第四章　矩阵分解

4.1　矩阵的三角分解

4.2　矩阵的QR分解

4.3　矩阵的满秩分解

4.4　矩阵的奇异值分解

4.1 矩阵的三角分解

一. Gauss消元法的矩阵形式

设线性方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$

其中 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n},\boldsymbol{x}=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T,\boldsymbol{b}=\left(\beta_1,\cdots,\beta_n\right)^T.$

消去法：（1） 按自然顺序选主元素法

（2） 按列选主元素法

（3） 总体选主元素法

设 $\boldsymbol{A}^{(0)}=\boldsymbol{A}$,其元素$a_{ij}^{(0)}=a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,

$\boldsymbol{A}$的k阶顺序主子式为$\Delta_k(k=1,2,\cdots,n)$. 如果

$\Delta_1=a_{11}^{(0)}\neq 0$, 令 $c_{i1}=\dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}(i=1,2,\cdots,n)$,构造

$$\boldsymbol{L}_1=\begin{pmatrix}1&&&\\c_{21}&1&&\\\vdots&&\ddots&\\c_{n1}&&&1\end{pmatrix},\boldsymbol{L}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&\\-c_{21}&1&&\\\vdots&&\ddots&\\-c_{n1}&&&1\end{pmatrix}$$

计算

$$\boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{A}^{(0)}=\begin{pmatrix}a_{11}^{(0)}&a_{12}^{(0)}&\cdots&a_{1n}^{(0)}\\0&a_{22}^{(1)}&\cdots&a_{2n}^{(1)}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a_{n2}^{(1)}&\cdots&a_{nn}^{(1)}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{(1)}$$

显然， $\Delta_2=a_{11}^{(0)}a_{22}^{(1)}.$

如果 $\Delta_2\neq 0$,则$a_{22}^{(1)}\neq 0$.令$c_{i2}=\dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}(i=3,4,\cdots,n)$

并构造矩阵

$$\boldsymbol{L}_2=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & c_{32} & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & c_{n2} & & & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{L}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -c_{32} & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & -c_{n2} & & & 1\end{pmatrix}$$

计算

$$\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{pmatrix}a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{(2)}$$

显然 $\Delta_3=a_{11}^{(0)}a_{22}^{(1)}a_{33}^{(2)}$. 如此继续下去，直到第$r$-1步，

得到

$$A^{(r-1)}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1r-1}^{(0)} & a_{1r}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & \ddots & a_{r-1r-1}^{(r-2)} & a_{r-1r}^{(r-2)} & \cdots & a_{r-1n}^{(r-2)} \\ & & & a_{rr}^{(r-1)} & \cdots & a_{rn}^{(r-1)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nr}^{(r-1)} & \cdots & a_{nn}^{(r-1)} \end{pmatrix}$$

$\Delta_r = a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)} \cdots a_{rr}^{(r-1)}$. 在第$n-1$步，便有

$$A^{(n-1)}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n-1}^{(0)} & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1}^{(n-2)} & a_{n-1,n}^{(n-2)} \\ & & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

此消元过程称为**Gauss**消元过程.

Gauss消元过程能够进行到底 $\Leftrightarrow \Delta_r \neq 0 \ (r=1,2,\cdots n-1)$

二. 矩阵的三角（LU）分解

由于 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{(0)} = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}^{(1)} = \cdots = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2\cdots\boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{A}^{(n-1)}$

而

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2\cdots\boldsymbol{L}_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ c_{21} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & 1 & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

单位下三角矩阵：对角元都是1的下三角矩阵.

令 $\boldsymbol{A}^{(n-1)} = \boldsymbol{U}$，则得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$

定义4.1 如果方阵 A 可分解成一个下三角矩阵L 和一个上三角矩阵U 的乘积，则称A可作三角分解LU分解. 如果方阵 A 可分解成$A=LDU$，其中L 是单位下三角矩阵，D是对角矩阵，U是单位上三角矩阵，则称A可作LDU分解.

定理4.1 设 $A=(a_{ij})$ 是n 阶矩阵，A可唯一分解为 $A=LDU \Leftrightarrow A$的顺序主子式 $\Delta_r \neq 0\ (r=1,2,\cdots n-1)$

其中 $D=diag(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,

$$d_k=\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}},k=1,2,\cdots,n\left(\Delta_0=1\right).$$

证　**必要性.**　若 A 有唯一的LDU分解$A=LDU$，将其表成分块形式为

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & v \\ \mu^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & \\ \sigma^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n-1} & \\ & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n-1} & \tau \\ & 1 \end{pmatrix}$$

得到

$$\boldsymbol{A}_{n-1} = \boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{D}_{n-1}\boldsymbol{U}_{n-1}, \quad \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{n-1}\boldsymbol{U}_{n-1}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{D}_{n-1}\tau, \qquad a_{nn} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{n-1}\boldsymbol{\tau} + d_n$$

如果 $\Delta_{n-1} = \det \boldsymbol{A}_{n-1} = 0$, 那么　$\det \boldsymbol{D}_{n-1} = 0$,

所以 $\mu^T = \sigma^T D_{n-1} U_{n-1}$ 或 $v = L_{n-1} D_{n-1} \tau$ 的解不唯一.

