



# 铣削过程稳定性分析的时域法研究进展

丁汉<sup>①</sup>, 丁焱<sup>②</sup>, 朱利民<sup>②</sup><sup>①</sup> 华中科技大学数字制造装备与技术国家重点实验室, 武汉 430074;<sup>②</sup> 上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240

E-mail: dinghan@mail.hust.edu.cn

2012-06-25 收稿, 2012-09-12 接受

国家重点基础研究发展计划(2011CB706804)和国家自然科学基金(51120155001, 51121002)资助

**摘要** 高速铣削是高性能加工的重要支撑技术, 获取无颤振铣削工艺参数是保证铣削加工精度、提高加工效率的前提. 再生颤振是引起铣削过程失稳的主要因素, 考虑再生效应的动态铣削过程可以表述为含周期系数矩阵的时滞微分方程组. 本文从时滞动力系统的动态响应数值求解的角度, 对基于动力学模型的铣削颤振稳定性时域(半)解析方法以及应用进行了综述, 着重介绍了基于积分方程的半解析方法, 并展望了铣削过程稳定性分析的发展趋势.

**关键词**铣削动力学  
稳定性分析  
半解析法

高速铣削具有在加工过程中保持相对低的切削力、保证高加工精度的同时又能获得高材料去除率的优势, 因而广泛应用于航空、航天、船舶、模具及汽车等领域的复杂零件制造. 目前高速铣削加工的研究工作主要体现在三个方面: 刀具轨迹规划、加工过程动力学和加工过程多物理场仿真. 刀具轨迹规划是根据零件模型、加工方案和误差要求生成刀具运动路径的过程<sup>[1~5]</sup>, 属于运动学层面的工作. 而从动力学角度看, 铣削加工过程中刀具-工件间的相对振动是降低产品表面质量、限制生产效率的主要原因, 通过优化工艺参数抑制振动影响需要解决以下两个问题:

(1) 基于铣削过程动力学模型的铣削过程颤振稳定性分析. 加工过程中的颤振是一种不稳定的自激振动, 按照颤振机理的不同, 可以分为再生颤振<sup>[6]</sup>、模态耦合颤振<sup>[7]</sup>、摩擦颤振<sup>[8]</sup>和力-热颤振<sup>[9]</sup>. 就铣削加工过程而言, 再生颤振是引起加工过程失稳及降低零件加工质量和生产效率的主要因素<sup>[10,11]</sup>. 目前国内外学者对铣削过程稳定性分析的工作集中在从铣削过程动力学模型出发寻找由工艺参数构成的加工过程稳定边界.

(2) 在稳定性分析基础上的动态加工误差分析. 由于存在强迫振动, 铣削过程的无颤振工艺参数尚不足以保证所期望的加工精度. 由加工过程振动

诱导的动态加工误差包括表面位置误差(surface location error, SLE)<sup>[12]</sup>和表面粗糙度<sup>[13]</sup>. 同时考虑无颤振和动态加工误差约束是优化选取工艺参数以实现高效率、高精度铣削的关键.

## 1 铣削过程动力学模型

不失一般性, 只计及刀具柔性的 2 自由度集中参数动力学模型如图 1 所示, 其中  $\phi_j(t)$  为第  $j$  刀具的角位移,  $\Omega$  为主轴转速(单位:  $\text{r min}^{-1}$ ),  $a_e$  为径向切深,  $f$  为工件相对刀具的进给方向,  $F_{t,j}$  和  $F_{r,j}$  分别为第  $j$  刀具受到的切向和径向切削力分量.

图 1 所示动力学系统的控制方程可以表示为<sup>[14~16]</sup>:

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = K_c(t)[q(t) - q(t-T)], \quad (1)$$

其中,  $M$ ,  $C$ ,  $K$  及  $q(t)$  分别表示刀具模态质量矩阵, 阻尼矩阵, 刚度矩阵及模态坐标;  $T$  为时滞量, 等于刀具切削周期, 即  $T = 60/(N\Omega)$ , 其中  $N$  是刀具齿数;  $K_c(t)$  表示切削力系数矩阵(详细推导可参考文献[14]), 满足  $K_c(t) = K_c(t+T)$ , 定义为

$$K_c(t) = \begin{bmatrix} -a_p h_{xx}(t) & -a_p h_{xy}(t) \\ -a_p h_{yx}(t) & -a_p h_{yy}(t) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中,  $a_p$  为轴向切深,  $h_{xx}(t)$ ,  $h_{xy}(t)$ ,  $h_{yx}(t)$  和  $h_{yy}(t)$  分别为

**英文版见:** Ding H, Ding Y, Zhu L M. On time-domain methods for milling stability analysis. Chin Sci Bull, 2012, 57, doi: 10.1007/s11434-012-5499-y

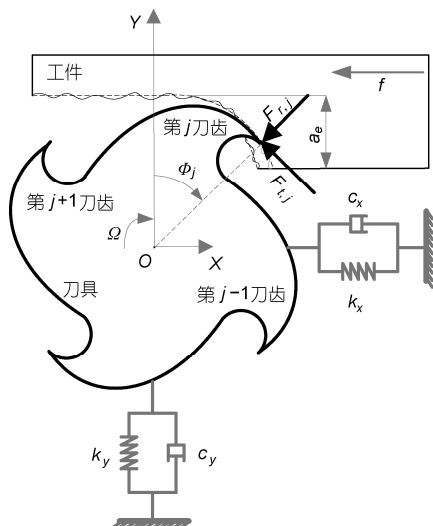


图1 计及刀具柔性的2自由度集中参数动力学模型

$$h_{xx}(t) = \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t)) \sin(\phi_j(t)) \left[ K_t \cos(\phi_j(t)) + K_n \sin(\phi_j(t)) \right], \quad (3)$$

$$h_{xy}(t) = \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t)) \cos(\phi_j(t)) \left[ K_t \cos(\phi_j(t)) + K_n \sin(\phi_j(t)) \right], \quad (4)$$

$$h_{yx}(t) = \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t)) \sin(\phi_j(t)) \left[ -K_t \sin(\phi_j(t)) + K_n \cos(\phi_j(t)) \right], \quad (5)$$

$$h_{yy}(t) = \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t)) \cos(\phi_j(t)) \left[ -K_t \sin(\phi_j(t)) + K_n \cos(\phi_j(t)) \right]. \quad (6)$$

在(3)~(6)式中,  $K_t$  和  $K_n$  为线性化切向与法向切削力系数,  $\phi_j(t)$  表示第  $j$  刀齿的角位移:

$$\phi_j(t) = (2\pi\Omega/60)t + (j-1) \cdot 2\pi/N. \quad (7)$$

窗函数  $g(\phi_j(t))$  定义为:

$$g(\phi_j(t)) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \phi_{st} < \phi_j(t) \bmod 2\pi < \phi_{ex}, \\ 0 & \text{其他,} \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $\phi_{st}$  和  $\phi_{ex}$  为第  $j$  刀齿的切入和切出角; 对于顺铣,  $\phi_{st} = \arccos(2a_e/D-1)$ , 同时  $\phi_{ex} = \pi$ ; 对于逆铣,  $\phi_{st} = 0$ , 同时  $\phi_{ex} = \arccos(1-2a_e/D)$ ,  $a_e/D$  为径向浸入比(径向切深/刀具直径).

