第三讲：最优控制的数学理论

最优控制介绍之三

张杰

人工智能学院
中国科学院大学

复杂系统管理与控制国家重点实验室
中国科学院自动化研究所

2017 年 9 月 14 日

关注：微信号“国科大最优控制”
课程微信群“国科大最优控制 2017”

飞跃
最优控制

国科大最优控制2017

该二维码7天内(9月15日前)有效，重新进入将更新

Table of Contents

Table of Contents

最简变分问题

问题 1 (最简变分问题)

求函数 $x(t) : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$，在给定的初始和终端时刻 t_0, t_f 满足，$x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$，且最小化性能指标

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

其中 g 取值于 $\mathbb{R}$，二阶连续可微。

函数 $x(t) : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ 及其导数 $\dot{x}(t) : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$ 记为

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix},$$

最优控制问题

问题 2 (最优控制问题)

1. 被控对象的状态方程为
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0.$$
2. 容许控制, $u \in \mathcal{U}, \quad x \in \mathcal{X}.$
3. 目标集, $x(t_f) \in \mathcal{S}$
$$\mathcal{S} = [t_0, \infty) \times \{x(t_f) \in \mathbb{R}^n : m(x(t_f), t_f) = 0\}$$
4. 求分段连续的 u, 以最小化性能指标
$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)\,\mathrm{d}t.$$

最优控制的数学理论

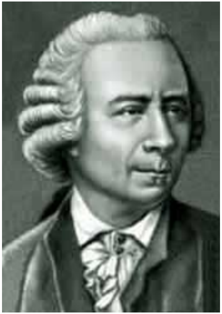
- 变分法与最优控制的驻点条件
  - Euler 的几何方法
  - Lagrange 的 δ 方法
  - Hamilton 方程组
  - Lagrange 乘子法
- Pontryagin 极小值原理与最优控制的必要条件
  - Weierstrass-Erdmann 条件
  - Weierstrass 条件
  - Pontryagin 极小值原理
- 动态规划与最优控制的充分条件
  - Hamilton-Jacobi 方程
  - Hamilton-Jacobi-Bellman 方程
  - Bellman 方程

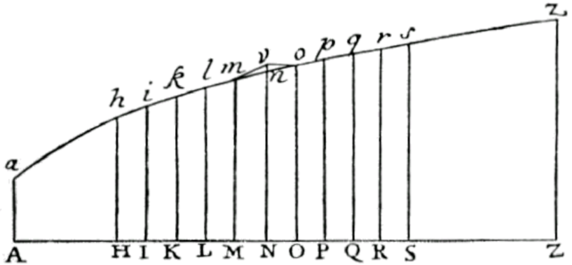
Table of Contents

Euler 的几何方法

假定 $x(t):[t_0,t_f]\to\mathbb{R}$ 为连续可微曲线。将区间 $[t_0,t_f]$ 等分为 N 段，用折线近似曲线。$x_0=x(t_0),\ x_1=x(t_1),\ \ldots,\ x_N=x(t_N)$

$$\dot{x}_k \overset{\text{def}}{=} \dot{x}(t_k)\approx\frac{x(t_{k+1})-x(t_k)}{\Delta t}=\frac{x_{k+1}-x_k}{\Delta t}.$$





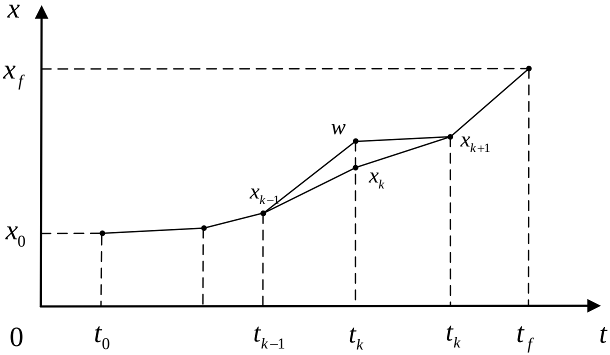
Euler 的几何方法：性能指标处理

求 $x(t):[t_0,t_f]\to\mathbb{R}$ 以最小化 $J(x)$ 的最简变分问题因

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f} g(x(t),\dot{x}(t),t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k,\dot{x}_k,t_k)\Delta t=\bar{J}[x_1,\ldots,x_{N-1}].$$

近似转化为求 $x_1,x_2,\ldots,x_{N-1}$ 以最小化 $\bar{J}$

Euler 的几何方法：驻点条件



假定 $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ 是最优解，则应满足

$$0 = \frac{\partial \bar{J}}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Euler 的几何方法：Euler-Lagrange 方程

