第十一讲：线性模型预测控制

最优控制的智能方法之一

张杰

人工智能学院
中国科学院大学

复杂系统管理与控制国家重点实验室
中国科学院自动化研究所

2017 年 10 月 24 日

Table of Contents

Table of Contents

最优控制问题

问题 1 (最优控制问题)

1. 被控对象的状态方程为

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0.$$

2. 容许控制, $u \in \mathcal{U}, \quad x \in \mathcal{X}.$
3. 目标集, $x(t_f) \in \mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = [t_0, \infty) \times \{x(t_f) \in \mathbb{R}^n : m(x(t_f), t_f) = 0\}$$

4. 求分段连续的 u，以最小化性能指标

$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)\, \mathrm{d}t.$$

Pontryagin 极小值原理

定理 1 (庞特里亚金极小值原理)

上述问题得到最优控制 $u(t)$ 的必要条件为（TPBVP）

- *极值条件：对任意容许控制 $u'(t)$*

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) \leq \mathcal{H}(x(t), u'(t), p(t), t).$$

- *规范方程：*

$$\text{状态 (state) 方程:} \quad \dot{x}(t) = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x(t), u(t), p(t), t),$$

$$\text{协态 (costate) 方程:} \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x(t), u(t), p(t), t).$$

- *边界条件 (用于处理目标集)：*

$$[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f), t_f) - p(t_f)] \cdot \delta x_f$$

$$+ [\mathcal{H}(x(t_f), u(t_f), p(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(t_f), t_f)]\delta t_f = 0.$$

随堂考试：庞特里亚金极小值原理

问题 2 (本题 50 分)

状态方程 $\dot{x}(t) = x(t) - u(t), x(0) = 2$。$1 \leq u(t) \leq 2, t \in [0, 1]$。终端时刻 $t_f = 1$，终端状态自由。性能指标为

$$J(u) = \int_0^1 [x(t) + u(t)]dt. \tag{1}$$

求解最优控制。提示：使用庞特里亚金极小值原理，依次分析：

- 极值条件，最优控制与状态、协态有何关系
- 状态方程、协态方程与边界条件
- 求最优控制。解析或近似求解，例如 $\Delta t = 1/3$，误差在 $1/3$ 之内即可

1/3 构造哈密尔顿函数，分析极值条件

Hamiltonian 为

$$\mathcal{H}(x(t),u(t),p(t),t)=x(t)+u(t)+p(t)(x(t)-u(t)) \tag{2}$$

由最优性条件有

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname*{argmin}_{|u(t)|\le M_1} \mathcal{H}(x(t),u(t),p(t),t) \\ &= \begin{cases} 2, & 1-p(t)<0(p(t)>1), \\ 1, & 1-p(t)>0(p(t)<1). \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

2/3 状态方程、协态方程、边界条件

状态方程和协态方程

$$\dot{x}(t) = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = x(t) - u(t) \tag{4}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -1 - p(t) \tag{5}$$

边界条件

$$x(0) = 2 \tag{6}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f), t_f) - p(t_f) = 0 \quad \Rightarrow \quad -p(1) = 0 \tag{7}$$

3/3 方法一：解得最优控制

由方程 [5,7] 可得

$$p(t) = e^{1-t} - 1. \tag{8}$$

于是

$$u(t) = \begin{cases} 2, & 1 - p < 0 (p > 1), \\ 1, & 1 - p > 0 (p < 1). \end{cases} \tag{9}$$

$$= \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 1 - \ln 2 \approx 0.307, \\ 1, & 1 - \ln 2 \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{10}$$