这与A的LDU分解的唯一性矛盾.　因此 $\Delta_{n-1} \neq 0$

因为　$\Delta_{i+1} = d_{i+1}\Delta_i \, (i = 1,2,\cdots n-2)$, 所以 $\Delta_i \neq 0$

即 A 的顺序主子式不为零.

充分性，若$\Delta_i \neq 0(i=1,2,\cdots,n-1)$, 则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}^{(n-1)}$

令 $d_k=\dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, k=1,2,\cdots,n\left(\Delta_0=1\right)$

于是 $\boldsymbol{A}^{(n-1)}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}$ ， 从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}$.

唯一性. 设 $\boldsymbol{A}=\tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{D}}\tilde{\boldsymbol{U}}$ ，其分块表示为

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \nu \\ \mu^{\mathrm{T}} & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde{L}_{n-1} & \\ \tilde{\sigma}^{T} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{D}_{n-1} & \\ & \tilde{d}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{U}_{n-1} & \tilde{\tau} \\ & 1 \end{pmatrix}$$

则有 $\tilde{L}_{n-1}\tilde{D}_{n-1}\tilde{U}_{n-1}=L_{n-1}D_{n-1}U_{n-1}$

从而 $\tilde{L}_{n-1}^{-1}L_{n-1}=\tilde{D}_{n-1}\tilde{U}_{n-1}U_{n-1}^{-1}D_{n-1}^{-1}$ （$\Delta_k \neq 0$）

所以 $\tilde{L}_{n-1}^{-1}L_{n-1}=I$ ， 同理 $\tilde{U}_{n-1}U_{n-1}^{-1}=I$

因而 $\tilde{D}_{n-1}D_{n-1}^{-1}=I$ ，所以 $\tilde{L}_{n-1}=L_{n-1}$,

$\tilde{U}_{n-1}=U_{n-1}$,$\tilde{D}_{n-1}=D_{n-1}$

又因 $\mu^T=\sigma^T D_{n-1}U_{n-1}, v=L_{n-1}D_{n-1}\tau$ 有唯一解.

所以 ***A***的***LDU*分解**唯一.

推论 ***n*** 阶非奇异矩阵***A*** 有三角分解***A*=*LU*** $\Leftrightarrow$ ***A***的

顺序主子式$\Delta_k \neq 0 \quad (k=1,2,\cdots,n-1)$.

定理4.2 设A是n阶非奇异矩阵，则存在置换矩阵P使PA的n个顺序主子式非零.

推论 设A是n阶非奇异矩阵，则存在置换矩阵P，使 $PA=LDU$.

应用：对 $Ax=b$，因$A=LU$，所以$LUx=b$

设 $y=Ux$,则解 $Ly=b$，$Ux=y$.

三. 其它三角分解及其算法

定义4.2 设矩阵 A 有唯一的LDU分解，若$A=LDU$中的D与U结合，并用 $\hat{U}$ 表示，就得到唯一的分解 $A=L(DU)=L\hat{U}$,称为A 的Doolittle分解;

若将L与D结合，并用 $\hat{L}$ 表示，就得到唯一的分解 $A=(LD)U=\hat{L}U$称为A 的Crout 分解.

Crout分解的算法：

设

$$\hat{L}=\begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

根据 $A=\hat{L}U$，可得

$$l_{i1}=a_{i1}(i=1,\cdots n), u_{1j}=\frac{a_{1j}}{l_{11}}(j=2,\cdots,n)$$

$$l_{ik}=a_{ik}-(l_{i1}u_{1k}+\cdots+l_{i,k-1}u_{k-1,k})(i\geq k)$$

$$u_{kj}=\frac{1}{l_{kk}}\left[a_{kj}-\left(l_{k1}u_{1j}+\cdots+l_{k,k-1}u_{k-1,j}\right)\right](j>k)$$

$$
\begin{pmatrix}
(1) & (2) & & comp. & U & r1 & \\
comp. & (3) & (4) & comp. & U & r2 & \\
\hat{L} & comp. & (5) & (6) & comp. & U & r3 \\
 & \hat{L} & comp. & (7) & & & \\
c1 & & \hat{L} & & & & \\
 & c2 & c3 & & & &
\end{pmatrix}
$$

最后A的位置存放的元素就成为

$$
\begin{pmatrix}
l_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\
l_{21} & l_{22} & \cdots & u_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn}
\end{pmatrix}
$$

例 4.1 求矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$的**Crout**分解.

解

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 3/2 \\ 1 & 2+\frac{1}{2} & -1/5 \\ 2 & 4+1 & 2-3+1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 5/2 & \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ & 1 & -1/5 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

习题1 求矩阵$\boldsymbol{A}$的**Crout，Doolittle**分解，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

定义4.3 如果A是实对称正定矩阵，$A=G^TG$,其中G为上三角矩阵，则称$A=G^TG$为实对称正定矩的**Cholesky**分解（平方根分解，对称三角分解）.

