# 机器人学

## 作业 5：运动学轨迹规划

## Robotics (2023-2024-2)

## Homework 5: Kinematic Trajectory Planning


姓名：赵四维

学号：521021910696

班级：ME3403-01

E-mail：racheus.11@sjtu.edu.cn


2024 年 3 月 31 日

# 1 三次样条轨迹计算

对于一个单自由度的连杆，对运动角度轨迹规划为两段三次样条曲线，运动开始与结束时速度为 0，且在中间点速度与加速度连续，已知初始角度为 $\theta_0$，中间角度为 $\theta_1$，终止角度为 $\theta_2$。

$$Trajectory1: \quad \theta(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3$$
$$Trajectory2: \quad \theta(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$$

每段曲线的计算时间区间为:$t = 0 \sim t_{fi}$, 其中 $i = 1, 2$, 计算 $t = t_{f1} = t_{f2}$ 时八个参数的计算表达式。

**[Solution]:**

笔者最先做的时候没有考虑 $t = t_{f1} = t_{f2}$ 的情形，因此求解了通解，过程如下：

由第一段样条曲线可知：

$$\begin{cases} \theta(0) = a_{10} = \theta_0 \\ \theta(t_{f1}) = a_{10} + a_{11}t_{f1} + a_{12}t_{f1}^2 + a_{13}t_{f1}^3 = \theta_1 \\ \dot{\theta}(0) = a_{11} = 0 \\ \dot{\theta}(t_{f1}) = a_{11} + 2a_{12}t_{f1} + 3a_{13}t_{f1}^2 \end{cases} \tag{1}$$

上述方程组 (1) 解决了两个未知数 $a_{10}$ 和 $a_{11}$，接下来求解第二段样条曲线：

$$\begin{cases} \theta(0) = a_{20} = \theta_1 \\ \theta(t_{f2}) = a_{20} + a_{21}t_{f2} + a_{22}t_{f2}^2 + a_{23}t_{f2}^3 = \theta_2 \\ \dot{\theta}(0) = a_{21} \\ \dot{\theta}(t_{f2}) = a_{21} + 2a_{22}t_{f2} + 3a_{23}t_{f2}^2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

上述方程组 (2) 解决了两个未知数 $a_{20}$, 接下来，还有 5 个未知数，我们需要建立5 个线性无关的方程, 才能完全求解。

由方程组 (1)，将 $a_{10}$ 和 $a_{11}$ 代入, 得以得到

$$a_{12}t_{f1}^2 + a_{13}t_{f1}^3 = \theta_1 - \theta_0 \tag{3}$$

由于转折位置的速度和加速度连续，因此有

$$Velocity \quad B.C.: 2a_{12}t_{f1} + 3a_{13}t_{f1}^2 = a_{21} \tag{4}$$

$$Accleration \quad B.C.: 2a_{12} + 6a_{13}t_{f1} = 2a_{22} \tag{5}$$

在方程组 (2) 中，将 $a_{20}=\theta_1$ 代入，得到

$$a_{21}t_{f2}+a_{22}t_{f2}^2+a_{23}t_{f2}^3=\theta_2-\theta_1 \tag{6}$$

$$a_{21}t_{f2}+2a_{22}t_{f2}+3a_{23}t_{f2}^2=0 \tag{7}$$

至此，五个方程 (3) $\sim$ (7) 已经联立完毕，可以求解 $a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23}$。
由于参数、字母较多，联立求解的过程较为复杂，笔者将详细说明：
[step1]:(7) $\times\, t_{f2}-$ (6), 消去 $a_{21}$ 得到 $a_{22}$ 和 $a_3 3$ 的表达式：

