Note percolation
Stage été 2025

Julien Racette

20 mai 2025

Table des matières

0.1 Notation et quelques définitions

J'utilise une notation similaire à celle de [1] et [2]. On dit que $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ est un réseau de dimension d où $\mathbb{Z}^d$ est l'ensemble des sommets et $\mathbb{E}^d$ est l'ensemble des arêtes entre les points. On note $x \sim y$ si x et y sont voisins. On a $x \leftrightarrow y$ si il existe une arête entre eux. On appelle $\omega = (\omega_e : e \in \mathbb{E}^d) \in \Omega$ la configuration de $\mathbb{L}^d$. On dit que $\omega^1 \leq \omega^2$ si $\omega_e^1 \leq \omega_e^2$, $\forall e \in \mathbb{E}^d$. On dit que $\omega_e = 1$ est ouvert et $\omega_e = 0$ est fermé. On appelle *cluster* une composante connexe.

1 Bernoulli Bond Percolation

1.1 Point critique

- $\theta(p) := \mathbb{P}_p[\|C\| = \infty]$
- $\psi(p) := \mathbb{P}_p$["Il existe un *cluster* infini"]

Par invariance de la translation du réseau et de la mesure de probabilité, on peut dire que la composante connexe étudié est toujours centré en 0.

Proposition 1.1. *(Existence d'un point critique)*

Il existe $p_c \in [0,1]$ tel que
i) $\psi(p) = 0$ *si* $p < p_c(d)$

ii) $\psi(p) > 0$ *si* $p > p_c(d)$

Démonstration. Soit $X_e \sim \mathcal{U}(0,1)$ et $p \in [0,1]$. On peut facilement voir que

$$\mathbb{P}_p[\mathbb{1}_{X_e<p} = 1] = \mathbb{P}_p[x_e < p] = \int_0^p dx = p$$
$$\mathbb{P}_p[\mathbb{1}_{X_e<p} = 0] = \mathbb{P}_p[x_e \geq p] = \int_p^1 dx = 1 - p$$

On a donc que $\mathbb{1}_{X_e<p} \sim \mathcal{B}ern(p)$. On prend $p_1, p_2 \in [0,1]$ avec $p_1 < p_2$. Si $\mathbb{1}_{X_e<p_1} = 1$ alors $\mathbb{1}_{X_e<p_2} = 1$. Cela implique que $\mathbb{1}_{X_e<p}$ est croissant sur p et donc que ω est croissant sur p. Si ω^{p_1} réalise un *cluster* infini, alors ω^{p_2} le réalise aussi. On peut en déduire que ψ est croissant sur p. Il est évident que $\psi(0) = 0$ et $\psi(1) = 1$. Cela implique qu'il existe un unique $p_c \in [0,1]$ tel que $\psi(p) > 0$ si $p > p_c(d)$ et $\psi(p) = 0$ si $p < p_c(d)$. □

Note *: On dénote par $N(p)$ le nombre de cluster infini On dénote par $N(p)$ le nombre de cluster infini On pourrait montrer que $\psi(p) = 1$ si $p > p_c$ en utilisant la loi du zéro-un de Kolmogorov puisque si on ferme ou ouvre un nombre fini d'arête, cela ne changera pas la nature du résultat et les variables aléatoire sur chaque arête sont iid.*

Théorème 1.2.

$$p_c(d) \in (0,1) \text{ pour } d \geq 2$$

Démonstration. On va d'abord montrer que si $\psi(p) = 0$ alors $p_c(d) > 0$. Pour cela, on va encore utiliser l'argument de la monotonie. Soit $p_1, p_2 \in (0,1]$, tel que $p_1 \leq p_2$. On a déjà montré 1.1 que ψ est croissante sur p. Donc si $\psi(p_1) = 0$ alors $\psi(p_2) = 0$.Cela implique que $\psi(\hat{p}) = 0 \forall \hat{p} \in [0,p]$ et donc $p_c > 0$.
Si $\psi(p) > 0$ alors $\exists x \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\theta(p) > 0$. □

1.2 Unicité du cluster infini

Théorème 1.3. *On dénote par $N(p)$ le nombre de clusters infinis dans $\mathbb{L}^d$.*

$$N(p) \in \{0, 1, \infty\} \tag{1}$$

Démonstration. On défini les évènements suivants :$\mathcal{E}_{\leq 1}$ =$\{$"Il existe 0 ou 1 cluster infini"$\}$, $\mathcal{E}_{\infty}$= $\{$"Il existe une infinité de cluster infini"$\}$ et $\mathcal{E}_{\leq\infty}$ = $\{$"Il existe un nombre fini clusters infinis"$\}$.
On examine le cas $p > p_c$, car le reste est trivial. On veut montrer que si le nombre de cluster est fini, alors il est égal à 0 ou 1. Autrement dit, $\mathbb{P}[\mathcal{E}_{\leq\infty}] = 1 \implies \mathbb{P}[\mathcal{E}_{\leq 1}] = 1$. On prend $\Lambda_n := [-n, n]^d$ un carré de longueur $2n$ et l'évènement :

$$\mathcal{F} = \{ \text{ "Tous les clusters infinis intersectent } \Lambda_n\text{" } \}.$$

On prend maintenant l'évènement $E_n = \{$"Tous les arêtes dans Λ_n sont fermées"$\}$. Or, si les arêtes de Λ_n sont fermées et que tous les clusters infinis intersectent Λ_n, alors il existe 1 seul cluster infini. On a donc que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p[\mathcal{E}_{\leq}1] &\geq \mathbb{P}_p[\mathcal{F} \cap E_n] \\
&= \mathbb{P}_p[\mathcal{F}] \cdot \mathbb{P}_p[E_n] && \text{(Indépendance)} \\
&\geq \mathbb{P}_p[\mathcal{F}] \cdot p^{\|\mathbb{E}_n\|} \\
&\geq c \; \mathbb{P}[\mathcal{E}_{<\infty}] \cdot p^{\|\mathbb{E}_n\|} && (n \text{ assez grand}) \\
&> 0
\end{aligned}$$

Or, puisque $\mathbb{P}_p[\mathcal{E}_{\leq 1}] > 0$ alors $\mathbb{P}_p[\mathcal{E}_{\leq 1}] = 1$ par l'argument d'ergodicité.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p[\mathcal{E}_{<\infty}] &= \mathbb{P}_p\left[\bigcup_{i\geq 1} \mathcal{E}_i\right] \\
&= 1 + \mathbb{P}_p\left[\bigcup_{i\geq 2} \mathcal{E}_i\right] \\
&\implies \mathbb{P}_p\left[\bigcup_{i\geq 2} \mathcal{E}_i\right] = 0
\end{aligned}$$

Et donc la probabilité d'avoir un nombre fini ≥ 2 de clusters infinis est nulle.

□

Théorème 1.4 (Unicité du cluster infini)**.** *Si $\theta(p) = 1$, alors*

$$\mathbb{P}_p[\text{"Il existe un unique cluster infini"}] = 1$$

Démonstration. □

Références

[1] Hugo Duminil-Copin. *Introduction to Bernoulli Percolation*. `https://www.unige.ch/~duminil/publi/2017percolation.pdf`. Lecture notes, November 2, 2022. 2022.

[2] Geoffrey GRIMMETT. *Percolation*. 2nd. Berlin : Springer, 1999.

[3] Riley HECKEL. *Percolation and the Existence of the Infinite Open Cluster*. University of Chicago VIGRE REU Program. Available at `https://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Heckel.pdf`. 2010.