机器人学

作业 7：指数坐标

Robotics (2023-2024-2)

Homework 7: Exponential Coordinates

姓名：赵四维

学号：521021910696

班级：ME3403-01

E-mail：racheus.11@sjtu.edu.cn

2024 年 4 月 16 日

Question 1

已知旋转矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

且 $R = e^{\hat{\omega}\theta}, \omega \in \mathbb{R}^3, \theta \in [0, 2\pi)$, 求所有满足条件的 ω 和 θ。

Solution: 首先，由旋转矩阵 R，我们可以验算其满足正交性

$$r_i \cdot r_j = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

因此$R \in SO(3)$**(IMPORTANT!)**

接下来，求取矩阵的特征值

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 1) = 0 \tag{1}$$

因此矩阵的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$，由此，矩阵的迹（trace）为

$$\text{tr}(R) = \sum_{n=1}^{3} \lambda_n = -1 - 1 + 1 = -1 \tag{2}$$

由于有 $\text{tr}(R) = -1$, 我们可以得到 $cos\theta = -1$, 由 θ 的取值范围 $[0, 2\pi)$，我们可以得到 $\theta = \pi$。

由于特征值排列方式的不同，对角化矩阵的方式也有所不同，我们可以得到几个不同的结果：

1. $\omega = \frac{1}{\sqrt{2(1+R_{33})}} \begin{bmatrix} R_{13} \\ R_{23} \\ 1 + R_{33} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 带入验证此时的 R 是满足条件的。
2. $\omega = \frac{1}{\sqrt{2(1+R_{22})}} \begin{bmatrix} R_{12} \\ R_{22} \\ 1 + R_{32} \end{bmatrix}$ ，代入 $R_{22} = -1$，此时分母为 0，因此此时的 ω 不满足条件。
3. $\omega = \frac{1}{\sqrt{2(1+R_{11})}} \begin{bmatrix} R_{11} \\ R_{21} \\ 1 + R_{31} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，带入验证, 此时 ω 既不是单位向量，也无法得到 R。

综上，有且仅有 1 满足条件，再由于 $-\omega$ 也满足条件，因此有两个解 $\omega = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \theta = \pi.$

Question 2

已知 $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$，且满足

$$v_2 = e^{\hat{\omega}\theta}v_1$$

其中 $\omega = [\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}]^T, v_1 = [1,0,1]^T, v_2 = [0,1,1]^T$, 求 θ。

Solution: 首先，我们可以求取 R 的表达式

$$\begin{aligned}
R = e^{[\hat{\omega}]\theta} &= I + [\hat{\omega}]sin\theta + [\hat{\omega}]^2(1-cos\theta)\\
&= I + sin\theta\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix} + (1-cos\theta)\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}^2\\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + sin\theta\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0\end{bmatrix} + (1-cos\theta)\begin{bmatrix}-\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{8}{9}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1+\frac{5}{9}(cos\theta-1) & \frac{1}{3}sin\theta+\frac{4}{9}(1-cos\theta) & \frac{2}{3}sin\theta+\frac{2}{9}(1-cos\theta)\\ \frac{1}{3}sin\theta+\frac{4}{9}(1-cos\theta) & 1+\frac{5}{9}(cos\theta-1) & -\frac{2}{3}sin\theta+\frac{2}{9}(1-cos\theta)\\ -\frac{2}{3}sin\theta+\frac{2}{9}(1-cos\theta) & \frac{2}{3}sin\theta+\frac{2}{9}(1-cos\theta) & 1+\frac{8}{9}(cos\theta-1)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

再代入题目中的关系式 $v_2 = Rv_1$，我们可以得到

$$\begin{cases}1+\frac{5}{9}(cos\theta-1)+\frac{2}{3}sin\theta+\frac{2}{9}(1-cos\theta) = 0\\ \frac{1}{3}sin\theta+\frac{4}{9}(1-cos\theta)-\frac{2}{3}sin\theta+\frac{2}{9}(1-cos\theta) = 1\\ -\frac{2}{3}sin\theta+\frac{2}{9}(1-cos\theta)+1+\frac{8}{9}(cos\theta-1) = 1\end{cases}$$