$$\text{令 } \mathbf{p}(t) = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{q}(t)/2 \quad \text{及} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix}, \quad (1) \text{式}$$

可转化为如下状态空间形式:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-T)], \quad (9)$$

其中,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}/2 & \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}/4 - \mathbf{K} & -\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{K}_c(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

由于刀具的几何参数以及刀具-刀柄-主轴的结合面参数均十分复杂, 解析或数值获取刀具动力学模型参数  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  十分困难. 目前常用的获取刀尖频响函数的方法可分两大类: (1) 实验法, 即基于力锤冲击的模态实验方法<sup>[14]</sup>, 该方法简单易操作, 但缺点在于对于不同的刀具-刀柄-主轴组合均需实施模态试验, 工作量大; (2) 实验-解析法, Schmitz 等人<sup>[17,18]</sup>提出了导纳耦合子结构分析(RCSA)方法, 该方法可用于获取刀具-刀柄-主轴的结合面动力学参数, 并解析预报刀尖点频响函数, 从而大幅减少模态实验锤击次数.

对于切削力系数  $K_t$  和  $K_n$  的辨识, 主要方法有: (1) 基于静力学模型的实验标定法<sup>[14,19]</sup>, 即针对选定的刀具-工件组合, 实测若干组工艺参数下的切削力后标定模型中的切削力系数; (2) 基于正交切削试验数据的力学建模方法<sup>[20,21]</sup>, 只需知道工件材料的正交切削数据, 即可确定不同刀具参数与工艺参数下切削力模型中的待定系数.

对于考虑刀具和工件多模态效应的铣削动力学模型可分别参考文献[16]和[22], 对于耦合模态效应的建模可参考文献[23].

需要说明的是, 直接通过试切实验获取振动信号也可以判断加工过程的稳定性. 这类方法的优点是无需建立动力学模型, 如根据加工过程的切削力信号<sup>[24]</sup>或者主轴电流信号<sup>[25]</sup>来判断是否发生颤振. 但这类方法的缺点也明显: 需据不同的加工参数做很多组试切实验才能确定工艺参数稳定边界, 实验工作量极大. 本文主要内容是讨论如何从动力学方程(9)出发计算稳定边界.

## 2 基于模型的铣削稳定性分析与动态加工误差计算

与通常的无时滞周期系统相比, 方程(9)中由于存在时滞, 其单值算子(monodromy operator)和相空间均为无穷维, 且具有无穷多特征乘子, 导致运动稳定性分析困难. 国内外学者针对这一类时滞微分方程组, 已提出多种近似计算方法, 用以预报由临界加工参数构成的铣削过程稳定性边界. 这些方法大致

可以分为数值法和解析(或半解析)法两大类.

## 2.1 铣削稳定性分析方法

(1) 数值法. 数值法的本质是直接求解原始时滞微分方程获取铣削过程动态响应的时域历程, 再根据此响应的振动幅值是否发散(或者由响应构造的时域稳定判据)来确定加工过程的稳定性.

Sridhar 等人<sup>[26]</sup>提出了一种计算系统状态转移矩阵的数值算法. Tlustý 等人<sup>[27,28]</sup>提出了基于差分格式的时域系统动态响应计算方法. Smith 和 Tlustý<sup>[29]</sup>提出以仿真计算得到的切削力峰-峰值(peak-to-peak, PTP)作为颤振发生的判据. Davies 等人<sup>[30,31]</sup>提出了一种离散映射法预报出了小径向切深工况的附加不稳定区域(倍周期分岔). Campomanes 和 Altintas<sup>[32]</sup>提出了一种改进的时域计算方法, 并采用动态切厚与名义静态切厚的比值作为颤振发生的判据. 李忠群和刘强<sup>[33]</sup>提出了基于 Runge-Kutta 法的铣削稳定性时域分析方法.

直接时域仿真计算可以考虑非线性切削力、刀具振动时的时变径向浸入边界等复杂的非线性效应, 是目前为止最通用的方法, 但其计算效率比解析(或半解析)法低得多<sup>[10]</sup>.

(2) 解析(或半解析)法. 解析(或半解析)法的本质是通过原始时滞微分方程做合理的近似, 构造有限维单值算子逼近无限维单值算子, 从而降低稳定性分析难度、提高计算效率.

Minis 和 Yanushevsky<sup>[34]</sup>基于周期微分方程理论提出了使用 Nyquist 稳定性判据计算稳定边界的方法. Altintas 和 Budak<sup>[35,36]</sup>将时滞微分方程组转入频域表示, 并忽略周期力系数矩阵 Fourier 展开式的高阶项以及结构的交叉传递函数项, 提出了在频域中解析计算铣削稳定边界的单频率法 (zeroth order approximation, ZOA 法). 单频率法<sup>[35]</sup>在扫描预期的主轴转速范围时, 由临界切深的解析计算式直接确定与固定转速相对应的临界轴向切深, 故具有极高的计算效率, 但是该方法过于简化而不能预报小径向切深工况下出现的倍周期分岔. Merdol 和 Altintas<sup>[37]</sup>随后又扩展了多频率法<sup>[36]</sup>解决了这个问题. 多频率法考虑了周期力系数矩阵的 Fourier 高阶展开项, 在计算过程中需要迭代搜索颤振频率而不再具有临界切深的解析表达式. 多年来, Altintas 课题组将频率法推广应用于球头刀铣削、不等距齿铣削、考虑轴向

振动的三维铣削、变螺旋角铣削和插铣等工况判稳, 在学术界产生了很大的影响.

Bayly 等人<sup>[38]</sup>先针对单自由度铣削情况, 提出了时域有限元分析法(temporal finite element analysis, TFEA) 判断切削过程的稳定性, 随后又将该方法扩展应用于 2 自由度铣削情况. 时域有限元分析法假设切入时间区段上的位移模式, 再通过加权残值法获取一个刀齿切削周期上的 Floquet 状态转移矩阵, 最后由 Floquet 理论判断铣削稳定性. Mann 和 Patel<sup>[39]</sup>随后又给出了 TFEA 法的状态空间描述. Garg 等人<sup>[40]</sup>借助于网格加密的想法, 将该方法扩展应用于一般的含周期系数参数激励的时滞系统稳定性分析.

