1.3　两个特殊的线性空间

一. Euclid空间的定义与性质

定义1.22 设V是实数域**R**上的线性空间，对于**V**中任二向量x与y，按某规则定义一个实数，用 (x, y) 表示，且它满足下列四个条件：

$$(1)\ (x, y) = (y, x);$$

$$(2)\ (x, y+z) = (x, y) + (x, z);$$

$$(3)\ (kx, y) = k(x, y),\ \forall k \in R;$$

$$(4)\ (x, x) \geq 0, \text{当且仅当} x = 0 \text{时}, (x, x) = 0.$$

则称V为**Euclid**空间，简称欧式空间或实内积空间.

例: (1)在 R^n 中，对任意两个向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$

$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，规定

$$(x,y)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\cdots+\xi_n\eta_n=xy^T$$

(2)在 **C(*a*,*b*)**中，对于它的任意两个连续函数 $f(t),g(t)$，规定

$$(f(t),g(t))=\int_a^b f(t)g(t)dt$$

(3)在 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 中，对于它的任意两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\ \boldsymbol{B}=(b_{ij})$，规定

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)$$

性质1 $(x, ky) = k(x, y)$

性质2 $(x, 0) = (0, x) = 0$

性质3 $\left(\sum_{i=1}^{m} k_i x_i, \sum_{j=1}^{n} l_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} k_i l_j (x_i, y_j)$

性质4 $(x, y)^2 \le (x, x)(y, y)$（**Schwars**）

性质5 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$是欧式空间V 的一个基，则对 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{V}^n$，都有 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \tilde{\boldsymbol{y}}$ ，其中 $\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}$ 分别是 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 在该基下的坐标，$\boldsymbol{A} = \left((\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)\right)_{n\times n}$．称矩阵$\boldsymbol{A}$ 为V^n对于基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的度量矩阵或**Gram**矩阵.

例 若在欧式空间$\mathbf{P}_4$中，基$1, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^3, \boldsymbol{x}^4$的度量矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

求 (f,g)，其中$f(x)=x^3-2x^2+x$，$g(x)=x^4-x$.

解

$$(f,g)=(0,1,-2,1,0)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=-4$$

例1.31 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 分别是欧式空间V^n的两个基，且 V^n对于该二基的度量矩阵分别是 $A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$. 求证A 与B 合同.

证 设 $(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)C$

则有 $y_i = c_{1i}x_1 + c_{2i}x_2 + \cdots + c_{ni}x_n$

从而 $(y_i, y_j) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} c_{si}c_{tj}(x_s, x_t) = C_i^T A C_j$

其中 $C_i = (c_{1i}, c_{2i}, \cdots, c_{ni})^T (i = 1, \cdots, n)$

即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$

注：度量矩阵是实对称正定矩阵.

定义1.23 在欧式空间V 中，非负实数$\sqrt{(x,x)}$ 称为V中向量 x的长度（或模，范数）记为 $|x|$（或 $\|x\|_2$）.

性质： (1) $|kx| = |k||x|$

(2) $|x+y| \le |x| + |y|$

(3) $|x| \ge 0$当且仅当$x=0$时，等号成立.

定义1.24 非零向量 x与y的夹角$\langle x, y\rangle$规定为

$$\langle x, y\rangle = \arccos\frac{(x,y)}{|x||y|}$$

二. 正交性

定义1.25 如果对于欧式空间中的两个向量 x 与 y 有$(x, y)=0$，则称x与y 正交或垂直，记为 $x\perp y$.

定义1.26 如果欧式空间中一组非零向量两两正交，则称为正交向量组.

定理1.31 如果向量 x与y 正交，则有

$$|x+y|^2=|x|^2+|y|^2$$

推广：若向量组 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是正交向量组，则有

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|^2=|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_m|^2$$

定理1.32 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m$是正交向量组，则它们必线性无关.

定义1.27 在欧式空间V^{n}中，由n 个非零向量组成的正交向量组称为V^n 的**正交基**；由单位向量组成的正交基称为**标准正交基**或**规范正交基.**

定理1.33 对于欧式空间 V^{n}的任一基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都可找到一个标准正交基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$.

