ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»**

Специальная математическая программа для школьников физико-математического направления

10 класс

Москва 2021

Содержание

Тензоры

№1 урок

Векторы

Список терминов, вводимых на уроке
• Вектор
• Нулевой вектор
• Линейные операции
• Множество, замкнутое относительно операций
• Линейное пространство
• Векторное пространство
• Коллинеарные векторы
• Сонаправленные векторы
• Противоположнонаправленные векторы
• Компланарные векторы
• Линейная комбинация
• Линейная зависимость векторов
• Линейная независимость векторов

Цель урока
Знакомство школьников с векторами и их свойствами с точки зрения элементов линейного векторного пространства; знакомство с понятиями линейной зависимости и линейной независимости векторов.

Важые моменты
Урок содержит большое количество новых терминов, которые просты для освоения, но могут посеять смуту в голове детей при неверном объяснении, или же при недостатке объяснения. Потому стоит придерживаться некоторых советов: требуется делать упор на определения, говорить их четко, не вскользь, приводя примеры для точного понимания детьми. Простые примеры позволят детям самим проанализировать понятность определения, связать слова из определения с “картинкой” в голове.

а) Каждый термин должен быть произнесен четко, не вскользьз. На важные или непонятные, с точки зрения учителя, моменты должен быть сделан словесный упор.

б) Каждый термин, если он того позволяет, должен сопровождаться парой простых примеров. На основе простых примеров школьник сможет провести самостоятельный анализ и выяснить, точно ли понятно ему то или иное определение.

в) Не стоит недооценивать графические примеры. Хотя в дальнейших уроках графическое представление будет затруднено и будет скорее излишним, на первых порах стоит заложить верную “картину происходящего”. Потому рекомендуется к каждому примеру приводить иллюстрацию. Простые графические примеры позволят детям связать слова из определения с “картинкой” в голове.

Ход урока

Школьники уже знакомы с понятием "вектор" из курса математики и курса физики, задача состоит в формализации уже имеющихся знаний, их расширении и использовании в новом для них предмете.

Итак, введем понятие вектора:

Вектор - отрезок, для которого известно, какой из его концов является началом, а какой концом.

Особый случай составляет нулевой вектор, его конец совпадает с его началом.

Познакомимся со свойствами линейных операций, которые можно производить с векторами. Так называются операции сложения векторов и умножения векторов на число.

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (свойство коммутативности сложения)
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (свойство ассоциативности сложения)
3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (свойство нулевого вектора)
4) $\vec{a}+(-1)\vec{a}=\vec{0}$ (свойство вектора $(-1)\vec{a}$, противоположного вектору $\vec{a}$)
5) $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$
6) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$
7) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$
8) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

Теперь стоит определиться с тем, где мы в дальнейшем будем рассматривать векторы и действия, совершаемые, над ними не оговаривая размерности пространства, в котором мы работаем. Таким пространством является векторное пространство.

Определимся вначале с понятием замкнутого относительно операции множества.

Множество, замкнутое относительно операций - множество, в котором для любых элементов множества результат применения операций принадлежит данному множеству.

Тогда, можем сформулировать определение векторного пространства.

Линейное пространство - множество, замкнутое относительно линейных операций.

Векторное пространство - линейное пространство, элементами которого являются векторы.

Примерами векторного пространства являются: одномерное пространство векторов $\mathbb{R}^1$, двухмерное пространство векторов $\mathbb{R}^2$ и трехмерное пространство векторов $\mathbb{R}^3$, в котором школьники не раз работали на математике и общей физике.

Тогда, так как любой вектор принадлежит векторному пространству, можно дать другое определение вектора:

Вектор - элемент векторного пространства.

Заметим, что нулевой вектор также является элементом векторного пространства.

Уточнив, где мы рассматриваем произвольные векторы, можем перейти к дальнейшей характеристики векторов, их свойств.

Перед тем как подойти к понятиям линейной зависимости и линейной независимости, стоит обсудить пару простых примеров, которые в дальнейшем будут примером линейно зависимых/независимых векторов.

Речь идет о коллинеарных и компланарных векторах.

Коллинеарные векторы - элементы векторного пространства (векторы), для которых найдется прямая, которая будет параллельна выбранным векторам.

В частности, различают сонаправленные и противоположно направленные векторы:

Сонаправленные векторы - коллинеарные векторы, направленные в одну и ту же сторону.