算法： 令$G=(g_{ij})$,则由$A=G^TG$推得

$$a_{ij}=g_{i1}g_{1j}+g_{i2}g_{2j}+\cdots+g_{ij}g_{jj},(i>j)$$

$$a_{ii}=g_{i1}^2+g_{i2}^2+\cdots+g_{ii}^2$$

从而得到：

$$g_{ij}=\begin{cases}(a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}g_{ik}^2)^{1/2} & i=j\\ \frac{1}{g_{ii}}(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}g_{ik}g_{jk}) & i>j\\ 0 & i<j\end{cases}$$

例 4.2 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}5&-2&0\\-2&3&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

求A 的**Cholesky**分解.

$$A=\begin{pmatrix}5&-2&0\\-2&3&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\sqrt{5}&&\\ {-2}/{\sqrt{5}}&\sqrt{3-{4}/{5}}&\\ 0&-\sqrt{{5}/{11}}&\sqrt{{6}/{11}}\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{5}&&\\ {-2}/{\sqrt{5}}&\sqrt{{11}/{5}}&\\ 0&-\sqrt{{5}/{11}}&\sqrt{{6}/{11}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}&{2}/{\sqrt{5}}&0\\ &\sqrt{{11}/{5}}&-\sqrt{{11}/{5}}\\ &&\sqrt{{6}/{11}}\end{pmatrix}$$

四. 分块矩阵的拟LU分解与拟LDU分解

设$A \in \mathrm{R}^{n\times n}$, 将$A$分成 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

其中 A_{11}是n_1阶方阵，A_{22}是n_2阶方阵. 如果 A_{11}可逆，则

$$\begin{pmatrix} I_{n_1} & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_{n_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & O \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I_{n_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

还可以分解成

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n_1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{I}_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & O \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n_1} & \boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{n_2} \end{pmatrix}$$

此就是分块矩阵的拟LDU分解.

如果 A_{22}可逆，类似推得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n_1} & \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21} & O \\ O & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n_1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{I}_{n_2} \end{pmatrix}$$

例4.3 设 $\boldsymbol{A}\in\mathrm{R}^{m\times n},\boldsymbol{B}\in\mathrm{R}^{n\times m}$,则有

$$\det(\boldsymbol{I}_m\pm\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\det(\boldsymbol{I}_n\pm\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$$

证 构造矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{B}\\ \mp\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}$

因为

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{B}\\ -\boldsymbol{A} & I_m\end{pmatrix}=\det(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$$

所以 $\det(\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\det(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$

习题2 已知 $\boldsymbol{n}$维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,\cdots n),\boldsymbol{\beta}=(1,1\cdots1)$,

求 $\det(I_n+\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta})$.

4. 2 矩阵的*QR*分解

一. Givens矩阵和Householder矩阵

1. Givens矩阵和Givens变换

定义4.4 设实数c与s满足$c^2+s^2=1$，称

$$
T_{ij}=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & c & & & & s & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & -s & & & & c & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

为**Givens**矩阵(初等旋转矩阵)，亦可记作$T_{ij}=T_{ij}(c,s)$

由**Givens**矩阵确定的变换称为**Givens变换**（初等旋转变换）.

性质1　Givens矩阵是正交矩阵，且有

$$[T_{ij}(c,s)]^{-1}=[T_{ij}(c,s)]^{T}=T_{ij}(c,-s),\det T_{ij}(c,s)=1$$

性质2 设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T, y=T_{ij}x=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^T$

则有 $\eta_i=c\xi_i+s\xi_j,\eta_j=-s\xi_i+c\xi_j,\eta_k=\xi_k(k\neq i,j)$

当 $\xi_i^2+\xi_j^2\neq 0$ 时，选取

$$c=\frac{\xi_i}{\sqrt{\xi_i^2+\xi_j^2}},s=\frac{\xi_j}{\sqrt{\xi_i^2+\xi_j^2}}$$

则有　$\eta_i=\sqrt{\xi_i^2+\xi_j^2},\eta_j=0$

定理4.3 设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T\neq O$，则存在有限个**Givens矩阵**的乘积，记作 $\boldsymbol{T}$，使得

$$Tx=|x|e_1$$

证 若 $\xi_1\neq 0$，取 $c=\dfrac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}},s=\dfrac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}$

则
$$T_{12}x=(\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2},0,\xi_3,\cdots,\xi_n)^T$$

再对 $\boldsymbol{T_{12}x}$ 构造**Givens矩阵** $\boldsymbol{T_{13}}$**(c,s)**:

$$c=\frac{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}},s=\frac{\xi_3}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}}$$

则
$$T_{13}(T_{12}x)=\left(\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2},0,0,\xi_4,\cdots,\xi_n\right)^T$$

如此继续下去，最后对 $T_{1,n-1}\cdots T_{12}x$ 构造矩阵 T_{1n}

$$c=\frac{\sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2}}{\sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}},\ s=\frac{\xi_n}{\sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}}$$

则 $$T_{1n}\left(T_{1,n-1}\cdots T_{12}x\right)=(\sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2},0,\cdots,0)^T$$

令 $T=T_{1n}T_{1,n-1}\cdots T_{12}$，则有 $Tx=|x|e_1$.