$$a_{22}t_{f2}^2+2a_{23}t_{f2}^3=\theta_1-\theta_2 \tag{8}$$

[step2]:(4) $\times\, t_{f1}-2\times$ (3), 得到 $a_{21}$ 和 $a_{13}$ 的表达式：

$$a_{13}t_{f1}^3=a_{21}t_{f1}+2\theta_0-2\theta_1 \tag{9}$$

求解 eq.(9), 得

$$a_{21}=\frac{a_{13}t_{f1}^3-2\theta_0+2\theta_1}{t_{f1}}$$

[step3]:(5) $\times\, t_{f1}^2-2\times$ (3), 得到 $a_{22}$ 的表达式：

$$4a_{13}t_{f1}^3=2a_{22}t_{f1}^2+2\theta_0-2\theta_1 \tag{10}$$

求解 eq.(10), 得

$$a_{22}=\frac{2a_{13}t_{f1}^3-\theta_0+\theta_1}{t_{f1}^2}$$

[step4]:(7) $\times\, t_{f2}-$ (6), 得到 $a_{23}$ 和 $a_{22}$ 的关系：

$$a_{23}t_{f2}^3=\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2-a_{22}t_{f2}^2) \tag{11}$$

[step5]: 将方程 (11) 代入 (6), 并代入上方计算的 $a_{21},a_{22}$, 得到**仅关于 $a_{13}$ 的方程**：

$$\begin{aligned} a_{21}t_{f2}+a_{22}t_{f2}^2+a_{23}t_{f2}^3 =& a_{21}t_{f2}+a_{22}t_{f2}^2+\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2-a_{22}t_{f2}^2) \\ =& \underbrace{\frac{a_{13}t_{f1}^3+2\theta_1-2\theta_0}{t_{f1}}f_{f2}+\frac{2a_{13}t_{f1}^3-\theta_0+\theta_1}{t_{f1}^2}=\frac{3}{2}(\theta_2-\theta_1)}_{Equation\quad only\quad contains\quad a_{13}} \end{aligned} \tag{12}$$

这样，我们可以计算得到

$$a_{13}=\frac{(2t_{f_1}t_{f2}+\frac{1}{2})\theta_0-(2t_{f1}t_{f2}+2)\theta_1+\frac{3}{2}\theta_2}{t_{f1}^3(t_{f1}t_{f2}+1)} \tag{13}$$

[step6]: 将 $a_{13}$ 代入 (3),(9),(10),(11) 中，可以解出所有参数。

这里给出最终结果表达：

$$
\begin{cases}
a_{10} = \theta_0 \\
a_{11} = 0 \\
a_{12} = \dfrac{-(3t_{f1}t_{f2} + \frac{3}{2})\theta_0 + (3t_{f1}t_{f2} + 3)\theta_1 - \frac{3}{2}\theta_2}{t_{f1}^2(t_{f1}t_{f2} + 1)} \\
a_{13} = \dfrac{(2t_{f1}t_{f2} + \frac{1}{2})\theta_0 - (2t_{f1}t_{f2} + 2)\theta_1 + \frac{3}{2}\theta_2}{t_{f1}^3(t_{f1}t_{f2} + 1)} \\
a_{20} = \theta_1 \\
a_{21} = \dfrac{\frac{3}{2}(\theta_2 - \theta_0)}{t_{f1}(t_{f1}t_{f2} + 1)} \\
a_{22} = \dfrac{3t_{f1}t_{f2}\theta_0 + (3t_{f1}t_{f2} + 3)\theta_1 + 3\theta_2}{t_{f1}^2(t_{f1}t_{f2} + 1)} \\
a_{23} = \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2t_{f2}^3} - \dfrac{3t_{f1}t_{f2}\theta_0 - (3t_{f1}t_{f2} + 3)\theta_1 + 3\theta_2}{2t_{f1}^2(t_{f1}t_{f2} + 1)}
\end{cases}
$$