Противоположнонаправленные векторы - коллинеарные векторы, направленные в разные стороны.

Заметим такой факт: если некоторые векторы являются коллинеарными, то любой из этих векторов можно выразить через любой другой ему коллинеарный.

Компланарные векторы - элементы векторного пространства (векторы), для которых найдется плоскость, которая будет параллельна выбранным векторам.

Заметим такой факт: если есть как минимум три компланарных вектора, то любой из этих векторов выражается через другие.
Что значит выразить один вектор через другие векторы? Это значит, что какой-то вектор является линейной комбинацией других, то есть, к примеру, выражение "вектор $\vec{a}$ выражается через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$" можно записать так:

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{b} + \alpha_2\vec{c}$$

Комбинация $\alpha_1\vec{b} + \alpha_2\vec{c}$ явлется примером линейной комбинациии.

В общем случае будем называть линейной комбинацией следующую комбинацию векторов:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$$

Где $\vec{a}_i$ - произвольные векторы, α_i - некоторые скалярные коэффициенты.

Заметим, что линейная комбинация может быть составлена не только из векторов, но и из любых элементов линейного пространства. Например, матриц.

Может возникнуть следующий вопрос: пусть вектор $\vec{a}$ раскладывается через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$, единственно ли это разложение? То есть существует единственный набор коэффициентов α и β, при которых $\vec{a} = \alpha_1\vec{b} + \alpha_2\vec{c}$, или же существует как минимум еще один набор коэффициентов, при которых вектор $\vec{a}$ тоже будет раскладываться через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$?

Для ответа на данный вопрос необходимо определить, является линейная комбинация линейно заивисмой или линейно независимой.

Разберемся с этими понятиями:

Линейная комбинация является линейно независимой, или векторы, составляющие линейную комбинацию, являются линейно независимыми, если нулевой вектор раскладывается по векторам линейной комбинации единственным образом, иначе говорят, тривиальным образом.

То есть если $\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$, то отсюда сразу следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Линейная комбинация является линейно зависимой, или векторы, составляющие линейную комбинацию, являются линейно зависимыми, если нулевой вектор раскладывается по векторам линейной комбинации не единственным образом, то есть не только тривиальная комбинация векторов будет давать нулевой вектор.

То есть существуют $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ такие, что не все они одовременно равны нулю, причем $\vec{0} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$.

Поясним это на некоторых примерах:

1) Мы уже познакомились с коллинеарными векторами. Два и более коллинеарных вектора будут являться линейно зависимыми, так как без труда можно подобрать ненулевые коэффициенты, при которых линейная комбинация векторов даст нулевой вектор.

2) В случае с компланарными векторами обстоит немного сложнее. Мы говорили, что компланарные векторы - векторы, для которых существует плоскость, параллельная векторам.

а) Пусть у нас есть два компланарных вектора, то есть два вектора, которые параллельны какой-то плоскости. В таком случае, перенесем параллельным переносом один из векторов к другому вектору. Если эти векторы окажутся коллинеарными, то они линейно зависимы, если же нет, то векторы будут линейно независимыми.

б) Если имеется три или более компланарных вектора, то они линейно зависимы.

Все примеры необходимо показывать графически для наглядности объясняемого материала, а также для возможности появления в головах учеников некоторых вопросов. Визуальная составляющая для правильного представления картинки у детей в их головах очень важна.

Если словесного объяснения для понимания учеников недостаточно, необходимо объяснить графически, то есть показать все наглядно на рисунке.

Для дальнейшего объяснения понятия “базис”, а также для ответа на выше поставленный вопрос, необходимо осветить некоторые свойства линейной зависимости/независимости векторов, а также несколько теорем, одна из которых как раз задает связь между линейной зависимостью/независимостью и наличием или отсутствием единственности разложения вектора по другим векторам.

Утверждение 1: Если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ имеется нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Действительно, мы можем приписать к нулевому вектору любой ненулевой коэффициент, а к остальным ненулевым векторам нулевые коэффициенты, тогда, их линейная комбинация даст нулевой вектор, причем все коэффициенты не равны нулю. Доказано.

Утверждение 2: Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда это нулевой вектор.

Доказательство очевидно.