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \bar{J}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[g(x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}, t_{k-1})\Delta t + g(x_k, \dot{x}_k, t_k)\Delta t\right] \\
&= \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}_{k-1}}{\partial x_k}\Big|_{t_{k-1}} \Delta t + \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{t_k} \Delta t + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_k}\Big|_{t_k} \Delta t \\
&\approx \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{t_k} \Delta t - \Big[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_k} - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_{k-1}}\Big].
\end{aligned}
$$

等式两边同时除以 Δt，再取极限 $N \to \infty$，

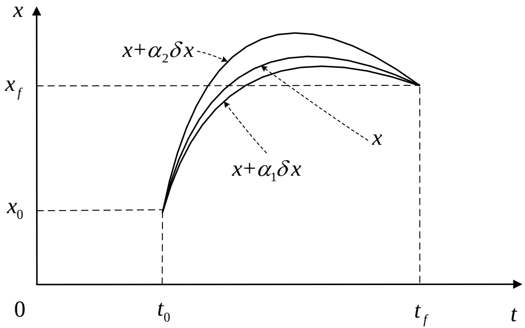
$$
0 \approx \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{t_k} - \Big[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_k} - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_{k-1}}\Big]/\Delta t.
$$

Euler-Lagrange 方程：

$$
\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)\Big] = 0. \qquad (2)}
$$

Lagrange 的 δ 方法

若 x 是最优曲线，沿任意 δx"方向"，前进 α"步长"，得到 $x' = x + \alpha\delta x$



Lagrange 的 δ 方法：变分问题的“驻点条件”

新的性能指标 $J(x')$ 应满足

$$\Delta J = J(x') - J(x) \geq 0.$$

对于给定的 x 和 δx，$J(x') = J(x + \alpha\delta x)$ 是关于 α 的函数。最优解 x 应满足，对于任意的 δx，

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J(x + \alpha\delta x)\Big|_{\alpha=0} = 0. \qquad (3)}$$

Lagrange 的 δ 方法：计算

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J(x+\alpha\delta x)\Big|_{\alpha=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left\{\int_{t_0}^{t_f} g(x(t)+\alpha\delta x(t), \dot{x}(t)+\alpha\delta\dot{x}(t), t)\,\mathrm{d}t\right\}\Big|_{\alpha=0} \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left\{\frac{\partial g}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t),t)\delta x(t) + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t),t)\delta\dot{x}(t)\right\}\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left\{\frac{\partial g}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t),t)\delta x(t) + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t),t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\delta x(t)]\right\}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

使用分部积分公式对其化简，得到，

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{t_0}^{t_f} &\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t),t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x},t)\right]\right\}\delta x(t)\,\mathrm{d}t \\
&+ \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t),t)\delta x(t)\right]\Big|_{t_0}^{t_f}.
\end{aligned}
$$

Lagrange 的 δ 方法：Euler-Lagrange 方程

初始时刻和终端时刻的状态取值固定，若要使 $x' = x + \alpha\delta x$ 依然满足 $x'(t_0) = x_0$ 和 $x'(t_f) = x_f$，则 $\delta x(t_0) = 0$, $\delta x(t_f) = 0$

$$0 = \int_{t_0}^{t_f} \Big\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)\Big] \Big\} \delta x(t)\, \mathrm{d}t.$$

Euler-Lagrange 方程：

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)\Big] = 0.}$$

$n > 1$ 的情况

Euler-Lagrange 方程在高维问题中对任意分量均需满足

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i}(x(t), \dot{x}(t), t)\Big] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Lagrange 乘子法

$$\min F(x)$$
$$\text{s.t.} f(x) = 0.$$

引入 Lagrange 乘子 $\lambda \in \mathbb{R}^m$,

$$\bar{F}(x, \lambda) := F(x) + \lambda^T f(x). \tag{5}$$

则等式约束情况下 $F(x)$ 取极值的必要条件是

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = 0 \tag{6}$$
$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \lambda} = f(x) = 0. \tag{7}$$

一个例子

例 1 (小车的能量最优控制)

位置 x_1，速度 x_2，加速度 u。质量为 1 小车的状态方程为：

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \tag{8}$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t). \tag{9}$$

要将状态从初始的 $x(t_0) = x_0$ 在规定的 t_f 到达 $x(t_f) = x_f$。求最优控制以最小化 控制能量：

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} u^2(t)\, \mathrm{d}t. \tag{10}$$

$t_0 = 0$, $t_f = 2$, $x_0 = [-2, 1]^{\mathrm{T}}$, $x_f = [0, 0]^{\mathrm{T}}$

1/7 引入 Lagrange 乘子

在性能指标 J 基础上，针对状态方程需要满足的约束

$$
\begin{aligned}
x_2(t) - \dot{x}_1(t) &= 0, \\
u(t) - \dot{x}_2(t) &= 0,
\end{aligned}
$$

