

# 机器人学

作业 1：平面 2R 机械臂

**Robotics (2023-2024-2)**

**Homework 1: Planar 2R Robotic Arm**



姓名：赵四维

学号：521021910696

班级：ME3403-01

E-mail: racheus.11@sjtu.edu.cn

2024 年 3 月 4 日

# 1 2R 机械臂的运动学分析

## 1.1 Jacobian Matrix

[Solution]:

根据题目要求，我们需要求解 2R 机械臂的雅可比矩阵。首先我们需要求解机械臂的正运动学方程，即末端执行器的位置和姿态与关节角度的关系。根据题目给出的机械臂结构，我们可以得到机械臂的正运动学方程如下：

$$\begin{cases} x = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \phi = \theta_1 + \theta_2 \end{cases} \quad (1)$$

其中， $x, y, \phi$  分别代表末端执行器的位置和姿态， $\theta_1, \theta_2$  分别代表机械臂的两个关节角度， $l_1, l_2$  分别代表机械臂的两个连杆长度。根据正运动学方程，通过求导可以求解出机械臂的雅可比矩阵如下：

$$\begin{cases} \dot{x} = -l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \dot{y} = l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \dot{\phi} = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{cases} \quad (2)$$

由  $[\dot{x}, \dot{y}, \dot{\phi}]^T = J \cdot [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T$ ，我们可以得到雅可比矩阵  $J$  如下：

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \phi}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

由《线性代数》课程知识，我们可以讨论 Jacobian 矩阵的秩。将矩阵的第二列的  $(-1)$  倍加到第一列，我们可以得到如下的矩阵：

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2 \rightarrow r_1} \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

从数学角度看，如果 Jacobian 矩阵的秩为 1，需要满足如下的条件：

$$\begin{cases} -l_1 \sin(\theta_1) = 0 \\ l_1 \cos(\theta_1) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

且二者需要同时满足。由正余弦函数的相位差可知，两个条件总是不能同时满足的。因此，我们可以 Jacobian 矩阵的秩为 2。这一点也可以从机械原理上得到印证，因为机械臂的自由度是由关节的个数决定的，而 2R 机械臂的自由度为 2，这一点是相互印证的。

[Appendix] 笔者个人理解，题目中的 Jacobian 矩阵和我们常规定义的 Jacobian 矩阵有一定的区别。常规定义的 Jacobian 矩阵是  $2 \times 2$  的矩阵，形如：

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (6)$$

这种情况下，取特殊情况  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ，我们可以得到：

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_1 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

在这种情况下存在 0 行，因此 Jacobian 矩阵的秩为 1。但是相同的特殊情况作用于题目中的  $3 \times 2$  矩阵，我们可以得到：

$$J'_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_1 + l_2 & l_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

显然，在这种特殊情况下，上述（8）矩阵中  $l_1 + l_2 \neq l_2$ ，因此 Jacobian 矩阵的秩为 2。所以本题中的 Jacobian 矩阵的秩一定为 2。

## 1.2 MATLAB Operation

[Click here to jump to the MATLAB code.](#)

第二问是第一问的延续，只需在 MATLAB 中编辑相应的矩阵即可，这里不再赘述。

输入为两个关节角度（弧度制），终端输出 Jacobian 矩阵，并在窗口中画出对应的机械臂姿态。

[demo:]

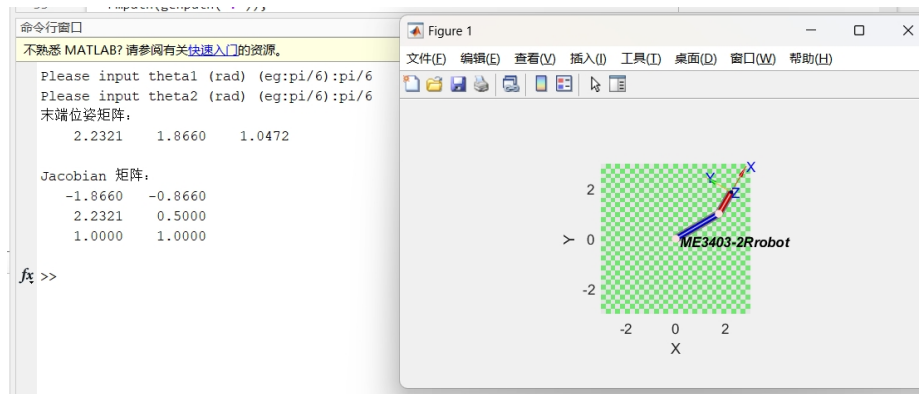


图 1:  $[\pi/6, \pi/6]$  对应的机械臂的姿态

### 1.3 MATLAB Kinematics Inverse Solution

[Click here to jump to the MATLAB code.](#)

