\{\text{不工作机器}\} \\ & = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 \\ & = \frac{3\lambda}{\mu} p_0 + 2 \cdot 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + 3 \cdot \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 \\ & = \frac{3\lambda}{\mu} p_0 + 6\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + \frac{9}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 \\ & \approx 1.4 \end{aligned}$$

解（2）：

$$\begin{aligned} T &= (p_2 + p_3) \cdot 8 \\ &= [3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0] \cdot 8 \\ &= 24\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + 12\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 \\ &\approx 3.626h \end{aligned}$$

第 27 题

设有一出租汽车站。到达该站的出租汽车数服从泊松分布，平均每分钟到达一辆出租汽车；到达该站的顾客数也服从泊松分布，平均每分钟到达顾客 2 人。如果出租汽车到站时无顾客候车，不论是否已有汽车停留在站上，该辆汽车就停留在站上候车；反之，如果顾客到达汽车站时发现站上没有汽车，他就离去；如果顾客到占时有汽车在候客，他就可以立刻雇一辆。问：

（1）在其车站上等候的出租汽车数为何？

（2）在到站的潜在顾客中有多少雇得了出租汽车？

解：

设 n 表示汽车站上等候的汽车数，即系统的状态，达到稳定状态后

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \quad p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0$$

$$\lambda p_1 = \mu p_2 \quad p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0$$

$$\cdots \ \cdots$$

$$\lambda p_{k-1} = \mu p_k \quad p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_{n-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

$$\cdots \ \cdots$$

又有

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 = p_0 = 1$$

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= \rho^n (1-\rho)$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_0 = 1 - \rho$$

解（1）：

等候的出租汽车数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p_n = (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^n$$

$$= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$$

$$=(1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho}$$

$$=(1-\rho)\rho\frac{1-\rho+\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$=\frac{\rho}{1-\rho}$$

解（2）：

到站的潜在顾客中雇得了出租汽车的平均数为

$$(1-p_0)\mu=\mu-\lambda$$

第 28 题

设某更新过程的时间间隔服从泊松分布，其均值为 μ，即

$$P\{x_n=k\}=\frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!},\quad k=0,1,2\cdots。$$

（1）求 S_n 的分布；

（2）计算 P{N(t)=n}。

解：

设随机变量 x_n 的母函数为 $G_n(s)$

因为 x_n 都服从泊松分布，所以 $G_n(s)=e^{\mu(s-1)}$

因为 $s_n=\sum_{i=1}^{n}x_i$ 所以 s_n 的母函数为 $F(s)=\prod_{i=1}^{n}G_i(s)=\exp[n\mu(s-1)]$

因此 $P\{s_n=i\}=\frac{F^{(i)}(0)}{i!}=\frac{(n\mu)^i\exp(-n\mu)}{i!}$

由此可得：

$$P\{N(t)=n\}=P\{s_n\le t<s_{n+1}\}=P\{s_n<t\}-P\{s_{n+1}<t\}$$
$$=\sum_{j=1}^{[t]}\frac{(n\mu)^j\exp(-n\mu)}{j!}-\sum_{k=1}^{[t]}\frac{[(n+1)\mu]^k\exp[-(n+1)\mu]}{k!}$$

其中[t]为高斯函数，表示不超过 t 的最大整数。

第 29 题

设更新过程的时间间隔 X_n 的分布函数为 F(t)，f(t)为其概率密度，m(t)为［0，t］内平均更新的次数，m(t)=E{N(t)}。试证明 $m(t)=F(t)+\int_0^t m(t-x)f(x)dx$

解：

利用课本 P224 的（10）式

$$f(t)=\lambda(t)-\int_0^t\lambda(t-u)f(u)du$$

对该式两边从零到 t 积分可得：

$$\int_0^t f(t)dt = \int_0^t \lambda(t)dt - \int_0^t \int_0^t \lambda(t-u) f(u)dudt$$

因为

$$F(t) = \int_o^t f(t)dt, m(t) = \int_o^t \lambda(t)dt$$

所以有

$$F(t) = m(t) - \int_0^t \int_0^t \lambda(t-u) f(u)dudt$$

交换积分次序，有

$$F(t) = m(t) - \int_0^t \int_0^t \lambda(t-u) f(u)dtdu$$

所以

$F(t) = m(t) - \int_0^t m(t-u) f(u)du$ 将第二项的积分变量换为 x

得

$$F(t) = m(t) - \int_0^t m(t-x) f(x)dx$$

即

$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x) f(x)dx$　证毕

第 30 题

在使用中的一机器，或因损坏而更新，或因使用 T 时而更新。如果相继更新的机器的寿命是相互统计独立的随机变量，且具有相同的分布函数 F(t)，其相应的概率密度函数为 f(t)，试证明：

（1）长期工作时机器的更新率为 $\left\{\int_0^T xf(x)dx + T[1-F(T)]\right\}^{-1}$；

（2）长期工作中使用的机器损坏率为 $\dfrac{F(T)}{\int_0^T xf(x)dx + T[1-F(T)]}$

解：略

长期工作时机器工作寿命为 x 的概率密度是 f(x)，机器工作寿命大于 T 而没有损坏的概率是 1-F(T)，机器损坏的概率是 F(T)。

长期工作时机器的平均工作时间是 $\int_0^T xf(x)dx + T[1-F(T)]$

长期工作时机器的更新率是 $\left\{\int_0^T xf(x)dx + T[1-F(T)]\right\}^{-1}$

长期工作时机器的损坏率是机器损坏的概率与损坏机器和没有损坏而更新机器的概率之比，是 $\dfrac{F(T)}{\int_0^T xf(x)dx + T[1-F(T)]}$。

第四章 二阶矩过程、平稳过程和随机分析

平稳随机过程

第 1 题

设有一泊松过程$\{N(t), t\geq 0\}$,求：(1) $P\{N(t_1)=k_1, N(t_2)=k_2\}$，用$t_1, t_2$的函数表示之；(2)该过程的均值和相关函数。（3）问该过程是否为平稳过程？

解（1）：

解（2）：

解（3）：

解（待补充）

第 2 题

设有一个最一般概念的随机电报信号$\{\xi(t)\}$，它的定义如下：(1) $\xi(0)$是正态分布的随机变量$N(0,\sigma^2)$；(2)时间τ内出现的电报脉冲的个数服从泊松分布，即

$$P\{k,\tau\}=\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau} \quad k=0,1,2,\cdots$$

(3)不同时间的电报脉冲幅度服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，这个脉冲幅度值延伸到下一个电报脉冲出现是保持不变，在不同电报脉冲内的幅度取值是相互独立的，同一个电报脉冲内幅度是不变的；(4)不同时间间隔内出现电报脉冲的个数是相互统计独立的。它的样本函数如图题 4-2。试求（1）它的两元概率密度函数；（2）是问该过程是否平稳？

解（1）：

欲求 $f_\xi\left(x_1,x_1;t_1,t_2\right)$，设$\tau=t_2-t_1$，$t_2>t_1$，则：

相隔为τ的两点之间一直没有出现新的电报脉冲的概率为$e^{-\lambda\tau}$

相隔为τ的两点之间有新的电报脉冲的概率为 1－$e^{-\lambda\tau}$

前者 t_1，t_2两点位于同一脉冲上，后者位于不同的相互独立的脉冲上，

故相应的二元概率密度是，定义τ=$|t_1-t_2|$

$$e^{-\lambda\tau}\delta(x_1-x_2)\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}}\exp(-\frac{x_2^2}{2\delta^2})+(1-e^{-\lambda\tau})\frac{1}{2\pi\delta^2}\exp(-\frac{x_2^2+x_1^2}{2\delta^2})$$

解（2）：

该过程是宽平稳的。（$\because E\left[\xi(t)\right]=0$，$f_\xi\left(x_1,x_1;t_1,t_2\right)$只与$|t_1-t_2|$有关）

二阶矩过程

第 3 题

设为独立同分布随机变量，且均匀分布于$(0,1)$上；又设有随机过程

$$\eta(t)=\xi_1\sin(\xi_2 t)\quad (t\geq 0)$$

求（1）$\eta(t)$的均值；（2）$\eta(t)$的相关函数。

解（1）：

$$E\{\xi_1\}=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

$$E\left\{\xi_1^{\,2}\right\}=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

$$E[\eta(t)]=E[\xi_1]E[\sin(\xi_2 t)]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \sin x_2 t dx_2$$

$$=\frac{1}{2}[1-\cos t]/t$$

解（2）：

$$E[\eta(t_1)\eta(t_2)]=E[\xi_1\xi_1]E[\sin(\xi_2 t_1)\sin(\xi_2 t_2)]$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1\left[\cos[x_2(t_1-t_2)]-\cos[x_2(t_1+t_2)]\right]dx_2$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{\sin(t_1-t_2)}{t_1-t_2}-\frac{\sin(t_1+t_2)}{t_1+t_2}\right]$$

第 4 题

设$\xi(t)$是实正态分布平稳随机过程，它的数学期望为 0，如定义

$$\eta(t)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\xi(t)\xi(t+\tau)}{|\xi(t)\xi(t+\tau)|}\right]$$

试证明$E\{\eta(t)\}=\dfrac{1}{\pi}\cos^{-1}[-k_\xi(\tau)]$，其中$k_\xi(\tau)=C_\xi(\tau)/\sigma_\xi^2$，$C_\xi(\tau)$代表$\xi(t)$的协方差函数，$\sigma_\xi^2$代表$\xi(t)$的方差。

解（待补充）

平稳随机过程

第 5 题

设有随机过程$\xi(t)=z\sin(t+\theta),\quad -\infty<t<\infty,$，其中$z,\theta$是相互统计独立的随机变量，$P(\theta=\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，$P(\theta=-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，Z均与分布于(-1, 1)间。试证明$\xi(t)$是宽平稳随机过程，

但不满足严平稳的条件（不满足一级严平稳的条件）。
解（1）：

首先计算随机变量 z 的均值和方差

$$E\left\{Z\right\}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}xdx=0$$

$$E\left\{Z^2\right\}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{3}$$

接着计算的均值函数和相关函数

$$E[\eta(t)]=E[Z]E[\sin(t+\theta)]=0$$

$$E[\eta(t_1)\eta(t_2)]=E[Z^2]E[\sin(t_1+\theta)\sin(t_2+\theta)]$$

$$=\frac{1}{6}E[\cos(t_1-t_2)-\cos(t_1+t_2+2\theta)]$$

$$=\frac{1}{6}\cos(t_1-t_2) \qquad \tau=t_1-t_2$$

$$=R_\xi(\tau)$$

故 $\xi(t)$ 是宽平稳的

解（2）：

t ＝ 0 时，$\sin(t+\theta)=\sin\theta$ 以 1/2 的概率取 $\sqrt{2}/2$，以 1/2 的概率取 $-\sqrt{2}/2$，而 Z 均匀分布于（－1，1），∴ $\xi(t)$ 的取值均匀分布于 $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$

t ＝$\frac{\pi}{4}$时，$\sin(t+\theta)=\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)$ 以 1/2 的概率取 1，以 1/2 的概率取 0，而 Z 均匀分布于（－1，1），∴$\xi(t)$ 以 1/2 的概率均匀分布于（－1，1），以 1/2 的概率取值为 0。

它的一维概率分布与 t 有关，∴它不是严格平稳的

第 6 题

设 z 为随机变量，θ 为另一随机变量，z 与 θ 相互统计独立，均匀分布于 $(0,2\pi)$ 间；又设有随机过程 $\xi(t)=z\sin(\omega t+\theta),\quad -\infty<t<\infty,$ 其中 ω 为常数，ω>0，是利用特征函数证明 $\xi(t)$ 系一严平稳随机过程。

解：

$$\Phi_\xi(u)=E(e^{j\xi u})=\int dzf_z(Z)\int d\theta\frac{1}{2\pi}e^{juZ\sin(\omega t+\theta)}$$

$$=\int dzf_z(Z)\bullet J_0(uZ)$$

$\Phi_\xi(u)$ 于 t 无关，$\xi(t)$ 的各阶矩于 t 无关，它是严格平稳的。

解（待补充）

第 7 题

设有一相位调制的正弦信号，其复数表示式为 $\xi(t)=e^{j(\omega t+\theta(t))}$ $-\infty<t<\infty$，其中 ω 为常数，$\omega>0$，$\theta(t)$ 是一个二级严平稳过程。设 $\psi_{t_1t_2}(u_1u_2)$ 是过程的二维特征函数，即 $\psi_{t_1t_2}(u_1u_2)=E\left\{e^{j[u_1\theta(t_1)+u_2\theta(t_2)]}\right\}$ 同时对于任何 $-\infty<\tau<\infty$，$\psi_{0\tau}(1,0)=0$，试证明过程 $\xi(t)$ 是宽平稳过程，并求它的相关函数 $R_\xi(t_1,t_2)$。

解：

先求均值，

$$
\begin{aligned}
m_\xi(t) &= E\{\xi(t)\} \\
&= E\left\{e^{j(\omega t+\theta(t))}\right\} \\
&= e^{j\omega t}\cdot E\left\{e^{j\theta(t)}\right\} \\
&= e^{j\omega t}\int e^{jx}dF(x,t)
\end{aligned}
$$

由于 $\theta(t)$ 是一个二阶严平稳过程，故

$$
\begin{aligned}
m_\xi(t) &= e^{j\omega t}\int e^{jx}dF(x,t) \\
&= e^{j\omega t}\int e^{jx}dF(x) \\
&= e^{j\omega t}\cdot E\left\{e^{j\theta(0)}\right\}
\end{aligned}
$$

考虑到 $\psi_{0\tau}(1,0)=E\left\{e^{j\theta(0)}\right\}=0$

$m_\xi(t)=0$，均值为常数

再求自相关函数

$$
\begin{aligned}
R_\xi(t_1,t_2) &= E\left\{\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\right\} \\
&= E\left\{e^{j(\omega t_1+\theta(t_1))}e^{-j(\omega t_2+\theta(t_2))}\right\} \\
= \quad &= e^{j\omega(t_1-t_2)}E\left\{e^{j(\theta(t_1)-\theta(t_2))}\right\} \\
&= e^{j\omega(t_1-t_2)}\psi_{0,\tau}(1,-1) \\
&= R_\xi(t_1-t_2)
\end{aligned}
$$

故过程 $\xi(t)$ 是宽平稳过程，且 $R_\xi(t_1,t_2)==e^{j\omega(t_1-t_2)}\psi_{t_1,t_2}(1,-1)$

第 8 题

设有一时间离散的马尔可夫过程 $\xi(n), n=0,1,2,\cdots$, $\xi(0)$ 具有概率密度函数 $f_0(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<1)\\ 0 & (其他)\end{cases}$ 对于 $n=1,2,3,\cdots$，当给定 $\xi(n-1)=\mathrm{x}$ 时 $\xi(n)$ 的条件概率密度均与分布于 (1-x, 1) 之间。问 $\xi(n), n=0,1,2,\cdots,$ 是否满足严平稳的条件？

解（待补充）

第 9 题

设有两状态时间离散的马尔可夫链 $\xi(n), n=0,1,2,\cdots,$ $\xi(n)$ 可取 0 或 1，它的一步转移概率矩阵为 $\begin{pmatrix} q_1 & p_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$，其中 $p_1+q_1=1,\quad p_2+q_2=1,$ 且 $P\{\xi(0)=1\}=\dfrac{p_1}{p_1+p_2}$，$P\{\xi(0)=0\}=\dfrac{p_2}{p_1+p_2}$ 试证明该过程为严平稳过程。

解（提示）：

给出初始时刻的概率分布，给出任意时刻的概率分布，证明它们示相同的；

给出任意 N 个时刻的概率分布，证明它们具有平移不变性。

随机分析

第 10 题

设有相位调制的正弦波过程 $\xi(t)=A\cos(\omega t+\pi\eta(t))$，其中 ω 为常数，ω>0，$\{\eta(t), t\ge 0\}$ 是泊松过程，A 是对称伯努利随机变量，即 $P\{A=1\}=\dfrac{1}{2}, P\{A=-1\}=\dfrac{1}{2},$， A 和 $\eta(t)$ 是相互统计独立的，试画出其样本函数，样本函数是否连续？求 $\xi(t)$ 的相关函数 $R_\xi(t_1,t_2)$，问该过程是否均方连续？

