第七讲：Pontryagin 极小值原理

最优控制的数学理论之三

张杰

人工智能学院
中国科学院大学

复杂系统管理与控制国家重点实验室
中国科学院自动化研究所

2017 年 10 月 10 日

Table of Contents

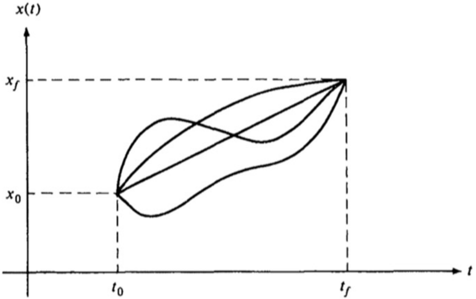
Table of Contents

Case 1: t_f fixed, $x(t_f)$ fixed.

问题 1 (Case 1: t_f fixed, $x(t_f)$ fixed.)

函数 $x(t)$ 初值 $x(t_0)=x_0$, 终值 $x(t_f)=x_f$, 终端时刻固定，求性能指标极值条件

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f} g(x(t),\dot{x}(t),t)dt.$$



使用经典变分法求泛函极值的基本过程

- 求泛函变分（根据定义求，或引理 1）
- 求解泛函极值条件（根据定理 1，“导数为零”）

“最简”最优控制问题

问题 2 (“最简”最优控制问题)

状态 $x(t):[t_0,t_f]\to\mathbb{R}$，控制 $u(t):[t_0,t_f]\to\mathbb{R}$，状态方程

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t),\ x(t_0)=x_0$$

固定终端时刻 t_f，固定终端状态 $x(t_f)=x_f$，求最优控制，最小化性能指标

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_f} g(x(t),u(t),t)dt.$$

“最简”最优控制问题的必要条件

$$\frac{\partial g}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{p} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} + p\frac{\partial f}{\partial u} = 0 \quad (2)$$

$$f - \dot{x} = 0 \quad (3)$$

再加上初值条件和终值条件

$$x(t_0) = x_0 \quad (4)$$

$$x(t_f) = x_f \quad (5)$$

$$\mathcal{H} = g + p \cdot f \Rightarrow \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}, \quad \dot{x} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}.$$

变分问题与最优控制问题：区别

	最简变分	停车例子	导弹例子	时间最短
状态方程	无/$\dot{x}=u$	$\dot{x}=f(x,u,t)$	$\dot{x}=f(x,u,t)$	$\dot{x}=f(x,u,t)$
目标	x_f,t_f fix	x_f,t_f fix	x_f free, t_f fix	$t_f$free
性能指标	$J(x)$	$J(u)$	$J(u)$	$J(u)$

Remark 1 (经典变分求最优控制所需)

- 需处理约束条件【使用拉格朗日乘子法】上节
- 需要处理不同的控制目标【边界条件】本节

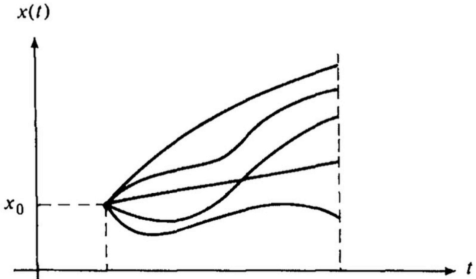
Case 2: t_f fixed, $x(t_f)$ free.

问题 3 (Case 2: t_f fixed, $x(t_f)$ free.)

函数 $x(t)$ 初值 $x(t_0)=x_0$, 终值 $x(t_f)$ 自由, 终端时刻固定，求性能指标极值条件

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f} g(x(t),\dot{x}(t),t)dt.$$

Case2=Case1+ 终端状态可变



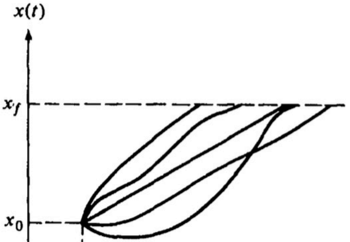
Case 3: t_f free, $x(t_f)$ fixed.

问题 4 (Case 3: t_f free, $x(t_f)$ fixed.)

函数 $x(t)$ 初值 $x(t_0) = x_0$, 终端状态 $x(t_f) = x_f$ 固定, 终端时刻 t_f 自由，求性能指标极值条件

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t)dt.$$

Case3=Case1+ 终端时刻可变【$\delta x_f \approx \delta x(t_f) + \dot{x}(t_f)\delta t_f$, $\delta x_f = 0$】



Case 4: t_f free, $x(t_f)$ free 且无关.

问题 5 (Case 4: t_f free, $x(t_f)$ free 且无关.)

函数 $x(t)$ 初值 $x(t_0) = x_0$, t_f free, $x(t_f)$ free 且二者无关. 求性能指标极值条件

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t)dt.$$

Case4=Case3+ 终端状态可变【$\delta x_f \approx \delta x(t_f) + \dot{x}(t_f)\delta t_f$】
Case4 的变分可得 Case1,2,3

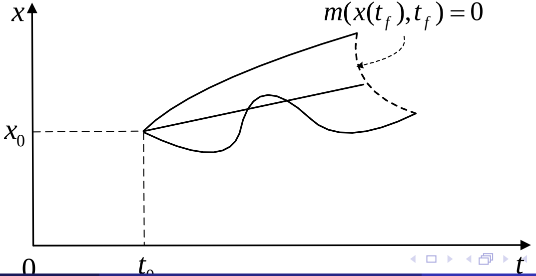
一般目标集：$m(x(t_f), t_f) = 0.$

问题 6 (一般目标集：$m(x(t_f), t_f) = 0.$)

$x(t)$ 初值 $x(t_0) = x_0$, $m(x(t_f), t_f) = 0$. 求性能指标极值条件

$$J(x) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t)dt.$$

一般情况 =Case4+ 拉格朗日乘子法。前四种均为其特殊情况



变分法求解最优控制问题

问题 7 (变分法求解最优控制问题)