引入 Lagrange 乘子 $p_1(t) : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ 和 $p_2(t) : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$

$$
\bar{J} = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} u^2(t) + p_1(t)[x_2(t) - \dot{x}_1(t)] + p_2(t)[u(t) - \dot{x}_2(t)] \right\} \mathrm{d}t
$$

$$
\bar{g} = \frac{1}{2} u^2(t) + p_1(t)[x_2(t) - \dot{x}_1(t)] + p_2(t)[u(t) - \dot{x}_2(t)]
$$

于是 J 在状态方程约束下取极值的必要条件是 $\bar{J}$ 取极值

2/7 应用 Euler-Lagrange 方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{g}}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial \dot{x}}\right] &= 0, \\
\frac{\partial \bar{g}}{\partial u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial \dot{u}}\right] &= 0, \\
\frac{\partial \bar{g}}{\partial p} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial \dot{p}}\right] &= 0.
\end{aligned}
$$

“自变量”不仅包括 x_1, x_2 还包括 u 和 Lagrange 乘子 p_1, p_2，其中

$$
\bar{g} = \frac{1}{2}u^2(t) + p_1(t)[x_2(t) - \dot{x}_1(t)] + p_2(t)[u(t) - \dot{x}_2(t)]
$$

3/7 应用 Euler-Lagrange 方程

关于 p_1, p_2，即状态方程。关于 x_1, x_2, u:

$$
\begin{aligned}
\bar{g}_{x_1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{\dot{x}_1} = 0 \quad &\Rightarrow 0 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-p_1(t)) = 0 &&\Rightarrow p_1(t) = c_1 \\
\bar{g}_{x_2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{\dot{x}_2} = 0 \quad &\Rightarrow p_1(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-p_2(t)) = 0 &&\Rightarrow p_2(t) = -c_1 t + c_2 \\
\bar{g}_{u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{\dot{u}} = 0 \quad &\Rightarrow p_2(t) + u(t) = 0 &&\Rightarrow u(t) = c_1 t - c_2
\end{aligned}
$$

其中 c_1, c_2 是待定系数

4/7 解 Euler-Lagrange 方程

将 $u(t) = c_1 t - c_2$ 代入状态方程

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u.$$

可得

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2(t) &= u(t) = c_1 t - c_2 && \Rightarrow x_2(t) = \frac{1}{2}c_1 t^2 - c_2 t + c_3 \\
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) = \frac{1}{2}c_1 t^2 - c_2 t + c_3 && \Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{6}c_1 t^3 - \frac{1}{2}c_2 t^2 + c_3 t + c_4
\end{aligned}$$

其中 c_3 和 c_4 是待定系数

5/7 Euler-Lagrange 方程的边界条件

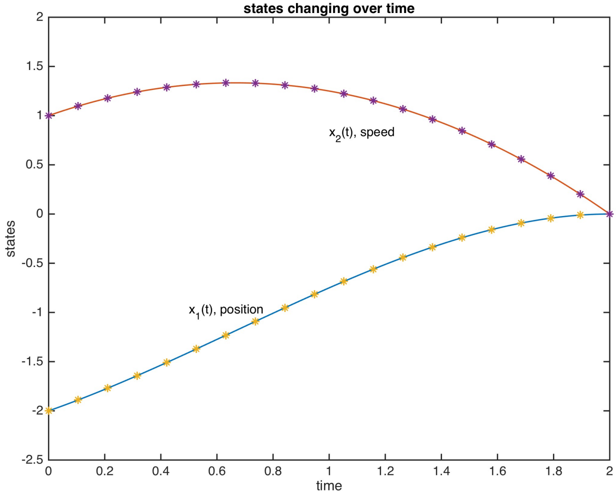
$$x_1(0) = -2, x_2(0) = 1, x_1(2) = 0, x_2(2) = 0$$