若 $\xi_1=0$, 不妨设 $\xi_1=\cdots=\xi_{k-1}=0,\xi_k\neq 0\quad(1<k\leq n)$

此时 $|x|=\sqrt{\xi_k^2+\cdots+\xi_n^2}$ 上面的步骤由 $T_{1,k}$ 开始进行

即得结论. 证毕

推论 设非零列向量 $x \in R^n$ 及单位列向量 $z \in R^n$,则存在有限个**Givens矩阵**的乘积 T，使得 $Tx = |x| z.$

证 对于向量**x**，存在 $T^{(1)} = T_{1n}^{(1)} T_{1,n-1}^{(1)} \cdots T_{12}^{(1)}$

使得 $T^{(1)} x = |x| e_1$; 对于向量**z**，存在

$$T^{(2)} = T_{1n}^{(2)} T_{1,n-1}^{(2)} \cdots T_{12}^{(2)}$$

使得 $T^{(2)} z = e_1$ ，于是有 $T^{(1)} x = |x| e_1 = |x| T^{(2)} z$

所以 $T = \left(T^{(2)}\right)^{-1} T^{(1)} = (T_{1n}^{(2)} T_{1,n-1}^{(2)} \cdots T_{12}^{(2)})^T T^{(1)}$

是有限个**Givens矩阵**的乘积. 证毕

例4.4 设 $x=(3,4,5)^T$，用**Givens变换**化x与e_1同方向的向量.

解 对x 构造 $T_{12}(c,s): c=\frac{3}{5}, s=\frac{4}{5},$

$$T_{12}x=(5,0,5)^T$$

对 $T_{12}x$ 构造 $T_{13}(c,s): c=\frac{1}{\sqrt{2}}, s=\frac{1}{\sqrt{2}},$

于是 $T_{13}(T_{12}x)=\left(5\sqrt{2},0,0\right)^T$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_{13}\boldsymbol{T}_{12} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = 5\sqrt{2}\boldsymbol{e}_1$$

2. Householder矩阵和Householder变换

定义4.5 设单位列向量 $u \in R^n$，称

$$H = I - 2uu^T$$

为Householder矩阵（初等反射矩阵）.

由Householder矩阵确定的线性变换称为Householder变换.

性质：（1） $H^T = H$； $H^T H = I$

（2） $H^2 = I$(对合矩阵)； $H^{-1} = H$

（3） $\det \boldsymbol{H} = -1$

定理4.4 任意给定非零列向量 $x \in R^n (n>1)$及单位向量 $z \in R^n$，则存在Householder矩阵 H，使得

$$Hx = |x|z.$$

证 当 $x = |x|z$ 时，取单位列向量u 满足 $u^T x = 0$,

则有 $Hx = (I - 2uu^T)x = x - 2u(u^T x) = x = |x|z$

当 $x \neq |x|z$ 时，取 $u = \dfrac{x - |x|z}{|x - |x|z|}$

则有 $$Hx = \left[I - 2\frac{(x-|x|z)(x-|x|z)^T}{|x-|x|z|^2} \right] x$$

$$= x - 2(x - |x|z, x)\frac{x-|x|z}{|x-|x|z|^2}$$

$$= x - (x - |x|z) = |x|z$$

因为

$$|x - |x|z|^2 = 2(x - |x|z, x)$$

证毕

例4.5 设 $x=(1,2,2)^T$，用**Householder变换**化x为与 e_1同方向的向量.

解 计算 $|x|=3, x-|x|e_1=2(-1,1,1)^T$.

取 $u=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T$，构造**Householder 矩阵**

$$H=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & -2\\2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

则 $$Hx=3e_1$$

定理4.5 Givens矩阵是两个Householder矩阵的乘积.

证 对Givens矩阵 T_{ij}, 取单位向量

$$u=(0,\cdots,0,\underset{\uparrow i}{\sin\frac{\theta}{4}},0,\cdots,0,\underset{\uparrow j}{\cos\frac{\theta}{4}},0,\cdots 0)^T$$

得Householder矩阵 $H_u=I-2uu^T$

$$
= \begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& \cos\dfrac{\theta}{2} &&&& -\sin\dfrac{\theta}{2} &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& -\sin\dfrac{\theta}{2} &&&& -\cos\dfrac{\theta}{2} &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
$$

再取单位向量

$$
v = \left(0, \cdots, 0, \sin\frac{3\theta}{4}, 0, \cdots, 0, \cos\frac{3\theta}{4}, 0, \cdots 0\right)^T
$$

可得$\boldsymbol{H_v}$. 最后直接计算可得$\boldsymbol{T_{ij} = H_v H_u}$.