例1.33 试将向量组 $1,t,t^2$ 正交单位化，规定内积为

$$(f(t),g(t))=\int_0^1 f(t)g(t)dt$$

解

$$f_1(t)=1,\ f_2(t)=t-\frac{(1,t)}{(1,1)}1=t-\frac{1}{2}$$

$$f_3(t)=t^2-\frac{\left(t^2,1\right)}{(1,1)}1-\frac{\left(t^2,f_2\right)}{\left(f_2,f_2\right)}f_2=t^2-t+\frac{1}{6}$$

单位化得 $g_1=1,g_2=2\sqrt{3}t-\sqrt{3},g_3=6\sqrt{5}\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)$

性质1 若向量组 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的每一个向量均与向量 y 正交，则 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的线性组合也与 y 正交.

性质2 设 W为欧式空间 V^n 的子空间，向量y与W正交 $\Leftrightarrow y$ 与W 的每一基向量正交.

子空间 W 的正交补 $W^{\perp}$：$W^{\perp} = \left\{ \boldsymbol{x} \middle| \boldsymbol{x} \perp W, \boldsymbol{x} \in V^n \right\}$

性质：正交补是 V^n的子空间.

定理1.34 任一欧式空间 V^n 为其子空间W 与W 的正交补 $W^\perp$ 的直和. 即 $V^n = W \oplus W^\perp$

证 因为 $V^n \supset W + W^\perp$，又对 $\forall \boldsymbol{x} \in V^n$,

假设$x_1, x_2, \cdots, x_m$是W的正交基，则对$y \in W$

满足 $y = a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m$，其中 $a_i = (x, x_i)$。

因为 $(x - y, x_i) = (x, x_i) - (y, x_i) = 0$

所以 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in W^\perp$，即有 $V^n = W + W^\perp$。

又 $\forall \boldsymbol{z} \in W \cap W^\perp, (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = \mathbf{0}$, 所以 $\boldsymbol{z} = 0$，即$W \cap W^\perp = \{0\}$

故$V^n = W \oplus W^\perp$

推论 设 W 是欧式空间 V^n 的子空间，且W 的维数为m，则 $\dim W^{\perp}=n-m$

例 已知R^3的子空间$W=L(x_1,x_2)$，其中 $x_1=(1,0,1)$，$x_2=(1,2,3)$，求$W^{\perp}$的一个基.

例 设V_1，V_2是欧式空间V的两个子空间，证明

$$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$$

$$(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$$

定理1.35 对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)\in \mathrm{R}^{m\times n}$，有

$$R^{\perp}(\boldsymbol{A})=N\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right),\ R(\boldsymbol{A})\oplus N\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)=\mathrm{R}^{m}$$

$$R^{\perp}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)=N(\boldsymbol{A}),\ R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\oplus N(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}^{n}$$

证 设A 的第 j个列向量为 $\boldsymbol{a}_j\left(j=1,\cdots,n\right)$，由于

$$R^{\perp}(\boldsymbol{A})=\left\{\boldsymbol{y}\middle|\boldsymbol{y}\perp \boldsymbol{a}_j,j=1,\cdots,n\right\}$$

$$=\left\{\boldsymbol{y}\middle|\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=0,j=1,\cdots,n\right\}=\left\{\boldsymbol{y}\middle|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=0\right\}=N\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)$$

所以 $\mathrm{R}^{m}=R(\boldsymbol{A})\oplus R^{\perp}(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})\oplus N\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)$

同理，可得到其它的结论.

三. 正交变换与正交矩阵

定义1.28 设V为欧式空间，T是V的一个线性变换，如果满足$(Tx,Tx)=(x,x)$，那么称T是V的一个正交变换.

定理1.36 线性变换T为正交变换$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in \mathrm{V}$都有$(T\boldsymbol{x},T\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

证 充分性. 显然成立.