$x(t):[t_0,t_f]\to\mathbb{R}^n$, $u(t):[t_0,t_f]\to\mathbb{R}^m$ 状态方程

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t),\ x(t_0)=x_0$$

最小化性能指标

$$J(u)=h(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}g(x(t),u(t),t)dt.$$

终止时刻 t_f 和终止状态 $x(t_f)$ 待定

最优控制问题 = 变分问题 + 拉格朗日乘子法处理状态方程

一阶条件

$$
\begin{aligned}
\delta \bar{J} = & \Big[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f), t_f) - p(t_f)\Big] \cdot \delta x_f \\
& + \Big[\frac{\partial h}{\partial t}(x(t_f), t_f) + \mathcal{H}(x(t_f), u(t_f), t_f)\Big]\delta t_f \\
& + \int_{t_0}^{t_f} \Big\{\Big[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x(t), u(t), t) + \dot{p}(t)\Big] \cdot \delta x(t) \\
& \qquad + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x(t), u(t), t) \cdot \delta u(t) \\
& \qquad + \Big[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)\Big] \cdot \delta p(t)\Big\} \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

变分法求解最优控制

$$\text{极值条件}: 0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x(t), u(t), t). \tag{6}$$

$$\text{状态方程}: \dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x(t), u(t), t). \tag{7}$$

$$\text{协态方程}: \dot{x}(t) = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x(t), u(t), t). \tag{8}$$

以及边界条件：

$$0 = \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f), t_f) - p(t_f)\right] \cdot \delta x_f. \tag{9}$$

$$0 = \left[\frac{\partial h}{\partial t}(x(t_f), t_f) + \mathcal{H}(x(t_f), u(t_f), t_f)\right] \delta t_f. \tag{10}$$

稳态 Hamiltonian

定理 1 (稳态 Hamiltonian)

Hamiltonian 不显式依赖于时间，则最优控制的 Hamiltonian 满足

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t)) = c_1, \ \forall t \in [t_0, t_f]. \tag{11}$$

其中 c_1 为常数

定理 2 (终端时刻自由，稳态 Hamiltonian)

t_f free, 且 Hamiltonian 和终端代价都不显式依赖于时间，则最优控制的 Hamiltonian 满足

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t)) = 0, \ \forall t \in [t_0, t_f]. \tag{12}$$

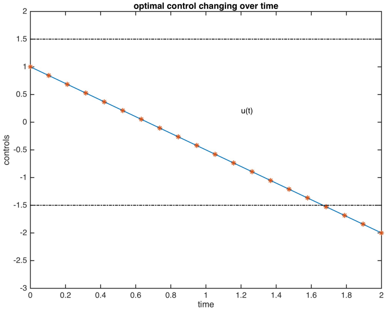
Table of Contents

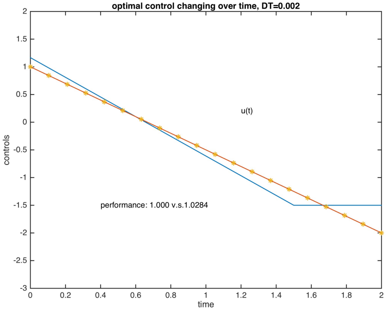
控制变量有不等式约束

例 (控制变量的不等式约束)

加速度受发动机性能限制

$$|u(t)| \leq M_1, \ \forall t \in [t_0, t_f].$$





控制变量不连续

例 (时间最短控制)

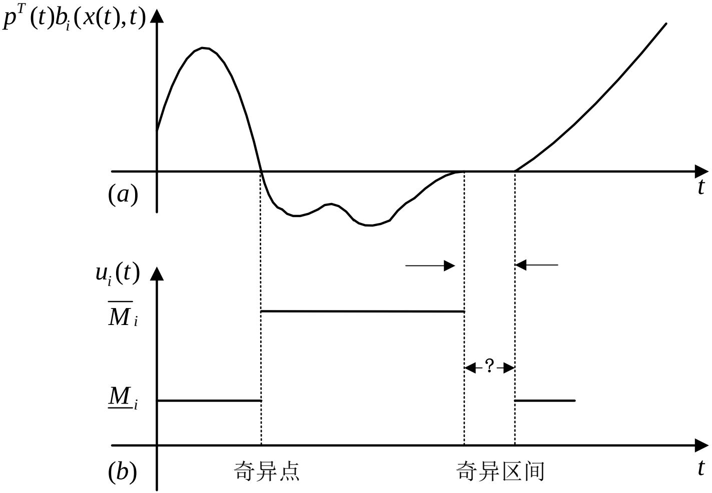
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t).$$

$$|u(t)| \leq M_2, \quad \forall t \in [t_0, t_f].$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \mathrm{d}t. \tag{13}$$

$$u(t) = -\operatorname{sign}[p_2(t)] M_2. \tag{14}$$

时间最短控制的 Bang-Bang 控制原理



回忆：拉格朗日的 δ 方法

- 函数 δx 为函数 x 的变分，对比 x 和扰动后的 $x+\delta x$ ，性能指标 $J(x)$ 因此得到增量为

$$\Delta J = J(x+\delta x) - J(x)$$

- 寻找在任取 δx 的情况下，最优解总能让这个增量

$$\Delta J = 0 \qquad \text{（驻点条件）}$$

或

$$\Delta J \geq 0 \qquad \text{（极小值条件）}$$

极小值原理的假定

- f, g, h 关于 $x(t)$ 和 t 有连续偏导，偏导和原函数都关于 $u(t)$ 连续
- Lipschitz 条件：对于状态空间和容许控制空间的有界子集 $\bar{X}$ 和 $\bar{U}$，存在常数 $\gamma_f > 0$, $\gamma_g > 0$, $\forall x(t), x^{'}(t) \in \bar{X}$, $\forall u(t) \in \bar{U}$

$$\|f(x^{'}(t), u(t), t) - f(x(t), u(t), t)\| \leq \gamma_f \|x^{'}(t) - x(t)\|$$
$$\|g(x^{'}(t), u(t), t) - g(x(t), u(t), t)\| \leq \gamma_g \|x^{'}(t) - x(t)\|$$