3/3 方法二：数值解得最优控制

$$p(t-\Delta t)=p(t)-\Delta t(-1-p(t))=p(t)[1+\Delta t]+\Delta t$$

$$\begin{aligned}
p(1)&=0\\
p(\frac{2}{3})&=p(1)[1+\frac{1}{3}]+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\\
p(\frac{1}{3})&=p(\frac{2}{3})[1+\frac{1}{3}]+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}\\
p(0)&=p(\frac{1}{3})[1+\frac{1}{3}]+\frac{1}{3}=\frac{37}{27}
\end{aligned}$$

$$u(t)=\begin{cases}2, & 0\le t\le 1/3,\\ 1, & 1/3\le t\le 1.\end{cases}$$

Bellman 方程

定理 2 (Bellman 方程)

x_0 为初值 k_0 为初始时刻，最优控制下的性能指标记为“值函数”

$$V(x_0, k_0) = \min_{u \in U} J(u; x_0, k_0) \tag{11}$$

根据最优性原理，最优控制满足下列 Bellman 方程：

$$V(x(N), N) = h_D(x(N), N). \tag{12}$$

$$V(x(k), k) = \min_{u(k) \in U} \{g_D(x(k), u(k), k) + V(x(k+1), k+1)\}, \quad k = N-1, \ldots, 0. \tag{13}$$

随堂考试：动态规划

问题 3 (本题 50 分)

(本题请勿直接使用 LQR 结论) 状态方程

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{14}$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + u \tag{15}$$

$t_0 = 0, t_f = 10$，初始状态 $(1, 1)$。最小化性能指标

$$J(u) = 2x_2^2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [\frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{3}{2}u^2(t)]dt \tag{16}$$

- 等分区间 $N = 10$，将上述最优控制问题转化为离散形式
- 以 $N = 10$，求 $k = 8$ 时刻的最优控制，即 $u(x(8), 8)$
- 取 $N = 20$，将上述最优控制问题转化为离散形式

1/3 离散化

$$J=\frac{1}{2}x(10)^T Hx(10)+\sum_{k=0}^{9}\{\frac{1}{2}x^T(k)Qx(k)+\frac{1}{2}ru^2(k)\} \quad (17)$$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(k) \quad (18)$$

$$t_f=10,\ N=10,\Delta t=t_f/N=1$$
$$q=1,r=3,h=4$$
$$A=\begin{bmatrix}1 & \Delta t\\ 0 & 1+\Delta t\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ \Delta t\end{bmatrix}$$
$$Q=\begin{bmatrix}q & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ R=r,\ H=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & h\end{bmatrix}$$

2/3 倒推

$k = N = 10$

$$V(x,k) = 2x_2^2 \tag{19}$$

$k = 9$

$$\begin{aligned} V(x,k) &= \min_u \{0.5 * x_1^2(9) + 1.5 * u^2(9) + 2x_2^2(10)\} \\ &= \frac{1}{2}x_1^2(9) + \frac{24}{7}x_2^2(9) \end{aligned} \tag{20}$$

$$u(9) = -\frac{8}{7}x_2(9) \tag{21}$$

$k = 8$

$$V(x,k) = \min_u \{0.5 * x_1^2(8) + 1.5 * u^2(8) + \frac{1}{2}x_1^2(9) + \frac{24}{7}x_2^2(9)\} \tag{22}$$

$$u(8) = -\frac{32}{23}x_2(8) \tag{23}$$

N=20

$N = 20,\ \Delta t = 1/2$

$$J = \frac{1}{2}x(20)^T H x(20) + \sum_{k=0}^{19}\{\frac{1}{2}x^T(k)Qx(k) + \frac{1}{2}ru^2(k)\}\Delta t \tag{24}$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k) \tag{25}$$

Hamilton-Jacobi-Bellman 方程

定理 3 (Hamilton-Jacobi-Bellman 方程)

若最优控制问题有解，值函数是以 t_0 为初始时刻，x_0 为初始状态，在最优控制下的性能指标：

$$V(x_0, t_0) = \min_u J(u; x_0, t_0). \tag{26}$$

若值函数二阶连续可微，则如下 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程（简称 HJB 方程）是最优控制的充分必要条件：