解：

求 $\xi(t)$ 自相关函数：

$$
\begin{aligned}
&R_\xi(t_1,t_2)\\
&=E\left\{A\cos\left(\omega t_1+\pi\eta\left(t_1\right)\right)\cdot A\cos\left(\omega t_2+\pi\eta\left(t_2\right)\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}E\left\{A^2\right\}E\left\{\cos\left[\omega\left(t_1+t_2\right)+\pi\left(\eta\left(t_1\right)+\eta\left(t_2\right)\right)\right]\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\cos\left[\omega\left(t_1-t_2\right)+\pi\left(\eta(t_1)-\eta\left(t_2\right)\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

考虑到 A 和 $\eta(t)$ 是相互统计独立的

$$E\left(A^2\right)=\frac{1}{2}\times 1^2+\frac{1}{2}\times(-1)^2=1$$

$$R_\xi(t_1,t_2)$$

$$=\frac{1}{2}E\{\cos[\omega(t_1+t_2)+\pi(\eta(t_1)+\eta(t_2))]+\cos[\omega(t_1-t_2)+\pi(\eta(t_1)-\eta(t_2))]\}$$

条件数学期望

$$E(Y\mid x_i)=\sum_j y_j p_{j/i}=\sum_j y_j p\{Y=y_j\mid X=x_i\}$$

全期望公式

$$E(X)=E\{E[X/Y]\}=\sum_j p[Y=y_j]E(X/y_j)$$

注意到

$$\eta(t_1)=m,\quad \eta(t_2)=n$$

$$\eta(t_1)-\eta(t_2)=k,$$

$$\eta(t_1)+\eta(t_2)=\eta(t_1)-\eta(t_2)+2\eta(t_2)=k+2n$$

其中，m,n 是正整数，k 是整数

则

$$E\left\{\cos[\omega(t_1+t_2)+\pi\left(\eta(t_1)+\eta(t_2)\right)]\right.$$

$$\left.+\cos\left[\omega(t_1-t_2)+\pi\left(\eta(t_1)-\eta(t_2)\right)\right]\mid\eta(t_1)-\eta(t_2)=k\right\}$$

$$=\left\{\cos\left(\omega(t_1+t_2)\right)+\cos\left(\omega(t_1-t_2)\right)\right\}(-1)^k$$

相关函数可以写作

$$R_\xi(t_1,t_2)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}P_r\left[\eta(t_1)-\eta(t_2)=k\right](-1)^k\left\{\cos\left[\omega(t_1+t_2)\right]+\cos\left[\omega(t_1-t_2)\right]\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda(t_1-t_2)\right)^k}{k!}e^{-\lambda(t_1-t_2)}(-1)^k\left\{\cos\left[\omega(t_1+t_2)\right]+\cos\left[\omega(t_1-t_2)\right]\right\}$$

从相关函数可以知道，相位调制的正弦波过程 $\xi(t)=A\cos(\omega t+\pi\eta(t))$ 的相关函数是连续函数，相应的随机过程是均方连续的，但不是平稳的。

第 11 题

设有实宽平稳随机过程$\xi(t)$，其相关函数为$R_\xi(\tau)$，试证

$$P\{|\xi(t+\tau)-\xi(t)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{2}{\varepsilon^2}\left[R_\xi(0)-R_\xi(\tau)\right]$$

提示

首先证明

$$E\left\{\left[\xi(t+\tau)-\xi(t)\right]^2\right\}=2\left[R_\xi(0)-R_\xi(\tau)\right]$$

接着计算

$$
\begin{aligned}
E\left\{\left[\xi(t+\tau)-\xi(t)\right]^2\right\} &= \sum_x x\cdot P\left\{\left[\xi(t+\tau)-\xi(t)\right]^2=x\right\} \\
&\ge \sum_{x\ge\varepsilon^2} x\cdot P\left\{\left[\xi(t+\tau)-\xi(t)\right]^2=x\right\} \\
&\ge \sum_{x\ge\varepsilon^2} \varepsilon^2\cdot P\left\{\left[\xi(t+\tau)-\xi(t)\right]^2\ge\varepsilon^2\right\} \\
&\ge \varepsilon^2\cdot\sum_{x\ge\varepsilon^2} P\left\{\left[\xi(t+\tau)-\xi(t)\right]^2\ge\varepsilon^2\right\} \\
&\ge \varepsilon^2\cdot P\{|\,\xi(t+\tau)-\xi(t)\,|\ge\varepsilon\}
\end{aligned}
$$

综合上式得证。

平稳随机过程

第 12 题

设有随机过程 $\xi(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k e^{j\omega_k t}$ 其中 A_k, k= 1, 2, 3, …, n 是 n 个实随机变量，ω_k, k = 1, 2, 3, …, n 是 n 个实数。试问各 A_k 之间应满足怎样的条件才能使 $\xi(t)$ 是一个复的平稳随机过程？

提示

$\xi(t)$ 得均值应为零，相关函数应是时间差得函数，与时间原点得位置无关。可求得

各 A_k 均值为零，

各 A_k 之间应该相互正交，即互相关为零。

随机分析

第 13 题

设平稳随机过程 $\xi(t)$ 的相关函数为 $R_\xi(\tau)$，且 $R_\xi(T)=R_\xi(0)$，T 为一常数，T>0，试证：

（1）有 $\xi(t+T)=\xi(t)$ $E\left\{\left[\xi(u+T)-\xi(u)\right]\cdot\left[\xi(u+t+T)-\xi(u+t)\right]\right\}$ 依概率 1 相等；

（2）$R_\xi(t+T)=R_\xi(t)$ 及相关函数具有周期性，其周期为 T。

（具有周期性相关函数的平稳随机过程称为周期性随机过程）

提示（1）：

从计算 $E\left\{\left|\xi(t+T)-\xi(t)\right|^2\right\}$ 的极限为零着手。

提示（2）：

从计算 $E\left\{\left[\xi(u+T)-\xi(u)\right]\cdot\left[\xi(u+t+T)-\xi(u+t)\right]\right\}$ 的极限为零着手

或从计算$E\left\{\left[\xi(u+T)-\xi(u)\right]\cdot\overline{\xi(u+t+T)}\right\}$的极限为零着手

二阶矩过程

第 14 题

设有随机过程$\xi(t)=\sum_{k=1}^{n}[A_k\cos\varpi_k t+B_k\sin\omega_k t]$，其中$\omega_k$, k= 1, 2, 3, …, n 是给定的实数，A_k,B_k, k= 1, 2, 3, …, n 是实随机变量，$E\{A_k\}=0$, $E\{B_k\}=0$,各A_k,B_k间彼此相互统计独立，$D\{A_k\}=\sigma_k^2=D\{B_k\}$，k= 1, 2, 3, …, n。求它的相关函数$R_\xi(t_1,t_2)$。

解（略）

第 15 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$、$\eta(t)$，且$\xi(t)$、$\eta(t)$是相互统计独立的；有设有随机过程$Z(t)$、$\omega(t)$，　$Z(t)=\xi(t)+\eta(t)$、$\omega(t)=2\xi(t)+\eta(t)$求$R_z(\tau)$ $R_w(\tau)$ $R_{zw}(\tau)$ $R_{wz}(\tau)$。

解（略）

第 16 题

设$\xi(t)$、$\eta(t)$、$\zeta(t)$为实随机过程，$\zeta(t)=\xi(t)\eta(t)$，$\xi(t)$、$\eta(t)$为相互统计独立的随机过程，则

（1）$R_\zeta(\tau)=R_\xi(\tau)R_\eta(\tau)$

（2）若$P(t)=\xi(t)-\mu_\xi$　$Q(t)=\eta(t)-\mu_\xi$　$R_P(\tau)=e^{-a|\tau|}$　$R_Q(\tau)=e^{-b|\tau|}$

a,b 均为正实数，μ_ξ μ_η为$\xi(t)$、$\eta(t)$的均值，求$R_\xi(t)$。

解（略）

第 17 题

设有随机过程$\{\zeta(t),-\infty<t<\infty\},\zeta(t)=\eta\cos t+\xi\sin t$，其中$\xi,\eta$为统计独立的随机变量，$\xi,\eta$均可取－1 和＋2 两个值，取－1 的概率为$\frac{2}{3}$，取＋2 的概率为$\frac{1}{3}$。

（1）试计算$E\{\zeta(t)\}$相关函数$R_\zeta(t_1,t_2)$。

（2）证$\zeta(t)$是一宽平稳随机过程，但不是严平稳随机过程。

解（1）：

$$E\{\xi\}=E\{\eta\}=-1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=0$$
$$E\{\xi\eta\}=E\{\xi\}\cdot E\{\eta\}=0$$
$$E\{\xi^2\}+E\{\eta^2\}=(-1)^2\times\frac{2}{3}+2^2\times\frac{1}{3}=2$$

$$E[\zeta(t)]=E[\eta\cos t+\xi\sin t]=0$$

$$R_\zeta(t_1-t_2)=E\{[\eta\cos t_1+\xi\sin t_1][\eta\cos t_2+\xi\sin t_2]\}$$

$$=E[\eta^2]\cos t_1\cos t_2+E[\xi^2]\sin t_1\sin t_2$$

$$=2\cos(t_1-t_2)$$

显然它是宽平稳的

解（2）：

t=0 时，$\zeta(t)=\eta$，$\zeta(t)$ 的取值为－1 和 2

t=π/4 时，$\zeta(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\eta+\xi)$，$\zeta(t)$ 的取值为 $-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}/2$，$2\sqrt{2}$，$\zeta(t)$ 的一维分布于 t 有关。

∴它不是严平稳的。

第 18 题

设有随机游动 $\eta(t,s)$，

（1）$\eta(0,s)=0$；

（2）$\eta(t,s)$ 定义在样本点 s 集上，且 $t\ge 0$；

（3）每个时间间隔 T，该过程取一个新的值，

$$\eta(t,s)=Y_n \quad (nT\le t<(n+1)T)$$

（4）Y_n 是二项分布随机变量，$Y_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$，

ξ_k 为取(-a)、(+a)两个可能值的随机变量，且 $P\{\xi_k=-a\}=\frac{1}{2}, P\{\xi_k=+a\}=\frac{1}{2}, k=1,2,3,\cdots,$ ξ_j 与 ξ_k $(j\ne k)$ 相互统计独立。

（1）试证 $E\{\eta(t,s)\}=0$；

（2）试证 $E\{\eta^2(t,s)\}=na^2=a^2[t/T]$；

（3）当 $T\to 0$，每次跃变值 a 也趋于 0 时，$\frac{a^2}{T}\to\beta,\beta$ 为常数，定义

$$z(t)=\lim_{T\to 0}\{\eta(t,s)\}\Rightarrow\frac{a^2}{T}=\beta$$

试证 $E\{z(t)\}=0, D\{z(t)\}=\beta t$

（4）求 z(t)的概率密度函数；
（5）$\eta(t,s)$、z(t)均为独立增量随机过程，求$C_z(t_1,t_2)$。（过程 z(t)称为维纳过程）。
解（待补充）

第 19 题

设有图题 4－19 所示的电路，其中 $W_0(t)$为输入随机过程，$W_0(t)$为标准的维纳过程（即上题的 z(t)，且其$\beta=1$）；其输出为$\xi(t)=W_0(t)-W_0(t-1)$。求$\xi(t)$的均值和相关函数。

解（待补充）

第 20 题

定义$\xi(t)=\sigma e^{-2at}W_0(e^{2at}-1)$，其中$\sigma,a$均为常数，$\sigma>0,a>0$，$W_0$(.)代表标准的维纳过程，称$\xi(t)$为 Ornstein-Uhlenbeck 过程，求$\xi(t)$的均值和相关函数。
解（待补充）

随机分析、相关函数计算
第 21 题

设有随机过程$\xi(t)$，它的均值为$\mu_\xi(t)$，相关函数为$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$；若有随机过程$\eta(t)=a(t)\xi(t)+b(t)$，其中 a(t),b(t)是确定性函数，求$\eta(t)$的均值和相关函数。
解（略）

第 22 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$，其相关函数为$R_\xi(\tau)=Ae^{-a|\tau|}(1+a|\tau|)$；其中 A,a 为常数，a>0，求$\eta(t)=\dfrac{d\xi(t)}{dt}$的相关函数。

解（略）

第 23 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$，它的自协方差为$C_\xi(\tau)=Ae^{-a|\tau|}(\cos\beta\tau+\dfrac{a}{\beta}\sin\beta|\tau|)$；其中 A,a，$\beta$为常数，又$\eta(t)=\dfrac{d\xi(t)}{dt}$，求$\eta(t)$的自协方差函数及方差。

解（略）

第 24 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$，其相关函数为$R_{\xi}(\tau)=\sigma^2 e^{-a^2\tau^2}$；其中$\sigma$、a 为常数，若有随机过程$\eta(t)=a\dfrac{d\xi(t)}{dt}$，a 为常数，求$\eta(t)$的相关函数。

解（略）

第 25 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$，其相关函数为$R_{\xi}(\tau)$；且设$\eta(t)=\xi(t)+\dfrac{d\xi(t)}{dt}+\dfrac{d^2\xi(t)}{dt^2}$，求$\eta(t)$的相关函数。

解（略）

第 26 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$，其相关函数为$R_{\xi}(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|+\dfrac{1}{3}\alpha^2\tau^2)$；若有随机过程$\eta(t)=\xi(t)+\dfrac{d^2\xi(t)}{dt^2}$，求$\eta(t)$的相关函数。

解（略）

第 27 题

设有随机过程$\xi(t)$，其相关函数为$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$；若有随机过程$\eta(t)$、$\zeta(t)$定义如下：$\eta(t)=a\xi(t)+b\dfrac{d\xi(t)}{dt}$，$\zeta(t)=c\dfrac{d\xi(t)}{dt}+f\dfrac{d^2\xi(t)}{dt^2}$,其中 a,b,c,f 为常数，试求$\eta(t)$和$\zeta(t)$的相关函数。

解（略）

第 28 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$，它的均值为 0，相关函数为$R_{\xi}(\tau)$；若$\eta(t)=\int_0^t\xi(u)du$，求$\eta(t)$的方差和自协方差函数。

解（略）

第 29 题

设有随机过程$\xi(t)$，它的均值为$\mu_{\xi}(t)$，相关函数为$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)$，协方差函数为$C_{\xi\xi}(t_1,t_2)$；若$\eta(t)=a_0\xi(t)+a_1\dfrac{d\xi(t)}{dt}+b_1\int_0^t e^{-\lambda u}\xi(u)du+c$，其中 a_0,a_1,b_1,c 均为实常数，求$\eta(t)$的均值和自协方差函数。

解（略）

系统，短时间的时间平均器

第 30 题

设有实随机过程$\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$加入到一短时间的时间平均器上作为它的输入，它的输出为$\eta(t)$，$\eta(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\xi(u)du$ 式中 t 为输出信号的输出时刻，T 为平均器采用的积分时间间隔。若$\xi(t)=\zeta\cos t$，其中ζ为$(0,1)$内均匀分布的随机变量，

（1）求输入过程的均值和相关函数，问输入过程是否平稳？

（2）证明输出过程的表示式为

$$\eta(t)=\zeta\left(\frac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)\cos(t-\frac{T}{2})$$

（3）证明输出的均值为

$$E\{\eta(t)\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)\cos(t-\frac{T}{2})$$

输出相关函数为

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)^2\cos(t_1-\frac{T}{2})\cos(t_2-\frac{T}{2})$$

问输出是否为平稳过程？

解，见讲义

第 31 题

如果短时间平均器的输入信号为$\xi(t)=\sin(\omega t+\theta)\quad(-\infty<t<\infty)$，其中$\omega$为常数，$\omega$>0, θ为随机相角，它是$(0,2\pi)$内均匀分布的随机变量，试证明：

（1）$R_{\xi\xi}(t_1,t_2)=C_{\xi\xi}(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\cos\omega(t_1-t_2)$

（2）它的输出信号表示式为$\eta(t)=\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\sin(\omega t-\frac{\omega T}{2}+\theta)$

（3）输出信号$\eta(t)$的均值和输出信号相关函数为

$E\{\eta(t)\}=0$，

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2\cos\omega(t_1-t_2)$$

问$\eta(t)$是否平稳？

解，见讲义

第 32 题

若短时间平均器的输入为宽平稳随机过程$\{\xi(t),\quad (-\infty < t < \infty)\}$，其均值为常数$\mu_\xi$，相关函数为$R_\xi(\tau)$，试证明它的输出也是宽平稳随机过程，并计算出它的均值和相关函数。

