Семинар 3 по ЛА

Процесс ортогонализации

Пусть $\mathcal{F}=(\vec{f_1},\dots,\vec{f_n})$ – базис евкл. пр-ва E.

1. Построим ортогональный базис $G=(\vec{g_1},\dots,\vec{g_n})$:

$$\vec{g_1}=\vec{f_1}$$

$$\vec{g_2}=\vec{f_2}-\frac{(\vec{f_2},\vec{g_1})}{\|\vec{g_1}\|^2}\vec{g_1}$$

$$\vec{g_3}=\vec{f_3}-\frac{(\vec{f_3},\vec{g_1})}{\|\vec{g_1}\|^2}\vec{g_1}-\frac{(\vec{f_3},\vec{g_2})}{\|\vec{g_2}\|}\vec{g_2}$$

$$\vdots$$

$$\vec{g_n}=\vec{f_n}-\frac{(\vec{f_n},\vec{g_1})}{\|\vec{g_1}\|^2}\vec{g_1}-\frac{(\vec{f_n},\vec{g_2})}{\|\vec{g_2}\|^2}\vec{g_2}-\dots-\frac{(\vec{f_n},\vec{g}_{n-1})}{\|\vec{g}_{n-1}\|^2}\vec{g}_{n-1}.$$

2. Построим ортонормированный базис $\mathcal{E}=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$:

$$\vec{e_i}=\frac{\vec{g_i}}{\|\vec{g_i}\|},\quad i=1,\dots,n.$$

№4.67.

Применить процесс ортогонализации к системе векторов пр-ва $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением:

$\vec{f_1}=(1,1,1,1)$

$\vec{f_2}=(3,3,-1,-1)$

$\vec{f_3}=(-2,0,6,8)$

Решение

1) $\vec{g_1} = \vec{f_1} = (1, 1, 1, 1)$

2) $(\vec{f_2}, \vec{g_1}) = 3\cdot 1 + 3\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 4$

$\|\vec{g_1}\|^2 = (\vec{g_1}, \vec{g_1}) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4$

$\Rightarrow \vec{g_2} = \vec{f_2} - \dfrac{(\vec{f_2}, \vec{g_1})}{\|\vec{g_1}\|^2}\vec{g_1} = \vec{f_2} - \dfrac{4}{4}\vec{g_1} = (2, 2, -2, -2)$

3) 1) $(\vec{f_3}, \vec{g_1}) = -2 + 0 + 6 + 8 = 12$

$\|\vec{g_1}\|^2 = 4$

$\dfrac{(\vec{f_3}, \vec{g_1})}{\|\vec{g_1}\|^2} = \dfrac{12}{4} = 3$

2) $(\vec{f_3}, \vec{g_2}) = -4 + 0 - 12 - 16 = -32$

$\|\vec{g_2}\|^2 = (\vec{g_2}, \vec{g_2}) = 4 + 4 + 4 + 4 = 16$

$\dfrac{(\vec{f_3}, \vec{g_2})}{\|\vec{g_2}\|^2} = \dfrac{-32}{16} = -2$

3) $\vec{g_3} = \vec{f_3} - 3\vec{g_1} + 2\vec{g_2} = (-2, 0, 6, 8) -$

$-3(1, 1, 1, 1) +$

$+2(2, 2, 2, 2) = (-1, 1, -1, 1)$

Ответ: $(1, 1, 1, 1)$

$(2, 2, -2, -2)$

$(-1, 1, -1, 1)$

$\boxed{\text{Д/З I № 4.68}}$

Задача 1

Найти ортогональный базис линейной оболочки системы векторов

$\vec{a_1} = (2,-1,-1,0)^T$, $\vec{a_2} = (-1,2,-1,0)^T$; $\vec{a_3} = (-1,-1,2,-1)^T$

евкл. пр-ва $\mathbb{R}^4$ со станд. скал. произв.

Решение.

$\boxed{1}$ Проверим, что $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ лин. независимы.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{a_2} & \vec{a_1} & \vec{a_3} \end{matrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ :3 \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'; \quad rg A = rg A' = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ все три вектора лин. независимы

<u>Зам.</u> Если получится, что $rg <$ кол-ва векторов системы, то выбрать базис из меньшего кол-ва векторов (они соответствуют уголкам ступенек) и его ортогонализовать

$\boxed{2}$ Ортогонализовать систему $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ по ф-лам

$$\vec{b_1} = \vec{a_1}$$

$$\vec{b_2} = \vec{a_2} - \frac{(\vec{a_2}, \vec{b_1})}{\|\vec{b_1}\|^2}\vec{b_1}$$

$$\vec{b_3} = \vec{a_3} - \frac{(\vec{a_3}, \vec{b_1})}{\|\vec{b_1}\|^2}\vec{b_1} - \frac{(\vec{a_3}, \vec{b_2})}{\|\vec{b_2}\|^2}\vec{b_2}$$

ДЗ II. Задача 1 То же для $\vec{a_1} = (1,0,0,0)^T$ в $\mathbb{R}^4$.

