

机器人学

作业 5：运动学轨迹规划

Robotics (2023-2024-2)

Homework 5: Kinematic Trajectory Planning



姓名：赵四维

学号：521021910696

班级：ME3403-01

E-mail: racheus.11@sjtu.edu.cn

2024 年 4 月 1 日

1 三次样条轨迹计算

对于一个单自由度的连杆，对运动角度轨迹规划为两段三次样条曲线，运动开始与结束时速度为 0，且在中间点速度与加速度连续，已知初始角度为 θ_0 ，中间角度为 θ_1 ，终止角度为 θ_2 。

$$\text{Trajectory1: } \theta(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3$$

$$\text{Trajectory2: } \theta(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$$

每段曲线的计算时间区间为: $t = 0 \sim t_{fi}$, 其中 $i = 1, 2$, 计算 $t = t_{f1} = t_{f2}$ 时八个参数的计算表达式。

[Solution]:

笔者最先做的时候没有考虑 $t = t_{f1} = t_{f2}$ 的情形，因此求解了通解，过程如下：

由第一段样条曲线可知：

$$\begin{cases} \theta(0) = a_{10} = \theta_0 \\ \theta(t_{f1}) = a_{10} + a_{11}t_{f1} + a_{12}t_{f1}^2 + a_{13}t_{f1}^3 = \theta_1 \\ \dot{\theta}(0) = a_{11} = 0 \\ \dot{\theta}(t_{f1}) = a_{11} + 2a_{12}t_{f1} + 3a_{13}t_{f1}^2 \end{cases} \quad (1)$$

上述方程组 (1) 解决了两个未知数 a_{10} 和 a_{11} ，接下来求解第二段样条曲线：

$$\begin{cases} \theta(0) = a_{20} = \theta_1 \\ \theta(t_{f2}) = a_{20} + a_{21}t_{f2} + a_{22}t_{f2}^2 + a_{23}t_{f2}^3 = \theta_2 \\ \dot{\theta}(0) = a_{21} \\ \dot{\theta}(t_{f2}) = a_{21} + 2a_{22}t_{f2} + 3a_{23}t_{f2}^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

上述方程组 (2) 解决了两个未知数 a_{20} ，接下来，还有 5 个未知数，我们需要建立 5 个线性无关的方程，才能完全求解。

由方程组 (1)，将 a_{10} 和 a_{11} 代入，得以得到

$$a_{12}t_{f1}^2 + a_{13}t_{f1}^3 = \theta_1 - \theta_0 \quad (3)$$

由于转折位置的速度和加速度连续，因此有

$$\text{Velocity B.C.: } 2a_{12}t_{f1} + 3a_{13}t_{f1}^2 = a_{21} \quad (4)$$

$$\text{Acceleration B.C.: } 2a_{12} + 6a_{13}t_{f1} = 2a_{22} \quad (5)$$

在方程组 (2) 中, 将 $a_{20} = \theta_1$ 代入, 得到

$$a_{21}t_{f2} + a_{22}t_{f2}^2 + a_{23}t_{f2}^3 = \theta_2 - \theta_1 \quad (6)$$

$$a_{21}t_{f2} + 2a_{22}t_{f2} + 3a_{23}t_{f2}^2 = 0 \quad (7)$$

至此, 五个方程 (3) ~ (7) 已经联立完毕, 可以求解 $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 。

由于参数、字母较多, 联立求解的过程较为复杂, 笔者将详细说明:

[step1]: (7) $\times t_{f2} - (6)$, 消去 a_{21} 得到 a_{22} 和 a_{23} 的表达式:

$$a_{22}t_{f2}^2 + 2a_{23}t_{f2}^3 = \theta_1 - \theta_2 \quad (8)$$

[step2]: (4) $\times t_{f1} - 2 \times (3)$, 得到 a_{21} 和 a_{13} 的表达式:

$$a_{13}t_{f1}^3 = a_{21}t_{f1} + 2\theta_0 - 2\theta_1 \quad (9)$$

求解 eq.(9), 得

$$a_{21} = \frac{a_{13}t_{f1}^3 - 2\theta_0 + 2\theta_1}{t_{f1}}$$

[step3]: (5) $\times t_{f1}^2 - 2 \times (3)$, 得到 a_{22} 的表达式:

$$4a_{13}t_{f1}^3 = 2a_{22}t_{f1}^2 + 2\theta_0 - 2\theta_1 \quad (10)$$

求解 eq.(10), 得

$$a_{22} = \frac{2a_{13}t_{f1}^3 - \theta_0 + \theta_1}{t_{f1}^2}$$

[step4]: (7) $\times t_{f2} - (6)$, 得到 a_{23} 和 a_{22} 的关系:

$$a_{23}t_{f2}^3 = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2 - a_{22}t_{f2}^2) \quad (11)$$