将上述初值终值条件代入，可得

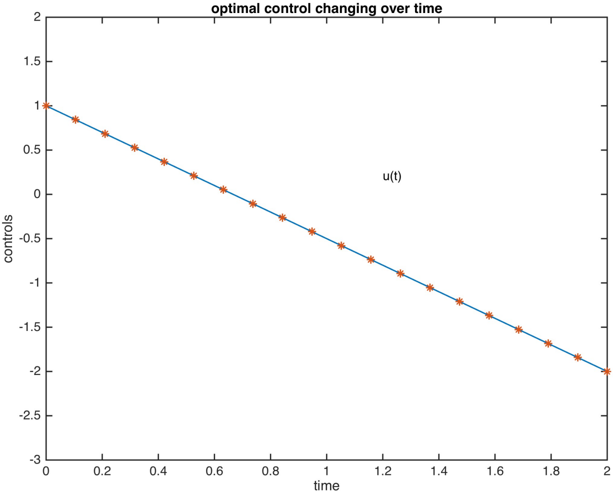
$$\begin{aligned} -2 &= x_1(0) = c_4 \\ 1 &= x_2(0) = c_3 \\ 0 &= x_1(2) = \frac{1}{6}c_1 2^3 - \frac{1}{2}c_2 2^2 + c_3 2 + c_4 \\ 0 &= x_2(2) = \frac{1}{2}c_1 2^2 - c_2 2 + c_3 \end{aligned}$$

于是， 通过经典变分求得最优控制 $u(t) = -\frac{3}{2}t + 1.$

6/7 经典变分求解最优控制：状态-时间



7/7 经典变分求解最优控制：控制-时间



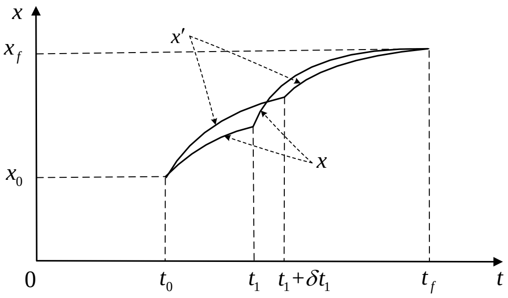
其他目标集?

- 终端时间固定? 自由?
- 终端状态固定? 自由?
- 终端状态和时间满足一定条件?

Table of Contents

解空间的拓展：连续可微到分段连续可微函数

Weierstrass 是现代分析学之父，提倡将微积分和变分法严格化。Euler-Lagrange 研究的最简变分问题中，曲线 $x(t):[t_0,t_f]\to\mathbb{R}$ 连续可微，即导数也处处连续。Weierstrass 将其推广至分段连续情况，即 函数连续，导数分段连续，导数不连续处称为角点



暂时假定仅有一个角点 t_1，未知何时发生

Weierstrass-Erdmann 条件：角点时刻的扰动

将性能指标写为 $[t_0, t_1]$ 和 $[t_1, t_f]$ 两部分积分的加和

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), \dot{x}(t), t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t)\,\mathrm{d}t.$$

扩展 Lagrange 的 δ 方法，不但考察函数的扰动 δx，还考察角点发生时刻的扰动 δt_1，可得除 Euler-Lagrange 方程外，还需在角点处满足 Weierstrass-Erdmann 条件

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1-} = \left.\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1+}, \tag{11}$$

$$\left.\left(g - \dot{x}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t_1-} = \left.\left(g - \dot{x}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)\right|_{t_1+}. \tag{12}$$

小结：至此介绍的各种函数变分

至此已经介绍了对最优解的三种类型的“扰动”：

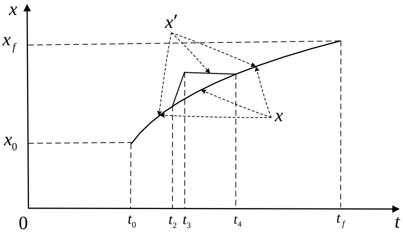
- Euler 在时间轴上采样，每个采样点上的取值可变
- Lagrange 以任意连续可微函数作为方向，离开最优解的步长可变
- Weierstrass-Erdmann 条件中，令角点发生的时刻也可变

上述，对函数施加较小的扰动时，函数导数变化也很小

Weierstrass 条件

1879 年，Weierstrass 针对分段连续函数为定义域的变分问题提出一种新的变分形式，函数变化很小时，其导数变化可能很大

- 在区间 $[t_2, t_4]$ 之外，令曲线没有扰动，$x'(t;\epsilon,\omega) = x(t)$
- 在 $t_3 = t_2 + \epsilon$ 点，令 $x'(t_3;\epsilon,\omega) = x(t_2) + \omega\epsilon$
- 在区间 $[t_2, t_3]$ 和 $[t_3, t_4]$ 让 $x'(t;\epsilon,\omega)$ 为连接端点的线段



在 $[t_2, t_3]$，新曲线的斜率总是 $\dot{x}'(t;\epsilon,\omega) = \omega$，与 ϵ 无关。当 $\epsilon > 0$ 非常小时，在整个区间 $[t_2, t_3]$ 上，对曲线的扰动 $|x'(t;\epsilon,\omega) - x(t)| \leq |\omega|\epsilon$ 很小，而在区间 $[t_2, t_3]$ 上，其斜率相差依然可能很大