存在常数 $\rho_f > 0$, $\rho_g > 0$, $\forall u(t), u^{'}(t) \in \bar{U}$, $\forall x(t) \in \bar{X}$

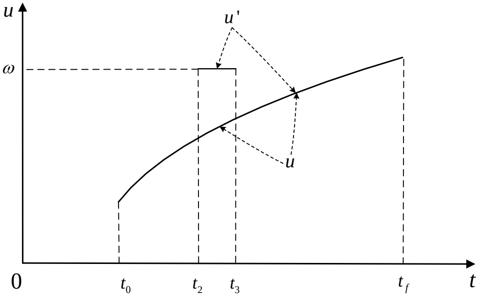
$$\|f(x(t), u^{'}(t), t) - f(x(t), u(t), t)\| \leq \rho_f \|u^{'}(t) - u(t)\|$$
$$\|g(x(t), u^{'}(t), t) - g(x(t), u(t), t)\| \leq \rho_g \|u^{'}(t) - u(t)\|$$

Pontryagin 极小值原理，PMP

PMP 是最优控制的奠基成果，引入 Hamilton 函数

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = g(x(t), u(t), t) + p(t) \cdot f(x(t), u(t), t), \quad (15)$$

区分了状态变量 $x(t)$ 和控制变量 $u(t)$。允许控制变量 分段连续（不连续），并使用 Pontryagin-McShane 变分



最优控制问题

问题 (最优控制问题)

1. *被控对象的状态方程为*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0.$$

2. *容许控制,* $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$.
3. *求分段连续的* u*, 以最小化性能指标*

$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)\,\mathrm{d}t.$$

上述问题并未明确规定目标集，我们允许终端时刻自由选取或固定于给定时刻，终端状态也可自由或固定

Pontryagin 极小值原理

定理 3 (庞特里亚金极小值原理)

上述问题得到最优控制 $u(t)$ 的必要条件为 (TPBVP)

- *极值条件：对任意容许控制 $u'(t)$*

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) \leq \mathcal{H}(x(t), u'(t), p(t), t).$$

- *规范方程：*

$$\text{状态 (state) 方程:} \quad \dot{x}(t) = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x(t), u(t), p(t), t),$$

$$\text{协态 (costate) 方程:} \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x(t), u(t), p(t), t).$$

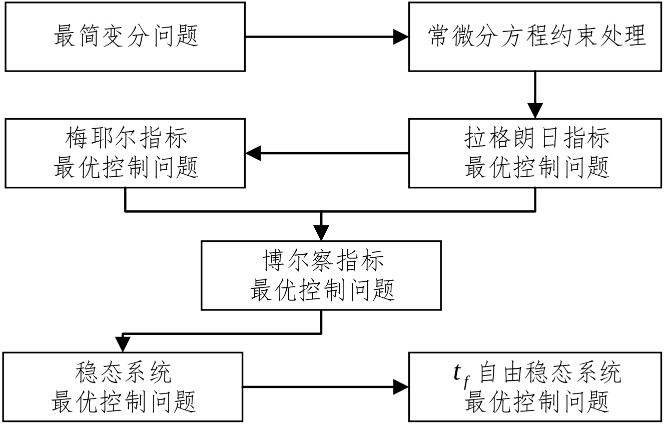
- *边界条件 (用于处理目标集):*

$$[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f), t_f) - p(t_f)] \cdot \delta x_f$$

$$+ [\mathcal{H}(x(t_f), u(t_f), p(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(t_f), t_f)]\delta t_f = 0.$$

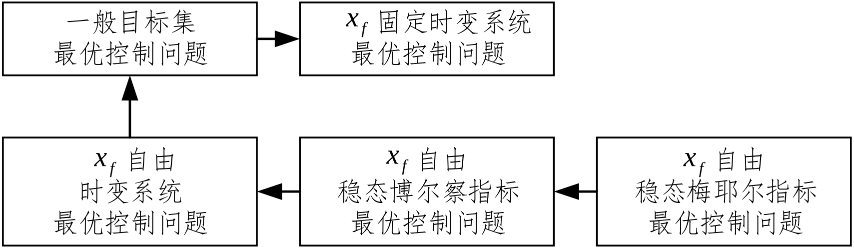
变分法研究最优控制的思路

【从 Lagrange 形式仅有运行代价，时变系统出发】



Pontryagin 极小值原理的证明思路

【从 Mayer 形式仅有终端代价，稳态系统出发】



稳态梅耶尔形式最优控制问题

问题 8 (稳态梅耶尔形式最优控制问题)

$x(t):[t_0,t_f]\to\mathbb{R}^n$ 分段连续可微，$u(t):[t_0,t_f]\to\mathbb{R}^m$ 分段连续。稳态系统

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t)),\ x(t_0)=x_0. \tag{16}$$

容许控制

$$u(t)\in U\subseteq\mathbb{R}^m.$$

终端时刻自由，终端状态自由。最小化 Mayer 形式性能指标

$$J(u)=h(x(t_f)). \tag{17}$$

稳态梅耶尔形式最优控制的极小值原理

定理 4 (稳态梅耶尔形式最优控制的极小值原理)

稳态梅耶尔形式最优控制问题的最优解 $u(t) \in U$ 满足必要条件：(1) 极值条件：$\forall u'(t) \in U$，在几乎任意时刻 $t \in [t_0, t_f]$，

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t)) \leq \mathcal{H}(x(t), u'(t), p(t)). \tag{18}$$

(2) Hamilton 方程组（状态方程、协态方程）以及 (3) 边界条件：

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) - p(t_f) = 0. \tag{19}$$

$$\mathcal{H}(x(t_f), u(t_f), p(t_f)) = 0. \tag{20}$$

(4) 此外，稳态 Hamiltonian 函数还需满足，$t \in [t_0, t_f]$，

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t)) = 0. \tag{21}$$

证明思路

注意哈密尔顿函数为

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t)) = p(t) \cdot f(x(t), u(t)). \tag{22}$$

往证，$p \cdot f = 0$，极值条件，协态方程和边界条件

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t))p(t), \quad p(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)).$$

Proof.