由上述方程组，我们可以得到 $sin\theta = -1, cos\theta = 0$，因此 $\theta = \frac{3}{2}\pi$。(假设角度条件同第一题，$\theta \in [0, 2\pi)$)

Question 3

下图为二自由度机械臂，l_0, l_1, l_2 分别为连杆的长度，θ_1, θ_2 分别为连杆的角度。

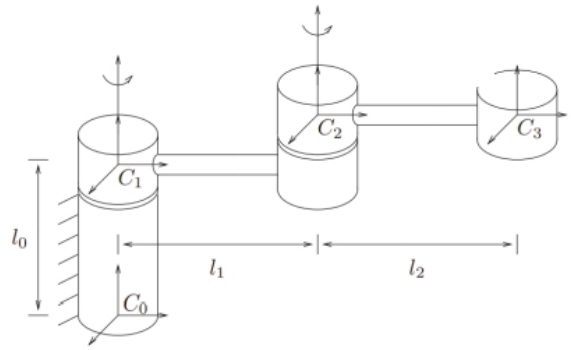

图 1: 二自由度机械臂

1. 求取 C_3 相对于 C_0 的位置和姿态。
2. 求取 C_3 相对于 C_0 的 spatial velocity。
3. 求取 C_3 相对于 C_0 的 body velocity。

Solution: 1. 由题目中的图示和指数坐标方法，

$$g_{st}(0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1+l_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \omega_1 = \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由 Revolute Joint 有 $\xi_i = \begin{bmatrix} \omega_i \times q_i \\ \omega_i \end{bmatrix}$， $e^{\xi_i \theta_i} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}_i \theta_i} & (I - e^{\hat{\omega}_i \theta_i})(\omega_i \times q_i) + \omega_i \omega_i^T q_i \theta_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 我们可以得到

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, e^{\xi_1 \theta_1} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, e^{\xi_2 \theta_2} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 s_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_1(1-c_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

thus,$g_{st}(\theta_1,\theta_2)=e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}g_{st}(0)$, 其中

$$e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}=\begin{bmatrix}c_1c_2-s_1s_2 & -c_1s_2-s_1c_2 & 0 & l_1s_2c_1+l_1s_1(c_2-1)\\ s_1c_2+c_1s_2 & -s_1s_2+c_1c_2 & 0 & l_1s_2s_1+l_1c_1(1-c_2)\\ 0 & 0 & 1 & l_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{12} & s_{12} & 0 & l_1(s_{12}-s_1)\\ s_{12} & -c_{12} & 0 & l_1(c_1-c_{12})\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

由分块矩阵的乘法，记 $e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}=\begin{bmatrix}R & \boldsymbol{p_1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $g_{st}(0)=\begin{bmatrix}I & \boldsymbol{p_2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，我们可以得到 C_3 相对于 C_0 的位置和姿态

$$\begin{aligned}g_{st}(\theta_1,\theta_2)&=\begin{bmatrix}R & \boldsymbol{p_1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & \boldsymbol{p_2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R & \boldsymbol{p_1}+R\boldsymbol{p_2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}c_{12} & -s_{12} & 0 & -l_2s_{12}-l_1s_1\\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_2c_{12}+l_1c_1\\ 0 & 0 & 1 & l_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

2. 由现代机器人学 spatial velocity 的定义，

$$\hat{V}_{ab}^S=\dot{g}_{ab}g_{ab}^{-1}=\begin{bmatrix}\dot{R}R^T & -\dot{R}R^T\boldsymbol{p_{ab}}+\dot{\boldsymbol{p_{ab}}}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

其中 $\dot{R}=\begin{bmatrix}-(\omega_1+\omega_2)s_{12} & -(\omega_1+\omega_2)c_{12} & 0\\ (\omega_1+\omega_2)c_{12} & -(\omega_1+\omega_2)s_{12} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$\dot{\boldsymbol{p_{ab}}}=\begin{bmatrix}-l_2(\omega_1+\omega_2)c_{12}-l_1\omega_1c_1\\ -l_2(\omega_1+\omega_2)s_{12}-l_1\omega_1s_1\\ 0\end{bmatrix}$.