$\vec{a_2} = (1,0,0,1)^T$

$\vec{a_3} = (1,1,1,0)^T$

Задача 2.

Даны векторы $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$ и $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$ евклидова пр-ва E_4 с координатами в базисе $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}7\\1\\-5\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}-9\\3\\17\\11\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\11\\13\end{pmatrix}$, $\vec{a}_4=\begin{pmatrix}1\\-7\\5\\-5\end{pmatrix}$, векторы которого определены относит. нек. ортонормированного базиса этого пр-ва.

I) Применяя процесс ортогонализации, ортонормировать базис $\{\vec{a}_i\}$ (полученный базис – $\{\vec{b}_j\}$).

ПЛАН

1) Ортогонализуем базис $\{\vec{a}_i\}$, получим базис $\{\vec{c}_k\}$

1) $\vec{c}_1=\vec{a}_1$

2) $\vec{c}_2=\vec{a}_2-\dfrac{(\vec{a}_2,\vec{c}_1)}{\|\vec{c}_1\|^2}\vec{c}_1$

3) $\vec{c}_3=\vec{a}_3-\dfrac{(\vec{a}_3,\vec{c}_1)}{\|\vec{c}_1\|^2}\vec{c}_1-\dfrac{(\vec{a}_3,\vec{c}_2)}{\|\vec{c}_2\|^2}\vec{c}_2$

4) $\vec{c}_4=\vec{a}_4-\dfrac{(\vec{a}_4,\vec{c}_1)}{\|\vec{c}_1\|^2}\vec{c}_1-\dfrac{(\vec{a}_4,\vec{c}_2)}{\|\vec{c}_2\|^2}\vec{c}_2-\dfrac{(\vec{a}_4,\vec{c}_3)}{\|\vec{c}_3\|^2}\vec{c}_3$

2) Нормируем базис $\{\vec{c}_k\}$, получим базис $\{\vec{b}_j\}$.

Решение I.

1) 1) $\vec{c}_1=\vec{a}_1=\begin{pmatrix}7\\1\\-5\\-5\end{pmatrix}$

2) $(\vec{a}_2,\vec{c}_1)=-9\cdot7+3\cdot1+17\cdot(-5)+11(-5)=-200$

$\|\vec{c}_1\|^2=7^2+1^2+(-5)^2+(-5)^2=100$

$\dfrac{(\vec{a}_2,\vec{c}_1)}{\|\vec{c}_1\|^2}=\dfrac{-200}{100}=-2$

$$\vec{c}_2 = \vec{a}_2 + 2\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) а) $(\vec{a}_3, \vec{c}_1) = 3\cdot 7 + (-1)\cdot 1 + 11(-5) + 13(-5) = -100$

$\|\vec{c}_1\|^2 = 100$

$$\frac{(\vec{a}_3, \vec{c}_1)}{\|\vec{c}_1\|^2} = \frac{-100}{100} = -1$$

б) $(\vec{a}_3, \vec{c}_2) = 3\cdot 5 + (-1)\cdot 5 + 11\cdot 7 + 13\cdot 1 = 100$

$\|\vec{c}_2\|^2 = 5^2 + 5^2 + 7^2 + 1^2 = 100$

$$\frac{(\vec{a}_3, \vec{c}_2)}{\|\vec{c}_2\|^2} = \frac{100}{100} = 1$$

в) $$\vec{c}_3 = \vec{a}_3 + \vec{c}_1 - \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

4) а) $(\vec{a}_4, \vec{c}_1) = 1\cdot 7 + (-7)\cdot 1 + 5(-5) + (-5)(-5) = 0$

б) $(\vec{a}_4, \vec{c}_2) = 1\cdot 5 + (-7)\cdot 5 + 5\cdot 7 + (-5)\cdot 1 = 0$

в) $(\vec{a}_4, \vec{c}_3) = 1\cdot 5 + (-7)(-5) + 5(-1) + (-5)\cdot 7 = 0$

г) $$\vec{c}_4 = \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2) Нормируем базис $\{\vec{c}_k\}$:

$\|\vec{c}_1\| = \|\vec{c}_2\| = \|\vec{c}_3\| = \|\vec{c}_4\| = 10$

$$\vec{b}_i = \frac{\vec{c}_i}{\|\vec{c}_i\|}$$

След., $$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}1 \\ -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}7 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ -0{,}1 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}, \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}7 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

II Найти матрицу перехода $T_{\vec{b}_j \to \vec{a}_i}$ от полученного ортонормир. базиса $\{\vec{b}_j\}$ к данному базису $\{\vec{a}_i\}$.

