Chapter 01 机器人学的数学基础

Racheus Zhao

School of Mechanic Engineering , SJTU

2023-2024-2 Spring

“There is hardly any theory which is more elementary than **linear algebra**, in spite of the fact that generations of professors and text book writers have obscured its simplicity by preposterous calculations with matrices.”

——Jean Dieudonne

1.位置、姿态和位姿

常用的两个坐标系：World Frame{A},Body Frame{B}

位置描述：在某个坐标系下的绝对坐标，记为 ${}^AP$，通常是3x1列向量，个位置的数值表示沿着坐标轴方向的投影距离。

$$
{}^AP = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}
$$

姿态描述：引入 *旋转矩阵* 概念，将Body Frame{B}的每一个基都用 {A}中的坐标来表示，机器人学中，定义Body Frame的每个单位矢量表示为${}^A\hat{X}_B,{}^A\hat{Y}_B,{}^A\hat{Z}_B$，将三个列向量按顺序排列，得到**旋转矩阵**（Rotation Matrix）：

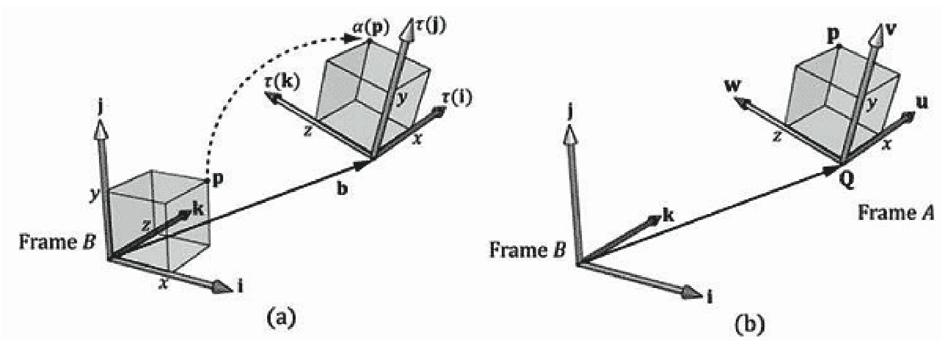
$$
{}^A_BR = ({}^A\hat{X}_B,{}^A\hat{Y}_B,{}^A\hat{Z}_B) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_B\cdot\hat{X}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{X}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{X}_A \\ \hat{X}_B\cdot\hat{Y}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{Y}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{Y}_A \\ \hat{X}_B\cdot\hat{Z}_A & \hat{Y}_B\cdot\hat{Z}_A & \hat{Z}_B\cdot\hat{Z}_A \end{bmatrix}
$$

*这里需要注意一下R左侧的两个字母，表示**下标B相对于上标A的表达***，另外，每一个列向量还有一个名字，就是《理论力学》教材中常讲到的**方向余弦**(direct cosine)。

位姿描述：顾名思义，位置+姿态的综合描述，在机器人学中常常成对出现。

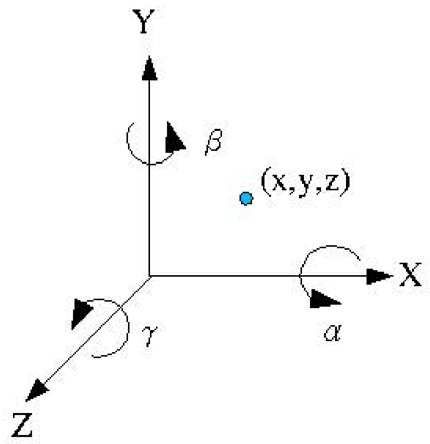
$$
\{B\} = \{{}^A_BR, {}^AP_{BORG}\}
$$

其中${}^AP_{BORG}$是确定 Body Frame{B}的原点位置的矢量。



关于旋转矩阵的一些结论和思考：

1. ${}^A_BR^T = {}^B_AR$
2. ${}^A_BR^T\,{}^A_BR = I_3$
3. ${}^A_BR^T = {}^A_BR^{-1}$(注意形式！Linear Alegbra中常见的$A^T = A^{-1}$)
4. 无论是${}^A_BR$还是${}^B_AR$都是**正交矩阵**（Orthognal Matrix），其满足《线性代数》课程中正交矩阵的相关性质。
5. 从另外的角度，旋转矩阵可以理解为坐标*过渡矩阵*，${}^AP = {}^A_BR\,{}^BP$,像小学学习分数乘法那样对应“分子分母”的位置可以简便记忆。