Inspurger 和 Stépán<sup>[41,42]</sup>提出了用于铣削过程稳定性预报的半离散法(semi-discretization method). 该方法等距离散时间周期后, 在每一小时间区段上对时滞项做加权平均, 同时对周期系数矩阵做零阶平均, 从而将时滞微分方程转化成一系列常微分方程. 在此基础上, 构造一个刀齿切削周期上的系统状态转移矩阵, 同样基于 Floquet 理论判断铣削稳定性. Inspurger 和 Stépán 随后又提出了一阶半离散法<sup>[43]</sup>, 即通过对离散后的时滞项做一阶逼近以提高原半离散法的收敛性. 龙新华等人用半离散法分析了考虑刀齿跳出效应的多时滞铣削过程稳定性<sup>[44]</sup>及变转速工况的铣削稳定性<sup>[45]</sup>. 李中伟等人<sup>[46]</sup>提出了基于 Magnus-Gaussian 截断的改进半离散法. 宋清华等人使用半离散法分析了刀具偏心<sup>[47]</sup>以及小径向切深下进给量<sup>[48]</sup>对铣削稳定性的影响. 万敏等人<sup>[49]</sup>提出了考虑铣削过程多时滞效应的统一的半离散法.

除了以上方法, Olgac 和 Hosek<sup>[50]</sup>提出了使用时滞系统根轨迹判断加工过程稳定性的方法, 并将之推广应用于不等距齿铣削判稳<sup>[51]</sup>. Ulsoy 等人提出了基于 Lambert W 函数的加工稳定性分析方法<sup>[52,53]</sup>. Butcher 等人提出了 Chebyshev 多项式法<sup>[54]</sup>和 Chebyshev 配点法<sup>[55]</sup>用以预报铣削过程稳定性.

## 2.2 动态加工误差计算方法

目前计算表面位置误差的主要方法有数值计算法<sup>[12]</sup>, 频域法<sup>[56]</sup>, 时域有限元分析法<sup>[16,57,58]</sup>以及谐波平衡法<sup>[59]</sup>. 其中时域有限元分析法是一种可以同步预报铣削稳定性与加工误差的半解析方法, 而且由于该方法在计算加工误差的过程中使用了不动点计算的技巧, 其计算效率远高于频域法<sup>[58]</sup>.

目前国际上主流的铣削稳定性判别半解析法在计算效率和通用性上均存在着一定的不足. 高速加工的特点是高转速、高进给、时变径向切深, 因此需要能够预报加工稳定性和动态加工误差的高效率、通用计算方法.

### 3 时域半解析方法

时域半解析法的基本思想是应用数值法计算时滞周期系数微分方程组在单周期内离散时刻的响应, 构造出单周期上逼近原微分动力系统的离散动力系统, 并获得单周期上的系统状态转移矩阵, 再根据 Floquet 定理, 由转移矩阵的谱半径是否小于 1 来判断系统是否稳定. 从现代数值分析的角度考虑, 动态系统响应的数值求解有三种技术: 基于微分方程的技术、基于变分法的技术和基于积分方程的技术. 半离散法和时域有限元法恰好对应前两种数值技术, 由于积分方程具有高精度的数值算法, 这就启发我们可以从数值积分的角度构造第三类时域方法. 以此为出发点, 我们提出了积分方程框架下的铣削加工稳定性判别新方法——全离散法<sup>[61]</sup>和数值积分法<sup>[62]</sup>. 下面对这些方法做一简要的对比.

#### 3.1 基于微分方程的半解析法

半离散法<sup>[42]</sup>分析(9)式稳定性的第一步是等距离散时间周期  $T$  为  $m$  个小时时间区段, 即  $T = m\tau$  (其中  $m$  为正整数). 在每一个时间区段  $k\tau \leq t \leq (k+1)\tau$ , ( $k = 0, \dots, m$ ) 上, 以  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\tau)$  为初始条件, 通过离散时滞项  $\mathbf{x}(t-T)$  同时对每一小时时间区段上的时滞项做加权平均, 并对周期系数项  $\mathbf{B}(t)$  做分片零阶平均处理, (9)式化简为如下常微分方程:

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_k) \mathbf{x}_k(t) - \frac{1}{2} \mathbf{B}_k [\mathbf{x}_{k-m+1} + \mathbf{x}_{k-m}], \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{B}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{B}(t) dt. \quad (11)$$

由(10)式可以解出  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}(k\tau + \tau)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} = & \exp[(\mathbf{A} + \mathbf{B}_k)\tau] \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} \{ \exp[(\mathbf{A} + \mathbf{B}_k)\tau] - \mathbf{I} \} \\ & \times [\mathbf{A} + \mathbf{B}_k]^{-1} \mathbf{B}_k [\mathbf{x}_{k-m+1} + \mathbf{x}_{k-m}]. \end{aligned} \quad (12)$$

(12)式可表示为

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{S}_k \mathbf{y}_k, \quad (13)$$

其中  $\mathbf{y}_k = \text{col}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \dots, \mathbf{x}_{k-m})$ ,

$$\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} \exp[(\mathbf{A} + \mathbf{B}_k)\tau] & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\frac{1}{2} \{ \exp[(\mathbf{A} + \mathbf{B}_k)\tau] - \mathbf{I} \} [\mathbf{A} + \mathbf{B}_k]^{-1} \mathbf{B}_k & -\frac{1}{2} \{ \exp[(\mathbf{A} + \mathbf{B}_k)\tau] - \mathbf{I} \} [\mathbf{A} + \mathbf{B}_k]^{-1} \mathbf{B}_k \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

在此基础上, 由(13)式可构造一个刀齿切削周期上的近似 Floquet 转移矩阵:

$$\Psi_1 = \mathbf{S}_{m-1} \mathbf{S}_{m-2} \dots \mathbf{S}_0. \quad (14)$$

最后据(14)式, 可由 Floquet 理论判断铣削稳定性:

$$\max \left( \left| \lambda(\Psi_1) \right| \right) \begin{cases} < 1 & \text{稳定,} \\ = 1 & \text{稳定边界,} \\ > 1 & \text{不稳定,} \end{cases} \quad (15)$$

其中,  $\lambda(\cdot)$  表示矩阵的谱半径.

#### 3.2 基于加权残值法的半解析法

时域有限元分析法<sup>[63]</sup>假设切入时间区段上的位移模式, 再通过加权残值法获取一个刀齿切削周期

上的系统状态转移矩阵. 以  $t_0$  表示刀具离开工件的时刻,  $t_f$  表示刀具离开工件后自由振动的时段长, 并记  $t_c$  为刀具切入工件的时段长(强迫振动时段长). 首先将强迫振动时段时间段  $[t_0 + t_f, t_0 + T]$  等距划分为  $m$  个小时时间段, 每一小时时间步  $\tau = (T - t_f)/m$ . 响应的每个采样时间点为  $t_i = t_0 + t_f + (i-1)\tau$ , 其中  $i = 1, \dots, m+1$  且  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_0 + t_f)$ .

对于时段  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , 假设状态函数和时滞状态函数分别为:

$$\mathbf{x}_i(t) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{a}_{ik}^n \zeta_k(\sigma), \quad (16)$$

$$\mathbf{x}_i(t-T) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{a}_{ik}^{n-1} \zeta_k(\sigma), \quad (17)$$

其中,  $\zeta_k(\sigma)$  为 Legendre 多项式,  $\sigma$  为局部时间  $0 \leq \sigma \leq \tau$ ,  $a_{ik}^n$  表示第  $n$  周期中  $[t_i, t_{i+1}]$  时段上的第  $k$  个状态值.