必要性. 因为$\left(T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\right)=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$

所以$(T\boldsymbol{x},T\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 证毕

定义1.29 如果实方阵Q满足$Q^{\mathrm{T}}Q = I$，则称Q为正交矩阵.

定理1.37 欧式空间的线性变换是正交变换 $\Leftrightarrow$ 它在标准正交基的矩阵是正交矩阵.

证 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是欧式空间的一个标准正交，T 在该基下的矩阵为 A.

必要性. 若T 是正交变换，那么 $\left(T\boldsymbol{x}_i, T\boldsymbol{x}_j\right) = \left(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j\right) = \delta_{ij}$

由于
$$T\boldsymbol{x}_i = a_{1i}\boldsymbol{x}_1 + a_{2i}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{x}_n$$
$$T\boldsymbol{x}_j = a_{1j}\boldsymbol{x}_1 + a_{2j}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{x}_n$$

所以
$$\left(T\boldsymbol{x}_i, T\boldsymbol{x}_j\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$$

即 A 是正交矩阵.

充分性. 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ ，对任意 $x \in$ Vⁿ， 有

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},\ T\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$$

$$(T\boldsymbol{x},T\boldsymbol{x})=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$$

即 T 是正交变换. 证毕

正交矩阵的性质：

（1）若 Q 是正交矩阵，则 $(\det \boldsymbol{Q})^2 = 1$;

（2）两个正交矩阵的积是正交矩阵.

（3）正交矩阵的逆矩阵是正交矩阵.

例1.34 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 及 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 是欧式空间 $\mathbf{V}^n$ 的两个标准正交基，它们之间的过渡矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则 A 为正交矩阵.

证 因为 $(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{A}$

所以 $\boldsymbol{y}_i = a_{1i}\boldsymbol{x}_1 + a_{2i}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{x}_n \ (i=1,\cdots,n)$

因而 $$(\boldsymbol{y}_i,\boldsymbol{y}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$$

故A是正交矩阵.

四. 对称变换与对称矩阵

定义1.30 设 T 是欧式空间V 的一个线性变换, 且对V 中任意两个向量 x, y 都有

$$(T\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},T\boldsymbol{y})$$

成立，则称 T 为 V 中的一个对称变换.

定理1.38 欧式空间的线性变换是对称变换 $\Leftrightarrow$ 它对于标准正交基的矩阵是实对称矩阵.

证　设V^n的标准正交基为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ ，线性变换 T 在该基下的矩阵为 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ ，则有

$$Tx_i=a_{1i}x_1+a_{2i}x_2+\cdots+a_{ni}x_n\quad(i=1,\cdots,n)$$

$$(Tx_i,x_j)=a_{ji},\ (x_i,Tx_j)=a_{ij}$$

必要性. 若T是对称变换，那么

$$\left(T\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j\right)=\left(\boldsymbol{x}_i,T\boldsymbol{x}_j\right)$$

从而 $a_{ji}=a_{ij}$ ，即 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.

充分性. 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，对 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in \mathrm{V}^n$，有

$$\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n\right)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},T\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n\right)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}=\left(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n\right)\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix},T\boldsymbol{y}=\left(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n\right)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}$$

所以

$$(T\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{x},T\boldsymbol{y})$$

即 T 是对称变换. 证毕

定理1.39 实对称矩阵的特征值都是实数.

定理1.40 实对称矩阵的不同特征值所对应的的特征向量是正交的.

例　已知欧式空间V^n的一个标准正交基为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$，且$\alpha_0=\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+n\alpha_n$，定义变换$T\alpha=\alpha+k(\alpha,\alpha_0)\alpha_0$，$k\neq 0$.

1. 验证T是线性变换；

2. 证明T是正交变换$\Leftrightarrow k=-\dfrac{2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.

五. 酉空间介绍

定义1.31 设V 是复数域 C 上的线性空间，对于 V中任意两个向量 x 与 y，按某规则有一复数 (x, y) 与之对应，它满足下列四个条件

(1) $(x,y)=\overline{(y,x)}$

(2) $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$

(3) $(kx,y)=k(x,y)$

(4) $(x,x)\geq 0$,当且仅当$x=0$时，实数$(x,x)=0$.