Утверждение 3: Разложение вектора $\vec{a}$ через векторы $\vec{b}_1$,$\vec{b}_2$,...,$\vec{b}_n$ единственно тогда и только тогда, когда система векторов линейно $\vec{b}_1$,$\vec{b}_2$,...,$\vec{b}_n$ независимы.

Доказательство (в одну сторону): пусть существует два разложения:

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2 + ... + \alpha_n\vec{b}_n$$

$$\vec{a} = \beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2 + ... + \beta_n\vec{b}_n$$

Вычтем из одного другое:

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{b}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{b}_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)\vec{b}_n$$

Тогда, так как векторы $\vec{b}_1$,$\vec{b}_2$,...,$\vec{b}_n$ линейно независимы, коэффициенты $(\alpha_1-\beta_1)$,$(\alpha_2-\beta_2)$,...,$(\alpha_n-\beta_n)$ равны нулю одновременно, следовательно, $\alpha_i = \beta_i$ для любого i от 1 до n. Значит, разложения совпадают, следовательно, разложение единственно.

Доказательство в одну сторону стоит провести самостоятельно, а в другую - дать детям в виде домашнего задания.

№2 урок

Базис

Список терминов, вводимых на уроке:

- Базис
- Ортогональный базис
- Нормированный базис
- Ортонормированный базис
- Разложение вектора по базису
- Координаты вектора

Цель урока
Знакомство школьников с базисом, его видами; знакомство со сопсобами определения координат векторов в различных базисах.

Важые моменты
Урок содержит большое количество новых терминов, которые просты для освоения, но могут поесеять смуту в голове детей при неверном объяснении, или же при недостатке объяснения. Потому стоит придерживаться некоторых советов: требуется делать упор на определения, говорить их четко, не свколзь, приводя примеры для точного понимания детьми. Простые примеры позволят детям самим проанализировать понятность определения, связать слова из определения с "картинкой" в голове.

а) Каждый термин должен быть произнесен четко, не вскользь. На важные или не понятные, с точки зрения учителя, моменты должен быть сделан словесный упор.

б) Каждый термин, если он того позволяет, должен сопровождаться парой простых примеров. На основе простых примеров школьник сможет провести самостоятельный анализ и выяснить, точно ли понятно ему то или иное определение.

в) Не стоит недооценивать графические примеры. Хотя в дальнейших уроках графическое представление будет затруднено и будет скорее излишним, на первых порах стоит заложить верную "картину происходящего". Потому рекомендуется к каждому примеру приводить иллюстрацию. Простые графические примеры позволят детям связать слова из определения с "картинкой" в голове.

Ход урока

Проведя необходимые уточнения по поводу линейной зависимости/независимости векторов, можно перейти к понятию базиса и наконец рассматривать вектора в конкретных заданных системах координат, а не только общо в векторном пространстве.

Рассматривать векторы, их свойства, линейные операции над ними занятие инетересное, но малоинформативное без четко заданного пространства.

В физике и в математике при работе с векторами обычно указывается система координат, в которой производится эта самая работа. Давайте и мы постараемся понять, как мы можем указать, в каком пространстве мы всякий раз будем работать.

Для этого необходимо ввести понятие базиса.

Базис - упорядоченный набор линейно независимых векторов, по которым каждый вектор заданного пространства, в котором определен базис, раскладывается.

Разберем определение по частям.

Что значит упорядоченный набор? Это значит, что мы четко определяем, какой вектор в базисе мы счиатаем первым, какой вторым и так далее. Это условие для того

Базис не могут составлять вектора, которые являются линейно зависимыми. Отсюда так же следует, что нулевой вектор не может являться частью базиса.

Что значит каждый вектор заданного пространства раскладывается? Допустим, мы рассматриваем трехмерное пространство, где у векторов, очевидно есть три координаты x, y и z. Что получится, если в качестве базиса мы выберем два трехмерных вектора? Очевидно, что для любых двух векторов можно подобрать плоскость, в которой они оба будут лежать, но тогда любой другой вектор, который будет перпендикулярен этой плосоксти, не сможет быть представлен в виде линейной комбинации векторов из нашего базиса, то есть не сможет быть разложен по векторам базиса. Но тогда, исходя из определений базиса, это уже не базис! Если говорить простыми словами: количество векторов, составляющих базис, должно совпадать с размерностью пространства, в котором мы работаем.

Примером базиса в пространстве $\mathbb{R}^2$ могут служить любые два неколлинеарных вектора. В $\mathbb{R}^3$ базисом могут служить любые три некомпланарных вектора.