解，见讲义

第 33 题

如果短时间平均器的输入为宽平稳随机过程$\xi(t)$，它的均值为μ_ξ，协方差函数为

$$C_{\xi\xi}(\tau)=\begin{cases}\sigma^2(1-\dfrac{|\tau|}{\tau_0}) & (0\le|\tau|\le\tau_0)\\ 0 & (|\tau|\ge\tau_0)\end{cases};$$

$\eta(t)$为其输出过程，试证

$$D\eta(t)=\begin{cases}\sigma^2(1-\dfrac{1}{3}\dfrac{T}{\tau_0}) & (0\le T\le\tau_0)\\ \sigma^2\dfrac{\tau_0}{T}(1-\dfrac{1}{3}\dfrac{\tau_0}{T}) & (\tau_0<T)\end{cases}$$

解，见讲义

第 34 题

如果短时间平均器的输入为随机电报信号，它的均值为$\frac{1}{2}$，它的自协方差函数为$C_\xi(\tau)=\frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}$，$\eta(t)$为平均器的输出过程，试证$\eta(t)$的方差为$D\eta(t)=\dfrac{1}{4\lambda T}(1-\dfrac{1}{2\lambda T}+\dfrac{1}{2\lambda T}e^{-2\lambda T})$

解，见讲义

各态历经性

第 35 题

设有随机过程$\xi(t)$和 N(t)，且$\xi(t)=b+N(t)$，其中 b 为常数，$E\{N(t)\}=0$，N(t)的相关函数为$R_N(\tau)$，即 N(t)为平稳随机过程。如果$\hat{b}=\frac{1}{T}\int_0^T\xi(u)du$证$E\{\hat{b}\}=b$，且

$$D\hat{b}=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}(1-\frac{|\tau|}{T})R_N(\tau)d\tau$$

提示：

利用定理证明的方法给予证明

第 36 题

设$\xi(t)$为一随机起始时间的周期过程，它的样本函数见图题 4—36。图中 A 为幅度，T 为周期，A、T 均为常数，t_0为起始时间，它是(0,T)上均匀分布的随机变量。求：

（1）$\xi(t)$的均值$E\{\xi(t)\}$、均方差$E\{\xi^2(t)\}$和方差$D\xi(t)$；
（2）$\xi(t)$的时间平均值$<\xi(t)>$和$<\xi^2(t)>$，问$\xi(t)$是否具有各态历经性？
提示：
随机过程具有随机的起始时刻，具有各态历经性。

第 37 题

设有平稳 Ornstein-Uhlenbeck 过程$\xi(t)$，它的均值为$\mu_\xi = 0$，相关函数为$R_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad -\infty < t < \infty$，其中$\sigma^2, \alpha$为常数，$\alpha > 0$，试证明该过程满足均值各态历经定理（其实它也符合相关函数各态历经定理（不证））。试说明：利用图题 4－37 所示的方块图可以用一个样本函数求得它的参数σ^2和$\alpha = \ln[\dfrac{\sigma^2}{R_\xi(1)}]$。
提示：
利用定理给予证明

第五章

平稳随机过程的谱分析及随机过程通过线性系统的分析

相关函数和功率谱密度分析

第 1 题

设有周期信号如图题 5－1 所示，求它的时间相关函数和它的功率谱密度。

解：

相关函数周期为 T。

$$R(\tau)=1-\frac{|\tau|}{T} \quad (|\tau|\le\frac{T}{2})$$

$$R(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t-\tau)dt$$

功率谱密度为离散谱，谱线为 1 / T 的倍数。

$$\begin{aligned}P(n)&=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R(\tau)e^{-j\frac{2\pi}{T}n\tau}d\tau\\&=\frac{1}{T}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t-\tau)e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}e^{-j\frac{2\pi}{T}n(t-\tau)}dtd\tau\\&=a_n\cdot a_n^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{j\frac{2\pi}{T}nt}dt\\&=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{-T/4}+\int_{-T/4}^{T/4}+\int_{T/4}^{T/2} f(t)e^{-j\omega_0 nt}dt\\&=\frac{1}{T}\frac{1}{n\omega_0}\{[e^{-j\omega_0 n(-\frac{T}{4})}-e^{-j\omega_0 n(-\frac{T}{2})}]\\&\qquad+[e^{-j\omega_0 n(\frac{T}{4})}-e^{-j\omega_0 n(-\frac{T}{4})}]+[e^{-j\omega_0 n(\frac{T}{2})}-e^{-j\omega_0 n(\frac{T}{4})}]\}\\&=\frac{-2j}{n\omega_0 T}\sin\frac{n\omega_0 T}{2}\\&=-j\sin c\frac{n\omega_0 T}{2}\end{aligned}$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T} \quad \frac{n\omega_0 T}{2}=n\pi$$

$$|a_n|^2=(\sin c\frac{n\omega_0 T}{2})^2$$

第 2 题

设有四个平稳随机过程，已知其相关函数，求其功率谱密度函数:

（1） $R_\xi(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\cos 2\pi f_0\tau$，（$f_0$、$\alpha$为常数，$\alpha>0$)

解（1）：

$e^{-\alpha|\tau|}$的傅立叶变换：

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\
&=\int_{-\infty}^{0}e^{(\alpha-j2\pi f)\tau}d\tau+\int_{0}^{\infty}e^{(-\alpha-j2\pi f)\tau}d\tau\\
&=\frac{1}{\alpha-j2\pi f}+\frac{1}{\alpha+j2\pi f}\\
&=\frac{2\alpha}{\alpha^2+(2\pi f)^2}
\end{aligned}
$$

$\cos 2\pi f_0\tau=\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0\tau}+\frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0\tau}$ 的傅立叶变换：

$$\frac{1}{2}\delta(f+f_0)+\frac{1}{2}\delta(f-f_0)$$

功率谱密度是相关函数的傅立叶变换，等与上述两项傅立叶变换的卷积，为

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+[2\pi(f-f_0)]^2}+\frac{\alpha}{\alpha^2+[2\pi(f+f_0)]^2}$$

（2） $R_\xi(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha\tau^2}$，（$\sigma^2$、$\alpha$为常数，$\alpha>0$)

解（2）：$R_\xi(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha\tau^2}$

做$R_\xi(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha\tau^2}$ 的傅立叶变换，得到相应的功率谱密度

$$
\begin{aligned}
S(f)&=\int R_\xi(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\
&=\int\sigma^2e^{-\alpha\tau^2}e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\
&=\int\sigma^2e^{-\alpha\tau^2-j2\pi f\tau}d\tau\\
&=\sigma^2\int e^{-(\sqrt{\alpha}\tau-\frac{j2\pi}{2\sqrt{\alpha}})^2}d\tau\cdot e^{(\frac{j\pi f}{\sqrt{\alpha}})^2}\\
&=\sigma^2\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\cdot e^{-\frac{\pi^2f^2}{\alpha}}
\end{aligned}
$$

（3） $R_\xi(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha\tau^2}\cos\beta\tau$，（$\sigma^2$、$\alpha$、$\beta$为常数，$\alpha>0$)

解（3）：

$\sigma^2e^{-\alpha\tau^2}$ 的傅立叶变换，

$$\sigma^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}}$$

$\cos\beta\tau$ 的傅立叶变换，

$$\frac{1}{2}\delta(2\pi f-\beta)+\frac{1}{2}\delta(2\pi f+\beta)$$

功率谱密度是相关函数的傅立叶变换，等与上述两项傅立叶变换的卷积，为

$$\frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2(f-\beta/2\pi)^2}{\alpha}}+\frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2(f+\beta/2\pi)^2}{\alpha}}$$

（4） $R_\xi(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{|\tau|}{T_0} & (|\tau|\le T_0)\\ 0 & (|\tau|\le T_0)\end{cases}$

解（4）：

$$\begin{aligned}S(f)&=\int_{-T_0}^{T_0}(1-\frac{|\tau|}{T_0})e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\int_{-T_0}^{0}+\int_0^{T_0}(1-\frac{\tau}{T_0})e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\int_0^{T_0}(1-\frac{\tau}{T_0})2\cdot\cos 2\pi f\tau d\tau\\&=(1-\frac{\tau}{T_0})\frac{2\sin 2\pi f\tau}{2\pi f}\Big|_0^{T_0}-\int_0^{T_0}\frac{2\sin 2\pi f\tau}{2\pi f}(-\frac{1}{T_0})\tau d\tau\\&=\frac{-2T_0}{(2\pi fT_0)^2}\int_0^{T_0}d\cos 2\pi f\tau\\&=\frac{T_0}{2}\cdot\frac{1-\cos 2\pi fT_0}{(\pi fT_0)^2}\\&=T_0(\frac{\sin\pi fT_0}{\pi fT_0})^2\end{aligned}$$

第 3 题

设某平稳随机过程的相关函数为 $R_\xi(\tau)=4e^{-|\tau|}\cos\pi\tau+\cos 3\pi\tau$，求其功率谱密度。

解：

$4e^{-|\tau|}\cos\pi\tau$ 的傅立叶变换，

$$\frac{4}{1+(2\pi f-1)^2}+\frac{4}{1+(2\pi f+1)^2}$$

$\cos 3\pi\tau$ 的傅立叶变换，

$$\frac{1}{2}\delta(2\pi f-3\pi)+\frac{1}{2}\delta(2\pi f+3\pi)$$

功率谱密度是相关函数的傅立叶变换，等与上述两项傅立叶变换的和，为

$$S(f)=\frac{4}{1+(2\pi f-1)^2}+\frac{4}{1+(2\pi f+1)^2}$$
$$+\frac{1}{2}\delta(2\pi f-3\pi)+\frac{1}{2}\delta(2\pi f+3\pi)$$

第 4 题

设有二平稳随机过程，它们的功率谱密度分别为：

（1）$S_\xi(f)=\dfrac{(2\pi f)^2}{(2\pi f)^4+3(2\pi f)^2+2}$

（2）$S_\xi(f)=\dfrac{(2\pi f)^2+1}{(2\pi f)^4+5(2\pi f)^2+6}$

求其相应相关函数及其均方值。

解（1）：

功率谱密度函数可以写成

$$\begin{aligned}S_\xi(f)&=\frac{(2\pi f)^2}{(2\pi f)^4+3(2\pi f)^2+2}\\&=\frac{(2\pi f)^2}{[(2\pi f)^2+2][(2\pi f)^2+1]}\\&=\frac{2}{(2\pi f)^2+2}+\frac{-1}{(2\pi f)^2+1}\end{aligned}$$

$\dfrac{2}{(2\pi f)^2+2}$ 的傅立叶变换是

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}$$

$\dfrac{-1}{(2\pi f)^2+1}$ 的傅立叶变换是

$$-\frac{1}{2}e^{-|\tau|}$$

相关函数可以写成

$$R_\xi(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}-\frac{1}{2}e^{-|\tau|}$$

均方值为

$$R_{\xi}(0)=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

解（2）：

功率谱密度函数可以写成

$$S_{\xi}(f)=\frac{(2\pi f)^{2}+1}{(2\pi f)^{4}+5(2\pi f)^{2}+6}$$
$$=\frac{2}{(2\pi f)^{2}+3}+\frac{-1}{(2\pi f)^{2}+2}$$

$\dfrac{2}{(2\pi f)^{2}+3}$ 的傅立叶变换是

$$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|\tau|}$$

$\dfrac{-1}{(2\pi f)^{2}+2}$ 的傅立叶变换是

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}$$

相关函数可以写成

$$R_{\xi}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|\tau|}-\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}$$

均方值为

$$R_{\xi}(0)=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12}$$

第 5 题

设一平稳随机过程的功率谱密度如图题 5－5 所示，即

$$S_{\xi}(f)=\begin{cases}S_{0} & (f_{0}-\Delta f<|f|<f_{0}+\Delta f)\\ 0 & (\text{其他频率})\end{cases}$$

求其相应相关函数及其均方值。

解：

相关函数是

$$R_{\xi}(\tau)=\int S_{\xi}(f)e^{j2\pi f\tau}df$$
$$=S_{0}\int_{-f_{0}-\Delta f}^{-f_{0}+\Delta f}e^{j2\pi f\tau}df+S_{0}\int_{f_{0}-\Delta f}^{f_{0}+\Delta f}e^{j2\pi f\tau}df$$

$$= S_0 \frac{1}{j2\pi\tau} e^{-j2\pi f_0 \tau}(e^{j2\pi\Delta f \tau} - e^{-j2\pi\Delta f \tau})$$

$$+ S_0 \frac{1}{j2\pi\tau} e^{j2\pi f_0 \tau}(e^{j2\pi\Delta f \tau} - e^{-j2\pi\Delta f \tau})$$

$$= 4S_0 \Delta f \sin c(2\pi\Delta f \tau)\cos(2\pi f_0 \tau)$$

均方值为

$$R_\xi(0) = 4S_0 \Delta f$$

求线性系统输出的相关函数，已知系统的冲击响应。

第 6 题

设有线性时不变动态系统，其冲激响应为 h(t)。如果输入为一平稳随机过程 $\xi(t)$，它的相关函数为 $R_\xi(\tau)$，协方差函数为 $C_\xi(\tau)$，试证输出过程 $\eta(\tau)$ 的相关函数可以表示为 $R_\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau - u)R_h(u)du$, 其中 $R_h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t-u)dt$。$R_h(u)$ 称为系统的相关函数，并证明 $D\eta(t) = Var\{\eta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} C_\xi(u)R_h(u)du$

证明：

按定义有

$$\eta(\tau) = \int \xi(u)h(\tau - u)du = \int \xi(\tau - u)h(u)du$$

$$R_\eta(t_1, t_2)$$

$$= E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}$$

$$= E\left\{\int \xi(t_1 - u_1)h(u_1)du_1 \int \xi(t_2 - u_2)h(u_2)du_2\right\}$$

$$= \int\int E\{\xi(t_1 - u_1)\xi(t_2 - u_2)\} h(u_1)h(u_2)du_1 du_2$$

$$= \int\int R_\xi(t_1 - t_2 - u_1 + u_2)h(u_1)h(u_2)du_1 du_2$$

令 $\tau = t_1 - t_2 \quad u = u_1 - u_2$

$$= \int\int R_\xi(\tau - u)h(u_1)h(u - u_1)du_1 du$$

$$= \int R_\xi(\tau - u)R_h(u)du$$

即

$$R_h(u) = \int h(u_1)h(u - u_1)du_1$$

同理可证

$$D\eta(t) = Var\{\eta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} C_\xi(-u)R_h(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} C_\xi(u)R_h(u)du$$

其中

$C_\xi(u)$ 是偶函数。

第 7 题

设有一“平均电路”如图题 5－7 所示，即当输入为 x(t)时，平均电路的输出为

$$y(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}x(u)du$$

（1）试证该电路的冲激响应为

$$h(t)=\begin{cases}\frac{1}{T} & (0\le t\le T)\\ 0 & (\text{其它时间})\end{cases}$$

并求第 6 题所定义的系统的相关函数； $R_h(\tau)$

如果该电路的输入为一平稳随机过程，其协方差函数为

$$C_\xi(\tau)=\begin{cases}\sigma_\xi^2(1-\frac{|\tau|}{T_0}) & (|\tau|\le T_0)\\ 0 & (|\tau|>T_0)\end{cases}$$

用上题的方法求输出过程 $\eta(\tau)$ 的方差 $D\eta(\tau)$ 。

解（1）：

由题意可得到

$$y(t)=\int h(t-u)x(u)du=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}x(u)du$$

比较两个积分式，可以得到

$$h(t-u)=1 \quad -T<u<0$$

$$h(t-u)=0$$

进一步有

$$h(t)=1 \quad 0\le t<T$$

$$h(t)=0$$

解（2）：

$$R_{hh}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t+\tau)\overline{h(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}h(t+\tau)h(t)dt$$

$$=\begin{cases}1-\frac{|\tau|}{T} & |\tau|<T\\ 0 & |\tau|\ge T\end{cases}$$

解（3）：

$$
\begin{aligned}
D\left[\eta(t)\right] &= E\left[\eta(t)\overline{\eta(t)}\right] \\
&= E\left[\int h(t-u)\left[\xi(u)-\mu_{\xi}(u)\right]du\overline{\int h(t-v)\left[\xi(v)-\mu_{\xi}(v)\right]dv}\right] \\
&= \iint h(t-u)\overline{h(t-v)}\cdot E\left\{\left[\xi(u)-\mu_{\xi}(u)\right]\overline{\left[\xi(v)-\mu_{\xi}(v)\right]}\right\}\cdot dudv \\
&= \iint h(t-u)\overline{h(t-v)}\cdot C_{\xi\xi}(u-v)\cdot dudv \\
&= \int C_{\xi\xi}(u-v)\int h(t-u)\overline{h(t-u+u-v)}du\cdot d(u-v) \\
&= \int C_{\xi\xi}(u-v)R_{hh}\left(-(u-v)\right)\cdot d(u-v) \\
&= \int C_{\xi\xi}(\tau)R_{hh}\left(-\tau\right)\cdot d\tau \\
&= \int \sigma_{\xi\xi}{}^{2}\left(1-\frac{|\tau|}{T_0}\right)\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\cdot d\tau
\end{aligned}
$$