Weierstrass 条件

考察 Weierstrass 函数（或称 Weierstrass excess 函数）

$$E(x,\dot{x},\omega,t)=g(x,\omega,t)-g(x,\dot{x},t)-(\omega-\dot{x})\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},t).$$

最优的 x 满足 Weierstrass 条件，对任意的 $\omega\in\mathbb{R}$

$$E(x(t),\dot{x}(t),w,t)\geq 0. \tag{13}$$

变分法与最优控制

上述变分法技巧均可适用于最优控制问题。然而，

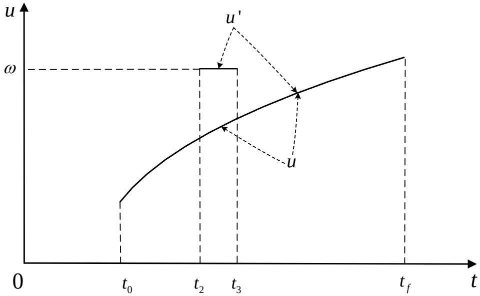
- 应用中，控制变量往往并不满足连续可微、或分段连续可微的性质
- 可能并不满足最简变分问题中规定的曲线无约束的条件

Pontryagin 极小值原理，PMP

PMP 是最优控制的奠基成果，引入 Hamilton 函数

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = g(x(t), u(t), t) + p(t) \cdot f(x(t), u(t), t), \quad (14)$$

区分了状态变量 $x(t)$ 和控制变量 $u(t)$。允许控制变量 分段连续（不连续），并使用 Pontryagin-McShane 变分



最优控制问题

问题 (最优控制问题)

1. 被控对象的状态方程为
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0.$$
2. 容许控制, $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$.
3. 求分段连续的 u，以最小化性能指标
$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)\,\mathrm{d}t.$$

上述问题并未明确规定目标集，我们允许终端时刻自由选取或固定于给定时刻，终端状态也可自由或固定

Pontryagin 极小值原理

定理 1 (庞特里亚金极小值原理)

上述问题得到最优控制 $u(t)$ 的必要条件为 (TPBVP)

- *极值条件：对任意容许控制 $u'(t)$*

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) \le \mathcal{H}(x(t), u'(t), p(t), t).$$

- *规范方程：*

$$\text{状态 (state) 方程:} \quad \dot{x}(t) = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x(t), u(t), p(t), t),$$

$$\text{协态 (costate) 方程:} \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x(t), u(t), p(t), t).$$

- *边界条件 (用于处理目标集)：*

$$[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f), t_f) - p(t_f)] \cdot \delta x_f + [\mathcal{H}(x(t_f), u(t_f), p(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(t_f), t_f)]\delta t_f = 0.$$

极小值原理求解无约束最优控制

再来看前面使用经典变分求解过的停车问题

例 (小车的能量最优控制)

位置 x_1，速度 x_2，加速度 u。质量为 1 小车的状态方程为：

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \tag{15}$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t). \tag{16}$$

要将状态从初始的 $x(t_0) = x_0$ 在规定的 t_f 到达 $x(t_f) = x_f$。求最优控制以最小化控制能量：

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} u^2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{17}$$

$t_0 = 0,\ t_f = 2,\ x_0 = [-2, 1]^{\mathrm{T}},\ x_f = [0, 0]^{\mathrm{T}}$

略解

计算该问题的 Hamiltonian

$$\mathcal{H}(x(t),u(t),p(t),t)=\frac{1}{2}u^2(t)+p_1(t)x_2(t)+p_2(t)u(t)$$

极值条件为，$\mathcal{H}(x(t),u(t),p(t),t)\le\mathcal{H}(x(t),u'(t),p(t),t)$，即，

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u}=0\Rightarrow u(t)+p_2(t)=0.$$

再代入规范方程和边界条件可得关于最优的 x,p 的常微分方程组，可得到和 Euler-Lagrange 方程同样的结果

例子：极小值原理求解有约束最优控制

例 2 (有约束的停车能耗最优控制)

- 状态方程

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),\ x_1(0) = -2. \tag{18}$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t),\ x_2(0) = 1. \tag{19}$$

- 容许控制为 $|u| \leq M_1 = 1.5$，目标集为在固定的终端时刻 $t_f = 2$

$$x_1(2) = 0,\ x_2(2) = 0. \tag{20}$$

- 要最小化的性能指标为控制能量

$$J(u) = \int_0^2 \frac{1}{2} u^2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{21}$$

1/5 考察极值条件

计算该问题的 Hamiltonian

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2}u^2(t) + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)$$