假定 $u(t)$ 为最优控制，t_f 为最优的终端时刻。施加扰动 $\delta u(t)$，δt_f，计算泛函增量，寻找 $\Delta J \geq 0$ 的必要条件。

$$\Delta J = J(u') - J(u) = h(x'(t_f')) - h(x(t_f)).$$

□

以下考察 $n = m = 1$ 情况，高维情况类似

1/7 计算泛函增量

计算泛函增量，并尽量用 δx 和 δt_f 表示

$$
\begin{aligned}
\Delta J &= \left[h(x'(t'_f)) - h(x(t'_f))\right] + \left[h(x(t'_f)) - h(x(t_f))\right] \\
&= \frac{\partial h}{\partial x}(x(t'_f))\left[x'(t'_f) - x(t'_f)\right] + o(\|\delta x(t'_f)\|) \\
&\quad + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))\dot{x}(t_f)[t'_f - t_f] + o(|\delta t|) \\
&= \frac{\partial h}{\partial x}(x(t'_f))\delta x(t'_f) \\
&\quad + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))f(x(t_f), u(t_f))\delta t_f + o(\|\delta x(t'_f)\|) + o(|\delta t_f|).
\end{aligned}
$$

上述 1,3 项都需继续化简。先利用 $\delta h/\delta x$ 连续的形式处理 1 项

2/7 继续化简泛函增量

$$
\begin{aligned}
\Delta J = & [\frac{\partial h}{\partial x}(x(t'_f)) - \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))]\delta x(t'_f) + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))\delta x(t'_f) \\
& + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))f(x(t_f), u(t_f))\delta t_f + o(\|\delta x(t'_f)\|) + o(|\delta t_f|) \\
= & \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))\delta x(t'_f)\delta t_f + \|\delta x(t'_f)\| o(|\delta t_f|) + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))\delta x(t'_f) \\
& + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))f(x(t_f), u(t_f))\delta t_f + o(\|\delta x(t'_f)\|) + o(|\delta t_f|) \\
= & \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))\delta x(t_f + \delta t_f) + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))f(x(t_f), u(t_f))\delta t_f \\
& + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))\delta x(t'_f)\delta t_f + \|\delta x(t'_f)\| o(|\delta t_f|) + o(\|\delta x(t'_f)\|) + o(|\delta t_f|).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

和变分中类似，将先假定 $\delta u = 0$，再假定 $\delta t_f = 0$

3/7 假定实施“最优控制”

若 $\delta u = 0$ 为最优控制，任意容许的终端时刻扰动 δt_f 都有 $\Delta J \geq 0$，即

$$\Delta J = \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))f(x(t_f), u(t_f))\delta t_f + o(|t_f|) \geq 0.$$

若

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))f(x(t_f), u(t_f)) > 0$$

则存在足够小的 $\pm\delta t_f$，使得上式或正或负，矛盾。同理，也不能小于零。

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))f(x(t_f), u(t_f)) = 0 \qquad (24)}$$

4/7 假定终端时刻最优

若 $\delta t_f = 0$，则对任意容许的 δu，增量应大于等于零

$$\begin{aligned}\Delta J = & \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))\delta x(t_f + \delta t_f) + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))f(x(t_f), u(t_f))\delta t_f \\ & + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))\delta x(t_f')\delta t_f + \|\delta x(t_f')\| o(|\delta t_f|) + o(\|\delta x(t_f')\|) + o(|\delta t_f|) \\ = & \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))\delta x(t_f) + o(\|\delta x(t_f)\|). \end{aligned} \tag{25}$$

处理后项，

$$\delta x(t_f) = \delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \delta \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} \delta \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}(t) = & f(x'(t), u'(t)) - f(x(t), u(t)) \\ = & f(x(t) + \delta x(t), u(t) + \delta u(t)) - f(x(t), u(t)) \\ = & \big[f(x(t) + \delta x(t), u(t) + \delta u(t)) - f(x(t), u(t) + \delta u(t))\big] \\ & + \big[f(x(t), u(t) + \delta u(t)) - f(x(t), u(t))\big]. \end{aligned} \tag{27}$$

【可证明】,

$$\|\delta\dot{x}(t)\| \leq \gamma_f\|\delta x(t)\| + \rho_f\|\delta u(t)\|.$$

以及

$$\|\delta x(t_f)\| \leq \mathrm{e}^{\gamma_f t_f}\int_{t_0}^{t_f}\mathrm{e}^{-\gamma_f t}\rho_f\|\delta u(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

对 Pontryagin-McShane 变分，仅在 $t \in [t_2, t_2+\Delta t]$ 扰动，$\delta u(t) = \omega - u(t)$

$$\|\delta x(t_f)\| \leq \mathrm{e}^{\gamma_f t_f}\int_{t_2}^{t_2+\Delta t}\mathrm{e}^{-\gamma_f t}\rho_f\|\delta u(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

在 Δt 非常小时足够小，于是

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))\delta x(t_f) \geq 0. \tag{28}$$

5/7 构造协态变量，证明极值条件

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{x}(t) =& \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)+\delta u(t))\delta x(t) + o(\|\delta x(t)\|) \\
&+ \big[f(x(t), u(t)+\delta u(t)) - f(x(t), u(t))\big] \\
=& \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t))\delta x(t) \\
&+ \big[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)+\delta u(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t))\big]\delta x(t) \\
&+ \big[f(x(t), u(t)+\delta u(t)) - f(x(t), u(t))\big] + o(\|\delta x(t)\|).
\end{aligned} \tag{29}
$$