Какие виды базисов бывают?

Ортогональный базис - базис, в котором все вектора перпендикулярны друг другу.

Например, базис ($\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$,$\vec{e}_3$), где $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\vec{e}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Нормированный базис - базис, в котором все вектора являются нормированными, или единичными, то есть модуль каждого вектора равен единице.

Например, базис ($\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$,$\vec{e}_3$), где $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\vec{e}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Если мы объединим понятия “ортогональный” и “нормированный”, получим ортонормированный базис:

Ортонормированный базис - базис, в котором все вектора являются единичными, и все они перпендикулярны друг другу.

Например, базис ($\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$,$\vec{e}_3$), где $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\vec{e}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Понятие ортонормированный базис очень близко школьнику, ведь именно в таком базисе зачастую работают с векторами в школе. Если объединить точку с ортонормированным базисом, то есть направить два вектора ортонормированного базиса из одной точки, то мы получим прямоугольную декартовую систему координат.

Важно обратить внимание на следующие вещи:

1) В дальнейшем векторы базиса мы зачастую будем обозначать буквами $\vec{e}_i$, если не будем основания на переобозначение или введение других букв.
2) Сам базис будем писать в круглых скобках, перечисля в них векторы, составляющие базис. Например, базис, состоящий из векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, это $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.
2) Координаты векторов мы будем записывать в вертикальный столбец.

Когда мы разобрались с видами базисов перейдем к тому, зачем вообще мы вводили это понятие - к определению координат любого вектора в заданном базисе.

Рассмотрим для упрощения трехмерное пространство, в котором задан ортонормированный базис $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

Пусть в этом пространстве имеется вектор $\vec{a}$. Как мы уже выяснили, его можно разложить по базису, притом единственным образом.

То есть существуют единственные коэффициенты α_1, α_2,α_3 такие, что

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$$

Иначе это можно записать так:

$$\vec{a}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты α_1, α_2, α_3 - это коэффициенты разложения вектора $\vec{a}$ по базису $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, или иначе - это координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

Внимание! У учеников может возникнуть вполне справедливый вопрос: откда взялись координаты векторов базиса? Они тоже заданы в каком-то базисе?.. Да, они тоже заданы в каком-то базисе, причем по умолчанию, если не оговорено обратное, подразумевается, что координаты ветркторов задаются в ортонормированном базисе соответствующей размерности.

Как же определить коэффициенты вектора в заданном базисе, зная координаты векторов базиса?

Ответ на самом деле прост, потому предлагается школьникам на самостоятельное раздумье в ходе контрольного теста по теме первых двух уроков. Ход решения описан в 3 задании теста.

Разберем случай ортоганального базиса: как найти координаты какого-либо вектора в нем.

Пусть (для упрощения вычислений рассмотрим двумерный базис) в пространстве $\mathbb{R}^2$ задан ортоганальный базис $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

В таком случае, вектор $\vec{a}$ раскладывается по базису $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ следующим образом:

$$\vec{a} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2$$

На вектор $\vec{e}_1$ вектор $\vec{a}$ имеет проекцию, равную $|\vec{a}|\cos\alpha_1 = \dfrac{(\vec{a},\vec{e}_1)}{|\vec{e}_1|}$, где угол α_1 - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{e}_1$. На вектор $\vec{e}_2$ проекция будет равна $|\vec{a}|\cos\alpha_2 = \dfrac{(\vec{a},\vec{e}_2)}{|\vec{e}_2|}$, где угол α_2 - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{e}_2$.

Значит, чтобы получить координаты вектора $\vec{a}$, нам нужно узнать, сколько раз модуль вектора $\vec{e}_1$ содержится в проекции $\vec{a}$ на $\vec{e}_1$ и сколько раз модуль вектора $\vec{e}_2$ содержится в проекции $\vec{a}$ на $\vec{e}_2$. Для этого необходимо проекцию на соответствующий базисный вектор поделить на модуль соответствующего базисного вектора.