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) = \min_{u(t)\in\mathbb{R}^m} \mathcal{H}\left(x(t), u(t), \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t), t\right), \tag{27}$$

$$V(x(t_f), t_f) = h(x(t_f), t_f)(\text{终端代价}) . \tag{28}$$

微分博弈平衡求解的过程和缺陷

Remark 1 (博弈求解的过程)

- 固定对方策略，求解己方最优策略
- 固定己方策略，求解对方最优策略
- 联立方程组求解博弈平衡

微分博弈旨给出的是一种“按照最坏情况打算”的控制律，仅在“想象”对方符合理性人假定属实的情况下达到最优

课程内容

- 最优控制的数学理论
  - 经典变分法
  - 庞特里亚金极值原理
  - 动态规划方法
  - 微分博弈
- 最优控制的智能方法
  - 模型预测控制
  - 强化学习与自适应动态规划
  - 模糊控制
  - 平行控制与平行学习

Table of Contents

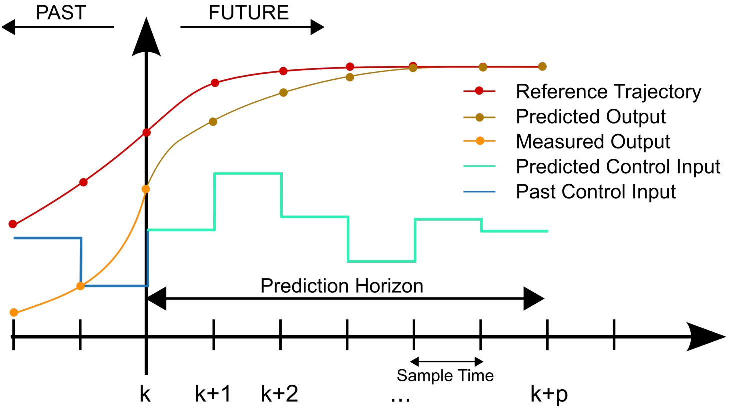
模型预测控制

Remark 2

模型预测控制是一系列控制方法的统称。都具有如下特征:

1. 预测模型
   利用预测模型预测系统在一定控制作用下未来的动态行为。应确保能快速求解
2. 滚动优化
   对预测模型求解一段时间内的开环最优控制，并实施当前时刻的控制变量；下一采样时刻，重新获取状态作为新的初值，滚动时间窗口重复上述最优控制求解
3. 反馈矫正
   在求解滚动优化前，系统首先利用反馈信息矫正预测模型

模型预测控制


PAST
FUTURE
Reference Trajectory
Predicted Output
Measured Output
Predicted Control Input
Past Control Input
Prediction Horizon
Sample Time
k
k+1
k+2
...
k+p

模型预测控制

Remark 3 (好的模型)

- 精确：以更好的预测状态变化趋势
- 简单：以尽快的计算开环最优控制

Make everything as simple as possible, but not simpler.
– Albert Einstein

一例最简单的连续时间模型预测控制

例 1 (一例最简单的连续时间模型预测控制)

1. 预测模型
   $[t_k, t_k + T]$ 上，以 $x(t_k)$ 为初值的定常线性二次型控制
2. 滚动优化
   $[t_k, t_k + T]$ 时段可求得 开环最优控制

$$u(\tau) = \phi(x(t_k), \tau; t_k, T), \tau \in [t_k, t_k + T) \tag{29}$$

   但仅实施 $[t_k, t_{k+1}]$ 部分
3. 反馈矫正
   求解下个滚动优化前，更新预测模型的初值 $x(t_{k+1})$

开环控制与闭环控制

定义 1 (开环控制)

若控制变量形如：

$$u(t) = \phi(x(t_0), t), \tag{30}$$

则称其为开环控制

定义 2 (闭环控制)