是关于 $u(t)$ 的二次函数，在区间 $[-M_1, M_1]$ 求极值得：

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname*{argmin}_{|u(t)|\le M_1} \mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) \\ &= \begin{cases} -M_1, & p_2(t) > M_1 \\ M_1, & p_2(t) < -M_1 \\ -p_2(t), & |p_2(t)| \le M_1. \end{cases} \end{aligned} \tag{22}$$

2/5 得到 Hamilton 方程组

状态方程

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = x_2(t) \tag{23}$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2} = u(t) = \begin{cases} -M_1, & p_2(t) > M_1 \\ M_1, & p_2(t) < -M_1 \\ -p_2(t), & |p_2(t)| \leq M_1. \end{cases} \tag{24}$$

协态方程

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = 0 \tag{25}$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -p_1(t) \tag{26}$$

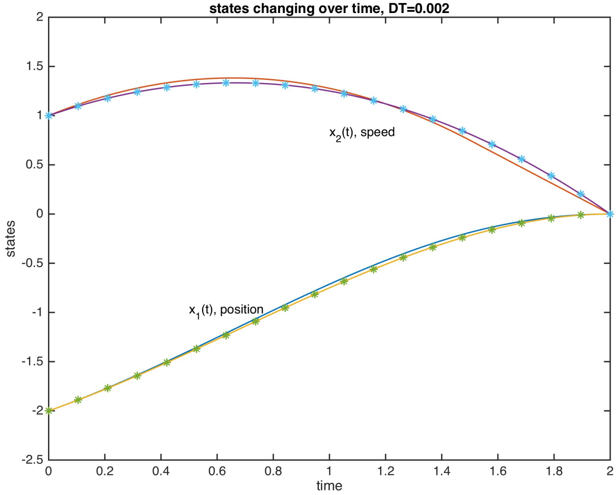
3/5 根据目标集处理边界条件

$$[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f),t_f)-p(t_f)]\cdot\delta x_f$$
$$+[\mathcal{H}(x(t_f),u(t_f),p(t_f),t_f)+\frac{\partial h}{\partial t}(x(t_f),t_f)]\delta t_f=0$$

终端时刻固定为 $t_f=2$，终端状态 $x_1(t_f)=0$, $x_2(t_f)=0$，于是 $\delta x_f=0$, $\delta t_f=0$。最优控制只需满足状态的初值和终值

$$\begin{cases} x_1(0)=-2, \\ x_2(0)=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(2)=0, \\ x_2(2)=0. \end{cases}$$

4/5 极小值原理求解最优控制：状态-时间



5/5 极小值原理求解最优控制：控制-时间

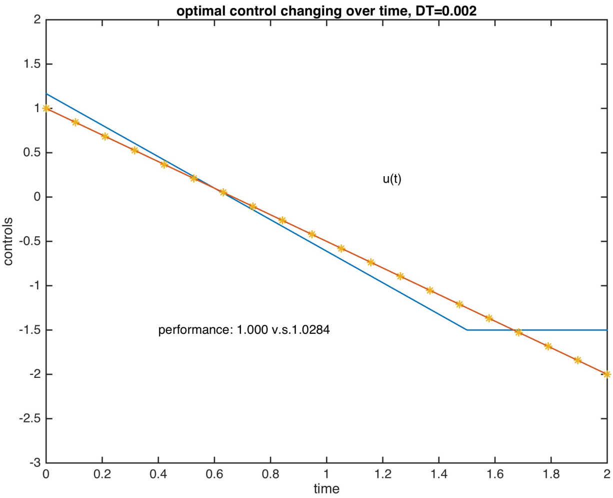


Table of Contents

Hamilton 方程组

1833 年，Hamilton 研究力学时得到与 Euler-Lagrange 方程组等价的 Hamilton 方程组

$$\dot{x} = +\frac{\partial H}{\partial p}, \tag{27}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{28}$$

其中 $H(x, \dot{x}, p) := -g(x, \dot{x}) + p \cdot \dot{x}$，不同于最优控制中的 Hamilton 函数

$$\mathcal{H}(x, p, u, t) = g(x, u, t) + p \cdot f(x, u, t).$$

Hamilton-Jacobi 方程

1842-1843 年，Jacobi 在哥尼斯堡的演讲中完善了 Hamilton 的另一工作。定义最简变分问题的值函数是以 t_0 为初始时刻，x_0 为初始状态，时段 $[t_0, t_f]$ 内性能指标的极小值：

$$V(x_0, t_0) = \min_x J(x; x_0, t_0).$$

则有 Hamilton-Jacobi 方程

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = H(x, \dot{x}, \frac{\partial V}{\partial x}, t). \tag{29}$$

