机器人学

作业 1：平面 2R 机械臂

Robotics (2023-2024-2)

Homework 1: Planar 2R Robotic Arm

姓名：赵四维

学号：521021910696

班级：ME3403-01

E-mail：racheus.11@sjtu.edu.cn

2024 年 3 月 2 日

1 2R 机械臂的运动学分析

1.1 Jacobian Matrix

[Solution]:

根据题目要求，我们需要求解 2R 机械臂的雅可比矩阵。首先我们需要求解机械臂的正运动学方程，即末端执行器的位置和姿态与关节角度的关系。根据题目给出的机械臂结构，我们可以得到机械臂的正运动学方程如下：

$$\begin{cases} x = l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y = l_1\sin(\theta_1) + l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \phi = \theta_1+\theta_2 \end{cases} \tag{1}$$

其中，x, y, ϕ 分别代表末端执行器的位置和姿态，θ_1, θ_2 分别代表机械臂的两个关节角度，l_1, l_2 分别代表机械臂的两个连杆长度。根据正运动学方程，通过求导可以求解出机械臂的雅可比矩阵如下：

$$\begin{cases} \dot{x} = -l_1\sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 - l_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \dot{y} = l_1\cos(\theta_1)\dot{\theta}_1 + l_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\cos(\theta_1+\theta_2) \\ \dot{\phi} = \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2 \end{cases} \tag{2}$$

由 $[\dot{x}, \dot{y}, \dot{\phi}]^T = J\cdot[\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T$，我们可以得到雅可比矩阵 J 如下：

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta_1} & \frac{\partial x}{\partial\theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial\theta_1} & \frac{\partial y}{\partial\theta_2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\phi}{\partial\theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\theta_1) - l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

由《线性代数》课程知识，我们可以讨论 Jacobian 矩阵的秩。将矩阵的第二列的 (-1) 倍加到第一列，我们可以得到如下的矩阵：

$$J = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\theta_1) - l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{bmatrix} -l_1\sin(\theta_1) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1\cos(\theta_1) & l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

从数学角度看，如果 Jacobian 矩阵的秩为 1，需要满足如下的条件：

$$\begin{cases} -l_1\sin(\theta_1) = 0 \\ l_1\cos(\theta_1) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

且二者需要同时满足。由正余弦函数的相位差可知，两个条件总是不能**同时满足**的。因此，我们可以 Jacobian 矩阵的秩为 2。这一点也可以从机械原理上得到印证，因为机械臂的自由度是由关节的个数决定的，而 2R 机械臂的自由度为 2，这一点是相互印证的。

[Appendix] 笔者个人理解，题目中的 Jacobian 矩阵和我们常规定义的 Jacobian 矩阵有一定的区别。常规定义的 Jacobian 矩阵是 2*2 的矩阵，形如：

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \tag{6}$$

这种情况下，取特殊情况 $\theta_1 = \theta_2 = 0$，我们可以得到：

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_1 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

在这种情况下存在 0 行，因此 Jacobian 矩阵的秩为 1。但是相痛的特殊情况作用于题目中的 3*2 矩阵，我们可以得到：

$$J_0' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_1 + l_2 & l_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

显然，在这种特殊情况下，上述（7）矩阵中 $l_1 + l_2 \neq l_2$，因此 Jacobian 矩阵的秩为 2。所以本题中的 Jacobian 矩阵的秩一定为 2。

1.2 MATLAB Operation

Click here to junp to the MATLAB code.

第二问是第一问的延续，只需在 MATLAB 中编辑相应的矩阵即可，这里不再赘述。

输入为两个关节角度（弧度制），终端输出 Jacobian 矩阵，并在窗口中画出对应的机械臂姿态。

[demo:]