Таким образом получаем:

$$\beta_1 = \frac{(\vec{a},\vec{e}_1)}{|\vec{e}_1||\vec{e}_1|} = \frac{(\vec{a},\vec{e}_1)}{(\vec{e}_1,\vec{e}_1)} \quad \text{и} \quad \beta_2 = \frac{(\vec{a},\vec{e}_2)}{|\vec{e}_2||\vec{e}_2|} = \frac{(\vec{a},\vec{e}_2)}{(\vec{e}_2,\vec{e}_2)}$$

Заметим, что в случае ортонормированного базиса формулы упрощаются:

$$\beta_1 = (\vec{a},\vec{e}_1) \quad \text{и} \quad \beta_2 = (\vec{a},\vec{e}_2)$$

Почему таким образом нельзя определять координаты вектора в неортоганальном базисе, а также почему только в отроганальном базисе модуль любого вектора равен корню из суммы квадратов его координат будет сказано в следующих уроках.

Контрольный тест по теме 1 и 2 уроков

1) Определить, являются данные векторы линейно зависимыми или линейно независимыми:

а) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

2) Приведите пример ненормированного неортоганального базиса в пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. В задании необходимо записать координаты векторов, которые будут составлять ненормированный неортоганальный базис в ортонормированных базисах пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

3) В некотором ортонормированном базисе на плоскости заданы координаты векторов $\vec{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\vec{c}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Проверьте, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы, и найдите координаты $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Ответы на контрольный тест по теме 1 и 2 уроков

1) а) линейно независимы; б) линейно зависимы; в) линейно зависимы; г) линейно независимы; д) линейно зависимы; е) линейно зависимы.

2) Примером ненормированного неортоганального базиса в пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ могут служить любые линейно независимые векторы, среди которых как минимум один не является единичным и как минимум пара векторов не перпендикулярна друг другу. Причем важно, чтобы каждый вектор соответствующих пространств мог быть разложен по придуманному базису. Это условие говорит лишь о том, что количество базисных векторов в $\mathbb{R}^2$ должно быть равно двум, а в $\mathbb{R}^3$ - трем.

Например, в $\mathbb{R}^2$ базисом будут являться векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

А в $\mathbb{R}^3$ базисом будут являться векторы $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) Для проверки линейной независимости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составим их линейную комбинацию с некоторыми коэффициентами и приравняем ее к нулевому векторы.

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$$

Тогда, получим систему из двух уравнений:

$$\alpha + 2\beta = 0 \ (1)$$

$$2\alpha + 3\beta = 0 \ (2)$$

Выражая, например, α из уравнения (1) и подставляя в (2), получим, что $\beta = 0$, тогда и $\alpha = 0$, что доказывает линейную независимость векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пусть вектор $\vec{c}$ раскладывается по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующим образом:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

Тогда, координаты вектора $\vec{c}$ можно найти составив систему из двух уравнений:

$$\alpha + 2\beta = -1 \ (3)$$

$$2\alpha + 3\beta = 1 \ (4)$$

Выражая, например, α из уравнения (3) и подставляя в (4), получим, что $\beta = -3$, тогда $\alpha = 5$.

Значит, вектор $\vec{c}$ имеет координаты $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$

№3 урок

Матрицы

Список терминов, вводимых на уроке:

- Матрица
- Строка
- Столбец
- Главная диагональ
- Побочная диагональ
- Единичная матрица
- Симметричная матрица
- Кососимметричная матрица
- Верхняя треугольная матрица
- Нижняя треугольная матрица
- Диагональная матрица

На прошлом занятии мы рассматривали один из примеров линейного пространства, а именно, векторное пространство. На этом занятии мы рассмотрим другой пример линейного пространства - будем говорить о линейном пространстве, элементами которого будут являться матрицы. Для матриц, как для элементов линейного пространства справедлива замкнутость относительно линейных опреаций, введенных на 1 уроке, только действия в данном случае уже будут проводиться не над векторами, а над матрицами.

Можно дать три равонозначных определения матрицы.

Матрица размеров m на n - элемент линейного пространства матриц размером m на n.

Матрица размеров m на n - совокупность mn (в общем случае комплексных) чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов. Матрицы, в которых $m = n$ называются квадратными, остальные - прямоугольными.

Матрица - числовая функция, работающая на двух числовых множествах $I = 1{,}2{,}...{,}m$ и $J = 1{,}2{,}...{,}n$ и сопоставляющая каждой паре $(i{,}j)$ число a_{ij} (в общем случае комплексное), являющееся элементом матрицы, находящемся в i-ой строке и в j-ом столбце.