二. 矩阵的QR分解

定义4.6 如果实（复）非奇异矩阵A 能够分解成正交矩阵与实（复）非奇异上三角矩阵R 的乘积，即$A=QR$,则称为A 的QR分解.

定理4.6 设A 是n 阶实（复）非奇异矩阵，则存在正交（酉）矩阵Q 和实（复）非奇异上三角矩阵R 使A 有 QR分解；且除去相差一个对角元素的绝对值（模）全等于1的对角矩阵因子外，分解是唯一的.

证　设A的n个列向量依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$.
因为A非奇异，所以n个列向量线性无关，按Schmidt正交化方法正交化，得到n个标准正交列向量

$$q_1,q_2,\cdots,q_n.$$

对 $a_1,a_2,\cdots,a_n$.的正交化可得

$$\begin{cases} b_1=a_1 \\ b_2=a_2-k_{21}b_1 \\ \vdots \\ b_n=a_n-k_{n,n-1}b_{n-1}-\cdots-k_{n1}b_1 \end{cases}$$

其中 $k_{ij}=\dfrac{(a_i,b_j)}{(b_j,b_j)}(j<i)$. 将上式改写为

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_2 + k_{21}\boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}_n + k_{n,n-1}\boldsymbol{b}_{n-1} + \cdots + k_{n1}\boldsymbol{b}_1 \end{cases}$$

则有 $$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)C.$$

其中 $$C = \begin{pmatrix} 1 & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ & 1 & \cdots & k_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

再对 $b_1, b_2, \cdots, b_n$. 单位化可得

$$\boldsymbol{q}_i = \frac{1}{|\boldsymbol{b}_i|}\boldsymbol{b}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

于是有 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)C$

$$= (q_1, q_2, \cdots, q_n)\begin{pmatrix} |b_1| & & \\ & \ddots & \\ & & |b_n| \end{pmatrix}C$$

令 $Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n), R = diag(|b_1|, |b_2|, \cdots, |b_n|)C$

则有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$

唯一性. 设$\boldsymbol{A}$ 有两个分解式

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1$$

由此得 $Q = Q_1 R_1 R^{-1} = Q_1 D$ 其中 $D = R_1 R^{-1}$

因为 $I = Q^T Q = (Q_1 D)^T (Q_1 D) = D^T D$

所以，$\boldsymbol{D}$ 为对角元素的绝对值全为1的对角矩阵，

从而 $R_1 = DR,\ Q_1 = QD^{-1}$

证毕

例4.6 试用*Schmidt* 正交化方法求矩阵QR 分解.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

解 令 $a_1=(1,2,1)^T, a_2=(2,1,2)^T, a_3=(2,2,1)^T$

正交化可得

$$b_1=a_1=(1,2,1)^T$$

$$b_2=a_2-b_1=(1,-1,1)^T$$

$$b_3=a_3-\frac{1}{3}b_2-\frac{7}{6}b_1=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)^T$$

构造矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}\sqrt{6} & & \\ & \sqrt{3} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{7}{6}\\ & 1 & \frac{1}{3}\\ & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{6} & \sqrt{6} & \frac{7}{\sqrt{6}}\\ & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ & & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

则有 $A=QR$

定理4.7 设A 是$m\times n$实（复）矩阵，且其n 个列线性无关，则A 有分解 ***A=QR***，其中Q 是$m\times n$实（复）矩阵，且满足 $Q^TQ=I\ \ (Q^HQ=I)$,R 是 n 阶实（复）非奇异上三角矩阵，该分解除去相差一个对角元素的绝对值(模)全等于1的对角矩阵因子外唯一.

定理4.8 任何n 阶实非奇异矩阵 $A=(a_{ij})$可通过左连乘初等旋转矩阵化为上三角矩阵.

证 第1步：由 $\det A \quad 0$ 知，A 的第1列

$b^{(1)}=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1})^T\neq 0$ 存在有限个**Givens**矩阵的乘积，记作 T_1，使得

$$T_1b^{(1)}=\left|b^{(1)}\right|e_1\quad (e_1\in R^n)$$

令 $a_{11}^{(1)}=\left|b^{(1)}\right|$, 则有

$$T_1A=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

第2步：由 $\det A^{(1)}\neq 0$ 知，$A^{(1)}$的第1列

$b^{(2)}=(a_{22}^{(1)},a_{32}^{(1)},\cdots,a_{n2}^{(1)})^T\neq 0$,存在有限个Givens矩阵的乘积，记作 T_2 ，使得

$$T_2b^{(2)}=\left|b^{(2)}\right|e_1 \quad (e_1\in R^{n-1})$$

令 $\boldsymbol{a}_{22}^{(2)}=\left|\boldsymbol{b}^{(2)}\right|$,则有

$$T_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(2)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