为了表示上的简单, 设  $m=2$ , 将(16), (17)式代入(9)式, 并由加权残值法可得

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{11}^1 & N_{12}^1 & N_{13}^1 & 0 & 0 \\ N_{21}^1 & N_{22}^1 & N_{23}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{11}^2 & N_{12}^2 & N_{13}^2 \\ 0 & 0 & N_{21}^2 & N_{22}^2 & N_{23}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^n \\ a_{12}^n \\ a_{21}^n \\ a_{22}^n \\ a_{23}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \exp(At_f) \\ P_{11}^1 & P_{12}^1 & P_{13}^1 & 0 & 0 \\ P_{21}^1 & P_{22}^1 & P_{23}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{11}^2 & P_{12}^2 & P_{13}^2 \\ 0 & 0 & P_{21}^2 & P_{22}^2 & P_{23}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{n-1} \\ a_{12}^{n-1} \\ a_{21}^{n-1} \\ a_{22}^{n-1} \\ a_{23}^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

其中

$$N_{pk}^i = \int_0^\tau (I \dot{\zeta}_k(\sigma) - (A+B)\zeta_k(\sigma)) \psi_p(\sigma) d\sigma, \quad (19)$$

$$P_{pk}^i = \int_0^\tau B \zeta_k(\sigma) \psi_p(\sigma) d\sigma, \quad (20)$$

$\psi_p(\sigma)$  为 Legendre 多项式, 即  $\psi_1(\sigma)=1$ ,  $\psi_2(\sigma)=2(\sigma/\tau)-1$ .

(18)式可以表示为紧凑的形式:  $Ga_n = Ha_{n-1}$ , 并可得 Floquet 转移矩阵:

$$\Psi_2 = G^{-1}H. \quad (21)$$

同理可根据 Floquet 理论由  $\Psi_2$  的谱半径判断铣削稳定性.

### 3.3 基于积分方程的半解析方法

在(9)式中, 考虑到  $B(t)[x(t)-x(t-T)]$  是齐次方程  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  的非齐次项, (9)式的解可以表示为

$$E_k = \begin{bmatrix} [I-F_{k+1}]^{-1}(F_0+F_{0,k}) & 0 & \cdots & 0 & [I-F_{k+1}]^{-1}F_{m-1} & [I-F_{k+1}]^{-1}F_m \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I & 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

由(31)式可构造一个刀齿切削周期上的近似 Floquet 转移矩阵:

$$\Psi_3 = E_{m-1}E_{m-2}\cdots E_0. \quad (33)$$

同样可根据 Floquet 理论由  $\Psi_3$  的谱半径判断铣

$$x(t) = \exp[A(t-t_0)]x(t_0)$$

$$+ \int_{t_0}^t \{\exp[A(t-\xi)]B(\xi)[x(\xi)-x(\xi-T)]\}d\xi, \quad (22)$$

其中  $x(t_0)$  为系统在  $t=t_0$  时刻的状态值.

(1) 全离散法. 全离散法<sup>[61]</sup>分析(22)式稳定性的第一步也是等距离散时间周期  $T$  为  $m$  个小时时间区段, 即  $T=m\tau$  (其中  $m$  为正整数). 在每一个时间区段  $[k\tau, (k+1)\tau]$ , ( $k=0, \dots, m$ ) 上, 以  $x_k = x(k\tau)$  为初始条件, (22)式可重新表示为如下的积分格式( $0 \leq t \leq \tau$ ):

$$x(k\tau+t) = \exp(At)x(k\tau) + \int_0^t \{\exp(A\xi)B(k\tau+t-\xi) \times [x(k\tau+t-\xi)-x(k\tau+t-\xi-T)]\}d\xi. \quad (23)$$

对于(23)式, 令  $t=\tau$ , 并在时间区段  $[k\tau, (k+1)\tau]$  对周期系数项  $B(k\tau+\tau-\xi)$ 、状态项  $x(k\tau+\tau-\xi)$  和时滞项  $x(k\tau+\tau-\xi-T)$  同时做线性逼近, 并积分可得

$$x_{k+1} = [I-F_{k+1}]^{-1}(F_0+F_{0,k})x_k + [I-F_{k+1}]^{-1}F_{m-1}x_{k+1-m} + [I-F_{k+1}]^{-1}F_mx_{k-m}, \quad (24)$$

其中

$$F_0 = \Phi_0, \quad (25)$$

$$F_{0,k} = (\Phi_2/\tau)B_0^{(k)} + (\Phi_3/\tau)B_1^{(k)}, \quad (26)$$

$$F_{k+1} = (\Phi_1 - \Phi_2/\tau)B_0^{(k)} + (\Phi_2 - \Phi_3/\tau)B_1^{(k)}, \quad (27)$$

$$F_{m-1} = -F_{k+1}, \quad (28)$$

$$F_m = -F_{0,k}, \quad (29)$$

$$\Phi_0 = \exp(A\tau), \Phi_1 = \int_0^\tau \exp(A\xi)d\xi, \Phi_2 = \int_0^\tau \xi \exp(A\xi)d\xi, \Phi_3 = \int_0^\tau \xi^2 \exp(A\xi)d\xi. \quad (30)$$

(24)式可表示为

$$y_{k+1} = E_k y_k, \quad (31)$$

其中  $y_k = \text{col}(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m})$ ,

削稳定性. 在全离散法的计算过程中, (30)式所示的矩阵指数函数只与转速有关, 而与切深无关. 半离散法(12)式所涉及的矩阵指数函数  $\exp[(A+B_k)\tau]$  则同时依赖转速和切深. 因此在“轴向切深-转速”参数平

面上计算稳定边界时,全离散法较之半离散法可用大幅提升计算效率。

若对周期系数项  $\mathbf{B}(k\tau + \tau - \xi)$ 、状态项  $\mathbf{x}(k\tau + \tau - \xi)$  和时滞项  $\mathbf{x}(k\tau + \tau - \xi - T)$  做更高阶的逼近,则易构造出具有更高收敛性的判稳算法<sup>[64]</sup>。同时,该方法可推广用于多时滞情况<sup>[65]</sup>的稳定性分析。

(2) 数值积分法。对于时间区段的划分,数值积分法<sup>[62]</sup>类似于时间有限元法,用  $t_0$  表示刀具离开工件的时刻,  $t_f$  表示刀具离开工件后自由振动的时段长,并记  $t_c$  为刀具切入工件的时段长(强迫振动时段长)。当刀具与工件不接触时, (22)式中的  $\mathbf{B}(\xi)$  项等于零, (22)式退化为  $\mathbf{x}(t) = \exp[\mathbf{A}(t - t_0)]\mathbf{x}(t_0)$ 。在自由振动结束的时,即  $t = t_0 + t_f$  时刻,状态项为

$$\mathbf{x}(t_0 + t_f) = \exp(\mathbf{A}t_f)\mathbf{x}(t_0). \quad (34)$$

接下来处理强迫振动时段  $[t_0 + t_f, t_0 + T]$ 。首先将时间段  $[t_0 + t_f, t_0 + T]$  等距划分为  $m$  个小时时间段,每一小时时间步  $\tau = (T - t_f)/m$ 。响应的每个采样时间点为  $t_i = t_0 + t_f + (i-1)\tau$ , 其中  $i = 1, \dots, m+1$  且  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_0 + t_f)$ 。