[step5]: 将方程 (11) 代入 (6), 并代入上方计算的 a_{21}, a_{22} , 得到仅关于 a_{13} 的方程:

$$\begin{aligned} a_{21}t_{f2} + a_{22}t_{f2}^2 + a_{23}t_{f2}^3 &= a_{21}t_{f2} + a_{22}t_{f2}^2 + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2 - a_{22}t_{f2}^2) \\ &= \underbrace{\frac{a_{13}t_{f1}^3 + 2\theta_1 - 2\theta_0}{t_{f1}}t_{f2} + \frac{2a_{13}t_{f1}^3 - \theta_0 + \theta_1}{t_{f1}^2}}_{\text{Equation only contains } a_{13}} = \frac{3}{2}(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \quad (12)$$

这样, 我们可以计算得到

$$a_{13} = \frac{(2t_{f1}t_{f2} + \frac{1}{2})\theta_0 - (2t_{f1}t_{f2} + 2)\theta_1 + \frac{3}{2}\theta_2}{t_{f1}^3(t_{f1}t_{f2} + 1)} \quad (13)$$

[step6]: 将 a_{13} 代入 (3),(9),(10),(11) 中, 可以解出所有参数。

这里给出最终结果表达:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{10} = \theta_0 \\ a_{11} = 0 \\ a_{12} = \frac{-(3t_{f1}t_{f2} + \frac{3}{2})\theta_0 + (3t_{f1}t_{f2} + 3)\theta_1 - \frac{3}{2}\theta_2}{t_{f1}^2(t_{f1}t_{f2} + 1)} \\ a_{13} = \frac{(2t_{f1}t_{f2} + \frac{1}{2})\theta_0 - (2t_{f1}t_{f2} + 2)\theta_1 + \frac{3}{2}\theta_2}{t_{f1}^3(t_{f1}t_{f2} + 1)} \\ a_{20} = \theta_1 \\ a_{21} = \frac{\frac{3}{2}(\theta_2 - \theta_0)}{t_{f1}(t_{f1}t_{f2} + 1)} \\ a_{22} = \frac{3t_{f1}t_{f2}\theta_0 + (3t_{f1}t_{f2} + 3)\theta_1 + 3\theta_2}{t_{f1}^2(t_{f1}t_{f2} + 1)} \\ a_{23} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2t_{f2}^3} - \frac{3t_{f1}t_{f2}\theta_0 - (3t_{f1}t_{f2} + 3)\theta_1 + 3\theta_2}{2t_{f1}^2(t_{f1}t_{f2} + 1)} \end{array} \right.$$

注意: 上述解是考虑了 t_{f1}, t_{f2} 的情况, 如果 $t = t_{f1} = t_{f2}$, 可以将上面的解中的 t_{f1}, t_{f2} 替换为 t , 即可得到解, 在 $t = t_{f1} = t_{f2}$ 的情况下, 方程的复杂度就能够很好的下降, 解为:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{10} = \theta_0 \\ a_{11} = 0 \\ a_{12} = \frac{-9\theta_0 + 12\theta_1 - 9\theta_2}{4t^2} \\ a_{13} = \frac{5\theta_0 - 8\theta_1 + 3\theta_2}{4t^2} \\ a_{20} = \theta_1 \\ a_{21} = \frac{-3\theta_0 + 3\theta_2}{4t} \\ a_{22} = \frac{6\theta_0 - 12\theta_1 + 6\theta_2}{4t^2} \\ a_{23} = \frac{-3\theta_0 + 8\theta_1 - 5\theta_2}{4t^3} \end{array} \right.$$

2 6R 机器人的运动规划

已知一个 6R 机械臂参数如第三次作业图 2 所示（可直接使用参考答案的方法建 DH 系），连杆参数为 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ ，要求机械臂的末端经过以下任务点：

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

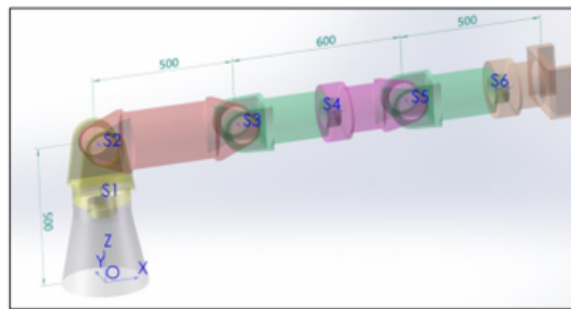


图 1: 6R 机器人示意图

2.1 基于关节角操作空间的轨迹规划

[Solution]: 首先说明，笔者这里没有采用老师在群内给出的 DH 参数，而是自己建立了 DH 参数，因为群内参考答案给出的建系参数为标准 DH，而我在作业 3 中采用的是 Modified DH，因此这里采用 Modified DH 建系。参数建立同作业三：