6. Rotation Matrix 还能描述**物体的旋转**，比如坐标系沿着Z轴旋转了θ角度（**机器人学中定义旋转的方向：从某轴的 *正向* 到 *逆向* 逆时针旋转的方向**），其旋转矩阵可以表示为

$$R_{\hat{Z}_A}(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同样地，对于绕着Y轴和X轴的旋转，有

$$R_{\hat{Y}_A}(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}, R_{\hat{X}_A}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

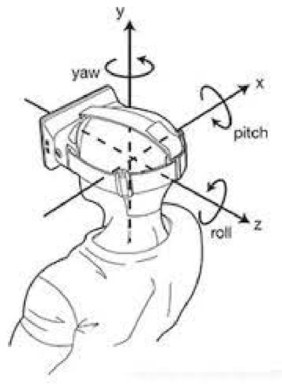
**绕哪个轴旋转，哪个轴对应的坐标分量就不会改变，这与我们的直观认知是相符的。*

---

2. X-Y-Z（RPY）固定角及其旋转(Fixed Angles Operator)

一种表示方法是Frame{B}先与Frame{A}重合，再**依次**绕$\hat{X}_A$旋转γ角度，绕$\hat{Y}_A$旋转β角度，绕$\hat{Z}_A$旋转α角度。

在机器人学及诸多工程领域中，我们常定义PRY角，即Roll（回转，Z）、Pitch（俯仰,Y）、Yaw（偏转,X）。



按照这个体系，每一次的旋转都应该按照“**从右到左**”的顺序进行矩阵的乘法。

$$ {}_B^AR_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)=\left[\begin{array}{c:cc} cos\alpha cos\beta & cos\alpha sin\beta sin\gamma - sin\alpha cos\gamma & cos\alpha sin\beta cos\gamma + sin\alpha sin\gamma \\ sin\alpha cos\beta & sin\alpha sin\beta sin\gamma + cos\alpha cos\gamma & sin\alpha sin\beta cos\gamma - cos\alpha sin\gamma \\ \hdashline -sin\beta & cos\beta & cos\beta cos\gamma \end{array}\right] $$

观察竖直虚线以左和水平虚线以下的部分，可以看到这几个元素是最简洁的，因此，如果我们知道某次旋转后的旋转矩阵

$$ {}_B^AR_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} $$

就可以反解出：

$$ \begin{gathered} \beta=Atan2(-r_{31},\sqrt{r_{11}^2+r_{21}^2}) \\ \alpha=Atan2(r_{21},r_{11}) \\ \gamma=Atan2(r_{32},r_{33}) \\ which-90^\circ\leq\beta\leq 90^\circ \end{gathered} $$