在采样时间点  $t_i$  ( $i = 2, \dots, m+1$ ),  $\mathbf{x}(t_i)$  的表达式为

$$\mathbf{x}(t_i) = \exp[\mathbf{A}(t_i - t_{i-1})]\mathbf{x}(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \{\exp[\mathbf{A}(t_i - \xi)] \times \mathbf{B}(\xi)[\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}(\xi - T)]\} d\xi. \quad (35)$$

这是一个第二类 Volterra 积分方程<sup>[66]</sup>, 此处使用牛顿-柯特斯公式来简化求解该式。由梯形公式<sup>[67]</sup>, (35)式可近似表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_i) = & \exp[\mathbf{A}(t_i - t_{i-1})]\mathbf{x}(t_{i-1}) \\ & + \frac{\tau}{2} \{ \exp[\mathbf{A}(t_i - t_{i-1})]\mathbf{B}(t_{i-1})(\mathbf{x}(t_{i-1}) \\ & - \mathbf{x}(t_{i-1} - T)) + \mathbf{B}(t_i)(\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_i - T)) \}. \end{aligned} \quad (36)$$

由(34)和(36)式,可以得出下面的离散动态映射:

$$\left( \mathbf{I} - \mathbf{C}_1 - \frac{\tau}{2} \mathbf{D}_1 \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t_{m+1}) \end{bmatrix} = \left( -\frac{\tau}{2} \mathbf{D}_1 + \mathbf{E} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_1 - T) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t_{m+1} - T) \end{bmatrix}, \quad (37)$$

其中

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \exp(\mathbf{A}\tau) & 0 & & \\ & \exp(\mathbf{A}\tau) & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \exp(\mathbf{A}\tau) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \exp(\mathbf{A}\tau)\mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & & \\ & \exp(\mathbf{A}\tau)\mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \exp(\mathbf{A}\tau)\mathbf{B}_m & \mathbf{B}_{m+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \exp(\mathbf{A}t_f) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中  $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, m+1$ 。

单个刀齿切削周期上的状态转移矩阵  $\Psi_4$  可从(37)式获得,即

$$\Psi_4 = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{L}, \quad (38)$$

$$\text{其中 } \mathbf{J} = \left( \mathbf{I} - \mathbf{C}_1 - \frac{\tau}{2} \mathbf{D}_1 \right), \quad \mathbf{L} = \left( -\frac{\tau}{2} \mathbf{D}_1 + \mathbf{E} \right).$$

最后,同样可由 Floquet 理论判断铣削稳定性。在数值积分的基础上,我们进一步提出了具有指数收敛阶的谱方法<sup>[68]</sup>以及面向多时滞工况的变步长法<sup>[69]</sup>。

如表 1 所示,比较半离散法获得的(14)式和全离散法获得的(33)式,以及 TFEA 法的(21)式和数值积分法的(38)式,可知基于积分方程的半解析方法为铣削过程稳定性分析提供了一个新的分析框架。

## 4 基于积分方程的半解析方法的应用

全离散法和数值积分法除了可用于加工过程稳定性分析外,还可应用于动态加工误差计算和稳定边界灵敏度分析。

### 4.1 稳定性与表面位置误差(SLE)同步预报<sup>[70]</sup>

如第 3 节所述,高性能工艺参数优化的前提是同步预报加工稳定性边界和动态加工误差。3.3 节所述的全离散法做必要的推广,即成为继时域有限元分析法之后第二个可以同步预报铣削稳定性和表面位

表 1 Floquet 转移矩阵比较

时域半解析方法	Floquet 转移矩阵	方程编号
半离散法 <sup>[42]</sup>	$\Psi_1 = \mathbf{S}_{m-1} \mathbf{S}_{m-2} \cdots \mathbf{S}_0$	(14)
时域有限元法 <sup>[39]</sup>	$\Psi_2 = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}$	(21)
全离散法 <sup>[61]</sup>	$\Psi_3 = \mathbf{E}_{m-1} \mathbf{E}_{m-2} \cdots \mathbf{E}_0$	(33)
数值积分法 <sup>[62]</sup>	$\Psi_4 = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{L}$	(38)

置误差的半解析方法. 讨论稳定性与表面位置误差同步预报问题, 需考虑稳态切削力作用下的动力学方程, 此时(1)式修正为:

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = K_c(t)[q(t) - q(t-T)] + f_0(t), \quad (39)$$

其中,

$$f_0(t) = \sum_{j=1}^N a_p \cdot g(\phi_j(t)) \left\{ f_i \cdot \begin{bmatrix} -K_t s \phi_j c \phi_j - K_n s^2 \phi_j \\ K_t s^2 \phi_j - K_n s \phi_j c \phi_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_{te} c \phi_j - K_{ne} s \phi_j \\ K_{te} s \phi_j - K_{ne} c \phi_j \end{bmatrix} \right\}, \quad (40)$$

为稳态切削力向量,  $s\phi_j$  表示  $\sin \phi_j$ ,  $c\phi_j$  表示  $\cos \phi_j$ .

同样地, (39)式可化为如下状态空间形式:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(t)[x(t) - x(t-T)] + f(t), \quad (41)$$

其中, 矩阵  $A$  和  $B(t)$  与(9)式中相同,  $f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f_0(t) \end{bmatrix}$ .

类似于(23)式, 在时间区段  $[k\tau, (k+1)\tau]$ , ( $k = 0, \dots, m$ ) 上, (41)式的解可以表示为 ( $0 \leq t \leq \tau$ ):

$$\begin{aligned} x(k\tau + t) = & \exp(At)x(k\tau) + \int_0^t \{ \exp(A\xi)B(k\tau + t - \xi) \\ & \times [x(k\tau + t - \xi) - x(k\tau + t - \xi - T)] \} d\xi \\ & + \int_0^t \exp(A\xi)f(k\tau + t - \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (42)$$

(42)式中, 令  $t = \tau$ , 并对四个时变项, 周期系数项  $B(k\tau + \tau - \xi)$ 、状态项  $x(k\tau + \tau - \xi)$ 、时滞项  $x(k\tau + \tau - \xi - T)$  和静态力项  $f(k\tau + \tau - \xi)$  同步做相应的线性逼近, 并积分可得

$$\begin{aligned} x_{k+1} = & [I - F_{k+1}]^{-1} (F_0 + F_{0,k})x_k + [I - F_{k+1}]^{-1} F_{m-1}x_{k+1-m} \\ & + [I - F_{k+1}]^{-1} F_m x_{k-m} + P_k, \end{aligned} \quad (43)$$

