Задача 4: Нахождение особых точек системы

$$\begin{cases} x' = y^2 - 4x^2 \\ y' = 4y - 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 4x^2 = 0 \\ 4y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$4y = 8; \quad y = 2 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 4x^2 = 0; \quad 2^2 - 4x^2 = 0; \quad 4x^2 = 4;$$

$$x = \pm 1$$

Особые точки: $(1; 2), (-1; 2)$

1. Уравнения перехода к новым координатам для $(1; 2)$:

$$\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v + 2 \end{cases}$$

$$\frac{du}{dt} = (v+2)^2 - 4(u+1)^2 = v^2 + 4v + 4 - 4u^2 - 8u - 4 = -8u + 4v$$

$$\frac{dv}{dt} = 4(v+2) - 8 = 4v + 8 - 8 = 4v$$

Первая особая точка:

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -8-\lambda & 4 \\ 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (-8-\lambda)(4-\lambda) - 4 * 0 = -32 + 8\lambda - 4\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 + 4\lambda - 32$$

$$D = 4^2 - 4 * 1(-32) = 16 + 128 = 144$$

$$\lambda_1 = \frac{-4 + 12}{2} = 4$$

$$\lambda_2 = \frac{-4 - 12}{2} = -8$$

Особая точка типа седло.

Первый собственный вектор:

a.

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$u = 1; \quad -8 + 4v = 4; \quad 4v = 12; \quad v = 3;$$

$$(1; 3)$$

b.

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -8 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$u = 1; \quad -8 + 4v = -8; \quad 4v = 0; \quad v = 0;$$

$$(1; 0)$$

2. Уравнения перехода к новым координатам для $(-1; 2)$:

$$\begin{cases} u = x + 1 \\ v = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u - 1 \\ y = v + 2 \end{cases}$$

$$\frac{du}{dt} = (v+2)^2 - 4(u-1)^2 = v^2 + 4v + 4 - 4u^2 + 8u - 4 = 8u + 4v$$

$$\frac{dv}{dt} = 4(v+2) - 8 = 4v + 8 - 8 = 4v$$

Вторая особая точка:

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 8-\lambda & 4 \\ 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (8-\lambda)(4-\lambda) - 4 * 0 = 32 - 8\lambda - 4\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 + 12\lambda + 32$$

$$D = (-12)^2 - 4 * 1(-32) = 144 - 128 = 16$$

$$\lambda_1 = \frac{12+4}{2} = 8$$

$$\lambda_2 = \frac{12-4}{2} = 4$$

Особая точка типа узел.

Второй собственный вектор:

a.

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$u = 1; \quad 8 + 4v = 8; \quad 4v = 0; \quad v = 0;$$

$$(1; 0)$$

b.

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$u = 1; \quad 8 + 4v = 4; \quad 4v = -4; \quad v = -1;$$

$$(1; -1)$$