若控制变量形如：

$$u(t) = \phi(x(t), t), \tag{31}$$

则称其为闭环控制

一例最简单的模型预测控制

在 $[t_k, t_{k+1}]$，控制仅依赖于上次（t_k 时刻）反馈矫正的初值 $x(t_k)$

$$u(\tau) = \phi(x(t_k), \tau; t_k, T), \tau \in [t_k, t_k + T)$$

当 $|t_{k+1} - t_k| \to 0$ 时，$x(\tau) \approx x(t_k)$，在 u 关于初值连续的点

$$u(\tau) = \phi(x(t_k), \tau; t_k, T) \approx \phi(x(\tau), \tau; t_k, T) \tag{32}$$

模型预测控制近似得到了闭环形式的控制

Remark 4

可见，模型预测控制与最优控制最大区别在于模型更新

- 状态方程（包含动态系统和初值）
- 性能指标（包含代价函数和时域）

一个例子

例 2

$$J(u) = \sum_{k=0}^{\infty}[x^2(k) + u^2(k)].$$

$$x(k+1) = x(k) + u(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- 若存在最优控制能最小化 $J(u)$，则 $J(u)$ 必有限
- 令 $N \to \infty$，有 $x(k) \to 0, u(k) \to 0$

虽然没有设定明确的控制目标，状态却收敛于 0（渐进稳定）

连续形式预测模型

给定初值 $x(t_k)$ 从 t_k 时刻到 t_k+T 时刻预测模型

$$\dot{x}(t;t_k) = f(x(t;t_k), u(t;t_k)),\ t \in [t_k, t_k+T] \tag{33}$$

$$x(t_k;t_k) = x(t_k). \tag{34}$$

本时段内性能指标

$$J(u;t_k) = h(x(t_k+T), t_k+T) + \int_{t_k}^{t_k+T} g(x(t;t_k), u(t;t_k), t)dt. \tag{35}$$

实施的控制为

$$u(t;t_k), t \in [t_k, t_{k+1}] \tag{36}$$

离散形式预测模型

给定初值 $x(k)$ 从第 k 时间节点到 $k+N$ 时间节点预测模型

$$x(k;k) = x(k) \tag{37}$$

$$x(i+1;k) = f_D(x(i;k), u(i;k)),\ i = k, k+1, \ldots, N-1 \tag{38}$$

在这 N 个时段内性能指标

$$\min J(u;k) = h_D(x(k+N;k), k+N) + \sum_{i=k}^{k+N-1} g_D(x(i;k), u(i;k), i) \tag{39}$$

实施的控制为

$$u(k;k) \tag{40}$$

Table of Contents

线性预测控制

问题 4 (线性预测控制)

线性状态方程

$$x(k;k) = x(k) \tag{41}$$

$$x(i+1;k) = Ax(i;k) + Bu(i;k),\ i = k, k+1, \ldots, N-1 \tag{42}$$

预测时段 N，已经设计了二次性能指标

$$J(u;k) = \frac{1}{2}x^T(k+N;k)Hx(k+N;k) + \frac{1}{2}\sum_{i=k}^{k+N-1}[x^T(i;k)Qx(i;k) + u^T(i;k)Ru(i;k)]. \tag{43}$$

线性预测控制求解 1/6

$$x(k;k) = x(k) \tag{44}$$

$$x(i+1;k) = Ax(i;k) + Bu(i;k),\ i = k, k+1, \ldots, N-1 \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
x(k+1;k) &= Ax(k;k) + Bu(k;k) \\
&= Ax(k) + Bu(k;k) \\
x(k+2;k) &= Ax(k+1;k) + Bu(k+1;k) \\
&= A^2x(k) + ABu(k;k) + Bu(k+1;k) \\
x(k+3;k) &= Ax(k+2;k) + Bu(k+2;k) \\
&= A^3x(k) + A^2Bu(k;k) + ABu(k+1;k) + Bu(k+2;k)
\end{aligned}$$

$$x(k+i;k) = A^ix(k) + \mathcal{B}_i(u(k;k), \ldots, u(k+i-1;k))^T \tag{46}$$

线性预测控制求解 2/6

记

$$X(k) := \begin{bmatrix} x(k+1;k) \\ \vdots \\ x(k+N;k) \end{bmatrix}, \ U(k) := \begin{bmatrix} u(k;k) \\ \vdots \\ u(k+N-1;k) \end{bmatrix} \tag{47}$$

$$X(k) = \mathcal{B}U(k) + \mathcal{C}x(k) \tag{48}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix}, \ \mathcal{C} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \dots \\ A^N \end{bmatrix} \tag{49}$$