其中,

$$P_k = \Phi_1 f_0^{(k)} + \Phi_2 f_1^{(k)}. \quad (44)$$

使用扩展的状态向量  $y_k = \text{col}(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k+1-m}, x_{k-m})$ , (43)式可以写成:

$$y_{k+1} = E_k y_k + Q_k P_k, \quad (45)$$

其中  $E_k$  与(32)式相同,

$$Q_k = \text{col}([I - F_{k+1}]^{-1}, 0, \dots, 0). \quad (46)$$

系统在单个时间周期上的状态转移关系可由矩阵序列  $E_k, Q_k, P_k$  ( $k = 0, \dots, m-1$ ) 表出, 即

$$y_m = \Psi_3 y_0 + P, \quad (47)$$

其中,  $\Psi_3$  如(33)式所示,  $P$  由下式确定:

$$P = Q_{m-1}P_{m-1} + \sum_{i=0}^{m-2} (E_{m-1}E_{m-2} \cdots E_{i+1}Q_i P_i). \quad (48)$$

第  $\ell$  周期的稳态系数向量可根据不动点原理由(47)式计算出来:

$$y_\ell^* = (I - \Psi_3)^{-1} P. \quad (49)$$

由  $y_\ell^*$  即可计算出 SLE 与稳态振动诱导的表面粗糙度<sup>[13]</sup>.

## 4.2 稳定边界灵敏度分析<sup>[71]</sup>

Kurdi 等人<sup>[72]</sup>基于时域有限元分析法和有限差分法提出了铣削稳定边界相对于加工参数的灵敏度分析方法. 在半解析构造铣削过程 Floquet 状态转移矩阵的数值积分法的基础上, 我们可以无需借助任何差分运算, 获取 Floquet 状态转移矩阵相对于加工参数的灵敏度半解析表达式.

由(38)式可以获得 Floquet 状态转移矩阵  $\Psi_4$  对轴向切深  $a_p$  的导数:

$$\frac{\partial \Psi_4}{\partial a_p} = J^{-1} \left( -\frac{\tau}{2} D_1 + \frac{\tau}{2} D_1 J^{-1} L \right), \quad (50)$$

以及  $\Psi_4$  对主轴转速  $\Omega$  的导数:

$$\frac{\partial \Psi_4}{\partial \Omega} = J^{-1} \left( \frac{\partial L}{\partial \Omega} - \frac{\partial J}{\partial \Omega} J^{-1} L \right), \quad (51)$$

其中,

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega} = \left( -\frac{1}{2} \frac{d\tau}{d\Omega} \right) D_1 - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{d\tau}{d\Omega} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ A \exp(A\tau) B_1 & 0 & & \\ & A \exp(A\tau) B_2 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & A \exp(A\tau) B_m & 0 \end{pmatrix} + \frac{dt_f}{d\Omega} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \exp(At_f) A \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \Omega} = \left( -\frac{1}{2} \frac{d\tau}{d\Omega} \right) \mathbf{D}_1 - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{d\tau}{d\Omega} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ A \exp(A\tau) \mathbf{B}_1 & 0 & & & \\ & A \exp(A\tau) \mathbf{B}_2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & A \exp(A\tau) \mathbf{B}_m & 0 \end{bmatrix} - \frac{d\tau}{d\Omega} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ A \exp(A\tau) & 0 & & & \\ & A \exp(A\tau) & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & A \exp(A\tau) & 0 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

记  $\rho = t_c/T$ . 在(52), (53)式中, 自由振动时段长度  $t_f$  对主轴转速的导数和时间步  $\tau$  对主轴转速的导数为

$$\frac{dt_f}{d\Omega} = -\frac{60}{\Omega^2 N} (1 - \rho), \quad (54)$$

$$\frac{d\tau}{d\Omega} = -\frac{60\rho}{\Omega^2 Nm}. \quad (55)$$

状态转移矩阵  $\Psi_4$  某个特征值相对一般的变量  $z$  的导数<sup>[73]</sup>为

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{\left\langle v, \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} u \right\rangle}{\left\langle v, u \right\rangle}, \quad (56)$$

其中,  $v$  和  $u$  分别为和特征值  $\lambda$  相关的左、右特征向量, 符号  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示两个向量的内积. 特征值的最大模对变量  $z$  的导数等于

$$\frac{\partial |\lambda|_{\max}}{\partial z} = \frac{\lambda_{\max} \frac{\bar{\lambda}_{\max}}{\partial z} + \bar{\lambda}_{\max} \frac{\lambda_{\max}}{\partial z}}{2|\lambda|_{\max}}, \quad (57)$$

其中符号  $\bar{\lambda}$  代表复数  $\lambda$  的共轭.

最后, 类似于文献[72], 在给定的主轴转速  $\Omega_0$  及对应的临界轴向切深  $a_{\lim}$  下, 可以求得稳定性边界的灵敏度表达式:

$$\left. \frac{da_p}{d\Omega} \right|_{\substack{\Omega=\Omega_0 \\ a_p=a_{\lim}}} = - \left. \frac{\partial |\lambda|_{\max}}{\partial \Omega} \right|_{\substack{\Omega=\Omega_0 \\ a_p=a_{\lim}}} \bigg/ \left. \frac{\partial |\lambda|_{\max}}{\partial a_p} \right|_{\substack{\Omega=\Omega_0 \\ a_p=a_{\lim}}}. \quad (58)$$

上式为基于梯度的铣削加工工艺参数优化以及加工过程不确定性分析奠定了基础.

## 5 结论与展望

本文介绍了铣削过程稳定性分析的时域半解析方法的最新进展, 比较了半离散法、时域有限元法、全离散法和数值积分法的异同. 着重介绍了在积分方程框架下的全离散法和数值积分法.

全离散法打破了经典的在微分方程框架下构造逼近原始时滞微分方程的离散动力系统的常规思路, 转而在积分方程框架下给出描述铣削过程动力学的时滞积分方程, 并基于此方程同步离散时滞状态、当前状态和周期系数项, 半解析地构造出系统在单周期上的 Floquet 状态转移矩阵, 由于在计算过程中所涉及的矩阵指数函数只依赖于转速而与切深无关, 因此具有很高的计算效率. 该方法在通用性上有4方面的优势: (1) 适用于大/小径向切深、大/小轴向切深、薄壁件铣削等各种工况; (2) 可同时预报表面位置误差(SLE), 是继时域有限元分析法之后的第二个可以同步预报铣削稳定性和 SLE 的半解析方法; (3) 可应用于考虑指数切削力模型、变转速等非线性因素的铣削动力学系统; (4) 可推广应用于考虑不等距刀齿加工或刀具偏心的多时滞铣削动力学系统, 为刀具参数与加工过程工艺参数同步优化提供动力学依据. 在全离散法的基础上, 借鉴时域有限元分析法精细分离铣刀自由振动和强迫振动时段的优点, 进一步提出了在积分方程框架下半解析构造铣削过程 Floquet 状态转移矩阵的数值积分法, 并以此为基础获得了计算过程中无需借助任何差分运算的 Floquet 状态转移矩阵相对于加工参数的灵敏度半解析表达式, 为设计基于导数的铣削加工工艺参数优化算法奠定了基础.