第 8 题

设有线性时不变系统，它的冲激响应为 $h(t)=e^{-\beta t}U(t)$，其中 β 为常数， $\beta>0$，U(t)为阶跃函数。如果系统的输入为一宽平稳随机过程，它的相关函数为 $R_{\xi}(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$，求输入输出间的互相关函数 $R_{\xi\eta}(\tau)$。设 $\alpha=3,\beta=1$,画出 $R_{\xi\eta}(\tau)$。问 $R_{\xi\eta}(\tau)$ 是否对称于 $\tau=0$ 的轴？

解：

计算输入和输出的互相关函数，

$$
\begin{aligned}
R_{\xi\eta}(\tau) &= E\{\xi(t_1)\eta(t_1-\tau)\} \\
&= E\{\xi(t_1)\int\xi(t_1-\tau-u)h(u)du \\
&= \int R_{\xi\xi}(\tau+u)h(u)du \\
&= \int e^{-\alpha|\tau+u|}\cdot e^{-\beta u}U(u)du \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\alpha|\tau+u|}\cdot e^{-\beta u}du
\end{aligned}
$$

设 $\tau>0$

$$
\begin{aligned}
R_{\xi\eta}(\tau) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha|\tau+u|}\cdot e^{-\beta u}du \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau}\cdot e^{-\alpha u-\beta u}du \\
&= e^{-\alpha\tau}\frac{1}{\alpha+\beta}
\end{aligned}
$$

设 $\tau<0$

$$
\begin{aligned}
R_{\xi\eta}(\tau) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha|\tau+u|} \cdot e^{-\beta u} du \\
&= \int_0^{-\tau} e^{\alpha(\tau+u)} \cdot e^{-\beta u} du + \int_{-\tau}^{\infty} e^{-\alpha(\tau+u)} \cdot e^{-\beta u} du \\
&= e^{\alpha\tau} \int_0^{-\tau} e^{(\alpha-\beta)u} du + e^{-\alpha\tau} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)u} du \\
&= e^{\alpha\tau} \frac{1}{\alpha-\beta} (e^{-(\alpha-\beta)\tau} - 1) + e^{-\alpha\tau} \frac{1}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)\tau}
\end{aligned}
$$

显然它们是关于 $\tau = 0$ 不对称的。

第 9 题

设有理想延时电路（见图题 5－9）,如果该电路的输入为宽平稳随机过程 $\xi(t)$,其相关函数为 $R_\xi(\tau)$，求：输出过程 $\eta(\tau)$ 的相关函数 $R_\eta(\tau)$；输入输出间的互相关函数 $R_{\xi\eta}(\tau)$。

解（1）：

输入 $\xi(t)$，输出 $\eta(t) = \xi(t-a)$。

输入相关函数

$$R_\xi(\tau) = E\{\xi(t)\xi(t-\tau)\}$$

输出相关函数

$$R_\eta(\tau) = E\{\eta(t)\eta(t-\tau)\} = E\{\xi(t-a)\xi(t-\tau-a)\} = R_\xi(\tau)$$

解（2）：

$$
\begin{aligned}
R_{\xi\eta}(\tau) &= E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\} \\
&= E\{\xi(t_1)\xi(t_2-a)\} \\
&= R_\xi(t_1 - t_2 + a) \\
&= R_\xi(\tau + a)
\end{aligned}
$$

随机分析

第 10 题

设有一宽平稳随机过程 $\xi(t)$，其相关函数为 $R_\xi(\tau) = A\cos\tau \quad (-\infty < \tau < \infty)$，（A 为常数）其均值为零，试证 $\xi(t)$ 是无限可导的，且 $R_\xi(\tau) = R_{\dot\xi}(\tau) = R_{\ddot\xi}(\tau) = \cdots\cdots = R_{\xi^{(n)}}(\tau) = \cdots$

解：

因为 $R_\xi(\tau) = A\cos\tau \quad (-\infty < \tau < \infty)$ 是无限可导的，因此 $\xi(t)$ 是无限可导的。

$$R_\xi(\tau) = A\cos\tau \quad (-\infty < \tau < \infty)$$

$$R_{\dot{\xi}}(\tau)=\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}R_{\xi}(t_1-t_2)=-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}R_{\xi}(\tau)=A\cos\tau$$

$$R_{\ddot{\xi}}(\tau)=\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}R_{\dot{\xi}}(t_1-t_2)=-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}R_{\dot{\xi}}(\tau)=A\cos\tau$$

……

$$R_{\xi^{(n)}}(\tau)=\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}R_{\xi^{k-1}}(t_1-t_2)=-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}R_{\xi^{k-1}}(\tau)=A\cos\tau$$

$$\therefore R_{\xi}(\tau)=R_{\dot{\xi}}(\tau)=R_{\ddot{\xi}}(\tau)=\cdots\cdots=R_{\xi^{(n)}}(\tau)=\cdots$$

第 11 题

设有实平稳随机$\xi(t)$，其相关函数为$R_{\xi}(\tau)$，试证明$R_{\xi}(0)-R_{\xi}(\tau)\ge\frac{1}{4^n}[R_{\xi}(0)-R_{\xi}(2^n\tau)]$

证明：

设该过程的功率谱密度为 s(f)。

利用不等式可知对$n\ge1$，有

$$\cos^2(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)+1\ge 2\cos(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)$$

于是有$\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos^2(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)+1]df \ge 2\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)]df$

所以$\int_0^{\infty}s(f)\bullet[2\cos^2(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)+2]df \ge 4\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)]df$

再利用倍角公式$\cos(2\pi f\cdot 2^{n}\tau)=2\cos^2(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)-1$

可得$\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n}\tau)+3]df \ge 4\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)]df$

即有$\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n}\tau)]df+3\int_0^{\infty}s(f)df \ge 4\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)]df$

由于该过程是实平稳过程，因此可知：

$$R_{\xi}(2^n\tau)=2\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n}\tau)]df,R_{\xi}(0)=2\int_0^{\infty}s(f)df,R_{\xi}(2^{n-1}\tau)=2\int_0^{\infty}s(f)\bullet[\cos(2\pi f\cdot 2^{n-1}\tau)]df$$

于是$R_{\xi}(2^n\tau)+3R_{\xi}(0)\ge 4R_{\xi}(2^{n-1}\tau)$

即有$4R_{\xi}(0)-4R_{\xi}(2^{n-1}\tau)\ge R_{\xi}(0)-R_{\xi}(2^n\tau)$，$n\ge1$

从而$R_{\xi}(0)-R_{\xi}(2^{n-1}\tau)\ge\frac{1}{4}[R_{\xi}(0)-R_{\xi}(2^n\tau)]$，$n\ge1$

于是可得$R_{\xi}(0)-R_{\xi}(\tau)\ge\frac{1}{4^n}[R_{\xi}(0)-R_{\xi}(2^n\tau)]$证毕

相关函数和功率谱密度分析

第 12 题

试证明表题 5－12 中相应的功率谱密度表达式的正确性。表中 $\xi(t)$ 代表平稳随机过程，$R_\xi(\tau)$ 代表 $\xi(t)$ 的相关函数，$S_\xi(f)$ 代表 $\xi(t)$ 的功率谱密度。

（1）过程 $a\xi(t)$，相关函数 $|a|^2 R_\xi(\tau)$，功率谱密度 $|a|^2 S_\xi(f)$

（2）过程 $\frac{d\xi(t)}{dt}$，相关函数 $-\frac{d^2R_\xi(\tau)}{d\tau^2}$，功率谱密度 $(2\pi f)^2 S_\xi(f)$

（3）过程 $\frac{d^n\xi(t)}{dt^n}$，相关函数 $(-1)^n\frac{d^{(2n)}R_\xi(\tau)}{d\tau^{2n}}$，功率谱密度 $(2\pi f)^{2(n)} S_\xi(f)$

（4）过程 $\xi(t)e^{\pm j2\pi f_0\tau}$，相关函数 $R_\xi(t)e^{\pm j2\pi f_0\tau}$，功率谱密度 $S_\xi(f\mp f_0)$

解（1）：

$$R_\eta(t_1-t_2)=E\{a\xi(t_1)\cdot a\xi(t_2)\}=a^2R_\xi(\tau)$$
$$S_\eta(f)=a^2S_\xi(f)$$

解（2）：

$$R_\eta(t_1-t_2)=E\{\frac{d\xi(t_1)}{dt_1}\frac{d\xi(t_2)}{dt_2}\}$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}R_\xi(t_1-t_2)=-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}R_\xi(\tau)$$
$$S_\eta(f)=(2\pi f)^2S_\xi(f)$$

解（3）：

$$R_\eta(t_1-t_2)=E\{\frac{d^n\xi(t_1)}{dt_1{}^n}\frac{d^n\xi(t_2)}{dt_2{}^n}\}$$
$$=\frac{\partial^{2n}}{\partial t_1{}^n\partial t_2{}^n}R_\xi(t_1-t_2)$$
$$=(-1)^n\frac{d^{2n}}{d\tau^{2n}}R_\xi(\tau)$$
$$S_\eta(f)=(2\pi f)^{2n}S_\xi(f)$$

解（4）：

$$R_\eta(t_1-t_2)=E\{\xi(t_1)e^{\pm j2\pi f_0t_1}\xi(t_2)e^{\mp j2\pi f_0t_2}\}$$
$$=R_\xi(t_1-t_2)e^{\pm j2\pi f_0(t_1-t_2)}$$
$$=R_\xi(\tau)e^{\pm j2\pi f_0\tau}$$
$$S_\eta(f)=S_\xi(f\mp f_0)$$

线性系统输出的相关函数、功率谱密度函数，已知系统的组成电路和频率响应。

第 13 题

设有平稳随机过程 $\xi(t)$，它的样本函数如图题 5－13（a）所示。每个脉冲的宽度为 Δ，

幅度为$\frac{1}{\Delta}$，即每个脉冲的面积为 1，而脉宽$\Delta \to 0$；脉冲的出现规律符合泊松分布，即单位时间内出现的平均脉冲个数为λ，不相交叠的时间间隔内出现的脉冲数是相互独立的，$p(n,T)=\frac{(\lambda T)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda T}, n=0,1,2,\cdots$；每个脉冲的极性可正可负，出现正或负的概率各为$\frac{1}{2}$，不同脉冲出现正或负是相互统计独立的。

（1）求此随机过程的相关函数$R_\xi(\tau)$；

（2）求它的功率谱密度$S_\xi(f)$；

（3）若把该随机信号送入积分电路，求其输出$\eta(\tau)$的样本函数。输出随机信号的功率谱密度$S_\eta(f)$为何（电路如图题 5－13（b）所示）？

解（1）：

首先考虑Δ有限的情况，

$|\tau|<\Delta$

$\xi(t)$以概率$\lambda\Delta$取样于脉冲上，

$\xi(t)$以概率$(1-\lambda\Delta)$取样于脉冲外

$\xi(t)$在取样于脉冲外，对相关函数的贡献为零，

$\xi(t),\xi(t-\tau)$不在同一个脉冲上，对相关函数的贡献为零，

$\xi(t),\xi(t-\tau)$在同一个脉冲上的概率是，$\left[1-\frac{|\tau|}{\Delta}\right]$

相应的相关函数是，$R_{\xi\xi}(\tau)=E\left\{\xi(t)\xi(t-\Delta)\right\}=\lambda\Delta\cdot\left[1-\frac{|\tau|}{\Delta}\right]\cdot\left(\frac{1}{\Delta}\right)^2$

$|\tau|>\Delta$

$\xi(t),\xi(t-\tau)$不在同一个脉冲上，对相关函数的贡献为零，

这时有

$E\{\xi(t)\xi(t-\Delta)\}=0$

因此有相关函数

$$R_{\xi\xi}(\tau)=E\left\{\xi(t)\xi(t-\Delta)\right\}=\lambda\Delta\cdot\left[1-\frac{|\tau|}{\Delta}\right]\cdot\left(\frac{1}{\Delta}\right)^2$$

如果$\Delta \to 0$，

$R_\xi(\tau)$是δ函数。

解（2）：

如果相关函数是$1-\frac{|\tau|}{T_0}$，相应的功率谱是$T_0[\sin c(\pi f T_0)]^2$。

考虑到$\xi(t)$相关函数是

$$R_{\xi\xi}(\tau)=E\{\xi(t)\xi(t-\Delta)\}=\lambda\Delta\cdot\left[1-\frac{|\tau|}{\Delta}\right]\cdot\left(\frac{1}{\Delta}\right)^2$$

相应的功率谱是

$\lambda[\sin c(\pi\ f\ \Delta)]^2$。

如果再考虑$\Delta\to 0$，

相应的功率谱是白的，是λ。

解（3）：

首先考虑理想积分器的情形

其次考虑一阶低通滤波器的情形

在脉冲持续时间内电容充电，幅度达到$\dfrac{1}{\Delta}$。

在脉冲结束后，电容以 RC 时间常数放电。

再研究输出功率谱

输入功率谱　λ

低通滤波器频率响应$|H(j\omega)|^2=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+(2\pi f)^2}$　$\alpha=\dfrac{1}{RC}$

低通滤波器输出功率谱$\dfrac{\lambda\alpha^2}{\alpha^2+(2\pi f)^2}$

第 14 题

设有平稳随机过程$\xi(t)$,它的样本函数如图题 5－14 所示。每个脉冲的波形为负指数波形，即$ke^{-k(t-u)}U(t-u)$，u 为脉冲出现时刻，它符合泊松分布规律，且单位时间内出现的平均脉冲个数为$\lambda=1$。求证$\xi(t)$的功率谱密度$S_\xi(f)$为$S_\xi(f)=\dfrac{k^2}{(2\pi f)^2+k^2}$。

解（待补充）：

解：

每个脉冲波形是：$ke^{-k(t-u)}U(t-u)$，相当于典型的脉冲波形经过 RC 低通滤波器（题 5.13）

激励信号是δ脉冲，它的功率谱是白的。

低通滤波器传递函数是$|H(j2\pi f)|=\dfrac{k^2}{(2\pi f)^2+k^2}$

因此$\xi(t)$的功率谱是$S_\xi(f)=\dfrac{k^2}{(2\pi f)^2+k^2}$

求线性系统输出的功率谱密度函数，系统的组成电路和频率响应。

第 15 题

设有图题 5－15 所示的线性反馈系统，其中 h(t)、k(t)分别为两个方块的冲激响应，H(jf)、K(jf)分别为其相应的转移函数，e(t)代表误差信号，即输入信号和反馈信号之差。如果在输入端送入的信号是一平稳随机过程$\xi(t)$,在系统中又进入一平稳随机过程（即噪声）n(t),若$\xi(t)$和 n(t)间是相关的，又是联合平稳的，求：

（1）输出端$\eta(\tau)$功率谱密度$S_\eta(f)$；

（2）在相减器输出端获得的误差信号 e(t)的功率谱密度$S_e(f)$。

解（1）：

由题设知：

$$e(t)=\xi(t)-\eta(t)$$
$$\eta(t)=[e(t)*h(t)+n(t)]*k(t)$$

转换到频域，求解输入输出信号的关系有，

$$F_e(j2\pi f)=F_\xi(j2\pi f)-F_\eta(j2\pi f)$$
$$F_\eta(j2\pi f)=[F_e(j2\pi f)\cdot H(j2\pi f)+F_n(j2\pi f)]\cdot K(j2\pi f)$$
$$=F_\xi(j2\pi f)\cdot H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)$$
$$-F_\eta(j2\pi f)\cdot H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)$$
$$+F_n(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)$$
$$F_\eta(j2\pi f)=F_\xi(j2\pi f)\frac{H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}{1+H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}$$
$$+F_n(j2\pi f)\frac{K(j2\pi f)}{1+H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}$$
$$=F_\xi(j2\pi f)H_1(j2\pi f)+F_n(j2\pi f)H_2(j2\pi f)$$
$$H_1(j2\pi f)=\frac{H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}{1+H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}$$
$$H_2(j2\pi f)=\frac{K(j2\pi f)}{1+H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}$$
$$\eta(t)=\xi(t)\otimes h_1(t)+n(t)\otimes h_2(t)$$
$$\eta(t)=\xi(t)\otimes h_1(t)+n(t)\otimes h_2(t)$$
$$\eta(t-\tau)=\xi(t-\tau)\otimes h_1(t-\tau)+n(t-\tau)\otimes h_2(t-\tau)$$