Внутри каждой матрицы можно выделить так называемую подматрицу. Подматрица может состоять как из одного элемента, так и из нескольких. Подматрица также может быть равна исходной матрице.

Приведем некоторые примеры матриц (далее все матрицы будем называть заглавными буквами):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ - матрица } 2{\times}2; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ - матрица } 3{\times}2; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ - подматрица матрицы } B$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - матрица } 2 \times 1; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ - матрица } 1 \times 3$$

Заметим: матрицы $n \times 1$ называются столбцами, а матрицы $1 \times n$ называются строками.

На предыдущих двух уроках мы работали с векторами, записывая их координаты в столбец, этот столбец по своей сути является матрицей $n \times 1$.

Заметим: (a), где a - любое комплексное число, тоже является матрицей, ее размерность 1×1.

Особое внимание мы будем уделять именно квадратным матрицам.

Первой причиной является бóльшее разнобразие свойств квадратной матрицы по сравнению с прямоугольной.

Вторая причина заключается в том, что тензоры, которые являются предметом нашего изучения, описываются квадратными матрицами.

Перед тем как переходить к свойствам матриц и операциям над ними, рассмотрим некоторые частные виды матриц.

Для начала разберемся с тем, что такое главная и побочная диагонали в матрице.

Главная диагональ - множество элементов квадратной матрицы, у которых индексы i и j совпадают.

Например, для матрицы $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 13 \\ 0 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 19 \end{pmatrix}$ главной диагональю будут являться числа 6, 3, 19. Или иначе говорят: на главной диагонали стоят числа 6, 3, 19

Побочная диагональ - множество элементов квадратной матрицы, для которых выполнено следующее соотношение для индексов i и j: $i + j = n + 1$.

Например, для матрицы $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 13 \\ 0 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 19 \end{pmatrix}$ побочной диагональю будут являться числа 8, 3, 13. Или иначе говорят: на побочной диагонали стоят числа 8, 3, 13

Единичная матрица - квадратная матрица, у которой элементы, стоящие на главной диагонали равны единице, а все остальные равны нулю.

Например, единичной матрицей 3×3 будет являться матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Заметим: единичные матрицы зачастую называют буквой E. Эта буква обычно закреплена за единичной матрицей.

Нулевая матрица - квадратная матрица, у которой все элементы равны нулю.

Например, нулевой матрицей 3×3 будет являться матрица $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Заметим: нулевые матрицы зачастую называют буквой O. Эта буква обычно закреплена за нулевой матрицей.

Симметричная матрица - матрица, у которой элементы a_{ij} и a_{ji} равны друг другу.

Примером такой матрицы может служить матрица $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Кососимметричная матрица - матрица, у которой элементы a_{ij} и $-a_{ji}$ равны друг другу.

Примером такой матрицы может служить матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Заметим: у кососимметричной матрицы элементы, стоящие на главной диагонали, нулевые.

Верхняя треугольная матрица - матрица, у которой элементы, стоящие ниже главной диагонали, нулевые. То есть $a_{ij} = 0$ при $i > j$

Примером такой матрицы может служить матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Нижняя треугольная матрица - матрица, у которой элементы, стоящие выше главной диагонали, нулевые. То есть $a_{ij} = 0$ при $i < j$

Примером такой матрицы может служить матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Диагональная матрица - матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю. То есть $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$

Примером такой матрицы может служить матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

№4 урок

Операции над матрицами

Список терминов, вводимых на уроке:

• Линейная комбинация матриц
• Транспонированная матрица

Рассмотрев самые распространенные виды матриц, можем, наконец, перейти к обсуждению операций, производимых над матрицами.

Как мы уже сказали ранее, матрицы являются элементами линейного пространства, следовательно, для них справедливы операции сложения и операции умножения на число. Разберемся для начала с этими операциями.

Умножение матриц на число. Пусть у нас есть матрица A размерностью $m \times n$. Ее элементами являются элементы a_{ij}. Тогда, матрицей αA, где α - какое-то число, будет являться матрица с элементами αa_{ij}. То есть при умножении матрицы на число, каждый элемент матрицы умножается на это число.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 2 \\ -1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $\alpha = -2$, тогда, $\alpha A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -14 & -4 & -4 \\ 2 & -12 & -14 \end{pmatrix}$

Вынесение скалярного множителя из матрицы. Пусть у нас есть матрица A размерностью $m \times n$. Ее элементами являются элементы a_{ij}. Тогда, ту же матрицу можно представить в виде матрицы βB, где β - какое-то ненулевое число, а матрица B - матрица с элементами $\dfrac{a_{ij}}{\beta}$.