第n-1步：由 $\det A^{(n-2)} \neq 0$ 知，$A^{(n-2)}$的第1列 $b^{(n-1)} = (a_{n-1,n-1}^{(n-2)}, a_{n,n-1}^{(n-2)})^T \neq 0$,存在有限个Givens矩阵的乘积，记作T_{n-1}，使得

$$T_{n-1} b^{(n-1)} = \left| b^{(n-1)} \right| e_1 \quad (e_1 \in R^2)$$

令 $a_{n-1,n-1}^{(n-1)} = \left| b^{(n-1)} \right|$,则有

$$T_{n-1} A^{(n-2)} = \begin{pmatrix} a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

最后，令 $T=\begin{pmatrix} I_{n-2} & O \\ O & T_{n-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & T_2 \end{pmatrix} T_1$

则***T*** 是有限个**Givens**矩阵的乘积，使得

$$TA=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}=R$$

所以 ***A=QR***，其中***Q***=$T^{-1}=T^{T}$

证毕

例4.7 用初等旋转变换求矩阵的QR分解.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解　第1步：对A的第1列构造 T_1，使 $b^{(1)}=(0,1,1)^T$

$$T_1 b^{(1)}=\left|b^{(1)}\right| e_1.$$

$$T_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad T_{12}b^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$T_{13}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad T_{13}(T_{12}b^{(1)})=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$T_1=T_{13}T_{12}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-1&0&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

第2步：对 $A^{(1)}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 的第1列

$b^{(2)}=(-1,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$ 构造 T_2，使 $T_2 b^{(2)}=\left|b^{(2)}\right|e_1.$

$$T_{12}=\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix},\quad T_{12}b^{(2)}=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2=T_{12},\quad T_2 A^{(1)}=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

最后，令

$$T=\begin{pmatrix}1 & \\ & T_2\end{pmatrix}T_1=\begin{pmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

则有

$$Q=T^T=\begin{pmatrix}0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3}\end{pmatrix} \qquad R=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ & 3/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\\ & & -2/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

A=QR

复矩阵情况：

作复初等旋转矩阵

$$
U_{ik} = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & ce^{i\theta_1} & & & & se^{i\theta_2} & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & -se^{i\theta_3} & & & & ce^{i\theta_4} & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

其中 $c=\cos\theta>0, s=\sin\theta>0, \theta$为旋转角，

$\theta_1+\theta_4=\theta_2+\theta_3$， U_{ik} 的行列式等于 $e^{i(\theta_1+\theta_4)}$,

只有当$\theta_4=-\theta_1+2n\pi$ 时，它才等于1，此时

$\theta_3=-\theta_2+2n\pi$,其中n为整数. **取*n*=0，如果给定两个不同时为零的复数*a,b*,则总可以选取** c, s, θ_1, θ_2 ,**使得**

$$ace^{i\theta_1}+bse^{i\theta_2}>0, -ase^{-i\theta_2}+bce^{-i\theta_1}=0$$

只需选取 $$c=\frac{|a|}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}}, s=\frac{|b|}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}},$$

$$\theta_1=-\arg a,\ \theta_2=-\arg b$$

例4.8 用**Householder**变换求矩阵的$\boldsymbol{QR}$分解.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 14 & 9 \\ 6 & 43 & 3 \\ 6 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

解：对 A 的第1列，构造**Householder矩阵**

$$b^{(1)}=\begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix},\ b^{(1)}-\left|b^{(1)}\right|e_1=6\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\ u=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$H_1=I-2uu^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$$

$$H_1A=\begin{pmatrix}9&48&15\\0&9&-3\\0&-12&9\end{pmatrix}$$

对$A^{(1)}$的第1列，构造Householder矩阵

$$b^{(2)}=\begin{pmatrix}9\\-12\end{pmatrix},\ b^{(2)}-\left|b^{(2)}\right|e_1=6\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix},u=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$H_2=I-2uu^T=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-4\\-4&-3\end{pmatrix},H_2A^{(1)}=\begin{pmatrix}15&-9\\0&-3\end{pmatrix}$$

最后，令

$$S=\begin{pmatrix}1&\\&H_2\end{pmatrix}H_1=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}5&10&10\\-2&11&-10\\-14&2&5\end{pmatrix}$$

则有

$$Q = S^T = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 10 & 11 & 2 \\ 10 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 9 & 48 & 15 \\ & 15 & -9 \\ & & -3 \end{pmatrix},\ A = QR.$$

4.3 矩阵的满秩分解

定义4.8 设 $A \in C_r^{m\times n}(r>0)$， 如果存在矩阵 $F \in C_r^{m\times r}$ 和 $G \in C_r^{r\times n}$， 使得 $A=FG$, 则称为矩阵A 的满秩分解.

定理4.13 设 $A \in C_r^{m\times n}(r>0)$， 则$A$ 有满秩分解.

证 $\quad A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B(\text{阶梯形}) = \begin{pmatrix} G \\ O \end{pmatrix}, \quad G \in C_r^{r\times n}$

即 存在可逆矩阵P，使得 $PA=B$ 或 $A=P^{-1}B$ 将 P^{-1}

分块为 $\quad P^{-1}=(F \vdots S),\ F \in C_r^{m\times r},\ S \in C_{n-r}^{m\times(n-r)}$

则有

$$A = P^{-1}B = (F \vdots S)\begin{pmatrix} G \\ O \end{pmatrix} = FG$$

证毕

由于$A = FG = (FD)(D^{-1}G) = \tilde{F}\tilde{G}$，所以满秩分解不唯一.