上式后两行是与控制变量的变分 δu 有关的，可以将这一部分看作关于 $\delta\dot{x}(t)$ 的一阶线性常微分方程的非齐次项。考察关于函数 $y(t)$ 的线性齐次微分方程

$$
\dot{y}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t))y(t), \quad y(t_0) = 0.
$$

利用分离变量法可得其通解，

$$
y(t) = c_1 \mathrm{e}^{\left[\int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(x(\tau), u(\tau))\mathrm{d}\tau\right]},
$$

构造协态变量满足常微分方程

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x(t), u(t), p(t)) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t))p(t).$$

$$p(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)).$$

立即得到了协态方程和关于 δx_f 的边界条件。以及关于 δt_f 的 3/ 的结论

$$\mathcal{H}\Big|_{t_f} = \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))f(x(t_f), u(t_f)) = 0.$$

以及，4/ 的结论，对任意 Pontryagin-McShane 变分，

$$p(t_f)\delta x(t_f) \geq 0.$$

$$
\begin{aligned}
p(t)\delta\dot{x}(t) =& p(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t))\delta x(t) \\
&+ p(t)\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t)+\delta u(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t))\Big]\delta x(t) \\
&+ p(t)\big[f(x(t),u(t)+\delta u(t)) - f(x(t),u(t))\big] + p(t)o(\|\delta x(t)\|).
\end{aligned}
$$

有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[p(t)y(t)\big] =& \dot{p}(t)y(t) + p(t)\dot{y}(t) \\
=& \Big[-\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t))p(t)\Big]y(t) + p(t)\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t))y(t)\Big] = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[p(t)\delta x(t)\big] &= p(t)\delta\dot{x}(t) + \dot{p}(t)\delta x(t) = p(t)\delta\dot{x}(t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t))p(t)\delta x(t) \\
&= p(t)\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t)+\delta u(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t))\Big]\delta x(t) \\
&\quad + p(t)\big[f(x(t),u(t)+\delta u(t)) - f(x(t),u(t))\big] + p(t)o(\|\delta x(t)\|).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& p(t_f)\delta x(t_f) \\
= & \int_{t_0}^{t_f} \Big\{ p(t)\big[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)+\delta u(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t))\big]\delta x(t) \\
& + p(t)\big[f(x(t), u(t)+\delta u(t)) - f(x(t), u(t))\big] + p(t)o(\|\delta x(t)\|) \Big\}\, \mathrm{d}t \\
= & \int_{t_0}^{t_f} \Big\{ p(t)\big[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)+\delta u(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t))\big]\delta x(t) + p(t)o(\|\delta x(t)\|) \\
& + \big[\mathcal{H}(x(t), u(t)+\delta u(t), p(t)) - \mathcal{H}(x(t), u(t), p(t))\big] \Big\}\, \mathrm{d}t \\
= & \int_{t_2}^{t_2+\Delta t} \Big\{ p(t)\big[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)+\delta u(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t))\big]\delta x(t) + p(t)o(\|\delta x(t)\|) \\
& + \big[\mathcal{H}(x(t), u(t)+\delta u(t), p(t)) - \mathcal{H}(x(t), u(t), p(t))\big] \Big\}\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

$\partial f/\partial x$ 对 u 连续，可知 $\Delta t \to 0$ 时，第一行趋于零。在控制变量的连续点 t，

$$
\boxed{\mathcal{H}(x(t), \omega, p(t)) - \mathcal{H}(x(t), u(t), p(t)) \geq 0.}
$$

6/7 Hamiltonian 连续

在 u 的连续时刻，$\mathcal{H}$ 自然连续。在 u 的不连续点 t_1，由极值条件，在其左侧

$$\mathcal{H}(x(t_1-\epsilon), u(t_1-\epsilon), p(t_1-\epsilon)) \leq \mathcal{H}(x(t_1-\epsilon), u(t_1+), p(t_1-\epsilon)).$$
$$\mathcal{H}(x(t_1), u(t_1-), p(t_1)) \leq \mathcal{H}(x(t_1), u(t_1+), p(t_1)).$$

类似的，

$$\mathcal{H}(x(t_1), u(t_1+), p(t_1)) \leq \mathcal{H}(x(t_1), u(t_1-), p(t_1)).$$

于是 $\mathcal{H}$ 在 t_1 连续

7/7 Hamiltonian 为零

若 $\mathcal{H}$ 连续可微，直接求导即可。最优控制下的哈密尔顿函数则可微（为零!）

$$\mathcal{G}(x(t), p(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{u'(t)\in U} \mathcal{H}(x(t), u'(t), p(t)) = \mathcal{H}(x(t), u(t), p(t)).$$

由于已经证明了 $\mathcal{H}$ 连续，只要证明，在 u 的连续的区间 $[t_2, t_3]$，$\mathcal{G}$ 导数为零。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(x(t_2), u(t_3), p(t_2)) &\geq \mathcal{H}(x(t_2), u(t_2), p(t_2)) = \mathcal{G}(x(t_2), p(t_2)),\\
\mathcal{H}(x(t_3), u(t_2), p(t_3)) &\geq \mathcal{H}(x(t_3), u(t_3), p(t_3)) = \mathcal{G}(x(t_3), p(t_3)).
\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}(x(t_3), u(t_3), p(t_3)) - \mathcal{H}(x(t_2), u(t_3), p(t_2))\\
\leq &\mathcal{G}(x(t_3), p(t_3)) - \mathcal{G}(x(t_2), p(t_2))\\
\leq &\mathcal{H}(x(t_3), u(t_2), p(t_3)) - \mathcal{H}(x(t_2), u(t_2), p(t_2)).
\end{aligned} \tag{30}$$