Решение II.

Выразим $\vec{a}_i$ через $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ и запишем (по столбцам) в матр. перехода.

Из I:
$$\begin{cases} \vec{b}_1 = \dfrac{\vec{a}_1}{10} \\ \vec{b}_2 = \dfrac{\vec{c}_2}{10} = \dfrac{\vec{a}_2 + 2\vec{a}_1}{10} \\ \vec{b}_3 = \dfrac{\vec{c}_3}{10} = \dfrac{\vec{a}_3 + \vec{a}_1 - (\vec{a}_2 + 2\vec{a}_1)}{10} = \dfrac{\vec{a}_3 - \vec{a}_1 - \vec{a}_2}{10} \\ \vec{b}_4 = \dfrac{\vec{c}_4}{10} = \dfrac{\vec{a}_4}{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_1 = 10\vec{b}_1 \\ 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = 10\vec{b}_2 \\ -a_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = 10\vec{b}_3 \\ \vec{a}_4 = 10\vec{b}_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_1 = 10\vec{b}_1 \\ \vec{a}_2 = 10\vec{b}_2 - 2\vec{a}_1 = 10\vec{b}_2 - 2\cdot 10\vec{b}_1 = \\ \qquad = -20\vec{b}_1 + 10\vec{b}_2 \\ \vec{a}_3 = 10\vec{b}_3 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \\ \qquad = 10\vec{b}_3 + 10\vec{b}_1 - 20\vec{b}_1 + 10\vec{b}_2 = \\ \qquad = -10\vec{b}_1 + 10\vec{b}_2 + 10\vec{b}_3 \\ \vec{a}_4 = 10\vec{b}_4 \end{cases}$$

След., $$T_{b_j \to a_i} = \begin{pmatrix} 10 & -20 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Зам. Этот способ здесь самый простой.

III Найти координаты $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в ортонормир. базисе $\{\vec{b}_j\}$.

I сп. По формулам преобразования координат векторов:

$$X = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}X' \Rightarrow X' = T_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}}X.$$

След., $X_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}}X_{\mathcal{A}}$

Для $\vec{p}$:

$$10\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-10\\10\end{pmatrix}$$

координаты $\vec{p}$ в базисе $\{\vec{b}_j\}$

Для $\vec{q}$:

$$10\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-20\\10\\-10\\0\end{pmatrix}$$ ← коорд-ты $\vec{q}$ в базисе $\{\vec{b}_j\}$

II сп. $\vec{p} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 + \vec{a}_4 =$

$= 10\vec{b}_1 + (-20\vec{b}_1 + 10\vec{b}_2) - (-10\vec{b}_1 + 10\vec{b}_2 + 10\vec{b}_3) + 10\vec{b}_4 =$

$= 0\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 - 10\vec{b}_3 + 10\vec{b}_4 \Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix}0\\0\\-10\\10\end{pmatrix}$ в базисе $\{\vec{b}_j\}$

$\vec{q} = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3 =$

$= 10\vec{b}_1 + 2(-20\vec{b}_1 + 10\vec{b}_2) - (-10\vec{b}_1 + 10\vec{b}_2 + 10\vec{b}_3) =$

$= -20\vec{b}_1 + 10\vec{b}_2 - 10\vec{b}_3 + 0\vec{b}_4 \Rightarrow \vec{q} = \begin{pmatrix}-20\\10\\-10\\0\end{pmatrix}$ в баз. $\{\vec{b}_j\}$

IV Вычислить скалярное произведение $(\vec{p}, \vec{q})$.

Решение III

Используем координаты $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в ортонормир. базисе :

$$(\vec{p}, \vec{q}) = 0\cdot(-20) + 0\cdot 10 + (-10)(-10) + 10\cdot 0 = 100.$$

<u>Зам.</u> Если использовать коорд-ты $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в произвольном базисе $\{\vec{a}_i\}$, то вычисление „по школьной ф-ле" даст неверный рез-т:

$$(\vec{p}, \vec{q}) = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-1)(-1) + 1\cdot 0 = 4,$$ что неверно.