线性预测控制求解 3/6

$$J(u;k) = \frac{1}{2}x^T(k+N;k)Hx(k+N;k) + \frac{1}{2}\sum_{i=k}^{k+N-1}[x^T(i;k)Q_k x(i;k) + u^T(i;k)R_k u(i;k)]$$

$$\begin{aligned}
2J(u;k) = {} & x^T(k;k)Qx(k;k) \\
& +x^T(k+1;k)Qx(k+1;k) \quad +u^T(k;k)Ru(k;k) \\
& +x^T(k+2;k)Qx(k+2;k) \quad +u^T(k+1;k)Ru(k+1;k) \\
& \quad \ldots \\
& +x^T(k+N;k)Hx(k+N;k) \quad +u^T(k+N-1;k)Ru(k+N-1;k)
\end{aligned}$$

线性预测控制求解 4/6

$$2J(u;k) = X^T(k)\mathcal{Q}X(k) + U^T(k)\mathcal{R}U(k) + x^T(k;k)Qx(k;k) \quad (50)$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q & & \\ & \ddots & \\ & & H \end{bmatrix}, \mathcal{R} = \begin{bmatrix} R & & \\ & \ddots & \\ & & R \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$X(k) = \mathcal{B}U(k) + \mathcal{C}x(k)$$

线性预测控制求解 5/6

$$
\begin{aligned}
2J(u;k) &= [\mathcal{B}U(k) + \mathcal{C}x(k)]^T \mathcal{Q}[\mathcal{B}U(k) + \mathcal{C}x(k)] \\
&\quad + U^T(k)\mathcal{R}U(k) + x^T(k;k)Qx(k;k) \qquad (52) \\
&= U^T(k)\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}U(k) + U^T(k)\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{C}x(k) \\
&\quad + x^T(k)\mathcal{C}^T\mathcal{Q}\mathcal{B}U(k) + x^T(k)\mathcal{C}^T\mathcal{Q}\mathcal{C}x(k) \\
&\quad + U^T(k)\mathcal{R}U(k) + x^T(k;k)Qx(k;k) \qquad (53)
\end{aligned}
$$

$$
J(u;k) = \frac{1}{2}U^T(k)\widetilde{\mathcal{Q}}U(k) - U^T(k)\widetilde{\mathcal{B}}x(k) + \frac{1}{2}x^T(k)\widehat{\mathcal{Q}}x(k) \qquad (54)
$$

$$
\widetilde{\mathcal{Q}} = \mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{B} + \mathcal{R} \qquad (55)
$$

$$
\widetilde{\mathcal{B}} = -\mathcal{B}^T\mathcal{Q}\mathcal{C} \qquad (56)
$$

$$
\widehat{\mathcal{Q}} = \mathcal{C}^T\mathcal{Q}\mathcal{C} + Q \qquad (57)
$$

线性预测控制求解 6/6

对于无约束的预测控制问题，在每个时刻仅需求解最优化问题

$$J(u;k)=\frac{1}{2}U^T(k)\widetilde{\mathcal{Q}}U(k)-U^T(k)\widetilde{\mathcal{B}}x(k)+\frac{1}{2}x^T(k)\widehat{\mathcal{Q}}x(k)$$

于是

$$U(k)=\widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\widetilde{\mathcal{B}}x(k) \tag{58}$$