不等式左侧在 t_3 泰勒展开，

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Big\{\mathcal{H}(x(t_3),u(t_3),p(t_3))-\mathcal{H}(x(t_2),u(t_3),p(t_2))\Big\}\\
=&\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Big\{-[x(t_2)-x(t_3)]\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}(x(t_3),u(t_3),p(t_3))\\
&\qquad\qquad -[p(t_2)-p(t_3)]\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}(x(t_3),u(t_3),p(t_3))+o(\|\cdot\|)]\Big\}\\
=&\dot{x}(t_3)\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}(x(t_3),u(t_3),p(t_3))+\dot{p}(t_3)\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}(x(t_3),u(t_3),p(t_3))=0.
\end{aligned}$$

类似，不等式右侧在 t_2 泰勒展开，

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Big\{\mathcal{H}(x(t_3),u(t_2),p(t_3))-\mathcal{H}(x(t_2),u(t_2),p(t_2))\Big\}=0.$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathcal{G}(x(t_3),p(t_3))-\mathcal{G}(x(t_2),p(t_2))}{t_3-t_2}=0.$$

证毕。

稳态系统 Bolza 指标的最优控制问题

引入新的状态变量

$$\dot{x}_{n+1}(t) = g(x(t), u(t)),\ x_{n+1}(t_0) = 0. \tag{31}$$

于是 Bolza 性能指标化作

$$\begin{aligned} J(u) &= h(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t))dt = h(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \dot{x}_{n+1}(t)dt \\ &= h(x(t_f)) + x_{n+1}(t_f) - x_{n+1}(t_0) = h(x(t_f)) + x_{n+1}(t_f). \end{aligned}$$

化作了稳态系统 Mayer 问题

时变系统的最优控制问题

引入新的状态变量

$$\dot{x}_{n+1}(t) = 1,\ x_{n+1}(t_0) = t_0. \tag{32}$$

化作了稳态系统的最优控制问题

一般目标集的处理

- 一般目标集的最优控制问题 = 拉格朗日乘子法 +【终端时间自由，终端状态自由，时变、一般指标最优控制问题】
- x_f, t_f free/fix 的最优控制问题为上述问题的特殊情况

Table of Contents

时间最短控制

问题 9 (时间最短控制)

状态变量 $x(t) : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ 分段连续可微，控制变量 $u(t) : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^m$ 分段连续。状态初值 $x(t_0) = x_0$。状态方程为

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t) + B(x(t), t)u(t). \tag{33}$$

容许控制为对任意的 $t \in [t_0, t_f]$,

$$|u_i(t)| \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{34}$$

具有自由终端时刻的目标集

$$\mathcal{S} = [t_0, \infty) \times \{x(t_f) : m(x(t_f), t_f) = 0\}. \tag{35}$$

要最小化的性能指标为达到目标集所用时间 $J(u) = t_f - t_0$

Hamiltonian

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = 1 + p(t) \cdot [A(x(t), t) + B(x(t), t)u(t)]. \tag{36}$$

极值条件

$$\begin{aligned} & 1 + p(t) \cdot \left[A(x(t), t) + B(x(t), t)u(t)\right] \\ \leq & 1 + p(t) \cdot \left[A(x(t), t) + B(x(t), t)u'(t)\right]. \end{aligned}$$

化简为

$$p(t) \cdot B(x(t), t)u(t) \leq p(t) \cdot B(x(t), t)u'(t).$$

把 n 行 m 列矩阵函数 $B(x,t)$ 分块，记为 m 个列向量函数 $b_i(x,t):\mathbb{R}^n\times[t_0,t_f]\to\mathbb{R}^n, i=1,2,\ldots,m$。

$$B(x,t)=\left[[c|c|c|c]b_1(x,t) \quad b_2(x,t) \quad \ldots \quad b_m(x,t)\right]. \tag{37}$$

则极值条件可进一步化简。由

$$\begin{aligned}
p(t)\cdot B(x(t),t)u(t) &= p^{\mathrm{T}}(t)\sum_{i=1}^{m} b_i(x(t),t)u_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{m} p^{\mathrm{T}}(t)b_i(x(t),t)u_i(t), \\
p^{\mathrm{T}}(t)B(x(t),t)u'(t) &= p^{\mathrm{T}}(t)\sum_{i=1}^{m} b_i(x(t),t)u_i'(t) \\
&= \sum_{i=1}^{m} p^{\mathrm{T}}(t)b_i(x(t),t)u_i'(t), \\
\sum_{i=1}^{m} p^{\mathrm{T}}(t)b_i(x(t),t)u_i(t) &\le \sum_{i=1}^{m} p^{\mathrm{T}}(t)b_i(x(t),t)u_i'(t).
\end{aligned}$$

控制变量各个分量无关，于是时间最短控制的极值条件化作对每个 $i = 1, 2, \ldots, m$ 都有

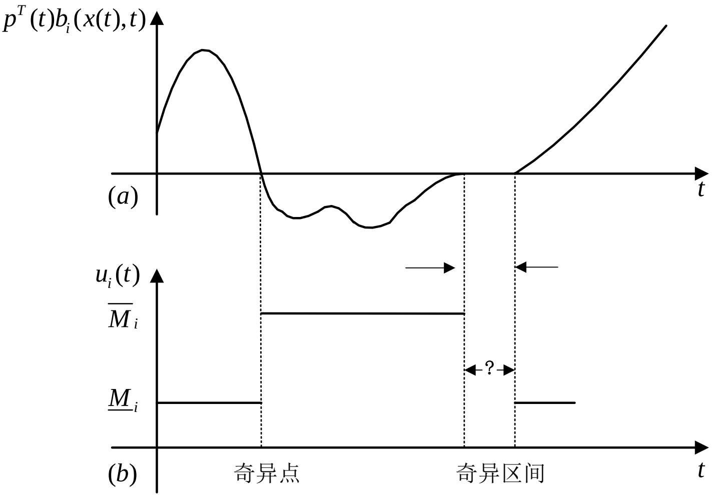
$$p^{\mathrm{T}}(t)b_i(x(t), t)u_i(t) \leq p^{\mathrm{T}}(t)b_i(x(t), t)u_i'(t).$$