与前人不同，Jacobi 的结论关注最优控制的性能指标

Hamilton-Jacobi-Bellman 方程

定理 2 (Hamilton-Jacobi-Bellman 方程)

若最优控制问题有解，值函数是以 t_0 为初始时刻，x_0 为初始状态，在最优控制下的性能指标：

$$V(x_0, t_0) = \min_u J(u; x_0, t_0). \tag{30}$$

若值函数二阶连续可微，则如下 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程（简称 HJB 方程）是最优控制的充分必要条件：

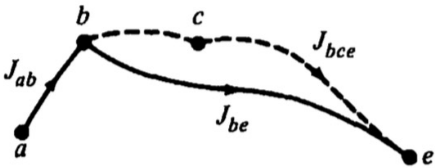
$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) = \min_{u(t)\in\mathbb{R}^m} \mathcal{H}\left(x(t), u(t), \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t), t\right), \tag{31}$$

$$V(x(t_f), t_f) = h(x(t_f), t_f)(\text{终端代价}) . \tag{32}$$

最优性原理

定理 3 (最优性原理, Bellman1954)

多级决策过程的最优策略具有如下性质：不论初始状态和初始决策如何，其余的决策对于由初始决策所形成的状态来说，必定也是一个最优策略



离散时间最优控制问题

问题 3 (离散时间最优控制问题)

1. 状态方程
$$x(k+1) = f_D(x(k), u(k), k), \; x(k_0) = x_0 \tag{33}$$
2. 容许控制 $u \in U$
3. 求最优控制，以最小化性能指标
$$J(u) = h_D(x(N), N) + \sum_{k=k_0}^{N-1} g_D(x(k), u(k), k). \tag{34}$$

考虑包含初值和初始时段的更广泛的性能指标

$$J(u; x_0, k_0) = h_D(x(N), N) + \sum_{k=k_0}^{N-1} g_D(x(k), u(k), k). \tag{35}$$

Bellman 方程

定理 4 (Bellman 方程)

最优控制下的性能指标记为值函数

$$V(x_0, k_0) = \min_{u \in U} J(u; x_0, k_0) \tag{36}$$

根据最优性原理，如下 Bellman 方程是最优控制的充要条件

$$V(x(k), k) = \min_{u(k) \in U} \{g_D(x(k), u(k), k) + V(x(k+1), k+1)\}$$

$$k = k_0, \ldots, N-1 \tag{37}$$

$$V(x(N), N) = h_D(x(N), N). \tag{38}$$

例子：动态规划求解最优控制

再来看前面使用经典变分和极小值原理求解过的停车问题

例 (小车的能量最优控制)

位置 x_1，速度 x_2，加速度 u。质量为 1 小车的状态方程为：

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \tag{39}$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t). \tag{40}$$

要将状态从初始的 $x(t_0) = x_0$ 在规定的 t_f 到达 $x(t_f) = x_f$。求最优控制以最小化控制能量：

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} u^2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{41}$$

$t_0 = 0,\ t_f = 2,\ x_0 = [-2, 1]^{\mathrm{T}},\ x_f = [0, 0]^{\mathrm{T}}$

1/7 引入惩罚函数，消除终值约束

HJB 方程没有处理终端状态的约束。我们在原性能指标

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} u^2(t)\,\mathrm{d}t$$

基础上加上 $x(t_f) = x_f$ 的“惩罚函数”

$$h(x(t_f), t_f) = \frac{b}{2} \|x(t_f) - x_f\|_2^2 \tag{42}$$

b 很大 $x(t_f) \neq x_f$ 时性能指标大幅提升（受到惩罚）

$$J(u) = \frac{b}{2} \|x(t_f) - x_f\|_2^2 + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} u^2(t) dt \tag{43}$$

2/7 计算 Hamiltonian，求极小

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2}u^2(t) + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \Rightarrow u(t) = -p_2(t) = -\frac{\partial V}{\partial x_2}(x(t), t) \tag{44}$$

$$\min_u \mathcal{H} = \frac{\partial V}{\partial x_1}(x(t), t)x_2(t) - \frac{1}{2}[\frac{\partial V}{\partial x_2}(x(t), t)]^2 \tag{45}$$

3/7 得到 HJB 方程

将 $\min \mathcal{H}$ 代入，得到 HJB 方程

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x(t),t) = \frac{\partial V}{\partial x_1}(x(t),t)x_2(t) - \frac{1}{2}[\frac{\partial V}{\partial x_2}(x(t),t)]^2 \tag{46}$$

及考虑惩罚函数的边界条件

$$V(x(t_f),t_f) = \frac{b}{2}\|x(t_f) - x_f\|_2^2 = \frac{b}{2}[x_1(t_f)^2 + x_2(t_f)^2]. \tag{47}$$