定义4.9 设 $B \in C_r^{m\times n}(r>0)$, 且满足：

(1) B 的前r 行中每一行至少含一个非零元素是1，而后$m-r$行元素均为零；

(2) 若B 中第i 行的第一个非零元素1 在第 $j_i(i=1,2,\cdots,r)$ 列，则 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$;

(3) B中的 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列为单位矩阵I_m的前r 列.

那么就称B 为Hermite标准形（即行最简形）.

定义4.10 以n阶单位矩阵$\boldsymbol{I}_n$的n个列向量$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$为列构成的$n$阶矩阵

$$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{e}_{j_1},\boldsymbol{e}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{j_n}\right)$$

称为**置换矩阵**，其中$j_1,j_2,\cdots,j_n$是$1,2,\cdots,n$的一个排列.

例如，矩阵

$$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\right)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

定理4.14 设 $\boldsymbol{A}\in C_r^{m\times n}(r>0)$ 的**Hermite** 标准形为$\boldsymbol{B}$，那么，在$\boldsymbol{A}$的满秩分解中，可取$\boldsymbol{F}$为$\boldsymbol{A}$ 的 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列构成的$m\times r$ 矩阵，$\boldsymbol{G}$为$\boldsymbol{B}$的前$\boldsymbol{r}$ 行构成的 $r\times n$ 矩阵.

证 因为 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\boldsymbol{B}(Hermite\text{形})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}\\ O\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{G}\in \mathrm{C}_r^{r\times n}$

取 $\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{e}_{j_1},\boldsymbol{e}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{j_r}\right)$，则 $\boldsymbol{GP}=\boldsymbol{I}_r$

因为 $\boldsymbol{A=FG}$，所以$\boldsymbol{F=AP}$.

证毕

例4.11 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2i & i & 0 \end{pmatrix}$ 的满秩分解.

解 因为$\boldsymbol{A} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

例4.12 设 A_1与A_2 都是 $m\times n$ 矩阵，证明

$$\mathrm{rank}(A_1+A_2)\le \mathrm{rank}A_1+\mathrm{rank}A_2$$

证 如果 $A_1=O$或$A_2=O$, 则结论成立.

如果$A_1\neq O$且$A_2\neq O$，设 A_1与A_2的满秩分解分别为

$$A_1=F_1G_1,\ A_2=F_2G_2$$

则有 $$A_1+A_2=F_1G_1+F_2G_2=(F_1\vdots F_2)\begin{pmatrix}G_1\\G_2\end{pmatrix}$$

从而有 $$\mathrm{rank}(A_1+A_2)\le \mathrm{rank}(F_1\vdots F_2)$$

$$\le rankF_1+rankF_2=\mathrm{rank}A_1+\mathrm{rank}A_2$$

例4.13 设$\boldsymbol{A} \in C_r^{m\times n}(r>0)$，则必有分解$\boldsymbol{A=QR}$，其中$\boldsymbol{Q}$是$m\times r$矩阵，$\boldsymbol{Q}^H\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$，而$\boldsymbol{R}$是$r\times n$矩阵，它的$\boldsymbol{r}$个行线性无关.

证 将$\boldsymbol{A}$进行满秩分解$\boldsymbol{A=FG}$又$\boldsymbol{F=QR}_1$ 其中$\boldsymbol{R}_1$是 $\boldsymbol{r}$阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{Q}$为$m\times r$矩阵，且$\boldsymbol{Q^HQ=I}$，于是$\boldsymbol{A=QR}_1\boldsymbol{G=QR}$

其中 $\boldsymbol{R=R}_1\boldsymbol{G}$, 它的$\boldsymbol{r}$个行线性无关.

4.4 矩阵的奇异值分解

预备：

（1） 设 $\boldsymbol{A}\in C_r^{m\times n}(r>0)$，则 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 是**Hermite**矩阵，且其特征值是非负实数；

（2） $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A} \quad \mathrm{rank}\boldsymbol{A}$

（3）设 $\boldsymbol{A}\in C^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

定义4.11 设 $\boldsymbol{A}\in C_r^{m\times n}(r>0)$, $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_r>\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$$

则称 $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为$\boldsymbol{A}$的奇异值.

定理4.16 设 $A \in C_r^{m\times n}(r>0)$, 则存在$m$阶酉矩阵$U$ 和n阶酉矩阵V，使得

$$U^H AV = \begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$ 而$\sigma_i (i = 1,2,\cdots,r)$为$A$ 的全部非零奇异值.