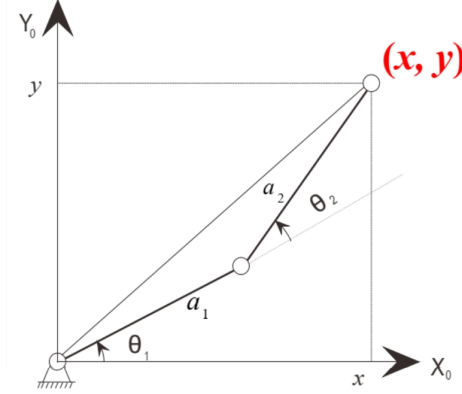


图 2: 任一时刻的姿态

易得:

$$D = \cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

$$\theta_2 = \arctan 2\left(\frac{\sqrt{1-D^2}}{D}\right)$$

$$\theta_1 = \arctan 2(y, x) - \arctan 2(a_2 \sin \theta_2, a_1 + a_2 \cos \theta_2)$$

需要注意，这里的  $\arctan 2$  函数是 MATLAB 中的  $\text{atan2}$  函数，这个函数在机器人学中至关重要，其优势在于可以正确地处理四个象限的所有角度，并且避免了由于除数为零而产生的错误，它的定义为：

$$\arctan 2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ \text{undefined} & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

第三问重点在于数学公式的推导和求解的判断。但是需要注意解的存在性。比如给定矩阵  $p = [2.5 \quad 2.5 \quad \frac{\pi}{6}]^T$ ，在这个位置上显然通过集合求解会有两个值，但是两个值末端的姿态角均不满足  $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{6}$  要求。因此，我们需要对解的存在性进行判断。

[demo:]

```

===== (3) Inverse Solution of 2R arms =====
please input position x :2.5
please input position y :2.5
please input position phi (rad):pi/6
Error : The q matrix does not exist!

```

图 3: 任一时刻的姿态

## 1.4 Trajectory Planning

[Click here to jump to the MATLAB code.](#)

直接点击运行即可。

绘制轨迹如图:

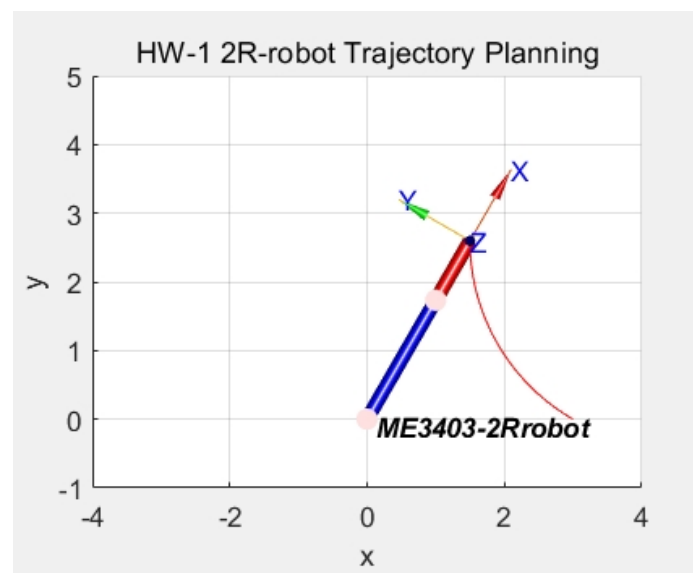


图 4: 任一时刻的姿态

运动轨迹视频: [Click here to jump to the video.](#)

本作业汇报使用  $\text{\LaTeX}$  编写, 秉持着记录学习与成长、资源开放和共享之精神, 笔者也将源代码已经上传至[here](#)。如果有前面作业有无法打开或者链接错误等情况, 烦请助教老师在上面这个链接里查看作业源代码。当然出于研究兴趣, 笔者写了一个第四题的 Python 版本, 尝试不调用前辈的库自己绘图, 附在上述链接中。