计算输出信号的相关函数

$$E\left[\eta(t)\eta(t-\tau)\right]=\xi(t)\otimes h_1(t)\cdot\xi(t-\tau)\otimes h_1(t-\tau)$$
$$+n(t)\otimes h_2(t)\cdot\xi(t-\tau)\otimes h_1(t-\tau)$$
$$+\xi(t)\otimes h_1(t)\cdot n(t-\tau)\otimes h_2(t-\tau)$$
$$+n(t)\otimes h_2(t)\cdot n(t-\tau)\otimes h_2(t-\tau)$$

$$E\left[\eta(t)\eta(t-\tau)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi\xi}(u)R_{h_1h_1}(\tau-u)du+\int_{-\infty}^{\infty}R_{n\xi}(u)R_{h_2h_1}(\tau-u)du$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}R_{\xi n}(u)R_{h_1h_2}(\tau-u)du+\int_{-\infty}^{\infty}R_{nn}(u)R_{h_2h_2}(\tau-u)du$$

$$S_{\eta\eta}(f)=S_{\xi\xi}(f)H_1(f)\overline{H_1(f)}+S_{n\xi}(f)H_2(f)\overline{H_1(f)}$$
$$+S_{\xi n}(f)H_1(f)\overline{H_2(f)}+S_{nn}(f)H_2(f)\overline{H_2(f)}$$

同理可计算出

$$S_{ee}(f)=S_{\xi\xi}(f)H_3(f)\overline{H_3(f)}+S_{n\xi}(f)H_4(f)\overline{H_3(f)}$$
$$+S_{\xi n}(f)H_3(f)\overline{H_4(f)}+S_{nn}(f)H_4(f)\overline{H_4(f)}$$

其中

$$H_1(j2\pi f)=\frac{H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}{1+H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}$$
$$H_2(j2\pi f)=\frac{K(j2\pi f)}{1+H(j2\pi f)\cdot K(j2\pi f)}$$

第 16 题

设有图题 5－16 所示的乘法器，它的两个输入为$\xi(t)$和$\eta(\tau)$，$\xi(t)$和$\eta(\tau)$为相互统计独立的平稳随机过程，$\zeta(t)$为其输出。求$\zeta(t)$的相关函数和它的功率谱密度。给定$\xi(t)$的相关函数为$R_\xi(\tau)$，其功率谱密度为$S_\xi(f)$，$\eta(\tau)$的相关函数为$R_\eta(\tau)$，相应的功率谱密度为$S_\eta(f)$。

解：由题设知：$\zeta(t)=\xi(t)\eta(t)$

输出的相关函数是，

$$\begin{aligned}R_\zeta(t_1,t_2)&=E\{\xi(t_1)\eta(t_1)\xi(t_2)\eta(t_2)\}\\&=E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}\\&=R_\xi(t_1-t_2)R_\eta(t_1-t_2)\\&=R_\xi(\tau)R_\eta(\tau)\end{aligned}$$

输出的功率谱密度是

$$\begin{aligned}S_\zeta(f)&=\int R_\zeta(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\int S_\xi(f_1)S_\eta(f-f_1)df_1\end{aligned}$$

第 17 题

设有图题 5－17A 所示的调制器，它的两个输入为$\xi(t)$和$\eta(\tau)$。$\xi(t)$为零均值的平稳随机过程，其功率谱密度为$S_\xi(f)$，当｜f｜>f_c 时$S_\xi(f)$＝0，（见图题 5－17B）。$\eta(\tau)=\cos(2\pi f_0+\theta)$，其中 f_0 为常数，θ是均匀分布于$(0,2\pi)$上的随机变量。$\xi(t)$和θ是

相互统计独立的。调制器的输出$\zeta(t)=\xi(t)\ \eta(\tau)=\xi(t)\ \cos(2\pi f_0+\theta)$。试证明：

（1）输出过程为平稳随机过程，其相关函数为

$$R_\zeta(\tau)=\frac{1}{2}R_\xi(\tau)\cos(2\pi f_0\tau);$$

（2）其输出功率谱密度为下式，并画出$S_\zeta(f)$。

$$S_\zeta(f)=\frac{1}{4}\{S_\xi(f-f_0)+S_\xi(f+f_0)\},$$

解（1）：

计算输出的均值：

$$\begin{aligned}E\{\zeta(t)\}&=E\{\xi(t)\cos(2\pi f_0+\theta)\}\\&=E\{\xi(t)\}E\{\cos(2\pi f_0t+\theta)\}\\&=0\end{aligned}$$

计算输出的相关函数：

$$\begin{aligned}&E\{\zeta(t_1)\zeta(t_2)\}\\&=E\{\xi(t_1)\cos(2\pi f_0+\theta)\xi(t_2)\cos(2\pi f_0+\theta)\}\\&=E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}E\{\cos(2\pi f_0t_1+\theta)\xi(t_2)\cos(2\pi f_0t_2+\theta)\}\\&=R_\xi(t_1-t_2)E\{\frac{1}{2}\cos 2\pi f_0(t_1-t_2)+\frac{1}{2}\cos[2\pi f_0(t_1+t_2)+2\theta]\}\\&=\frac{1}{2}R_\xi(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)\end{aligned}$$

解（2）：

改写输出的相关函数，

$$\begin{aligned}&E\{\zeta(t_1)\zeta(t_2)\}\\&\quad=\frac{1}{2}R_\xi(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)\\&\quad=\frac{1}{4}R_\xi(\tau)e^{j2\pi f_0\tau}+\frac{1}{4}R_\xi(\tau)e^{-j2\pi f_0\tau}\end{aligned}$$

对输出信号的相关函数作付利叶变换

$$S_\zeta(f)=\frac{1}{4}\{S_\xi(f-f_0)+S_\xi(f+f_0)\},$$

第 18 题

设有随机过程$\eta(t)=a\cos[\omega_0t-\phi(t)+\theta]$,其中 a 和$\omega_0=2\pi f_0$为常数，$\theta$为均匀分布于$[0,2\pi]$上的随机变量，$\phi(t)$为平稳随机过程，$\phi(t)$和$\theta$是相互统计独立的，试证明：（1）

$R_\eta(t_1,t_2)=\dfrac{a^2}{2}\mathrm{Re}\{\exp(j\omega_0\tau)E[\exp(j\varphi(t_2)-j\varphi(t_1))]\}$其中$t_1-t_2=\tau$，Re{ }指实部。

（2）又如果 $\phi(t)=b\cos(\omega_m t+\theta')$，其中 $\omega_m=2\pi f_m$,b 为常数，θ' 为均匀分布于 $[0,2\pi]$ 上的随机变量，θ 和 θ' 是相互统计独立的，利用关系式 $\exp\{jz\cos\theta\}=J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}2j^n J_n(z)\cos n\theta$，其中 J_0,J_n 为贝塞尔函数，求 $R_\eta(\tau)$。

解（1）:

$$
\begin{aligned}
R_{\eta\eta}(t_1,t_2)&=E\left[\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}\right]\\
&=E\left[a\cos[\omega_0 t_1-\phi(t_1)+\theta]a\cos[\omega_0 t_2-\phi(t_2)+\theta]\right]\\
&=a^2E_\theta E_\phi\left[\cos[\omega_0 t_1-\phi(t_1)+\theta+\omega_0 t_2-\phi(t_2)+\theta]\right]\\
&\quad a^2E_\theta E_\phi\left[\cos[\omega_0 t_1-\phi(t_1)+\theta-\omega_0 t_2+\phi(t_2)-\theta]\right]\\
&=a^2E_\phi\left[\cos[\omega_0 t_1-\phi(t_1)-\omega_0 t_2+\phi(t_2)]\right]\\
&=a^2E_\phi\left[\cos[\left(\omega_0 t_1-\omega_0 t_2\right)-\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)\right)]\right]\\
&=a^2\cos\left(\omega_0 t_1-\omega_0 t_2\right)\cdot E_\phi\left[\cos\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)\right)\right]\\
&\qquad+a^2\sin\left(\omega_0 t_1-\omega_0 t_2\right)\cdot E_\phi\left[\sin\left(\phi(t_1)-\phi(t_2)\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}a^2E_\phi\left[e^{j\omega_0(t_1-t_2)-\phi(t_1)+\phi(t_2)}+e^{-j\omega_0(t_1-t_2)+\phi(t_1)-\phi(t_2)}\right]\\
&=\frac{1}{2}a^2\operatorname{Re}\left[e^{j\omega_0(t_1-t_2)}\right]E_\phi\left[e^{-j\phi(t_1)+j\phi(t_2)}\right]
\end{aligned}
$$

解（2）（待补充）:

第 19 题

设有微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+2\dfrac{dy(t)}{dt}+4y(t)+z(t)=\xi_1(t)\\
\dfrac{dz(t)}{dt}+9z(t)=\xi_2(t)
\end{cases}
$$

$\xi_1(t),\xi_2(t)$ 为平稳随机过程，而且是联合平稳的，已知

$$
S_{\xi_1}(f)=\frac{2\sigma_1^2}{(2\pi f)^2+1}
$$

$$
S_{\xi_2}(f)=\frac{4\sigma_2^2}{(2\pi f)^2+4}
$$

$$
S_{\xi_1\xi_2}(f)=\frac{2\pi a}{[(2\pi f)^2-2]^2+j2\pi f}
$$

求 y(t)、z(t)的功率谱密度 $S_y(f),S_z(f)$ 及其互谱密度 $S_{yz}(f)$。

解（待补充）：

根据微分方程（2），做付利叶变换有，

$$\left[j\cdot 2\pi f+9\right]\cdot F\left[z(t)\right]=F\left[\xi_2(t)\right]$$

$$F\left[z(t)\right]=\frac{1}{\left[j\cdot 2\pi f+9\right]}F\left[\xi_2(t)\right]$$

$$H_2(jf)=\frac{1}{j\cdot 2\pi f+9}$$

由此可以得到

$$S_z(f)=\left|\frac{1}{j2\pi f+9}\right|^2\cdot S_{\xi_2}(f)$$

$$=\frac{1}{[(2\pi f)^2+81]}\cdot\frac{4\sigma_2{}^2}{[(2\pi f)^2+4]}$$

根据微分方程（1），做付利叶变换有，

$$\left[\left(j\cdot 2\pi f\right)^2+2j\cdot 2\pi f+4\right]\cdot F\left[y(t)\right]=F\left[\xi_1(t)-z(t)\right]$$

$$F\left[y(t)\right]=\frac{1}{\left[\left(j\cdot 2\pi f\right)^2+2j\cdot 2\pi f+4\right]}F\left[\xi_1(t)-z(t)\right]$$

$$H_1(jf)=\frac{1}{\left[\left(j\cdot 2\pi f\right)^2+2j\cdot 2\pi f+4\right]}$$

由此可以得到

$$S_z(f)=\left|\frac{1}{\left[\left(j\cdot 2\pi f\right)^2+2j\cdot 2\pi f+4\right]}\right|^2\cdot S_{\xi_2-z}(f)$$

求 $S_{\xi_2-z}(f)$，先求 $R_{\xi_2-z}(\tau)$，

$$R_{\xi_1-z}(\tau)=E\left\{\left[\xi_1(t+\tau)-z(t+\tau)\right]\overline{\left[\xi_1(t)-z(t)\right]}\right\}$$

$$=E\left\{\xi_1(t+\tau)\overline{\xi_1(t)}-\xi_1(t+\tau)\overline{z(t)}-z(t+\tau)\overline{\xi_1(t)}+z(t+\tau)\overline{z(t)}\right\},$$

$$=R_{\xi_1,\xi_1}(\tau)-R_{\xi_1,z}(\tau)-R_{z,\xi_1}(\tau)+R_{z,z}(\tau)$$

再求 $S_{\xi_2-z}(f)$，

$$S_{\xi_1-z}(\tau)=F\left\{R_{\xi_1,\xi_1}(\tau)-R_{\xi_1,z}(\tau)-R_{z,\xi_1}(\tau)+R_{z,z}(\tau)\right\}$$

$$=S_{\xi_1,\xi_1}(f)-S_{\xi_1,\xi_2}(\tau)\overline{H_2(jf)}-S_{\xi_2,\xi_1}(\tau)H_2(jf)+\left|H_2(jf)\right|^2S_{\xi_2,\xi_2}(f),$$

$$S_{\xi_1-z}(\tau)=S_{\xi_1,\xi_1}(f)-S_{\xi_1,\xi_2}(\tau)\overline{H_2(jf)}-S_{\xi_2,\xi_1}(\tau)H_2(jf)+\left|H_2(jf)\right|^2S_{\xi_2,\xi_2}(f)$$

$$=$$

第 20 题

设有 $\dfrac{d\eta(t)}{dt}+\beta\eta(t)=t\xi(t)$ 所表示的动态系统，在 t=0 时动态系统加上信号 $t\xi(t)$，其中 $\xi(t)$ 是平稳随机过程，它的功率谱密度为 $S_{\xi}(f)=\sigma^2\dfrac{2\alpha}{(2\pi f)^2+\alpha^2}$，动态系统具有零初始状态。求在 t 时 $\eta(t)$ 的方差 D$\eta(t)$。题中 α、β、σ 均为常数。

解（待确认）：

由系统得微分方程得到系统的频率响应喝冲激响应：

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+\beta}$$

$$h(t)=\exp(-\beta t),\quad t\ge 0$$

系统输入的相关函数是，

$$\begin{aligned}&E\{t_1t_2\xi(t_1)\xi(t_2)\}\\&\quad=t_1t_2R_{\xi\xi}(t_1,t_2)\\&\quad=t_1t_2\sigma^2\exp[-\alpha|t_1-t_2|]\end{aligned}$$

系统输出和它的均值是，

$$\eta(t)=\int_0^t h(t-u)u\xi(u)du$$

$$\begin{aligned}&E\{\eta(t)\}\\&\quad=\int_0^t h(t-u)uE\{\xi(u)\}du\\&\quad=\int_0^t h(t-u)u\cdot 0\cdot du\\&\quad=0\end{aligned}$$

系统输出的方差是，

$$
\begin{aligned}
D\{\eta(t)\} &= R_{\eta\eta}(t,t) \\
&= E\left\{\int_0^t h(t-u)u\xi(u)du\int_0^t \overline{h(t-v)v\xi(v)}dv\right\} \\
&= \int_0^t h(t-u)\int_0^t \overline{h(t-v)}vu\cdot E\left[\xi(u)\overline{\xi(v)}\right]dvdu \\
&= \int_0^t h(t-u)\int_0^t \overline{h(t-v)}vuR_{\xi\xi}(u,v)dvdu \\
&= \int_0^t \exp[-\beta(t-u)]\int_0^t \exp[-\beta(t-v)]vu\sigma^2\exp[-\alpha|u-v|]dvdu \\
&= \sigma^2\int_0^t\int_0^t \exp[-\beta(2t-u-v)-\alpha|u-v|]vudvdu \\
&= \sigma^2\exp[-2\beta t]\int_0^t\int_0^t \exp[\beta(u+v)-\alpha|u-v|]vudvdu \\
&= \frac{1}{4}\sigma^2\exp[-2\beta t]\left\{\frac{2[1-\exp(-\alpha t)][\exp(2\beta t)(1-2\beta t+2\beta^2t^2)-1]}{\alpha\beta^3}-\right. \\
&\qquad\left.\frac{\exp(-\alpha t)[-1+\exp(2\beta t)][-2+2\exp(\alpha t)-2\alpha t-\alpha^2t^2]}{\beta\alpha^3}\right\}
\end{aligned}
$$