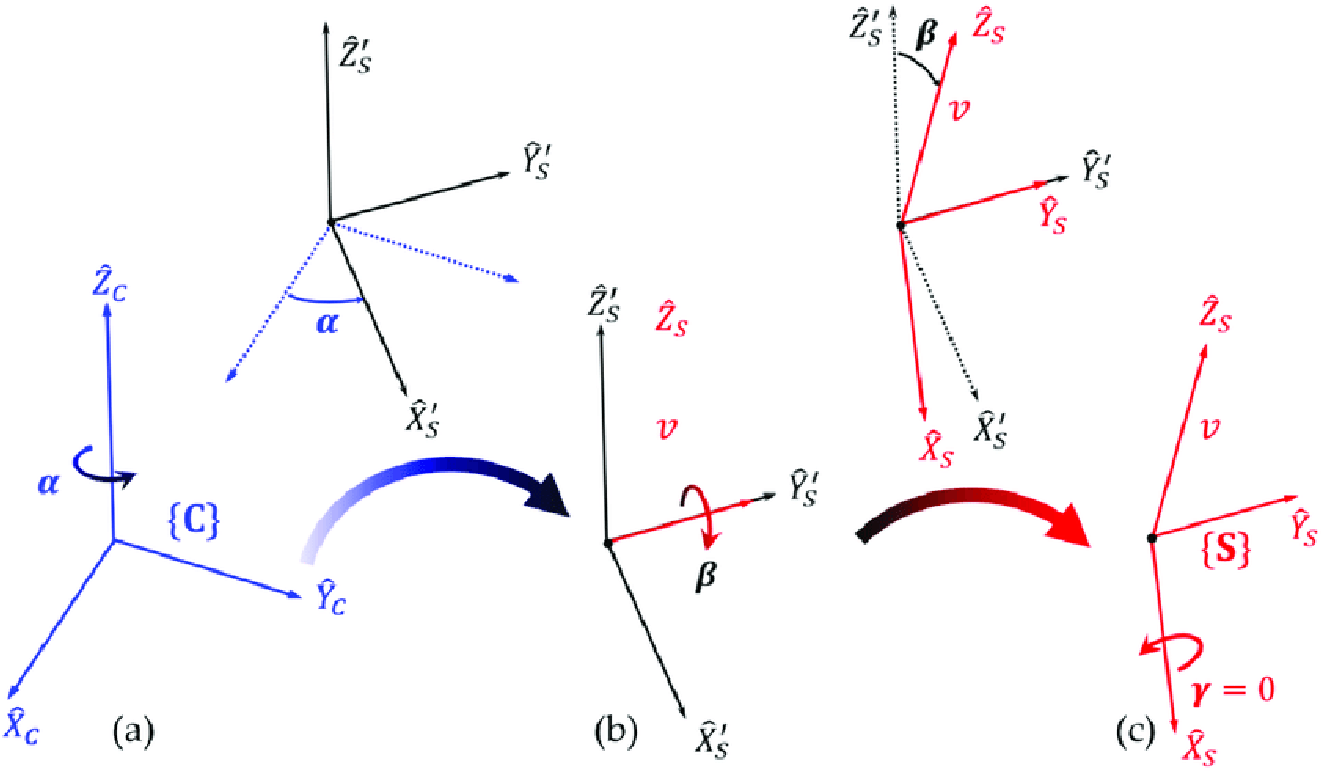
其中$Atan2(y,x)=tan^{-1}\frac{y}{x}$,叫做**双变量反正切函数**，可以根据x,y的值判别所在象限（MATLAB可以调用，自己也可以试着写一个？）

3. Z-Y-X欧拉角和Z-Y-Z欧拉角(Euler Angles Operator)

另外一种表示方式，是坐标系每次随着一根轴转动，转动后以现有的位置为原始位置，再进行下一次绕另外轴的转动，这样每次的旋转轴就不再是*固定的坐标系* 。这种情况下的旋转遵循“**从左到右**”的顺序。

i.e.先按照$\hat{Z}$轴旋转α角度，使得$\hat{X}$转到$\hat{X}'$,$\hat{Y}$转到$\hat{Y}'$,以此类推……

$$ {}_B^AR_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)=R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)=\begin{bmatrix} cos\alpha cos\beta & cos\alpha sin\beta sin\gamma - sin\alpha cos\gamma & cos\alpha sin\beta cos\gamma + sin\alpha sin\gamma \\ sin\alpha cos\beta & sin\alpha sin\beta sin\gamma + cos\alpha cos\gamma & sin\alpha sin\beta cos\gamma - cos\alpha sin\gamma \\ -sin\beta & cos\beta & cos\beta cos\gamma \end{bmatrix} $$