铣削过程动力学理论与稳定性分析方法的进一步发展应重点开展以下几方面的工作: (1) 精确的五轴铣削过程动力学模型. 如面向侧铣的分布参数刀具动力学模型、面向难加工材料的低速切削过程阻尼模型以及更完整的“机床-刀具-工件-夹具”系统动力学模型等; (2) 基于动力学模型的主动控制策略. 突破常规的在转速-切深参数平面上选取加工参数的被



动颤振避免策略,设计主动控制系统,合理设计和配置驱动器和传感器,探索调节系统动态保障能控性和能观性的方法,拓展系统在“转速-切深”参数平面上的稳定区域;(3)与加工过程物理模型的融合.突

破常规铣削动力学模型只能预报已加工表面几何精度的局限,融合加工过程动力学和多物理模型,发展高效计算方法探索工艺系统和工艺过程参数对零件宏/微观性能的影响规律.

## 参考文献

- 1 Zhu L M, Ding H, Xiong Y L. Third-order point contact approach for five-axis sculptured surface machining using non-ball-end tools (I): Third-order approximation of tool envelope surface. *Sci China Technol Sci*, 2010, 53: 1904–1912
- 2 Zhu L M, Ding H, Xiong Y L. Third-order point contact approach for five-axis sculptured surface machining using non-ball-end tools (II): Tool positioning strategy. *Sci China Technol Sci*, 2010, 53: 2190–2197
- 3 Ye T, Xiong C H, Xiong Y L, et al. Kinematics constrained five-axis tool path planning for high material removal rate. *Sci China Technol Sci*, 2011, 54: 3155–3165
- 4 Guo Q, Sun Y W, Guo D M. Analytical modeling of geometric errors induced by cutter runout and tool path optimization for five-axis flank machining. *Sci China Technol Sci*, 2011, 54: 3180–3190
- 5 Bi Q Z, Wang Y H, Zhu L M, et al. Wholly smoothing cutter orientations for five-axis NC machining based on cutter contact point mesh. *Sci China Technol Sci*, 2010, 53: 1294–1303
- 6 Wiercigroch M, Budak E. Sources of nonlinearities, chatter generation and suppression in metal cutting. *Phil Trans R Soc A*, 2001, 359: 663–693
- 7 Ismail F, Vadari V R. Machining chatter of end mills with unequal modes. *J Eng Ind-T ASME*, 1990, 112: 229–235
- 8 Wiercigroch M, Krivtsov A M. Frictional chatter in orthogonal metal cutting. *Phil Trans R Soc A*, 2001, 359: 713–738
- 9 Davies M A, Burns T J. Thermomechanical oscillations in material flow during high-speed machining. *Phil Trans R Soc A*, 2001, 359: 821–846
- 10 Altintas Y, Weck M. Chatter stability of metal cutting and grinding. *CIRP Ann-Manuf Techn*, 2004, 53: 619–642
- 11 Altintas Y, Stépán G, Mordol D, et al. Chatter stability of milling in frequency and discrete time domain. *CIRP J Manuf Sci Techn*, 2008, 1: 35–44
- 12 Schmitz T, Ziegert J. Examination of surface location error due to phasing of cutter vibrations. *Precis Eng*, 1999, 23: 51–62
- 13 Bachrathy D, Insperger T, Stepan G. Surface properties of the machined workpiece for helical mills. *Mach Sci Technol*, 2009, 13: 227–245
- 14 Altintas Y. *Manufacturing Automation: Metal Cutting Mechanics, Machine Tool Vibrations, and CNC design*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- 15 Gradisek J, Kalveram M, Insperger T, et al. On stability prediction for milling. *Int J Mach Tool Manu*, 2005, 45: 769–781
- 16 Mann B P, Young K A, Schmitz T L, et al. Simultaneous stability and surface location error predictions in milling. *J Manuf Sci E-T ASME*, 2005, 127: 446–453
- 17 Schmitz T L. Predicting high-speed machining dynamics by substructure analysis. *CIRP Ann-Manuf Techn*, 2000, 49: 303–308
- 18 Schmitz T L, Davies M A, Kennedy M D. Tool point frequency response prediction for high-speed machining by RCSA. *J Manuf Sci E-T ASME*, 2001, 123: 700–707
- 19 Zhu R X, Kapoor S G, Devor R E. Mechanistic modeling of the ball end milling process for multi-axis machining of free-form surfaces. *J Manuf Sci E-T ASME*, 2001, 123: 369–379
- 20 Budak E, Altintas Y, Armarego E J A. Prediction of milling force coefficients from orthogonal cutting data. *J Manuf Sci E-T ASME*, 1996, 118: 216–224
- 21 Budak E, Ozturk E, Tunc L T. Modeling and simulation of 5-axis milling processes. *CIRP Ann-Manuf Techn*, 2009, 58: 347–350
- 22 Zhang X J, Xiong C H, Ding Y. A new solution for stability prediction in flexible part milling. *Lect Notes Comput Sci*, 2011, 7102: 452–464
- 23 Zhang X J, Xiong C H, Ding Y, et al. Milling stability analysis with simultaneously considering the structural mode coupling effect and regenerative effect. *Int J Mach Tool Manu*, 2011, 53: 127–140
- 24 Mao X Y, Liu H Q, Li B. Time-frequency analysis and detecting method research on milling force token signal in spindle current signal. *Sci China Ser E-Technol Sci*, 2009, 52: 2810–2813
- 25 Liu H Q, Chen Q H, Li B, et al. On-line chatter detection using servo motor current signal in turning. *Sci China Technol Sci*, 2011, 54: 3119–3129