第 21 题

设有图题 5－21 所示的线性系统，图中 y(t)=x(t)-x(t-T)　$z(t)=\int_{-\infty}^{t}y(u)du$。（1）试求系统的转移函数 H(jf)；如果输入端的输入信号是白噪声，其相关函数为 $S_0\delta(\tau)$，（2）求输出随机过程的均方值。（利用关系式 $\int_0^\infty \frac{\sin^2\alpha x}{x^2}dx=|\alpha|\frac{\pi}{2}$）

解（待确认）：

首先确定系统输入和输出的关系：

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \int_{-\infty}^{t} y(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{t}\left[x(u)-x(u-T)\right]du \\
&= \int_{-\infty}^{t} x(u)du-\int_{-\infty}^{t} x(u-T)du \\
&= \int_{-\infty}^{t} x(u)du-\int_{-\infty}^{t-T} x(u-T)d(u-T) \\
&= \int_{-\infty}^{t} x(u)du-\int_{-\infty}^{t-T} x(v)d(u-T) \\
&= \int_{t-T}^{t} x(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)x(u)du
\end{aligned}
$$

系统是一个短时间平均器。它的冲击响应是

$$
h(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le T\\ 0 & otherwise\end{cases}
$$

考虑输入信号 $x(t)$ 为白噪声，相关函数和功率谱为

$$R_{xx}(\tau)=S_0\delta(\tau)$$

$$S_{xx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}S_0\delta(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau=S_0$$

输出信号的相关函数是，

$$S_{zz}(f)=\left|H(jf)\right|^2S_{xx}(f)=[(-\frac{1}{2\pi f})^2+\pi^2\delta^2(f)]\cdot[(1-\cos 2\pi fT)^2+\sin^2(2\pi fT)]S_0$$

$$=[(-\frac{1}{2\pi f})^2+\pi^2\delta^2(f)]\cdot 4\sin^2(\pi fT)\cdot S_0=[\frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2f^2}+\pi^2\delta^2(f)\cdot 4\sin^2(\pi fT)]\cdot S_0$$

所以输出的均方值为：

$$E\{z^2(t)\}=R_{zz}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{zz}(f)\cdot\exp(j2\pi ft)df\Big|_{t=0}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2f^2}+\pi^2\delta^2(f)\cdot 4\sin^2(\pi fT)]\cdot S_0df=\frac{S_0T}{2}$$

$$\begin{aligned}
R_{zz}(\tau)&=E\left[z(t)z(t-\tau)\right]\\
&=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(t-u)x(u)du\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau-v)x(v)dv\right]\\
&=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t-u)h(t-\tau-v)x(u)x(v)dudv\right]\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t-u)h(t-\tau-v)R_{xx}(u-v)dudv\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\alpha-v)h(t-\tau-v)R_{xx}(\alpha)d\alpha dv\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\alpha-v)h(t-\tau-v)S_0\delta(\alpha)d\alpha dv\\
&=S_0\int_{-\infty}^{\infty}h(t-v)h(t-\tau-v)dv\\
&=S_0\int_{-\infty}^{\infty}h(\beta)h(\beta-\tau)d\beta\\
&=S_0T\begin{cases}1-\dfrac{|\tau|}{T} & |\tau|\le T\\ 0 & |\tau|>T\end{cases}
\end{aligned}$$

$$E\{z^2(t)\}=R_{zz}(0)=S_0T$$

第 22 题

设有图题 5－22 所示的二个输入端、一个输出端的线性离散时间动态系统，它的冲激响应是 1×2 的矩阵 h(n,k)。当 $n\ge k$ 时 $h(n,k)=(\alpha^{n-k}\sin\frac{n\pi}{2},\alpha^{n-k}\cos\frac{n\pi}{2})$，当 n<k 时 $h(n,k)=(0,0)$，其中 α 为常数，且 $|\alpha|<1$（$|\alpha|<1$ 保证了系统的稳定性）。如果系统的输

入为离散时间的平稳正态过程

$$U(n)=\begin{pmatrix}u_1(n)\\u_2(n)\end{pmatrix}\quad (n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots)$$

其中

$$E\{U(n)\}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad R_{[UU]}(n_1,n_2)=\begin{pmatrix}2\gamma^{|n_1-n_2|} & (-\frac{\gamma}{3})^{|n_1-n_2|}\\ (-\frac{\gamma}{3})^{|n_1-n_2|} & 2\gamma^{|n_1-n_2|}\end{pmatrix}$$

其中γ为常数，$|\gamma|<1, n_1,n_2=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$，并且假定$|\gamma|\neq|\alpha|,|\gamma|\neq 3|\alpha|$。求输出过程 Z(n)的相关函数。

解（待补充）：

第 23 题

设有一线性系统，它的状态变量表示式为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\left(e^{-t^2},1\right)\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}\quad (t\geq 0)$$

设状态矢量的初始值$\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix}$是一对相互统计独立的标准化正态分布的随机变量，输入过程是平稳正态过程，均值为零，相关函数为$R_u(\tau)=\begin{cases}1-|\tau| & (|\tau|\leq 1)\\ 0 & (|\tau|>1)\end{cases}$且 u(t)和$\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix}$是相互统计独立的。求该系统的状态转移矩阵$\phi(t_1,t_2)$，计算状态矢量$\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$的方差矩阵$\sigma_x^2(t)$及输出过程 y(t)的方差$\sigma_y^2(t)$。

解（待补充）：

第六章　高斯过程

第 1 题

设 n 维正态分布随即变量各分量的均值为零，即，它的协方差矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ & & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ & & \cdots & & & & \cdots \\ & & & & n-2 & n-2 & n-2 \\ & & & & & n-1 & n-1 \\ & & & & & & n \end{bmatrix}$$

求它的概率密度函数。

解：

观察协方差矩阵，做线性变换

$$\begin{cases} w_1 = x_1 \\ w_2 = x_2 - x_1 \\ \cdots \qquad \cdots \\ w_k = x_k - x_{k-1} \\ \cdots \qquad \cdots \\ w_n = x_n - x_{n-1} \end{cases}$$

相应 w 的相关矩阵是单位矩阵。它的概率密度函数为

$$f_\xi\left(w_1, w_2, \cdots, w_n\right)$$
$$= \frac{2}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[w_1{}^2 + w_2{}^2 + w_3{}^2 + \cdots + w_n{}^2\right]\right\}$$

相应 x 的概率密度函数为

$$f_\xi\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$$
$$= \frac{2}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x_1{}^2 + \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(x_3 - x_2\right)^2 + \cdots + \left(x_n - x_{n-1}\right)^2\right]\right\}$$

第 2 题

ξ, η 是相互统计独立的、正态分布的随即变量，且他们具有相同的概率密度 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$，

试求随机变量 $U = \alpha\xi + \beta\eta$ 和 $V = \alpha\xi - \beta\eta$ 间的相关函数以及 U 、V 的二维概率密度。

解：

正态分布的随机变量的线性变换仍服从正态分布，$\therefore$ U 、V 是正态分布的，

它们的均值、协方差是，

$$E[U]=E[\alpha\xi+\beta\eta]=(a+b)\mu$$
$$E[V]=E[\alpha\xi-\beta\eta]=(a-b)\mu$$

$$D[U]=\operatorname{cov}[UU]$$
$$=E\left[\left((\alpha\xi+\beta\eta)-(\alpha\mu+\beta\mu)\right)^2\right]$$

$$=\alpha\sigma^2+\beta\sigma^2$$

$$D[V]=\operatorname{cov}[VV]$$
$$=E\left[\left((\alpha\xi-\beta\eta)-(\alpha\mu-\beta\mu)\right)^2\right]$$

$$=\alpha\sigma^2+\beta\sigma^2$$

$$\operatorname{cov}[UV]=\operatorname{cov}[VU]$$

$$=E\left[\left((\alpha\xi+\beta\eta)-(\alpha\mu+\beta\mu)\right)\left((\alpha\xi-\beta\eta)-(\alpha\mu-\beta\mu)\right)\right]$$

$$=E\left\{\left[(\alpha\xi-\alpha\mu)+(\beta\eta-\beta\mu)\right]\left[(\alpha\xi-\alpha\mu)-(\beta\eta-\beta\mu)\right]\right\}$$
$$=E\left\{(\alpha\xi-\alpha\mu)^2-(\beta\eta-\beta\mu)^2\right\}$$
$$=\alpha^2\sigma^2-\beta^2\sigma^2$$

相应的协方差矩阵：

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix}(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2-\beta^2)\sigma^2\\(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2 & (\alpha^2+\beta^2)\sigma^2\end{bmatrix}$$

相关系数：

$$r=\left(\alpha^2-\beta^2\right)\big/\left(\alpha^2+\beta^2\right)$$

$$\sigma_U=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{1/2}\sigma$$

$$\sigma_V=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{1/2}\sigma$$

相应的二维概率密度：

$$f_{UV}(u,v)$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_U\sigma_V\sqrt{1-r^2}}$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{u-\mu_U}{\sigma_U}\right)^2-2r\frac{u-\mu_U}{\sigma_U}\cdot\frac{u-\mu_V}{\sigma_V}+\left(\frac{u-\mu_V}{\sigma_V}\right)^2\right]\right\}$$

第 3 题

设有二维随机矢量 $\xi^{\tau}=(\xi_1 \quad \xi_2)$，其概率密度为

$$f_{\xi_1\xi_2}(x_1x_2)$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

在椭圆

$$\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2r\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2=\lambda^2$$ （λ 为常数）上，

其概率密度为常数，因此称该椭圆为等概率椭圆。求随机变量 (ξ_1,ξ_2) 落在等概率椭圆内的概率。

解：

考虑随机变量 (ξ_1,ξ_2) 落在等概率椭圆内的概率，

$$\iint f_{\xi_1\xi_2}(x_1x_2)dx_1dx_2$$

相应的积分区间是 $\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2r\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\le\lambda^2$ ，

考虑椭圆 $\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2r\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2=\lambda^2$

作变换，

$$y_1=\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}-r\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} \qquad y_2=\frac{\sqrt{1-r^2}}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)$$

$$x_1=\sigma_1y_1+\mu_1+\frac{r\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\sigma_2y_2}{\sqrt{1-r^2}} \qquad x_2=\frac{\sigma_2y_2}{\sqrt{1-r^2}}+\mu_2$$

$$|J|=\left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right|=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{1-r^2}}$$

有

$$y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}=\lambda^2$$

相应随机变量 (ξ_1,ξ_2) 落在等概率椭圆内的概率，是

$$\iint\limits_{y_1^2+y_2^2<\lambda^2} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\cdot\exp\{-\frac{1}{2(1-r^2)}[y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}]\}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{1-r^2}}dy_1dy_2$$

作变换，

$$y_1=\rho\cos\theta \quad \rho=\sqrt{y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}}$$

$$y_2=\rho\sin\theta \quad \theta=tg^{-1}\frac{y_2}{y_1}$$

相应的积分，即落在等概率椭圆内的概率为

$$=\iint\limits_{\substack{\rho^2\le\lambda^2\\0\le\theta\le2\pi}}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-r^2}e^{-\frac{\rho^2}{2(1-r^2)}}\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=-\int_0^{\lambda}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{\rho^2}{2(1-r^2)}\right]d\left[-\frac{\rho^2}{2(1-r^2)}\right]d\theta$$

$$=-e^{-\frac{\rho^2}{2(1-r^2)}}\Big|_0^{\lambda}$$

$$=1-e^{-\frac{\lambda^2}{2(1-r^2)}}$$

第 4 题

设有 n 维的随机矢量 $\xi^{\tau}=(\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n)$ 服从正态分布，各分量的均值为

$E\{\xi_i)=\alpha,\quad i=1,2,3,\cdots,n,$ 其协方差矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}\sigma^2 & \alpha\sigma^2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & 0 & \cdots & 0\\ & & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & \cdots & 0\\ \cdots\cdots & & & & & \\ & & & & & \sigma^2\end{pmatrix}$$

试求其特征函数。

解：

按照特征函数的定义，有

$$\phi_{\xi}(t_1 \ \ t_2 \ \ \cdots \ \ t_n)$$

$$=\exp\left\{jt^{\tau}\mu-\frac{1}{2}t^{\tau}Bt\right\}$$

$$=\exp\left\{j\sum_{i=1}^{n}\alpha t_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2t_i-\sum_{i=1}^{n-1}\alpha\sigma^2t_it_{i+1}+\sum_{i=2}^{n}\alpha\sigma^2t_it_{i-1}\right\}$$

第 5 题

n 维正态分布随机矢量 $\xi^{\tau}=(\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n)$，分量均值 $E\{\xi_i\}=i,\quad i=1,2,3,\cdots,n,$

分量间的协方差为$b_{m,i} = n-|m-i|, \quad m,i = 1,2,\cdots,n$ 设有随机变量$\eta = \sum_{i=1}^{n}\xi_i$，求$\eta$的特征函数。

解：

随机变量$\eta = \sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 的均值何方差是，

$$E\{\eta\} = E\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\} = \sum_{i=1}^{n}E\{\xi_i\} = \sum_{i=1}^{n}i = \frac{(1+n)n}{2} = \mu_\eta$$

$$\begin{aligned}
VAR\{\eta\} &= E\{(\eta-\mu_\eta)^2]\\
&= E\{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_{\xi_i})\sum_{m=1}^{n}(\xi_i-\mu_{\xi_m})\}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}E\{(\xi_i-\mu_{\xi_i})(\xi_i-\mu_{\xi_m})\}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}(n-|m-i|)\\
&= n\cdot n + 2\sum_{i=1}^{n-1}i^2\\
&= n^2 + 2\frac{(1+n)(2n+1)n}{6}\\
&= n^2 + \frac{(1+n)(2n+1)n}{3}\\
&= \sigma_\eta^2
\end{aligned}$$

η的特征函数是

$$\begin{aligned}
&\phi_\eta(t_1 \quad t_2 \quad \cdots \quad t_n)\\
&= \exp\{jt^\tau\mu_\eta - \frac{1}{2}\sigma^2t^2\}
\end{aligned}$$

第 6 题

设有三维正态分布随机矢量$\xi^\tau = (\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3)$，其各分量的均值为零，即

$$E\{\xi_i) = 0, \quad i = 1,2,3$$

其协方差矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$$

其中$b_{11}=b_{22}=b_{33}=\sigma^2$，试求：

（1）$E\{\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\}$；

（2）$E\{\xi_1{}^2\ \xi_2{}^2\ \xi_3{}^2\}$；

（3）$E\{(\xi_1{}^2-\sigma^2)\,(\xi_2{}^2-\sigma^2)\,(\xi_3{}^2-\sigma^2)\}$

解：

三维正态分布随机矢量$\xi^\tau=(\xi_1\quad \xi_2\quad \xi_3)$的特征函数是

$$
\begin{aligned}
&\phi_\xi(t_1\quad t_2\quad t_3)\\
&=\exp\{\frac{1}{2}t^\tau Bt\}\\
&=\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=j=1}^{n}b_{ij}t_it_j\}
\end{aligned}
$$

解（1）：

$$
E\{\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\}=\frac{\partial^3}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3}\phi_\xi(t)=0
$$

解（2）：

$$
\begin{aligned}
&E\{\xi_1^2\quad \xi_2^2\quad \xi_3^2\}\\
&=E\{\xi_1^2\}[E\{\xi_2^2\}E\{\xi_3^2\}+2E\{\xi_2\quad \xi_3\}E\{\xi_2\quad \xi_3\}]\\
&\quad+2E\{\xi_1\quad \xi_2\}[E\{\xi_1\quad \xi_2\}E\{\xi_3\xi_3\}+2E\{\xi_1\xi_3\}E\{\xi_2\quad \xi_3\}]\\
&\quad+2E\{\xi_1\xi_3\}[E\{\xi_1\xi_3\}E\{\ \xi_2\quad \xi_2\}+2E\{\xi_1\quad \xi_2\}E\{\xi_2\quad \xi_3\}]\\
&=\sigma^2\sigma^2\sigma^2+2\sigma^2b_{23}b_{23}+2b_{12}b_{12}\sigma^2+4b_{12}b_{23}b_{13}+2b_{13}b_{13}\sigma^2+4b_{12}b_{23}b_{13}\\
&=\sigma^6+2\sigma^2(b_{12}{}^2+b_{23}{}^2b_{31}{}^2)+8b_{12}b_{23}b_{31}
\end{aligned}
$$