Скал. произв. не зависит от выбора базиса!

V Вычислить угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$$\cos(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{(\vec{p}, \vec{q})}{\|\vec{p}\|\cdot\|\vec{q}\|} =$$

$$= \frac{100}{\sqrt{0^2+0^2+(-10)^2+10^2}\ \sqrt{(-20)^2+10^2+(-10)^2+0^2}} =$$

$$= \frac{100}{\sqrt{2\cdot 100}\sqrt{6\cdot 100}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

След., $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$

Ответ: ...

Д/З III Решить аналог. задачу из своего вар-та инд. дом. задания.

8

IV Вычислить скалярное произведение $(\vec{p}, \vec{q})$.

Решение III

Используем координаты $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в ортонормир. базисе :

$$(\vec{p}, \vec{q}) = 0\cdot(-20) + 0\cdot 10 + (-10)(-10) + 10\cdot 0 = 100.$$

Зам. Если использовать коорд-ты $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в произвольном базисе $\{\vec{a}_i\}$, то вычисление „по школьной ф-ле" даст неверный рез-т:

$(\vec{p}, \vec{q}) = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-1)(-1) + 1\cdot 0 = 4$, что неверно.

Скал. произв. не зависит от выбора базиса!

V Вычислить угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$$\cos(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{(\vec{p}, \vec{q})}{\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{q}\|} =$$

$$= \frac{100}{\sqrt{0^2+0^2+(-10)^2+10^2}\,\sqrt{(-20)^2+10^2+(-10)^2+0^2}} =$$

$$= \frac{100}{\sqrt{2\cdot 100}\,\sqrt{6\cdot 100}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

След., $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$

Ответ: ...

Задача 2.

Д/З III Решить аналог. задачу из своего вар-та инд. дом. задания.

Дополнение ортогональной системы векторов до ортогонального базиса

№ 4.73.

Проверить ортогональность векторов $\vec{e_1}=(1,-2,1,3)$, $\vec{e_2}=(2,1,-3,1)$ в евкл. пр-ве $\mathbb{R}^4$ и дополнить систему векторов $\vec{e_1},\vec{e_2}$ до ортогон. базиса $\mathbb{R}^4$.

Решение. $\boxed{\text{Д/З IV № 4.74, 4.76}}$

1) $(\vec{e_1},\vec{e_2})=1\cdot2+(-2)\cdot1+1\cdot(-3)+3\cdot1=0 \Rightarrow \vec{e_1}\perp\vec{e_2}$ (ортогональны)

2) Найдём все $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$: $\vec{x}\perp\vec{e_1}$ и $\vec{x}\perp\vec{e_2}$ (т.е. $(\vec{x},\vec{e_1})=0$ и $(\vec{x},\vec{e_2})=0$)

Последние условия дают однородную СЛАУ.

$$\begin{cases}1\cdot x_1-2\cdot x_2+1\cdot x_3+3\cdot x_4=0\\ 2x_1+1\cdot x_2-3x_3+1\cdot x_4=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\2&1&-3&1\end{pmatrix}\cdot(-2)\,]+ \sim\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&5&-5&-5\end{pmatrix}/:5\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&1&-1&-1\end{pmatrix}\cdot2\,]+\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x_1,x_2-\text{баз. неизв.}\\ x_3,x_4-\text{своб.}\end{matrix}$$

Вернёмся к системе ур-ний:

$$\begin{cases}x_1-x_3+x_4=0\\x_2-x_3-x_4=0\end{cases}$$

Выразим базисные неизв. через свободные:

$$\begin{cases}x_1=x_3-x_4\\x_2=x_3+x_4\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1=c_1-c_2\\x_2=c_1+c_2,\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\\x_3=c_1\\x_4=c_2\end{cases}\qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}c_1+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}c_2$$

(решение в коорд. виде) (решение в вект. виде)

Возьмём, напр., $\vec{e_3}=(1,1,1,0)$, $\vec{e_4}=(-1,1,0,1)$.

Они ортогональны, т.к. $(\vec{e_3},\vec{e_4})=0$.

Зам. Если $\vec{e_3},\vec{e_4}$ не орт., то надо их ортогон-ть.

Ответ: $\vec{e_3}=(1,1,1,0)$, $\vec{e_4}=(-1,1,0,1)$ – дополнение $\vec{e_1},\vec{e_2}$ до орт. базиса $\mathbb{R}^4$