**注意**：上述解是考虑了 $t_{f1}, t_{f2}$ 的情况，如果 $t = t_{f1} = t_{f2}$，可以将上面的解中的 $t_{f1}, t_{f2}$ 替换为 $t$，即可得到解, 在 $t = t_{f1} = t_{f2}$ 的情况下，方程的复杂度就能够很好的下降，解为：

$$
\begin{cases}
a_{10} = \theta_0 \\
a_{11} = 0 \\
a_{12} = \dfrac{-9\theta_0 + 12\theta_1 - 9\theta_2}{4t^2} \\
a_{13} = \dfrac{5\theta_0 - 8\theta_1 + 3\theta_2}{4t^2} \\
a_{20} = \theta_1 \\
a_{21} = \dfrac{-3\theta_0 + 3\theta_2}{4t} \\
a_{22} = \dfrac{6\theta_0 - 12\theta_1 + 6\theta_2}{4t^2} \\
a_{23} = \dfrac{-3\theta_0 + 8\theta_1 - 5\theta_2}{4t^3}
\end{cases}
$$

# 2 6R 机器人的运动规划

已知一个 6R 机械臂参数如第三次作业图 2 所示（可直接使用参考答案的方法建 DH 系），连杆参数为 $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}^T$，要求机械臂的末端经过以下任务点：

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

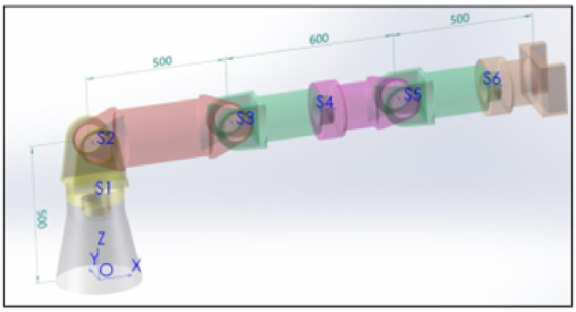



图 1: 6R 机器人示意图

## 2.1 基于关节角操作空间的轨迹规划

**[Solution]:** 首先说明，笔者这里没有采用老师在群内给出的 DH 参数，而是自己建立了 DH 参数，因为群内参考答案给出的建系参数为标准 DH，而我在作业 3 中采用的是 Modified DH，因此这里采用 Modified DH 建系。参数建立同作业三：

| Joints / Parameter | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta$ | $\theta_1+0$ | $\theta_2+0$ | $\theta_3-90$ | $\theta_4+0$ | $\theta_5+0$ | $\theta_6+0$ |
| $d$ | 500 | 0 | 0 | 600 | 0 | 500 |
| $\alpha_{i-1}$ | 0 | -90 | 0 | -90 | 90 | -90 |
| $a_{i-1}$ | 0 | 0 | 500 | 0 | 0 | 0 |