考虑预测控制的滚动时域

$$\boxed{u(k;k)=[I,0,\ldots,0]\widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\widetilde{\mathcal{B}}x(k) \qquad (59)}$$

例子：求解线性二次型预测控制

例 3 (求解线性二次型预测控制)

线性状态方程

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{60}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & 2 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0787 \end{bmatrix}, \tag{61}$$

$$H = Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, R = 0.01, N = 4 \tag{62}$$

求解线性二次型预测控制 1/7

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0787 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1574 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0748 & 0.0787 & 0 & 0 \\ 0.3227 & 0.1574 & 0 & 0 \\ 0.0710 & 0.0748 & 0.0787 & 0 \\ 0.4970 & 0.3227 & 0.1574 & 0 \\ 0.0675 & 0.0710 & 0.0748 & 0.0787 \end{bmatrix}$$

求解线性二次型预测控制 2/7

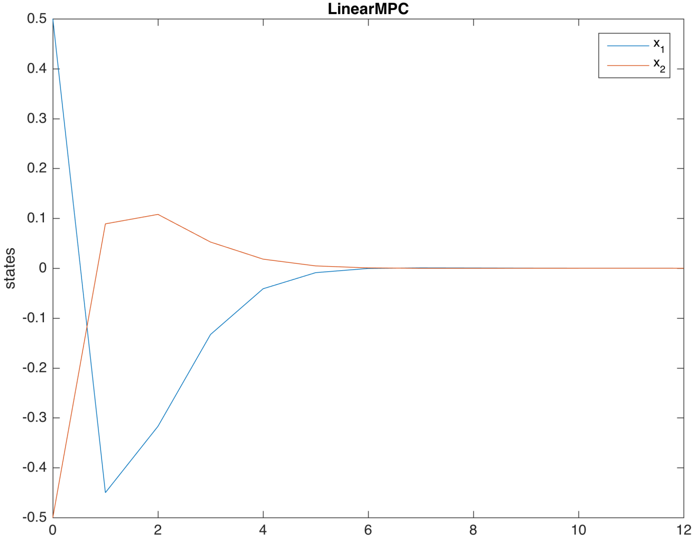
$$U(k) = \widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\widetilde{\mathcal{B}}x(k) \tag{63}$$

$$= \begin{bmatrix} -4.3563 & -18.6889 \\ 1.6383 & 1.2379 \\ 1.4141 & 2.9767 \\ 0.5935 & 1.8326 \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$u(k;k) = [I, 0, \ldots, 0]\widetilde{\mathcal{Q}}^{-1}\widetilde{\mathcal{B}}x(k) \tag{65}$$