注意上式中的 $\omega_1=\dot{\theta_1},\omega_2=\dot{\theta_2}$, 因此我们可以得到

$$\dot{R}R^T=\begin{bmatrix}-(\omega_1+\omega_2)s_{12} & -(\omega_1+\omega_2)c_{12} & 0\\ (\omega_1+\omega_2)c_{12} & -(\omega_1+\omega_2)s_{12} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{12} & -s_{12} & 0\\ s_{12} & c_{12} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}0 & -(\omega_1+\omega_2) & 0\\ (\omega_1+\omega_2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{p_{ab}}}-\dot{R}R^T\boldsymbol{p_{ab}}=\begin{bmatrix}-l_2(\omega_1+\omega_2)c_{12}-l_1\omega_1c_1\\ -l_2(\omega_1+\omega_2)s_{12}-l_1\omega_1s_1\\ 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-l_2(\omega_1+\omega_2)c_{12}-l_1\omega_1c_1\\ -l_2(\omega_1+\omega_2)s_{12}-l_1\omega_1s_1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_1\omega_2c_1\\ l_1\omega_2s_1\\ 0\end{bmatrix}$$

因此，我们可以得到 C_3 相对于 C_0 的 spatial velocity

$$\hat{V}_{30}^S = \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_1+\omega_2) & 0 & l_1\omega_2 c_1 \\ (\omega_1+\omega_2) & 0 & 0 & l_1\omega_2 s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果写成向量形式：

$$V_{30}^S = \begin{bmatrix} v_{30}^S \\ \omega_{30}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\omega_2 s_1 \\ l_1\omega_2 c_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_1+\omega_2 \end{bmatrix}$$

3. 由现代机器人学 body velocity 的定义，

$$\hat{V}_{ab}^b = g_{ab}^{-1}\dot{g}_{ab} = \begin{bmatrix} R^T\dot{R} & -R^T\boldsymbol{p_{ab}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

只用算

$$\begin{aligned} R^T\dot{R} &= \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -(\omega_1+\omega_2)s_{12} & -(\omega_1+\omega_2)c_{12} & 0 \\ (\omega_1+\omega_2)c_{12} & -(\omega_1+\omega_2)s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_1+\omega_2) & 0 \\ (\omega_1+\omega_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ R^T\dot{\boldsymbol{p_{ab}}} &= \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -l_2(\omega_1+\omega_2)c_{12} - l_1\omega_1 c_1 \\ -l_2(\omega_1+\omega_2)s_{12} - l_1\omega_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -l_2(\omega_1+\omega_2) - l_1\omega_1 cos(\theta_1+\theta_2-\theta_1) \\ l_1\omega_1 sin(\theta_1+\theta_2-\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2(\omega_1+\omega_2) - l_1\omega_1 cos\theta_2 \\ l_1\omega_1 sin\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以我们可以得到 C_3 相对于 C_0 的 body velocity

$$\hat{V}_{30}^b = \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_1+\omega_2) & 0 & -l_2(\omega_1+\omega_2)-l_1\omega_1 cos\theta_2 \\ (\omega_1+\omega_2) & 0 & 0 & l_1\omega_1 sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果写成向量形式：

$$V_{30}^b = \begin{bmatrix} v_{30}^b \\ \omega_{30}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2(\omega_1+\omega_2)-l_1\omega_1 cos\theta_2 \\ l_1\omega_1 sin\theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_1+\omega_2 \end{bmatrix}$$