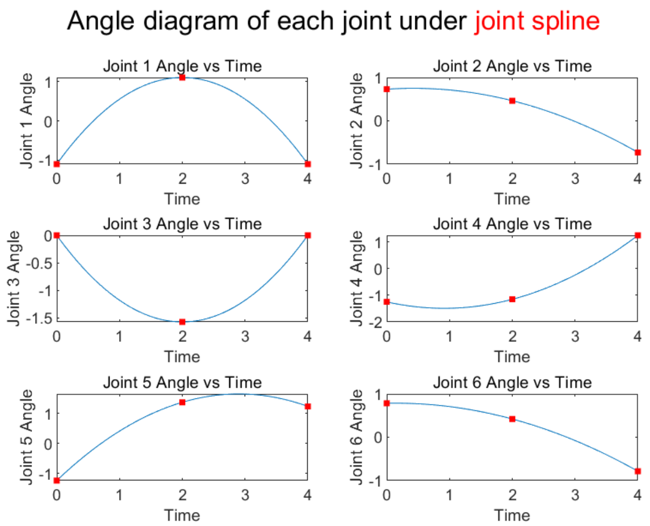
表 1: 6R 机器人 MDH 参数表

本节作业的代码参见Click here to jump to the MATLAB code。

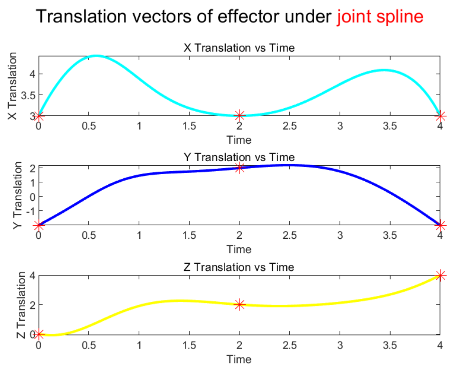
基本思路是通过先通过运动学逆解，求解出三个关键节点的关节空间表达式 $\boldsymbol{q}_i(i=1,2,3)$，根据这三个关键节点，通过三次样条插值，得到关节角随时间的变化，最后通过正运动学，得到末端的位置和姿态，用末端坐标系 X,Y,Z 三个方向的平移向量和 RPY 欧拉角的旋转向量随时间的变化，画出图像。

另外，笔者设置的运动时间为 $0\sim 4s$，时间间隔为 $0.02s$，共计 200 个时间点。

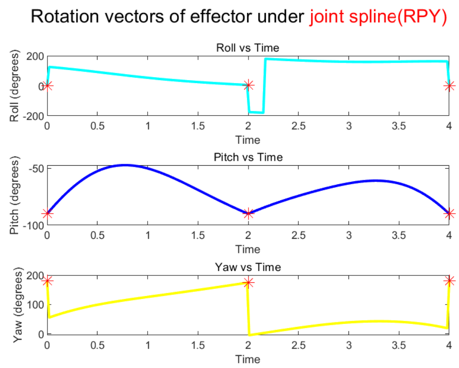
关节角参数随时间的变化：




平移向量和旋转向量随时间变化：




(a) Transformation Vector




(b) Rotation Vector

机构运动动画参见也通过上述程序一并绘出，见here。

## 2.2 基于运动空间空间的轨迹规划

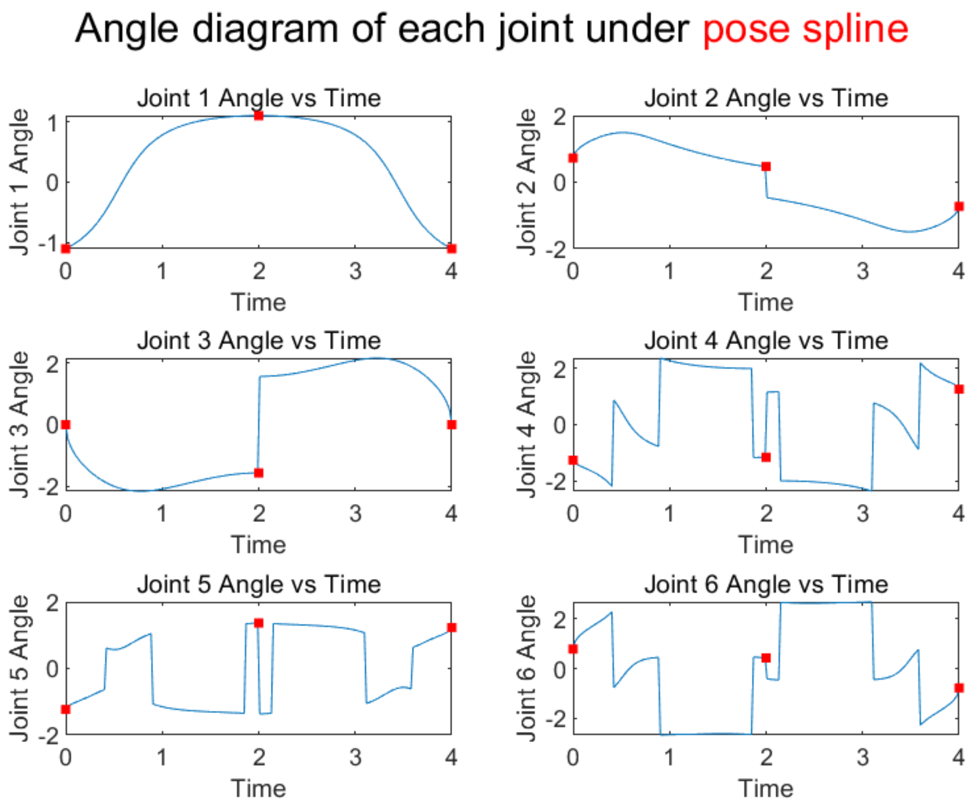
**[Solution]**: 本节作业的代码参见Click here to jump to the MATLAB code。