即求 $\eta_i(u_i(t), t) \overset{\text{def}}{=} p^{\mathrm{T}}(t)b_i(x(t), t)u_i(t)$ 关于 $u_i(t)$ 的极小值条件，得

$$u_i(t) = \begin{cases} +1, & p^{\mathrm{T}}(t)b_i(x(t), t) < 0, \\ -1, & p^{\mathrm{T}}(t)b_i(x(t), t) > 0, \\ \text{待定}, & p^{\mathrm{T}}(t)b_i(x(t), t) = 0. \end{cases} \tag{38}$$

其中，若 $p^{\mathrm{T}}(t)b_i(x(t), t) \neq 0$，则最优控制的取值可以由庞特里亚金极小值原理的极值条件推得，必取值于容许控制的上界或下界

时间最短控制的 Bang-Bang 控制原理



Bang-Bang 控制原理

定义 1 (正常 (normal) 时间最短控制问题)

$p(t)b_i(x(t),t)=0$ 仅在可数时刻成立，则称时间最短控制问题是正常的

定理 5 (*Bang-Bang 控制原理*)

若时间最短控制问题是正常的，则最优控制的每个分量 $u_i(t)\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,n$，*在最大值* $+1$ *和最小值* -1 *之间切换*

$$u_i(t)=-\operatorname{sign}\{p^{\mathrm{T}}(t)b_i(x(t),t)\}.$$

其中 $\operatorname{sign}(y)$ *为符号函数* $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，*取值为* y *的正负号，即*

$$\operatorname{sign}(y)\overset{def}{=}\begin{cases}+1, & y\geq 0,\\ -1, & y<0.\end{cases}$$

线性定常系统的时间最短控制

问题 10 (线性定常系统的时间最短控制)

- 初值 $x(t_0) = x_0$, 状态方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{39}$$

- 容许控制

$$|u_i| \leq 1, i = 1, 2, \ldots, m. \tag{40}$$

- 目标集

$$x(t_f) = 0 \tag{41}$$

- 性能指标

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \tag{42}$$

线性定常系统的时间最短控制的解 *

定理 6 (存在性)

若线性定常系统的时间最短控制是定常的，且 A 的特征值实部总非正，则对任意初始状态 $x(t_0)$，时间最短控制问题的解存在

定理 7 (唯一性)

若线性定常系统的时间最短控制是定常的，且解存在，则解在如下意义下是唯一的：即不同的时间最短控制仅在有限个切换时刻取值相异

定理 8 (切换次数)

若线性定常系统的时间最短控制是定常的，解存在，且 A 的所有特征值均为实数，则最短时间控制的各个分量的切换次数不大于 $n-1$。(n 为状态数)

例子：线性定常系统的时间最短控制

例 1 (线性定常系统的时间最短控制)

时间最短控制，初值 t_0, x_0，自由的 t_f 位于原点。状态方程

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{43}$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t). \tag{44}$$

控制约束为

$$|u(t)| \leq 1. \tag{45}$$

最小化性能指标

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \tag{46}$$

1/7 写成矩阵形式

将状态方程写成矩阵形式

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{47}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{48}$$

A 的特征值均为 0（实部非正，为实数），于是时间最短控制存在唯一，且至多切换 $2-1=1$ 次

2/7 计算 Hamiltonian, 考察极值条件

Hamiltonian

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t)) = 1 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t). \tag{49}$$

极值条件

$$p_2(t)u(t) \leq p_2(t)u'(t), \forall u \in U, t \in [t_0, t_f], \tag{50}$$

于是

$$u(t) = -\operatorname{sign}[p_2(t)] \tag{51}$$

考察协态来确定控制变量依然只能得到开环解。需考察状态

3/7 协态方程

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t)) = 1 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t).$$

协态方程

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1(t) &= 0, \\
\dot{p}_2(t) &= -p_1(t). \\
p_1(t) &= c_1, \\
p_2(t) &= -c_1 t + c_2.
\end{aligned}$$

于是 $p_2(t)$ 是直线，$[t_0, t_f]$ 至多换正负号一次，或恒为 0。后者将导致 $\mathcal{H} = 1$，与最优控制下的 Hamiltonian 为 0 矛盾，舍弃

4/7 分析最优控制的形式

最优控制的形式必须符合下列四种情况之一:

$$u(t) = +1, \quad \forall t \in [t_0, t_f].$$
$$u(t) = -1, \quad \forall t \in [t_0, t_f].$$
$$u(t) = \begin{cases} +1, & t \in [t_0, t_1), \\ -1, & t \in [t_1, t_f]. \end{cases}$$
$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [t_0, t_1), \\ +1, & t \in [t_1, t_f]. \end{cases}$$

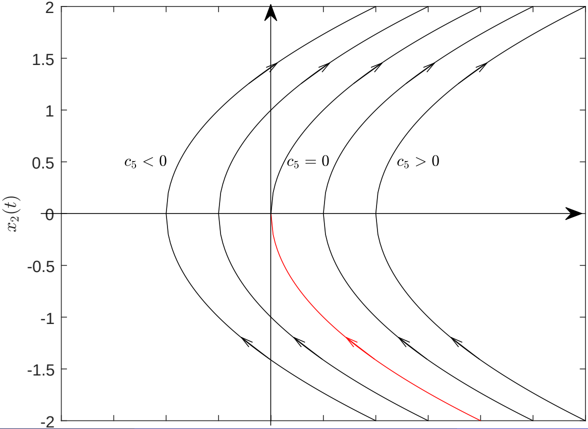
$$\{+1\}, \quad \{-1\}, \quad \{+1, -1\}, \quad \{-1, +1\}. \tag{52}$$