则称 (x, y) 为向量 x与y 的内积，而称 V 为酉空间(或复内积空间).

例1.35 在复n 维向量空间 C^n中，对于任意两个向量定义其内积为

$$\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\ \boldsymbol{y}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$$

$$(x,y)=\xi_1\overline{\eta_1}+\xi_2\overline{\eta_2}+\cdots+\xi_n\overline{\eta_n}=xy^H$$

性质： (1) $(x,ky)=\overline{k}(x,y)$

(2) $(x,0)=(0,x)=0$

(3) $\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i x_i,\sum_{j=1}^{n}\eta_j y_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\xi_i\overline{\eta_j}(x_i,y_j)$

(4) $\sqrt{(x,x)}$ 称为向量 x 的长度(模)，仍记 $|\boldsymbol{x}|$

(或 $\|\boldsymbol{x}\|_2$)

(5) $(x,y)(y,x)\le(x,x)(y,y)$ 当且仅当 ***x*与*y*** 线性相关时，等号成立.

（**6**）两个非零向量 ***x*** 与 ***y*** 的夹角 $\langle x,y\rangle$ 定义为

$$\cos^2\langle x,y\rangle=\frac{(x,y)(y,x)}{(x,x)(y,y)}$$

当 **(*x*, *y*)=0** 时，称 ***x*** 与 ***y*** 正交或垂直.

（**7**）任意线性无关的向量组可以用**Schmidt** 正交化法正交化之.

（**8**）任一非零酉空间都存在正交基和标准正交基.

（**9**）任一***n*** 维酉空间 $\mathbf{V}^n$ 均为其子空间**W**与$\mathbf{W}^{\perp}$的直和.

（10）酉空间V 中的线性变换 T，如果满足

$$(T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x} \in \mathrm{V}$$

则称 T 为 V 的酉变换.

（11）酉空间V 的线性变换T 为酉变换的充要条件是，对于 V 中任意两个向量 x,y 都有

$$(T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

（12）酉变换在酉空间的标准正交基下的矩阵 A 是酉矩阵，即 A 满足 $A^H A = I$

（13）酉矩阵的逆矩阵也是酉矩阵；两个酉矩阵的乘积还是酉矩阵.

（14）酉空间 V 的线性变换 T，如果满足

$$\left(T\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\left(\boldsymbol{x},T\boldsymbol{y}\right),\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in \mathrm{V}$$

则称 T 为 V 的**Hermite 变换**或**酉对称变换**.

（15）**Hermite 变换**在酉空间的**标准正交基**下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**Hermite矩阵**，即有 $\boldsymbol{A}^H=\boldsymbol{A}$

（16）**Hermite 矩阵**的**特征值**都是**实数**.

（17）属于**Hermite矩阵**的不同特征值的特征向量必定正交.

定理1.14 （1）设 $A \in \mathrm{C}^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,则存在酉矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = P^{H}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

（2）设 $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，且 $\lambda_i \in \mathrm{R}$ $(i = 1,\cdots,n)$，则存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ = Q^{\mathrm{T}}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

证 用数学归纳法，当n=1，显然成立.

假设n-1 时成立，证n阶矩阵结论成立.

设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1$，且 $|x_1|=1$，将x_1扩充为C^n的一个标准正交基$x_1,x_2,\cdots,x_n$，记 $P_1=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则 P_1 是酉矩阵，且有 $\boldsymbol{P}_1^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\left(\boldsymbol{x}_i^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j\right)_{n\times n}$

其中第1列的元素是

$$\boldsymbol{x}_i^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_i^H\left(\lambda_1\boldsymbol{x}_1\right)=\begin{cases}\lambda_1, & i=1\\ 0, & i=2,3,\cdots,n\end{cases}$$

于是可得

$$\boldsymbol{P}_1^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{A}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