Parameter \ Joints	1	2	3	4	5	6
θ	$\theta_1 + 0$	$\theta_2 + 0$	$\theta_3 - 90$	$\theta_4 + 0$	$\theta_5 + 0$	$\theta_6 + 0$
d	500	0	0	600	0	500
α_{i-1}	0	-90	0	-90	90	-90
a_{i-1}	0	0	500	0	0	0

表 1: 6R 机器人 MDH 参数表

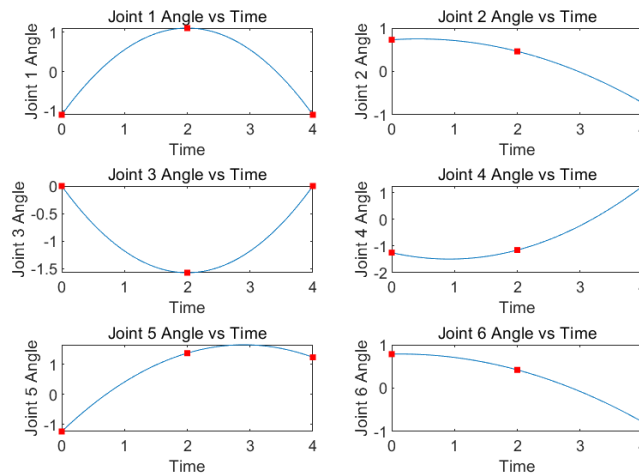
本节作业的代码参见[Click here to jump to the MATLAB code](#)。

基本思路是通过先通过运动学逆解，求解出三个关键节点的关节空间表达式 $\mathbf{q}_i (i = 1, 2, 3)$ ，根据这三个关键节点，通过三次样条插值，得到关节角随时间的变化，最后通过正运动学，得到末端的位置和姿态，用末端坐标系 X,Y,Z 三个方向的平移向量和 RPY 欧拉角的旋转向量随时间的变化，画出图像。

另外，笔者设置的运动时间为 $0 \sim 4s$ ，时间间隔为 $0.02s$ ，共计 200 个时间点。

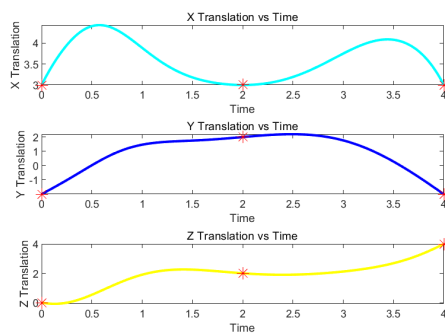
关节角参数随时间的变化：

Angle diagram of each joint under joint spline



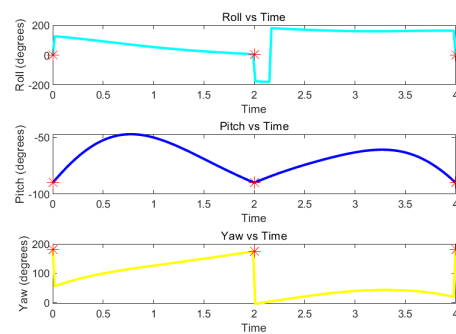
平移向量和旋转向量随时间变化：

Translation vectors of effector under joint spline



(a) Transformation Vector

Rotation vectors of effector under joint spline(RPY)