- 26 Sridhar R, Hohn R E, Long G W. A stability algorithm for the general milling process. *J Eng Ind-T ASME*, 1968, 90: 330–334
- 27 Tlustý J, Ismail F. Basic non-linearity in machining chatter. *CIRP Ann-Manuf Techn*, 1981, 30: 299–304
- 28 Tlustý J, Ismail F. Special aspects of chatter in milling. *J Vib Acoust Stress Reliab Des-T ASME*, 1983, 105: 24–32
- 29 Smith S, Tlustý J. Efficient simulation programs for chatter in milling. *CIRP Ann-Manuf Techn*, 1993, 42: 463–466
- 30 Davies M A, Pratt J R, Dutterer B S, et al. Stability of low radial immersion milling. *CIRP Ann-Manuf Techn*, 2000, 49: 37–40
- 31 Davies M A, Pratt J R, Dutterer B, et al. Stability prediction for low radial immersion milling. *J Manuf Sci E-T ASME*, 2002, 124: 217–225
- 32 Campomanes M L, Altintas Y. An improved time domain simulation for dynamic milling at small radial immersions. *J Manuf Sci E-T ASME*, 2003, 125: 416–422
- 33 Li Z Q, Liu Q. Solution and analysis of chatter stability for end milling in the time-domain. *Chin J Aeronaut*, 2008, 21: 169–178
- 34 Minis I, Yanushevsky R. A new theoretical approach for the prediction of machine tool chatter in milling. *J Eng Ind-T ASME*, 1993, 115: 1–8
- 35 Altintas Y, Budak E. Analytical prediction of stability lobes in milling. *CIRP Ann-Manuf Techn*, 1995, 44: 357–362
- 36 Budak E, Altintas Y. Analytical prediction of chatter stability in milling—Part I: General formulation. *J Dyn Syst-T ASME*, 1998, 120: 22–30
- 37 Merdol S D, Altintas Y. Multi frequency solution of chatter stability for low immersion milling. *J Manuf Sci E-T ASME*, 2004, 126: 459–466
- 38 Bayly P V, Halley J E, Mann B P, et al. Stability of interrupted cutting by temporal finite element analysis. *Pro ASME Des Eng Tech Conf*, 2001, 6C: 2361–2370
- 39 Mann B P, Patel B R. Stability of delay equations written as state space models. *J Vib Control*, 2010, 16: 1067–1085
- 40 Garg N K, Mann B P, Kim N H, et al. Stability of a time-delayed system with parametric excitation. *J Dyn Syst-T ASME*, 2007, 129: 125–135
- 41 Insperger T, Stépán G. Semi-discretization method for delayed systems. *Int J Number Meth Eng*, 2002, 55: 503–518
- 42 Insperger T, Stépán G. Updated semi-discretization method for periodic delay-differential equations with discrete delay. *Int J Number Meth Eng*, 2004, 61: 117–141
- 43 Insperger T, Stépán G, Turi J. On the higher-order semi-discretizations for periodic delayed systems. *J Sound Vib*, 2008, 313: 334–341
- 44 Long X H, Balachandran B, Mann B P. Dynamics of milling processes with variable time delays. *Nonlinear Dynam*, 2007, 47: 49–63
- 45 Long X H, Balachandran B. Stability of up-milling and down-milling operations with variable spindle speed. *J Vib Control*, 2010, 16: 1151–1168
- 46 李中伟, 龙新华, 孟光. 基于 Magnus-Gaussian 截断的铣削系统稳定性的半离散分析法. *振动与冲击*, 2009, 28: 69–73
- 47 宋清华, 艾兴, 万熠, 等. 考虑刀具偏心的变径向切深铣削稳定性研究. *振动、测试与诊断*, 2008, 28: 206–210
- 48 宋清华, 艾兴, 万熠, 等. 小径向切深下进给量对铣削稳定性的影响. *中国机械工程*, 2008, 19: 1148–1152
- 49 Wan M, Zhang W H, Dang J W, et al. A unified stability prediction method for milling process with multiple delays. *Int J Mach Tool Manu*, 2010, 50: 29–41
- 50 Olgac N, Hosek M. A new perspective and analysis for regenerative machine tool chatter. *Int J Mach Tool Manu*, 1998, 38: 783–798
- 51 Olgac N, Sipahi R. Dynamics and stability of variable-pitch milling. *J Vib Control*, 2007, 13: 1031–1043
- 52 Maghami Asl F, Ulsoy A G. Analysis of a system of linear delay differential equations. *J Dyn Syst-T ASME*, 2003, 125: 215–223
- 53 Yi S, Nelson P W, Ulsoy A G. Delay differential equations via the matrix Lambert W function and bifurcation analysis: Application to machine tool chatter. *Math Biosci Eng*, 2007, 4: 355–368
- 54 Butcher E A, Ma H, Bueler E, et al. Stability of linear time-periodic delay-differential equations via Chebyshev polynomials. *Int J Number Meth Eng*, 2004, 59: 895–922
- 55 Butcher E A, Bobrenkov O A, Bueler E, et al. Analysis of milling stability by the Chebyshev collocation method: Algorithm and optimal stable immersion levels. *J Comput Nonlin Dyn*, 2009, 4: 031003
- 56 Schmitz T L, Mann B P. Closed-form solutions for surface location error in milling. *Int J Mach Tool Manu*, 2006, 46: 1369–1377
- 57 Mann B P, Bartow M J, Young K A, et al. Machining accuracy due to tool or workpiece vibrations. *ASME, Manuf Eng Div, MED*, 2003, 14: 55–62
- 58 Mann B P, Edes B T, Easley S J, et al. Chatter vibration and surface location error prediction for helical end mills. *Int J Mach Tool Manu*, 2008, 48: 350–361
- 59 Insperger T, Gradisek J, Kalveram M, et al. Machine tool chatter and surface location error in milling processes. *J Manuf Sci E-T ASME*, 2006, 128: 913–920
- 60 Bayly P V, Mann B P, Schmitz T L, et al. Effects of radial immersion and cutting direction on chatter instability in end-milling. *ASME, Manuf Eng Div, MED*, 2002, 13: 351–363

- 61 Ding Y, Zhu L M, Zhang X J, et al. A full-discretization method for prediction of milling stability. *Int J Mach Tool Manu*, 2010, 50: 502–509
- 62 Ding Y, Zhu L M, Zhang X J, et al. Numerical integration method for prediction of milling stability. *J Manuf Sci E-T ASME*, 2011, 133: 031005
- 63 Bayly P V, Halley J E, Mann B P, et al. Stability of interrupted cutting by temporal finite element analysis. *J Manuf Sci E-T ASME*, 2003, 125: 220–225
- 64 Ding Y, Zhu L M, Zhang X J, et al. Second-order full-discretization method for milling stability prediction. *Int J Mach Tool Manu*, 2010, 50: 926–932
- 65 Zhang X J, Xiong C H, Ding Y. Improved full-discretization method for milling chatter stability prediction with multiple delays. *Lect Notes Comput Sc*, 2010, 6425: 541–552
- 66 Delves L M, Mohamed J L. *Computational Methods for Integral Equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985
- 67 Yang W Y, Cao W, Chung T-S, et al. *Applied Numerical Methods Using Matlab*. Hoboken N. J.: Wiley-Interscience, 2005
- 68 Ding Y, Zhu L M, Zhang X J, et al. Milling stability analysis using the spectral method. *Sci China Technol Sci*, 2011, 54: 3130–3136
- 69 Zhang X J, Xiong C H, Ding Y, et al. Variable-step integration method for milling chatter stability prediction with multiple delays. *Sci China Technol Sci*, 2011, 54: 3137–3154
- 70 Ding Y, Zhu L M, Zhang X J, et al. On a numerical method for simultaneous prediction of stability and surface location error in low radial immersion milling. *J Dyn Syst-T ASME*, 2011, 133: 024503
- 71 Ding Y, Zhu L M, Zhang X J, et al. Response sensitivity analysis of the dynamic milling process based on the numerical integration method. *Chin J Mech Eng*, 2012, 25: 940–946
- 72 Kurdi M H, Haftka R T, Schmitz T L, et al. A robust semi-analytical method for calculating the response sensitivity of a time delay system. *J Vib Acoust-T ASME*, 2008, 130: 064504
- 73 Lax P D. *Linear Algebra and Its Applications*. New York: Wiley-Interscience, 2007