和上面类似，基本思路是找到三个目标点在空间中的坐标。将矩阵分解为旋转部分和平移部分，通过三次样条插值，得到末端的位置和姿态，用末端坐标系 X,Y,Z 三个方向的平移向量和 RPY 欧拉角的旋转向量随时间的变化，画出图像。

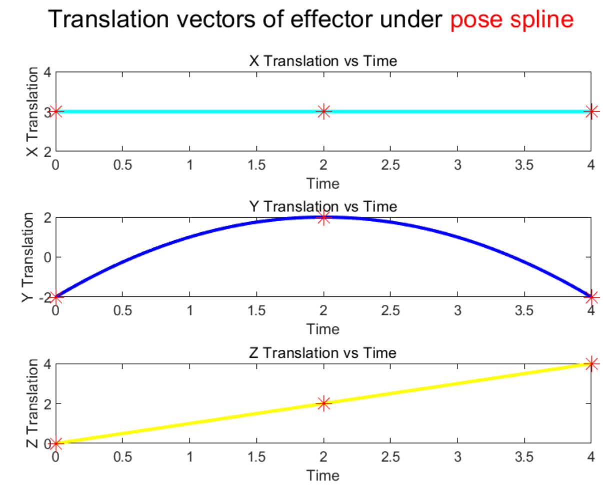
值得一提的是，笔者查阅相关资料，发现很多教材、教程采用的都是**四元数位姿插值**, 由于我们课程对这个方法没有过多要求，因此在代码编写时有所参考。还有一种方法是**球面线性插值**（Slerp）：是一种保证插值结果是有效旋转矩阵的方法。它将两个旋转矩阵之间的角度插值，然后在单位球面上进行插值。这样做可以确保插值结果是有效的旋转矩阵。我在代码文档的最后给出了`slerp_rotm()`函数的一种可能实现方式。

不过观察会发现三个点处坐标系的旋转矩阵是相同的，因此本题这里的插值只需要对平移向量进行插值即可。

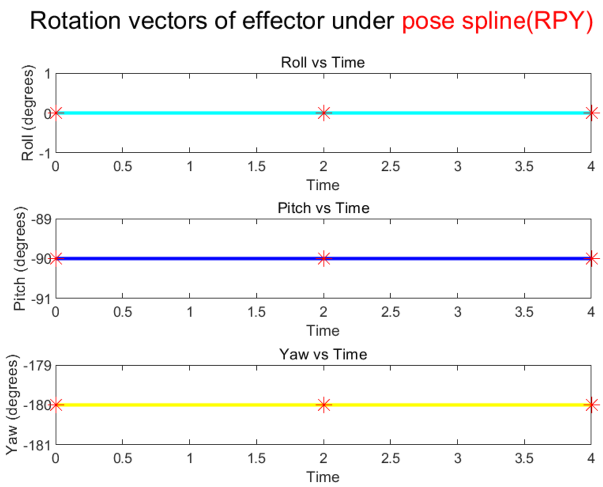
关节角参数随时间的变化:



平移向量随时间变化：




旋转向量随时间变化：




由上面六幅图可以看出，基于关节角操作空间的轨迹规划的轨迹更加平滑，而基于运动空间的轨迹规划的突变更大，这是因为在关节空间中，关节角的变化是连续的，而在运动空间中，末端的位置和姿态的变化是连续的，后者会导致信号的输入端突变，因此在实际应用中，需要根据具体情况选择合适的轨迹规划方法。