解（3）：

$$
\begin{aligned}
&E\{(\xi_1^2-\sigma^2)\ \ (\xi_2^2-\sigma^2)\ \ (\xi_3^2-\sigma^2)\}\\
&=E\left\{\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2-\sigma^6-\xi_1^2\xi_2^2\sigma^2-\xi_2^2\xi_3^2\sigma^2\right.\\
&\qquad\left.-\xi_1^2\xi_3^2\sigma^2+\xi_1^2\sigma^4+\xi_2^2\sigma^4+\xi_3^2\sigma^4\right\}\\
&=\sigma^6+2\sigma^2(b_{12}{}^2+b_{23}{}^2b_{31}{}^2)+8b_{12}b_{23}b_{31}-\sigma^2\\
&\qquad-(\sigma^2\sigma^2+2b_{12}b_{12})\sigma^2-(\sigma^4+2b_{23}b_{23})\sigma^2\\
&\qquad-(\sigma^4+2b_{31}b_{31})\sigma^2+3\sigma^2\sigma^2\sigma^2\\
&=8b_{12}b_{23}b_{31}
\end{aligned}
$$

第 7 题

设三维概率密度随机变量$\boldsymbol{\xi}^T=\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)$的概率密度为

$$f_\xi(x_1,x_2,x_3)=C\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(2x_1{}^2-x_1x_2+x_1{}^2-2x_1x_3+4x_3{}^2\right)\right\}$$

（1）证明经过下述线性变换，得随机矢量$\boldsymbol{\eta}^T=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{\eta}=\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则η_1、η_2、η_3是相互统计独立得随即变量。

（2）求 C 值。

解：

由题设$\boldsymbol{\eta}=\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{A}^{-\tau}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & 1 & 0\\ \frac{4}{7} & \frac{2}{7} & 1\end{bmatrix}$$

对于高斯分布的多维随机变量分布的概率密度函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}^T\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\xi}&=\left(\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\eta}\right)^T\mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\eta}\right)\\&=\boldsymbol{\eta}^T\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T\mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{A}\right)^{-1}\boldsymbol{\eta}\end{aligned}$$

计算变换后$\boldsymbol{\eta}^T=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}$的相关矩阵

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T\mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{A}\right)^{-1}$$

由概率分布知：相关矩阵逆正比于

$$\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -\frac{1}{2} & -1\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & \frac{4}{7}\\ 0 & 1 & \frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/4 & 1 & 0\\ 4/7 & 2/7 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1/2 & -1\\ -1/2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1/4 & 4/7\\ 0 & 1 & 2/7\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/4 & 1 & 0\\ 4/7 & 2/7 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1/2 & 7/8 & 0\\ -1 & -1/4 & 24/7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 7/8 & 0\\ 0 & 0 & 24/7\end{bmatrix}$$

相应的线性变换雅克比行列式为 1。

η_1、η_2、η_3 对应的概率密度函数是

$$|J|C\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(2y_1{}^2+\frac{7}{8}y_2{}^2+\frac{24}{7}y_3{}^2\right)\right\}$$

因此 η_1、η_2、η_3 是线性独立的，它们的相关矩阵是：

$$\mathbf{B}_y=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0\\ 0 & 8/7 & 0\\ 0 & 0 & 7/24\end{bmatrix}\qquad \sigma_{y_1}=\frac{1}{2}\qquad \sigma_{y_2}=\frac{8}{7}\qquad \sigma_{y_3}=\frac{7}{24}$$

因而 $$C=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\sigma_{y_1}{}^2\sigma_{y_2}{}^2\sigma_{y_3}{}^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{6}(2\pi)^3}}$$

第 8 题

设 ξ_1,ξ_2 为相互统计独立、均值为零、方差为 1 的正态分布随机变量。定义二维随机矢量 $\eta^\tau=(\eta_1\ \ \eta_2)=\begin{cases}(\xi_1\quad |\xi_2|) & \xi_1\ge 0\\ (\xi_1\quad -|\xi_2|) & \xi_1<0\end{cases}$，试证，

（1）η_1 和 η_2 都是正态分布的；

（2）$\eta^{\tau}=(\eta_1 \quad \eta_2)$不是二维正态分布。

证明（1）：

二维随机矢量$\eta^{\tau}=(\eta_1 \quad \eta_2)$中的第一个分量$\eta_1=\xi_1$是正态分布随机变量。

再考虑η_2，它的分布取决于ξ_1。由于

$$\eta^{\tau}=(\eta_1 \ \ \eta_2)=\begin{cases}(\xi_1 \quad |\xi_2|) & \xi_1\ge 0\\ (\xi_1 \quad -|\xi_2|) & \xi_1<0\end{cases}$$

$$\eta_2=\begin{cases}\xi_2 & (\xi_1\ge 0 \ \ \xi_2>0)\\ -\xi_2 & (\xi_1\ge 0 \ \ \xi_2<0)\\ -\xi_2 & (\xi_1<0 \ \ \xi_2>0)\\ \xi_2 & (\xi_1<0 \ \ \xi_2<0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\xi_2 & (\xi_1\xi_2\ge 0)\\ -\xi_2 & (\xi_1\xi_2<0)\end{cases}$$

当$\xi_1>0$（相应的概率为 1 / 2）相应的条件概率分布是

$$f(y_2\,|\,y_1\ge 0)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\dfrac{{y_2}^2}{2\sigma^2}) & y_2>0\\ 0 & y_2<0\end{cases}$$

当$\xi_1<0$（相应的概率为 1 / 2）相应的条件概率分布是

$$f(y_2\,|\,y_1\le 0)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\dfrac{{y_2}^2}{2\sigma^2}) & y_2<0\\ 0 & y_2>0\end{cases}$$

第七章 估值理论

1．设有信号s，它是一随机变量，其均值为 0，方差为σ_s^2，即$E\{s\}=0$，$E\{s^2\}=\sigma_s^2$。设观测信号时有附加噪声$n(t)$，其它是均值为零的白噪声，样本值为n_i，$E\{n_i\}=0$，$E\{n_i n_j\}=0$，$i\neq j$，$E\{n_i^2\}=\sigma_n^2$，$i,j=1,2,\cdots$，$E\{sn_i\}=0$。于是得到的观测样本（即信号与附加白噪声样本之和）为$\eta_i=s+n_i \quad (i=1,2,\cdots,k)$。现利用 k 个观测值$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$的线性组合估计 s，即设估值为$\hat{s}=\sum_{i=1}^{k}a_i\eta_i$，若$\hat{s}$是它的最小均方误差估值，求各$a_i$之值，并求在最佳估值时的最小均方误差。

解：

本题中的 k 个观测值为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$，利用其线性组合估计 s，即估计值为$\hat{s}=\sum_{i=1}^{k}a_i\eta_i$。

利用正交性原理，有：

$$E\{[s-\hat{s}]\eta_j\}=0 \quad j=1,2,\cdots,k$$

$$\Rightarrow E\{[s-\sum_{i=1}^{k}a_i\eta_i]\eta_j\}=0$$

$$\Rightarrow E\{s^2\}-\sum_{i=1}^{k}a_iE\{s^2\}-\sum_{i=1}^{k}a_iE\{n_in_j\}=0$$

$$\Rightarrow \sigma_s^2-\sum_{i=1}^{k}a_i\sigma_s^2-a_j\sigma_n^2=0$$

$$\Rightarrow a_j=\frac{\left(1-\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\sigma_s^2}{\sigma_n^2}$$

可看出$a_1=a_2=\cdots=a_j=\cdots=a_k$，则：

$$a_j=\frac{\left(1-ka_j\right)\sigma_s^2}{\sigma_n^2}$$

$$\Rightarrow a_j=\frac{\sigma_s^2}{k\sigma_s^2+\sigma_n^2} \qquad j=1,2,\cdots,k$$

最佳估值时的最小均方误差为：

$$
\begin{aligned}
M.M.S.E &= E\{[s-\hat{s}]^2\} = E\{[s-\hat{s}]s\} \\
&= \sigma_s^2 - \frac{k\sigma_s^4}{k\sigma_s^2+\sigma_n^2} \\
&= \frac{\sigma_n^2\sigma_s^2}{k\sigma_s^2+\sigma_n^2}
\end{aligned}
$$

2．设有实平稳随机过程 $\xi(t)$，其相关函数为 $R_\xi(\tau)$。现考虑采用 $\xi(t)$、$\xi'(t)$、$\xi''(t)$ 的值对 $\xi(t+\lambda)$ 进行线性预测，其中 $\lambda>0$，即设 $\hat{\xi}(t+\lambda)=a_1\xi(t)+a_2\xi'(t)+a_3\xi''(t)$，为了获得最佳线性预测，求 a_1、a_2、a_3 之值。若 λ 很小，求 a_1、a_2、a_3 的近似值及最小均方误差。

解：由正交性原理可得：

$$
\begin{cases}
E\{[\xi(t+\lambda)-\hat{\xi}(t+\lambda)]\xi(t)\}=0 \\
E\{[\xi(t+\lambda)-\hat{\xi}(t+\lambda)]\xi'(t)\}=0 \\
E\{[\xi(t+\lambda)-\hat{\xi}(t+\lambda)]\xi''(t)\}=0
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
E\{[\xi(t+\lambda)-a_1\xi(t)-a_2\xi'(t)-a_3\xi''(t)]\xi(t)\}=0 \\
E\{[\xi(t+\lambda)-a_1\xi(t)-a_2\xi'(t)-a_3\xi''(t)]\xi'(t)\}=0 \\
E\{[\xi(t+\lambda)-a_1\xi(t)-a_2\xi'(t)-a_3\xi''(t)]\xi''(t)\}=0
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
R_{\xi\xi}(\lambda)-a_1R_{\xi\xi}(0)-a_2R_{\xi'\xi}(0)-a_3R_{\xi''\xi}(0)=0 \\
R_{\xi\xi'}(\lambda)-a_1R_{\xi\xi'}(0)-a_2R_{\xi'\xi'}(0)-a_3R_{\xi''\xi'}(0)=0 \\
R_{\xi\xi''}(\lambda)-a_1R_{\xi\xi''}(0)-a_2R_{\xi'\xi''}(0)-a_3R_{\xi''\xi''}(0)=0
\end{cases}
$$

考虑到 $\xi(t)$ 为实平稳随机过程，应用公式 $R_{\xi^{(n)}\xi^{(m)}}(\tau)=(-1)^m\dfrac{d^{(m+n)}}{d\tau^{m+n}}R_\xi(\tau)$ 对上述方程组进行化简。并且考虑到实平稳随机过程的相关函数为偶函数，由于 $\xi'(t)$ 存在，则要求 $R_\xi(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处有二阶倒数存在，即要求 $R_\xi(\tau)$ 在 $\tau=0$ 是连续且可导的，因此 $R'_\xi(0)=0$；同理有 $R'''_\xi(0)=0$。所以上述方程组化简为如下形式：

$$\begin{cases} R_\xi(\lambda) - a_1 R_\xi(0) - a_3 R_\xi''(0) = 0 \\ -R_\xi'(\lambda) + a_2 R_\xi''(0) = 0 \\ R_\xi''(\lambda) - a_1 R_\xi''(0) - a_3 R_\xi^{(4)}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{R_\xi^{(4)}(0) R_\xi(\lambda) - R_\xi''(0) R_\xi''(\lambda)}{R_\xi^{(4)}(0) R_\xi(0) - \left(R_\xi''(0)\right)^2} \\ a_2 = \dfrac{R_\xi'(\lambda)}{R_\xi''(0)} \\ a_3 = \dfrac{R_\xi(0) R_\xi''(\lambda) - R_\xi''(0) R_\xi(\lambda)}{R_\xi^{(4)}(0) R_\xi(0) - \left(R_\xi''(0)\right)^2} \end{cases}$$

对相关函数进行泰勒级数展开，并且在λ很小时，有：

$$\begin{cases} R_\xi(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} R_\xi^{(n)}(0) \dfrac{\lambda^n}{n!} \approx R_\xi(0) + R_\xi'(0)\lambda = R_\xi(0) \\ R_\xi'(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} R_\xi^{(1+n)}(0) \dfrac{\lambda^n}{n!} \approx R_\xi'(0) + R_\xi''(0)\lambda = R_\xi''(0)\lambda \\ R_\xi''(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} R_\xi^{(2+n)}(0) \dfrac{\lambda^n}{n!} \approx R_\xi''(0) + R_\xi'''(0)\lambda = R_\xi''(0) \end{cases}$$

所以得到a_1、a_2、a_3的近似值如下：

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = \lambda \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

所以得到最佳线性预测的近似值为：$\hat{\xi}(t+\lambda) \approx \xi(t) + \lambda \xi'(t)$

此时的最小均方误差为：

$$\begin{aligned} M.M.S.E &= E\{[\xi(t+\lambda) - \hat{\xi}(t+\lambda)]^2\} \\ &= E\{[\xi(t+\lambda) - \xi(t) - \lambda\xi'(t)]\xi(t+\lambda)\} \\ &= R_\xi(0) - R_\xi(\lambda) - \lambda R_{\xi'\xi}(\lambda) \\ &= R_\xi(0) - R_\xi(\lambda) - \lambda R_\xi'(\lambda) \end{aligned}$$

6．设有按泊松分布出现的脉冲序列，单位时间内出现脉冲的平均次数为μ，每一个脉冲的极性是正还是负是等概率的，每个脉冲的波形为

$$g(t) = \begin{cases} Ee^{-at} & (t \ge 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

由这组脉冲序列组成了一个随机过程 $\xi(t)$ 。现利用 $(-\infty,t)$ 内对该信号的观测值预测 $\xi(t+\lambda)$ ，$\lambda>0$ ，求实现最佳预测的方法。

解：由于本例为纯预测问题，无噪声存在。

$$S_{ss}(\omega)=S_{\eta\eta}(\omega)=S_{s\eta}(\omega)=\frac{E^2}{\omega^2+\alpha^2}$$（求法见教材 P451 页习题 14）

$$S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right)=\frac{E^2}{\alpha^2-p^2}=\frac{E^2}{(\alpha+p)(\alpha-p)}$$

分解 $S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right)$，使 $S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right)=S_{\eta\eta}^{+}(p)S_{\eta\eta}^{-}(p)$，所以有：

$$\begin{cases} S_{\eta\eta}^{+}(p)=\dfrac{E}{\alpha+p} & \text{极点位于左半平面内} \\ S_{\eta\eta}^{-}(p)=\dfrac{E}{\alpha-p} & \text{极点位于右半平面内} \end{cases}$$

$$G(p)=\frac{S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right)e^{p\lambda}}{S_{\eta\eta}^{-}(p)}=\frac{\dfrac{E^2}{(\alpha+p)(\alpha-p)}e^{p\lambda}}{\dfrac{E}{\alpha-p}}=\frac{Ee^{p\lambda}}{\alpha+p}=G_1(p)+G_2(p)$$

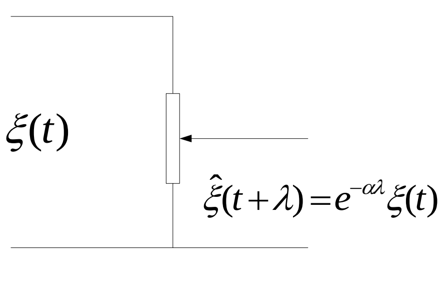
$G(p)$ 在左半平面内的极点为 $-\alpha$ ，在极点上的留数为：

$$\lim_{p\to-\alpha}(\alpha+p)\frac{Ee^{p\lambda}}{\alpha+p}=Ee^{-\alpha\lambda}$$

$$\hat{H}(p)=\frac{G_1(p)}{S_{\eta\eta}^{+}(p)}=\frac{Ee^{-\alpha\lambda}}{\alpha+p}\Big/\frac{E}{\alpha+p}=e^{-\alpha\lambda}$$

$$\hat{h}(t)=e^{-\alpha\lambda}\delta(t)$$

$$\hat{\xi}(t+\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(\tau)\xi(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}\hat{h}(\tau)\xi(t-\tau)d\tau=e^{-\alpha\lambda}\xi(t)$$



7．有一 RC 网络如图所示（图见教材 P652 页）。设 $\alpha=\dfrac{1}{RC}$，若网络的输入为 $\eta(t)=s(t)+n(t)$，其中 $s(t)$ 为信号 $s(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$，A 代表振幅，是一个常数，$\omega_0$ 代表角频率，也是一个常数，θ 代表相角，它是均匀分布于 $[0,2\pi]$ 间的随机变量。$n(t)$ 是零均值的白噪声，其功率密度为：$S_n(f)=N_0$（瓦/赫）。