注意到这个矩阵和上面的矩阵完全相同！即：**三次绕固定轴旋转的最终姿态和以相反顺序绕运动坐标轴转动的最终姿态相同。**

同理还有Z-Y-Z表示方法

$$
{}_B^AR_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}
$$

在已知旋转矩阵的情况下，还是可以用Atan2去反解角度。

Summary: 对于Fixed Angles Operator，一共有$3\times 3\times 2 = 12$种方法达成从起点到终点的旋转，同样的，对于Euler Angles Operator,也有12种方法。具体方法的选择需要根据实际情况或*题目要求*。

没有特别的理由优先采用何种表示方法。

——John J.Craig

这也和我们之前学的“矩阵的每行、每列的地位是相同的”这一观念是相吻合的。

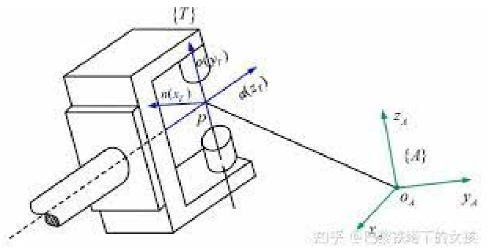
4. 等效角度-轴线表示法(Angle-Axis)

本门课程不要求，但是作为探索应该是一个蛮有意思的数学推导过程。

你可以尝试从这里获取一些想法。

5. 位姿综合和齐次变换

5.1 机械爪的NOA坐标系



手爪坐标系——与手爪固连在一起的坐标系

Z轴——手指接近物体的方向，接近矢量a（Approach）

Y轴——两手指的连线方向，方位矢量o（Orientation）

X轴——右手法则规定，法向矢量n（Normal）

手爪的方向——旋转矩阵R，描述手爪的姿态

$$R = [n \quad o \quad a]$$

因此手爪位姿的描述为{T}={n o a p},其中p为坐标原点位置。

5.2 齐次变换矩阵

def：一个4*4的矩阵算子，代表了坐标系的平移和旋转复合操作。

$$^A_BT = \begin{pmatrix} ^AP \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} ^A_BR_{3\times3} & ^AP_{BORG} \\ \hdashline O_{1\times3} & 1 \end{array}\right]$$

以上4*4矩阵称为**齐次变换矩阵。**

运动算子：$^Ap_2 = T^Bp_1$，用于表示点P运动前后的坐标关系，i.*e*.

$$\begin{pmatrix} ^AP \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} ^A_BR_{3\times3} & ^AP_{BORG} \\ \hdashline O_{1\times3} & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} ^BP \\ 1 \end{bmatrix}$$

Example 1：如果给定Frame{A}、{B}、{C}，{B}相对于{A}的描述为^A_BT,{C}相对于{B}的描述为^B_CT,求{C}相对于{A}的描述？

[Solve]：

$$^A_CT = ^A_BT^B_CT = \begin{bmatrix} ^A_BR & ^Ap_{Bo} \\ O_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^B_CR & ^Bp_{Co} \\ O_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ^A_BR^B_CR & ^A_BR^Ap_{Bo} + ^Ap_{Co} \\ O_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$$

*回顾：《线性代数》分块矩阵的乘法。

Example 2：已知Frame{B}相对于Frame{A}的${}_B^AT$,求其逆变换${}_B^AT^{-1}$

[Solve]：显然的有${}_A^BR={}_B^AR^T$,

另外，${}^B({}^AP_{BORG})$为${}^AP_{BORG}$在Frame{B}下的描述，其值显然为**0**(向量)

$$
\begin{aligned}
{}^B({}^AP_{BORG}) &= {}_A^BR\,{}^AP_{BORG} + {}^BP_{AORG} = \mathbf{0} \\
\Rightarrow {}^BP_{AORG} &= -{}_A^BR\,{}^AP_{BORG} = (-{}_B^AR^T)({}^AP_{BORG})
\end{aligned}
$$

因此

$$
{}_B^AT^{-1} = {}_A^BT = \left[\begin{array}{c:c} {}_B^AR^T_{3\times3} & (-{}_B^AR^T)\,{}^AP_{BORG} \\ \hdashline O_{1\times3} & 1 \end{array}\right]
$$

**当然，也可以通过线性代数中*初等行变换*的方式去解决逆矩阵的问题，上述方式是利用向量性质的简便运算。*