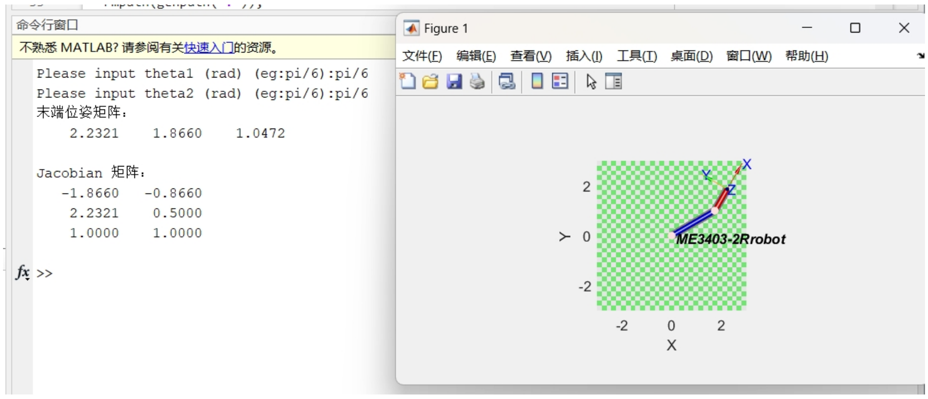

图 1: $[\pi/6, \pi/6]$ 对应的机械臂的姿态

1.3 MATLAB Kinematics Inverse Solution

Click here to junp to the MATLAB code.

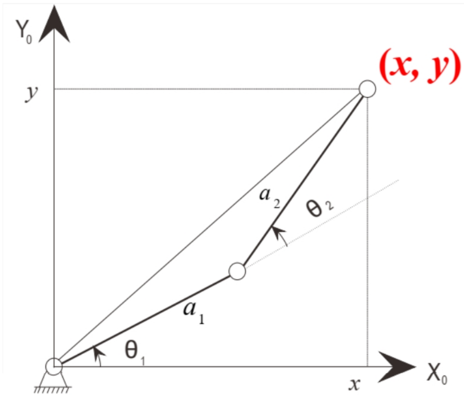

图 2: 任一时刻的姿态

易得：

$$D = \cos\theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

$$\theta_2 = \arctan 2(\frac{\sqrt{1 - D^2}}{D})$$

$$\theta_1 = \arctan 2(y, x) - \arctan 2(a_2 \sin\theta_2, a_1 + a_2\cos\theta_2)$$

需要注意，这里的 arctan 2 函数是 MATLAB 中的 atan2 函数，这个函数在机器人学中至关重要，其优势在于可以正确地处理所有四个象限的角度，并且避免了由于除数为零而产生的错误，它的定义为：

$$\arctan 2(y, x) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0, y \geqslant 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ \text{undefined} & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

第三问重点在于数学公式的推导和求解的判断。但是需要注意解的存在性。比如给定矩阵 $p = [2.5 \quad 2.5 \quad \frac{\pi}{6}]^T$, 在这个位置上显然通过集合求解会有两个值，但是两个值末端的姿态角均不满足 $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{6}$ 要求。因此，我们需要对解的存在性进行判断。

[demo:]

```
======(3)Inverse Solution of 2R arms========
please input position x :2.5
please input position y :2.5
please input position phi (rad):pi/6
Error : The q matrix does not exist!
```

图 3: 任一时刻的姿态

1.4 Trajectory Planning

Click here to junp to the MATLAB code.
直接点击运行即可。
绘制轨迹如图：

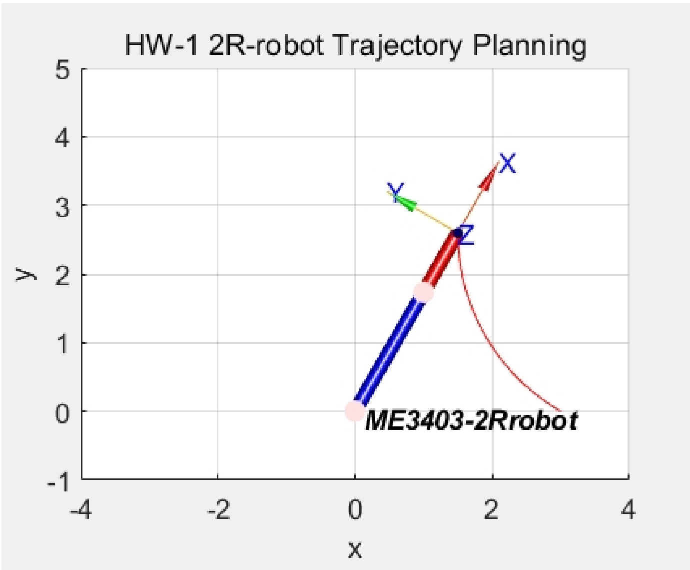

图 4: 任一时刻的姿态

运动轨迹视频：Click here to jump to the video.