试计算（1）信号的输入功率密度；

（2）信号的输入功率；

（3）信号的输出功率；

（4）噪声的输出功率；

（5）求输出信杂比。

解：

（1） 信号的相关函数和功率密度分别为：

$$\begin{aligned}R_{ss}(\tau)&=E\{s(t+\tau)s(t)\}=E[A\cos(\omega_0 t+\theta+\omega_0\tau)A\cos(\omega_0 t+\theta)]\\&=E\left\{\frac{A^2}{2}[\cos(2\omega_0 t+\theta+\omega_0\tau)+\cos(\omega_0\tau)]\right\}\\&=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)\end{aligned}$$

$S_{ss}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{ss}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\dfrac{A^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$，其中 $\omega_0=2\pi f_0$，下同。

（2） 信号的输入功率为：$E\{s^2(t)\}=E\{A^2\cos^2(\omega_0 t+\theta)\}=\dfrac{A^2}{2}$

（3） 为了求信号的输出功率，先求出信号的输出功率谱密度，再积分即可。

易求得转移函数 $H(jf)=\dfrac{\alpha}{\alpha+j2\pi f}$，所以：$S_{Y_sY_s}(f)=S_{ss}(f)\cdot|H(jf)|^2$

信号的输出功率为：$\int_{-\infty}^{\infty}S_{Y_sY_s}(f)df=\dfrac{A^2\alpha^2}{2}\cdot\dfrac{1}{\alpha^2+(2\pi f_0)^2}$

（4） $S_{Y_nY_n}(f)=S_{nn}(f)\cdot|H(jf)|^2=\dfrac{\alpha^2 N_0}{\alpha^2+(2\pi f_0)^2}$

又因为有变换关系： $S_{Y_nY_n}(f)=\dfrac{\alpha^2 N_0}{\alpha^2+(2\pi f_0)^2}\leftrightarrow\dfrac{1}{2}\alpha N_0 e^{-\alpha|\tau|}=R_{Y_nY_n}(\tau)$

所以噪声输出功率为：$R_{Y_nY_n}(0) = \frac{1}{2}\alpha N_0$

（5） 输出信杂比为$\frac{(3)}{(4)}$，即有：

$$\frac{\frac{A^2\alpha^2}{2}\cdot\frac{1}{\alpha^2+(2\pi f_0)^2}}{\frac{1}{2}\alpha N_0} = \frac{A^2\alpha}{N_0[\alpha^2+(2\pi f_0)^2]}$$

9．设有离散信号的模型$s(k+1)=\Phi s(k)+\Gamma w(k)$，其中$s(1)$为高斯随机变量，均值为$m_0$，方差为$P_0$，$\Phi$、$\Gamma$均为已知常数，$w(k),k=1,2,\cdots$是相互统计独立的零均值的高斯随机变量，方差为$\sigma_w^2$。观测过程为$\eta(k)=s(k)+n(k) \quad (k=1,2,\cdots)$，$n(k),k=1,2,\cdots$是相互统计独立的零均值的高斯随机变量，方差为$\sigma_n^2$。$n(k)$和$w(l)$是相互统计独立的。

（1）观测$\eta(1)$以估计$s(1)$，求$f_{s(1)/\eta(1)}(s_1/\eta_1)$；

解：因为有$\eta(1)=s(1)+n(1)$，所以：

$$\begin{cases} s(1)\propto N(m_0,P_0) \\ n(1)\propto N(0,\sigma_n^2) \\ \eta(1)\propto N(m_0,P_0+\sigma_n^2) \end{cases}$$

$\therefore f_{s(1)\eta(1)}(s_1,\eta_1)=\frac{1}{2\pi|\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\tau}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$，其中：

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} s_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix} m_0 \\ m_0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} P_0 & P_0-m_0^2 \\ P_0-m_0^2 & P_0+\sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore f_{s(1)\eta(1)}(s_1,\eta_1)=\frac{1}{2\pi\left(P_0\sigma_n^2+2P_0m_0^2-m_0^4\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot\exp\left\{-\frac{(s_1-m_0)^2(P_0+\sigma_n^2)-2(\eta_1-m_0)(s_1-m_0)(P_0-m_0^2)+P_0(\eta_1-m_0)^2}{2\left(P_0\sigma_n^2+2P_0m_0^2-m_0^4\right)}\right\}$$ ——（A 式）

而 $f_{\eta(1)}(\eta_1)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi(P_0+\sigma_n^2)}}\exp\left\{-\dfrac{(\eta_1-m_0)^2}{2(P_0+\sigma_n^2)}\right\}$——（B 式），所以有：

$$f_{s(1)/\eta(1)}(s_1/\eta_1)=\frac{f_{s(1)\eta(1)}(s_1,\eta_1)}{f_{\eta(1)}(\eta_1)}=\frac{A式}{B式}$$

（2）证明 $s(1)$ 的最佳估值 $\hat{s}(1)=m_0+P_1\dfrac{1}{\sigma_n^2}(\eta_1-m_0)$，其中 P_1 是均方误差，它满足方程式

$$P_1^{-1}=P_0^{-1}+\frac{1}{\sigma_n^2}$$

证明：设 $\hat{s}(1)=A\eta_1+b$，其中 A 和 b 应满足：

$$\begin{aligned}A=C_{s_1\eta_1}C_{\eta_1\eta_1}^{-1}&=\frac{E\left\{(s_1-m_0)(\eta_1-m_0)\right\}}{P_0+\sigma_n^2}\\&=\frac{E\left\{s_1\eta_1\right\}-m_0^2}{P_0+\sigma_n^2}=\frac{E\left\{s_1^2\right\}-m_0^2}{P_0+\sigma_n^2}\\&=\frac{P_0}{P_0+\sigma_n^2}=\frac{P_1}{\sigma_n^2}\end{aligned}$$

$$b=E\{s_1\}-AE\{\eta_1\}=m_0-\frac{P_1}{\sigma_n^2}m_0$$

所以有：$\hat{s}(1)=m_0+P_1\dfrac{1}{\sigma_n^2}(\eta_1-m_0)$ 成立。

（3）观测 $\eta(2)$ 后以估计 $s(2)$，即利用 $\eta(1)$、$\eta(2)$ 两个观测值，证明

$$f_{s(2)/\eta(1)\eta(2)}(s_2/\eta_1\eta_2)=\frac{f_{\eta(2)/s(2)\eta(1)}(\eta_2/s_2\eta_1)\,f_{s(2)/\eta(1)}(s_2/\eta_1)}{f_{\eta(2)/\eta(1)}(\eta_2/\eta_1)}$$

证明：

$$f(s_2/\eta_1\eta_2)=\frac{f(s_2\eta_1\eta_2)}{f(\eta_1\eta_2)}=\frac{\dfrac{f(s_2\eta_1\eta_2)}{f(\eta_1)}\cdot\dfrac{f(s_2\eta_1)}{f(s_2\eta_1)}}{\dfrac{f(\eta_1\eta_2)}{f(\eta_1)}}=\frac{f(\eta_2/s_2\eta_1)\,f(s_2/\eta_1)}{f(\eta_2/\eta_1)}$$

（4）当给定 $\eta(1)$ 时，$s(2)$ 是一高斯随机变量，其均值为 $\Phi\hat{s}(1)$，方差为 M_2，

$$M_2=\Phi P_1\Phi+\Gamma\sigma_w^2\Gamma=\Phi^2P_1+\Gamma^2\sigma_w^2$$

解：当 $\eta(1)$ 给定时，$\hat{s}(1)$ 就定了，$s_2=\Phi s_1+\Gamma w_1$。此时，$E\{s_1\}=\hat{s}(1)$，

$D\{s_1\}=E\left\{(s_1-\hat{s}_1)^2\right\}=P_1$，所以有：

$$\begin{cases} E\{s_2\}=\Phi E\{s_1\}=\Phi\hat{s}_1 \\ D\{s_2\}=\Phi^2 E\{s_1^2\}+\Gamma^2\sigma_w^2-\left(E\{s_2\}\right)^2 \\ \qquad\quad =\Phi^2 P_1+\Phi^2\hat{s}_1^2+\Gamma^2\sigma_w^2-\Phi^2\hat{s}_1^2 \\ \qquad\quad =\Phi^2 P_1+\Gamma^2\sigma_w^2 \\ \qquad\quad =M_2 \end{cases}$$

（5）证明 $\hat{s}(2)=\Phi\hat{s}(1)+P_2\dfrac{1}{\sigma_n^2}(\eta_2-\Phi\hat{s}(1))$，其中 $P_2^{-1}=M_2^{-1}+\dfrac{1}{\sigma_n^2}$，$P_2$ 是均方误差

$P_2=E\{[s(2)-\hat{s}(2)]^2\}$

证明：因为 $\hat{s}(2)=A\eta_2+b$，所以有：

$$\begin{cases} E\{(s_2-\hat{s}_2)\eta_2\}=0 \\ E\{s_2-\hat{s}_2\}=0 \end{cases}，可得：\begin{cases} A=\dfrac{M_2}{\sigma_n^2+M_2}=\dfrac{P_2}{\sigma_n^2} \\ b=\dfrac{\sigma_n^2\Phi\hat{s}_1}{\sigma_n^2+M_2}=\dfrac{P_2\Phi\hat{s}_1}{M_2} \end{cases}$$

所以有：$\hat{s}_2=\dfrac{P_2}{\sigma_n^2}\eta_2+\dfrac{P_2\Phi\hat{s}_1}{M_2}=\dfrac{P_2}{\sigma_n^2}\eta_2+\Phi\hat{s}_1\left(1-\dfrac{P_2}{\sigma_n^2}\right)$，而均方误差为：

$$\begin{aligned} & E\{(s_2-\hat{s}_2)^2\}=E\{(s_2-\hat{s}_2)s_2\} \\ & =E\{s_2^2\}-\frac{P_2}{\sigma_n^2}E\{\eta_2 s_2\}-\Phi\hat{s}_1\left(E\{s_2\}-\frac{P_2}{\sigma_n^2}E\{s_2\}\right) \\ & =M_2+\Phi^2\hat{s}_1^2-\frac{P_2}{\sigma_n^2}\left(M_2+\Phi^2\hat{s}_1^2\right)-\Phi^2\hat{s}_1^2+\frac{P_2}{\sigma_n^2}\Phi^2\hat{s}_1^2 \\ & =M_2-\frac{P_2}{\sigma_n^2}M_2 \\ & =P_2 \end{aligned}$$

（6） 利用数学归纳法求 $\hat{s}(k)$ 和 P_k，以 $\hat{s}(k-1)$ 和 M_k 表示之。$\hat{s}(k)$ 代表 $s(k)$ 的最佳估值，

P_k 代表 k 次最佳估值时的最小均方误差。

解：（数学归纳法略）因为有如下关系：

$$\begin{cases} E\{s_k\} = \Phi E\{s_{k-1}\} = \Phi \hat{s}_{k-1} \\ D\{s_k\} = \Phi^2 E\{s_{k-1}^2\} + \Gamma^2 \sigma_w^2 - \left(E\{s_k\}\right)^2 \\ \qquad\quad = \Phi^2 P_{k-1} + \Phi^2 \hat{s}_{k-1}^2 + \Gamma^2 \sigma_w^2 - \Phi^2 \hat{s}_{k-1}^2 \\ \qquad\quad = \Phi^2 P_{k-1} + \Gamma^2 \sigma_w^2 \end{cases}$$

所以有：$\hat{s}(k) = \dfrac{P_2}{\sigma_n^2}\eta_2 + \dfrac{P_2 \Phi \hat{s}_1}{M_2} = \Phi \hat{s}(k-1) + \dfrac{P_k}{\sigma_n^2}\left(\eta_k - \Phi \hat{s}(k-1)\right)$

其中 $P_k^{-1} = M_k^{-1} + \dfrac{1}{\sigma_n^2}$

10．设有信号 $s(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{RC} e^{\frac{t-t_0}{RC}} & (t \le t_0) \\ 0 & (t > t_0) \end{cases}$，在观测时，信号中混有白噪声，即 $\eta(t) = s(t) + n(t)$，$n(t)$ 为白噪声，其功率密度为 N_0，均值为零，$\eta(t)$ 代表观测值。

求在 $t = t_0$ 处获得最大输出信杂比的匹配滤波器，并画出匹配滤波器输出信号的波形。

解：输入信号的频谱为：

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{\frac{t-t_0}{RC}} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{t_0} \frac{1}{RC} e^{\frac{t-t_0}{RC}} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{1 - j\omega RC} \exp(-j\omega t_0) \end{aligned}$$

匹配滤波器的转移函数为：

$$\begin{aligned} \hat{H}(j\omega) &= \frac{k}{N_0} \overline{S(j\omega)} e^{-j\omega t_0} \\ &= \frac{k}{N_0} \overline{\frac{1}{1 - j\omega RC} \exp(-j\omega t_0)} e^{-j\omega t_0} \\ &= \frac{k}{N_0} \frac{1}{1 + j\omega RC} \end{aligned}$$

$$\hat{h}(t) = \frac{k}{N_0} \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$

11．设有一高频脉冲信号 $s(t)$，其包络为一方波，脉冲宽度为 τ_0，载频为 $f_0\left(T_0=\dfrac{1}{f_0}\right)$。为了处理方便，设 $\dfrac{\tau_0}{T_0}=m$，m 为整数，脉冲幅度为 1。在观测信号时，若观测到的高频脉冲中混有附加噪声，即 $\eta(t)=s(t)+n(t)$。若 $n(t)$ 为均值为零的白噪声，功率密度为 N_0，求在 $t=\tau_0$ 处获得最大输出信杂比的匹配滤波器。

解：设输入信号为：$s(t)=\sin(2\pi f_0 t)[u(t)-u(t-\tau_0)]$，则其频谱为：

$$
\begin{aligned}
S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_0^{\tau_0} \sin(2\pi f_0 t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_0^{\frac{m}{f_0}} \frac{1}{2j}\left[e^{-j(\omega-\omega_0)t}-e^{-j(\omega+\omega_0)t}\right]dt \\
&= \frac{\omega_0}{\omega-\omega_0}\left(e^{-j\omega\tau_0}-1\right)
\end{aligned}
$$

在 $t=\tau_0$ 处获得最大输出信杂比，则有：

$$
\begin{aligned}
\hat{H}(j\omega) &= \frac{k}{N_0}\overline{S(j\omega)}e^{-j\omega\tau_0} \\
&= \frac{k}{N_0}\frac{\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}\left(e^{j\omega\tau_0}-1\right)e^{-j\omega\tau_0} \\
&= \frac{k}{N_0}\frac{\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}\left(1-e^{-j\omega\tau_0}\right) \\
&= -\frac{k}{N_0}S(j\omega)
\end{aligned}
$$

$$
\hat{h}(t) = -\frac{k}{N_0}s(t) = -\frac{k}{N_0}\sin(2\pi f_0 t)[u(t)-u(t-\tau_0)]
$$

12．(缺最后一步推导)设有一高频脉冲串，每一个高频脉冲的参数与题 11 所给定的参数相同，脉冲串共有 n 个脉冲。若在该高频脉冲串中混有白噪声 $n(t)$，即观测到的是 $\eta(t)=s(t)+n(t)$，$s(t)$ 代表脉冲串，$n(t)$ 为零均值的白噪声，功率密度为 N_0，求在

$t=t_0=(n-1)T+\tau_0$ 处获得最大输出信杂比的匹配滤波器。其中 T 代表脉冲的重复周期。

解：因为有：

$$
\begin{aligned}
&s(t)\leftrightarrow S(j\omega)\\
&s(t-T)\leftrightarrow S(j\omega)e^{-j\omega T}\\
&\quad\vdots\\
&s[t-(n-1)T]\leftrightarrow S(j\omega)e^{-j\omega(n-1)T}
\end{aligned}
$$

所以：$\sum_{i=0}^{n-1}s(t-iT)\leftrightarrow S(j\omega)\sum_{k=0}^{n-1}e^{-jk\omega T}$

匹配滤波器的转移函数为：

$$\hat{H}(j\omega)=\frac{k}{N_0}\overline{S(j\omega)\sum_{k=0}^{n-1}e^{-jk\omega T}}e^{-j\omega[(n-1)T+\tau_0]}$$

13.（待做）推导最佳一步预测器中的递推公式（31）、（32）、（33）、（35）。