证 设 $A^H A$ 的特征值为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

所以存在n阶酉矩阵V，使得

$$V^H (A^H A) V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma^2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

将V分块为$V=(V_1 \vdots V_2)$, $V_1 \in C_r^{n\times r}, V_2 \in C_{n-r}^{n\times(n-r)}$

得 $$V_1^H(A^HA)V_1=\Sigma^2, V_2^H(A^HA)V_2=O$$

取 $U_1^H=\Sigma^{-1}V_1^HA_1^H$, 则 $U_1=A_1V_1\Sigma^{-1}$

取 U_2满足 $U_1^HU_2=O$, $U_2^HU_2=I_{(n-r)\times(n-r)}$

设 $U=(U_1 \vdots U_2)$，则

$$U^HAV=\begin{pmatrix} U_1^HAV_1 & U_1^HAV_2 \\ U_2^HAV_1 & U_2^HAV_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

且 $U^HU=I$

证毕

例4.14 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 的奇异值分解

解 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的特征值是

$\lambda_1=3,\lambda_2=1,\lambda_3=0,$ 对应的特征向量依次为

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

所以 rank$\boldsymbol{A}$=2， $\Sigma=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&\\&1\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_1 \vdots \boldsymbol{U}_2)=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则A的奇异值分解为

$$A = U\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}V^T$$

例4.15 设矩阵A的奇异值分解，证明：U的列向量是AA^H的特征向量，V的列向量是A^HA的特征向量.

证 因为

$$AA^H = U\begin{pmatrix} \Sigma^2 & O \\ O & O \end{pmatrix}U^H$$

所以 $$AA^H U = U diag(\lambda_1 \cdots \lambda_r, 0, \cdots, 0)$$

记$U = (u_1, u_2, \cdots, u_m)$，则有 $AA^H u_i = \lambda_i u_i (i = 1, 2, \cdots, m)$

所以U的列向量是 AA^H 的特征向量.

同理V的列向量是 A^HA 的特征向量.

例4.15 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 非奇异，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n)$

其中 $\sigma_i > 0 (i = 1, 2, \cdots n)$

证 因为$\boldsymbol{A}$为非奇异矩阵，所以$\boldsymbol{A}$的奇异值都大于零，设 $\sigma_i > 0 (i = 1, 2, \cdots n)$ 是$\boldsymbol{A}$的奇异值，因为 $\boldsymbol{A} \in R^{n\times n}$，所以存在正交矩阵$\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{Q}$使得

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$$

此式称为$\boldsymbol{A}$的正交对角分解.

定理4.17 在奇异值分解中，设U和V的列向量分别为 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m$和 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$，则有

$$N(\boldsymbol{A}) = L(\boldsymbol{v}_{r+1},\boldsymbol{v}_{r+2},\cdots,\boldsymbol{v}_n)$$

$$R(\boldsymbol{A}) = L(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_r)$$

$$\boldsymbol{A} = \sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^H + \sigma_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^H + \cdots + \sigma_r\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r^H$$

证 因为 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2)\begin{pmatrix}\Sigma & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_1^H\\ \boldsymbol{V}_2^H\end{pmatrix} = \boldsymbol{U}_1\Sigma\boldsymbol{V}_1^H$

所以

$$N(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}\} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}_1^H\boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}\} = \{x \mid V_1^H x = O\}$$

$$= \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} + k_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n, k_i \in C\}$$

$$= L(\boldsymbol{v}_{r+1},\boldsymbol{v}_{r+2},\cdots,\boldsymbol{v}_n)$$

$$R(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}\} = \{\boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{\Sigma V}_1^H \boldsymbol{x})\} \subset R(\boldsymbol{U}_1)$$

$$R(\boldsymbol{U}_1) = \{\boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{z}\} = \{\boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z})\} \subset R(\boldsymbol{A})$$

故 $$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{U}_1) = L(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r)$$

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r)\begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1^H \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_r^H \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_1 u_1 v_1^H + \sigma_2 u_2 v_2^H + \cdots + \sigma_r u_r v_r^H$$

证毕

二. 矩阵正交相抵的概念

定义4.12 设 $A,B\in R^{m\times n}$,如果存在m阶正交矩阵U和n阶正交矩阵V，使 $B=U^{-1}AV$, 则称A 与B 正交相抵.

定理4.18 正交相抵矩阵有相同的奇异值.

证 设 $B=U^{-1}AV$, 因为 $B^HB=V^HA^HAV$,

所以, A^HA与B^HB 有相同的特征值,

因而, A 与B有相同的奇异值. 证毕

第四章 总结

一. 三角分解（*LU*分解，*LDU*分解，Crout分解，Doolittle分解, Cholesky分解）

1. 定义

2. 性质（存在性，唯一性）

A的LU分解存在 $\Leftrightarrow \Delta_k \neq 0$ $(k=1,\ldots,n-1)$

A的LDU分解，Crout分解，Doolittle分解, Cholesky分解唯一.

3. 算法

二. 矩阵的 *QR* 分解

1. 定义
2. 性质（存在性，唯一性）
3. 算法（Sthmidt正交化，Givens，Householder）

三. 满秩分解

1. 定义
2. 性质（存在，不唯一）
3. 算法

四. 奇异值分解

1. 定义
2. 性质（存在，不唯一）
3. 算法