4/7 求解 HJB 方程

假定 HJB 方程的解为二次形式，即

$$V(x(t),t) = \frac{1}{2}[k_1(t)x_1^2(t) + 2k_2(t)x_1(t)x_2(t) + k_3(t)x_2^2(t)]$$

则

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x(t),t) = \frac{1}{2}(\dot{k}_1(t)x_1^2(t) + 2\dot{k}_2(t)x_1(t)x_2(t) + \dot{k}_3(t)x_2^2(t))$$
$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(x(t),t) = k_1(t)x_1(t) + k_2(t)x_2(t)$$
$$\frac{\partial V}{\partial x_2}(x(t),t) = k_2(t)x_1(t) + k_3(t)x_2(t)$$

代入 HJB 方程 (46) 整理得

$$\dot{k}_1x_1^2 + 2\dot{k}_2x_1x_2 + \dot{k}_3x_2^2 = -2k_1x_1x_2 - 2k_2x_2^2 + k_2^2x_1^2 + 2k_2k_3x_1x_2 + k_3^2x$$

5/7 求得闭环形式最优控制

由于 HJB 方程对任意 x_1, x_2, t 均成立，得

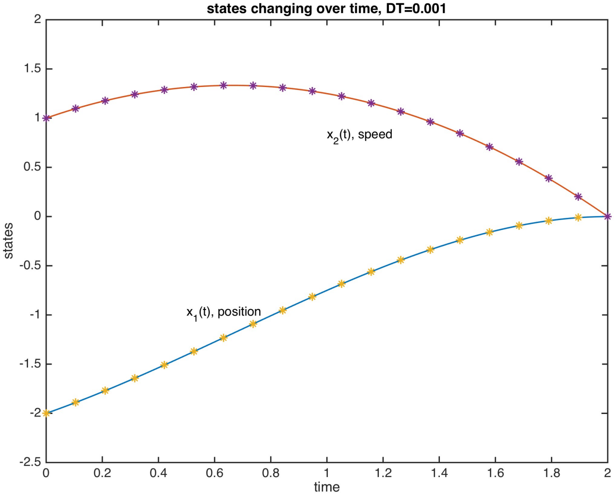
$$\dot{k}_1 = k_2^2 \tag{48}$$
$$\dot{k}_2 = -k_1 + k_2 k_3 \tag{49}$$
$$\dot{k}_3 = -2k_2 + k_3^2 \tag{50}$$

及终值条件

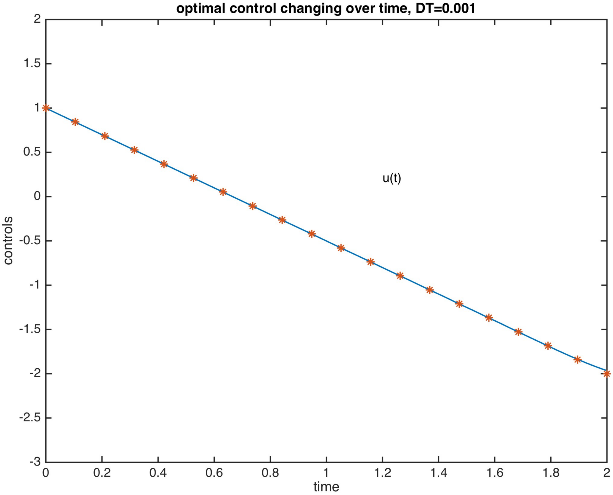
$$k_1(t_f) = b \tag{51}$$
$$k_2(t_f) = 0 \tag{52}$$
$$k_3(t_f) = b \tag{53}$$

求解该方程，得闭环最优控制 $\boxed{u(t) = -k_2(t)x_1(t) - k_3(t)x_2(t)}$

6/7 动态规划求解最优控制：状态-时间



7/7 动态规划求解最优控制：控制-时间



最优控制的数学理论

- 变分法与最优控制的驻点条件
  - Euler 的几何方法
  - Lagrange 的 δ 方法
  - Hamilton 方程组
  - Lagrange 乘子法
- Pontryagin 极小值原理与最优控制的必要条件
  - Weierstrass-Erdmann 条件
  - Weierstrass 条件
  - Pontryagin 极小值原理
- 动态规划与最优控制的充分条件
  - Hamilton-Jacobi 方程
  - Hamilton-Jacobi-Bellman 方程
  - Bellman 方程

关注：微信号“国科大最优控制”
课程微信群“国科大最优控制 2017”

飞跃 最优控制

国科大最优控制2017

该二维码7天内(9月15日前)有效，重新进入将更新