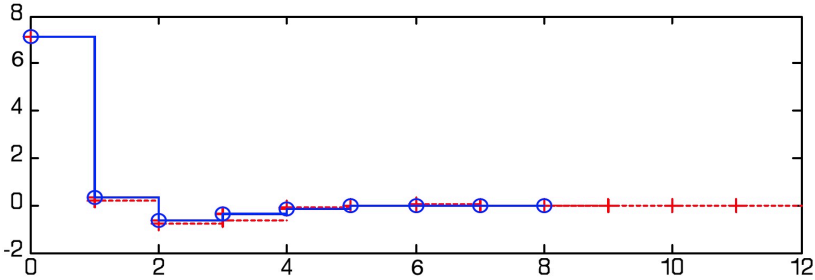
$$= [-4.3563, -18.6889]x(k) \tag{66}$$

求解线性二次型预测控制 3/7



求解线性二次型预测控制 4/7

Figure: $N = 4$ 预测控制与实施控制



求解线性二次型预测控制 5/7

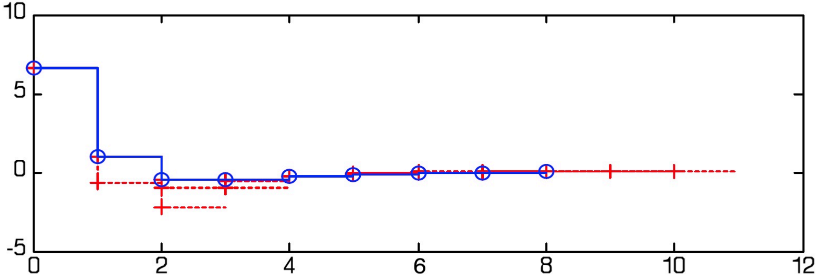
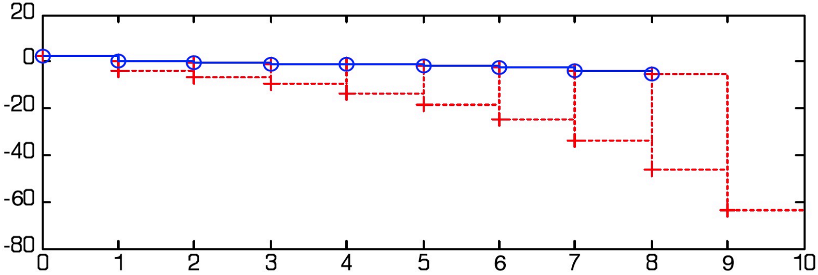


Figure: $N = 3$ 预测控制与实施控制

求解线性二次型预测控制 6/7

Figure: $N = 2$ 预测控制与实施控制



求解线性二次型预测控制 7/7

Remark 5 (一些观察和思考)

- 越小的 N 估计效果越差
- 越大的 N 问题规模越大
- 若模型不精确，N 过大还会引入误差

Table of Contents

MPC v.s. OC 1/2

Remark 6 (Mayne, 2000)

- 预测控制用有限时域代替最优控制的无限时域，本质上是标准的最优控制
- 不同在于：模型预测控制在线根据系统当前状态求解最优控制问题的开环解，而非离线确定一个对所有状态都能给出最优控制的反馈律

与动态规划不同，模型预测控制将计算量分散至各个时刻

MPC v.s. OC 2/2

Remark 7

对于无穷时域控制问题，因性能指标不同，模型预测控制一般来说不是最优控制，也并不保证稳定！

理论上，需要分析收敛性和稳定性

模型预测控制的补偿策略性能分析

- 终端零约束
  有限时域优化问题中，加入条件 $x(k+N;k)=0$ ，若 $x(k+i;k)=0$ ， $i=N,N+1,\ldots$ 则 MPC 可近似最优
- 终端代价函数
  若可精确得知最优控制问题的状态值函数，将其作为终端代价，则 MPC 可精确最优
- 终端集约束
  若在终端时刻将状态控制到 0 的小邻域，假定其后实施稳态的反馈最优控制，则 MPC 可近似最优

例子: 线性二次型预测控制（续）

例 4 (求解线性二次型预测控制)

线性状态方程

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{67}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & 2 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0787 \end{bmatrix}, \tag{68}$$

$$H = Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \; R = 0.01, N = \infty \text{ v.s. } N = 4? \tag{69}$$

若已知值函数

$$V(x) = x^T \bar{H} x$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 3.9153 & 4.8269 \\ 4.8269 & 13.8564 \end{bmatrix}$$

再解

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{70}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & 2 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0787 \end{bmatrix}, \tag{71}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \; R = 0.01, N = 4 \tag{72}$$

可得

$$u(k;k) = [-4.3608, -18.7401]x(k) \tag{73}$$

$$(u(k;k) = [-4.3563, -18.6889]x(k)) \tag{74}$$

线性模型预测控制小结

- 预测模型，滚动优化，反馈矫正（允许状态方程、初值、性能指标更新）
- 利用反馈矫正将开环控制化为闭环形式
- 可用有限时域的最优控制问题近似无穷时域
- 模型预测控制“想象”动态系统依预测模型运转（与微分博弈“相反”）
- 下节课：非线性、有约束的模型预测控制