(b) Rotation Vector

机构运动动画参见也通过上述程序一并绘出，见[here](#)。

2.2 基于运动空间空间的轨迹规划

[Solution]: 本节作业的代码参见[Click here to jump to the MATLAB code](#)。

动画见[here](#)。

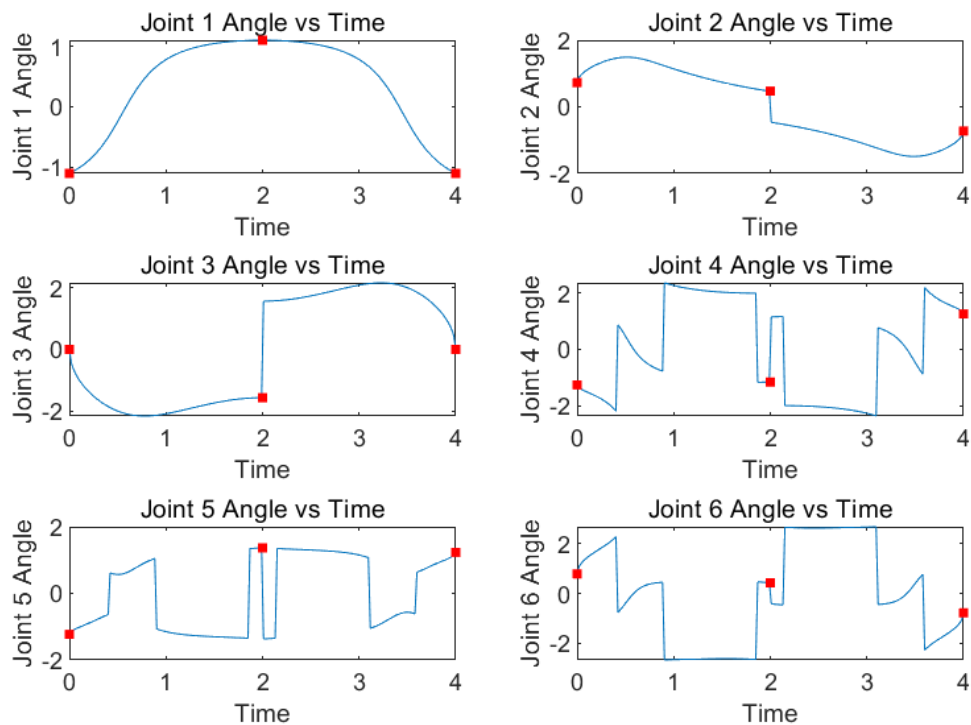
和上面类似，基本思路是找到三个目标点在空间中的坐标。将矩阵分解为旋转部分和平移部分，通过三次样条插值，得到末端的位置和姿态，用末端坐标系 X,Y,Z 三个方向的平移向量和 RPY 欧拉角的旋转向量随时间的变化，画出图像。

值得一提的是，笔者查阅相关资料，发现很多教材、教程采用的都是四元数位姿插值，由于我们课程对这个方法没有过多要求，因此在代码编写时有所参考。还有一种方法是球面线性插值 (Slerp)：是一种保证插值结果是有效旋转矩阵的方法。它将两个旋转矩阵之间的角度插值，然后在单位球面上进行插值。这样做可以确保插值结果是有效的旋转矩阵。我在代码文档的最后给出了 `slerp_rotm()` 函数的一种可能实现方式。

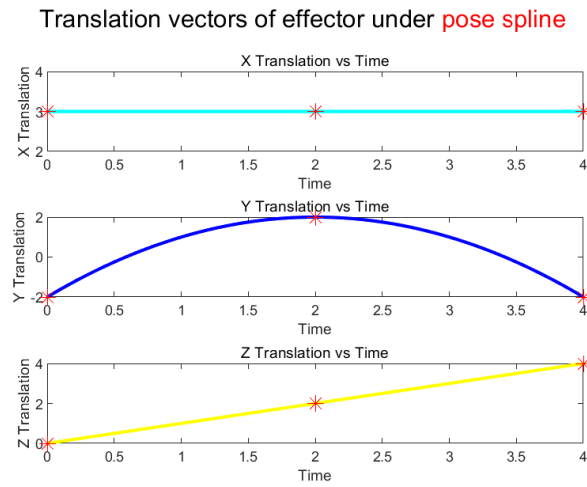
不过观察会发现三个点处坐标系的旋转矩阵是相同的，因此本题这里的插值只需要对平移向量进行插值即可。

关节角参数随时间的变化：

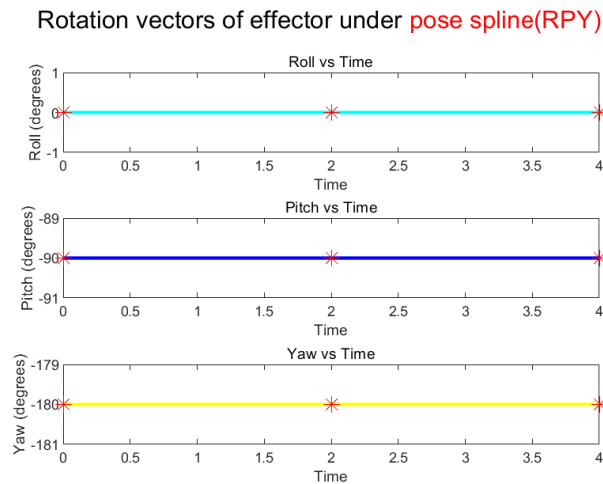
Angle diagram of each joint under pose spline



平移向量随时间变化:



旋转向量随时间变化:



由上面六幅图可以看出，基于关节角操作空间的轨迹规划的轨迹更加平滑，而基于运动空间的轨迹规划的突变更大，这是因为在关节空间中，关节角的变化是连续的，而在运动空间中，末端的位置和姿态的变化是连续的，后者会导致信号的输入端突变，因此在实际应用中，需要根据具体情况选择合适的轨迹规划方法。

同样地，笔者将代码备份至[here](#)，如果上述作业因为路径问题无法打开，麻烦助教老师查看这个链接，谢谢！