只有两种可能的"结局":最终以 1 或 -1 控制到 $(0, 0)$

(1) $u(t) = \{+1\}$

$$x_2(t) = t + c_3,\ x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_3 t + c_4$$

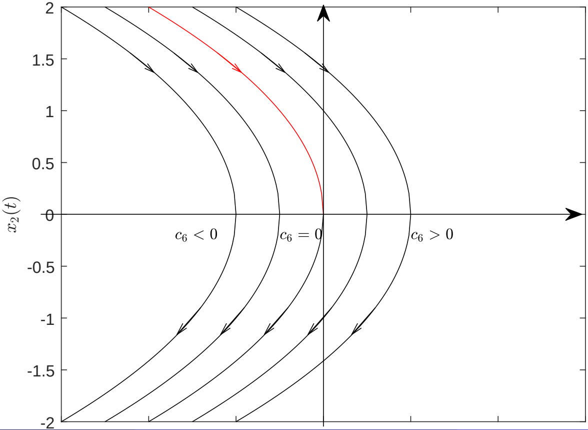
$$x_2^2(t) = t^2 + 2c_3 t + c_3^2,\ x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t) + c_5 \ \Rightarrow x_1(t) - \frac{1}{2}x_2^2(t) = 0.$$



(2) $u(t) = \{-1\}$

$$x_2(t) = -t + c_3,\ x_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 + c_3 t + c_4$$

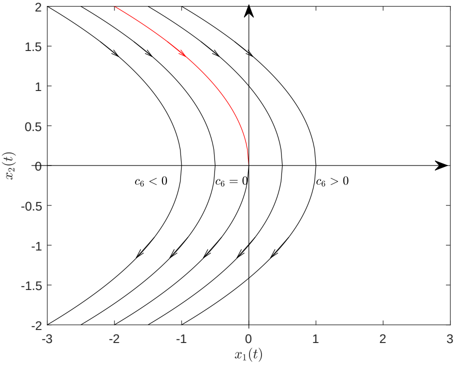
$$x_2^2(t) = t^2 - 2c_3 t + c_3^2,\ x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + c_6 \ \Rightarrow x_1(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t) = 0.$$

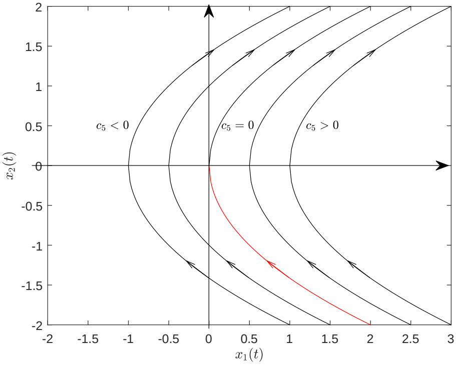


(3) $u(t) = \{+1, -1\}$, (4) $u(t) = \{-1, +1\}$

(3) 以 -1“结尾”，切换后左图红线；此前 $+1$“开始”，在右图红线左侧

(3) 以 $+1$“结尾”，切换后右图红线；此前 -1“开始”，在左图红线右侧



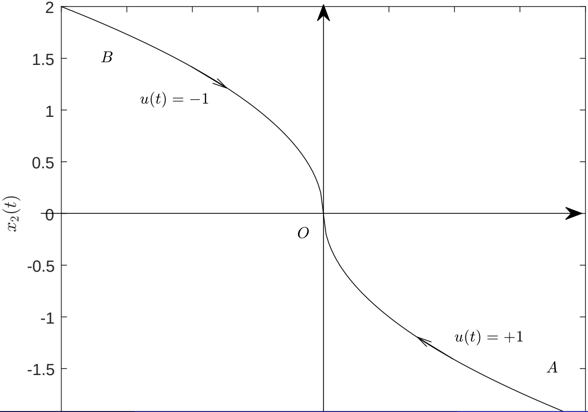


5/7 切换函数和切换曲线

定义该问题的切换函数

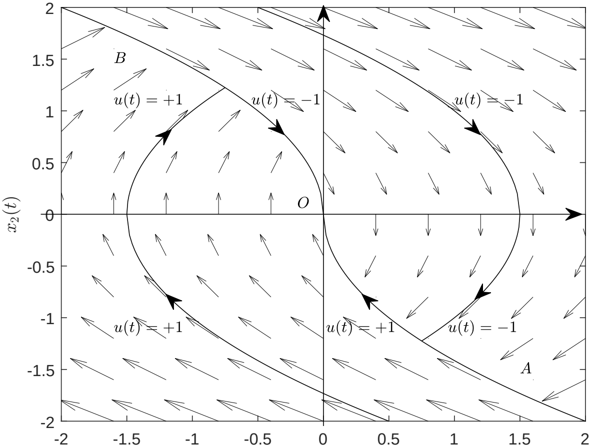
$$s(x(t)) \stackrel{\text{def}}{=} x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)|.$$

时间最短控制达到目标前，最优状态位于切换曲线 $s(x(t)) = 0$ ，AOB



6/7 时间最短控制

- 最优轨迹应先依最大/最小控制至切换曲线 $s(x(t)) = 0$
- 切换为最小/最大控制至结束



7/7 闭环形式的时间最短控制

$$u(t) = \begin{cases} -\operatorname{sign}[s(x(t))], & s(x(t)) \neq 0, \\ -\operatorname{sign}[x_2(t)], & s(x(t)) = 0. \end{cases} \tag{53}$$

庞特里亚金极小值原理小结

- 可处理约束、边界、不连续的控制变量
- 可得到最优控制的必要条件，是关于最优状态轨迹和协态变量的常微分方程两点边值问题
- 一般情况获得开环形式解，一些问题可得闭环解
- 下节课：动态规划方法，以求闭环解