由于$\boldsymbol{n}$–1 阶矩阵 $\boldsymbol{A}_1$的特征值为$\lambda_2, \cdots, \lambda_n$，根据归纳法假设，存在$\boldsymbol{n}$–1 阶酉矩阵$\boldsymbol{S}$ ，使得

$$\boldsymbol{S}^H \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0^{\mathrm{T}} \\ 0 & \boldsymbol{S} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2$

则 $\boldsymbol{P}$ 是酉矩阵，且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{H}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_2^{H}\left(\boldsymbol{P}_1^{H}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\right)\boldsymbol{P}_2$$

$$= \boldsymbol{P}_2^{H}\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{A}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

同理可证（2） 证毕

定义1.32 设 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$， 且等式 $A^HA=AA^H$ 成立，则称 A 为**正规矩阵.**

定理1.42 （1）设 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$， 则 A 酉相似于对角矩阵 $\Leftrightarrow A$ 为**正规矩阵.**

（2）设 $A\in \mathbf{R}^{n\times n}$， 且$A$ 的特征值都是实数，则 A 正交相似于对角矩阵 $\Leftrightarrow A$ 为正规矩阵.

证 （1）**必要性.** 设酉矩阵 P 使得 $P^HAP=\Lambda$，

则有 $A=P\Lambda P^H$， $A^H=P\overline{\Lambda}P^H$，

所以 $A^HA=P\overline{\Lambda}P^HP\Lambda P^H=P\overline{\Lambda}\Lambda P^H=P\Lambda\overline{\Lambda}P^H$

$=P\Lambda P^HP\overline{\Lambda}P^H=AA^H$

充分性. 设 A 满足 $A^H A = AA^H$，因为存在酉矩阵P使得

$$P^H AP = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} = B$$

于是有

$$\begin{aligned} B^H B &= P^H A^H P P^H AP = P^H A^H AP \\ &= P^H AA^H P = P^H APP^H A^H P = BB^H \end{aligned}$$

可得

$$\begin{cases} b_{12} = b_{13} = \cdots = b_{1n} = 0 \\ b_{23} = \cdots = b_{2n} = 0 \\ \vdots \\ b_{n-1,n} = 0 \end{cases}$$

即 $B = diag(b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{nn})$

类似地，可证第二个结论. 证毕

推理1 实对称矩阵正交相似对角矩阵.

推论2 设 T 是欧式空间 V^n 的对称变换，则在 V^n 中存在标准正交基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

证 任取 V^n 的一个标准正交基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，设 T 在该基下的矩阵为 A，即有

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\boldsymbol{A}$$

因为 A 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 Q 使得

$$\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)$$

构造 V^n 的标准正交基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，使满足

$$(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\boldsymbol{Q}$$

则有

$$\begin{aligned} T(y_1, y_2, \cdots, y_n) &= T(x_1, x_2, \cdots, x_n)\boldsymbol{Q} \\ &= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\boldsymbol{AQ} \\ &= (y_1, y_2, \cdots, y_n)\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ} \\ &= (y_1, y_2, \cdots, y_n)\boldsymbol{\Lambda} \end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{T}$ 在 V^{n}的标准正交基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 下的矩阵为对角矩阵. 证毕

若 A 是Hermite矩阵，则存在酉矩阵P 使得

$$\boldsymbol{P}^H \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

设 $\boldsymbol{P} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$

则有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^H = \left(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n\right)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1^H \\ \boldsymbol{p}_2^H \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_n^H \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1\left(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_1^H\right) + \lambda_2\left(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_2^H\right) + \cdots + \lambda_n\left(\boldsymbol{p}_n\boldsymbol{p}_n^H\right)$$

该式称为Hermite矩阵A 的谱分解.

第一章　总结

一. 线性空间

1. 定义，2. 基，坐标；3. 子空间（交，和）

二. 线性变换

1. 定义，2. 运算，3. 线性变换的矩阵，

4. 不变子空间

三. 欧式空间

1. 定义，2. 正交性，3. 正交变换，对称变换

四. 酉空间

1. 定义，2. 酉变换，Hermite变换；3. 正规矩阵