Например, $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}$, $\beta = 2$, тогда, $\beta B = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Сложение матриц. Пусть у нас есть две матрицы A и B с размерностями $m \times n$ и $m \times n$, соответственно. Тогда, если матрица C является суммой матриц A и B, то элемент $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. То есть каждый элемент матрицы A складывается с соответствующим элементом матрицы B.

Например, $C = A + B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 2 \\ -1 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \\ -4 & 14 & 12 \end{pmatrix}$

Заметим: складывать можно только матрицы, имеющие одинаковую размерность. Например, нельзя сложить столбец со строкой, или квадратную матрицу с прямоугольной. Также, например, нельзя сложить квадратную матрицу 2×2 с квадратной матрицей 3×3.

Используя линейные операции, мы можем, так же как с векторами, составлять с матрицами различные линейные комбинации.

Линейная комбинация матриц - комбинация вида $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_k A_k$, где α_i - некоторые коэффициенты, A_i - матрицы.

Так же, как и в случае линейной зависимости/независимости векторов, существуют линейно зависимые и линейно независимые комбинации, составленные из матриц.

Матрицы A_1,A_2,...,A_n - линейно зависимы, если нулевая матрица представима в виде линейной комбинации матриц A_1,A_2,...,A_n не единственным образом (не только тривиальным).

Например, матрицы $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ будут линейно зависимыми, так как $-A_1 + A_2 + 2A_3 = \begin{pmatrix} -2-2+4 & -5+1+4 \\ -8+4+4 & -4+4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$, и в то же время $0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 = O$.

Матрицы A_1,A_2,...,A_n - линейно независимы, если нулевая матрица представима в виде линейной комбинации матриц A_1,A_2,...,A_n единственным образом (только тривиальным).

Например, матрицы $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ будут линейно независимыми, так как не подобрать ненулевые коэффициенты такие, чтобы линейная комбинация матриц была равна нулевой, то есть справедливо только следующее: $0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$
Аналогично случаю с векторами выделим несколько интересных моментов:

Утверждение 1: Если среди системы матриц есть нулевая матрица, то система матриц являтся линейно зависимой.

Утверждение 2: Система матриц, состоящая из одной матрицы зависима тогда и только тогда, когда это нулевая матрица.

Утверждение 3: Разложение матрицы A через матрицы B_1,B_2,...,B_n единственно тогда и только тогда, когда система матриц B_1,B_2,...,B_n линейно независима.

Доказательство этого утверждения проводится аналогично векторному случаю.

Отлично, мы разобрались с линейными операциями, справедливыми как для векторов, так и для матриц. Давайте теперь рассмотрим другие операции над матрицами, которые будут необходимы для дальнейшего общения. Вначале поговорим о такой операции, как транспонирование.

Транспонированная матрица - матрица, полученная из матрицы A путем перестановки ее элементов по следующему правилу: $a_{ij} \to a_{ji}$. При этом легко заметить, что главная диагональ не изменяется при транспонировании матрицы. Для того, чтобы показать, что матрица B есть транспонированная матрица A, пишут так: $B = A^T$.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 16 & 3 & 8 \\ 7 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, тогда $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 16 & 7 \\ 2 & 3 & 12 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Чтобы проще усвоить процесс транспонирования матрицы, можно пользоваться следующим методом: просто записываем строки исходной матрицы в столбцы транспонированной.

Напоследок обсудим некоторые свойства операции транспонирования.

1) Дважды транспонированная матрица равна исходной матрице:

$(A^T)^T = A$

2) Из-под операции транспонирования можно выносить скаляр:

$(\alpha A)^T = \alpha A^T$

3) Детерминант (это понятие будет введено на следующем уроке) транспонированной матрицы равен детерминанту обычной матрицы:

$det\,(A)^T = det\,A$

4) Операция транспонирования линейна:

$(A+B)^T = A^T + B^T; \quad (A^T + B - C^T)^T = A + B^T - C$

5) Когда же операция транспонирования действует на произведение матриц, дело обстоит несколько сложнее. Матрицы не просто транспонируются, но и меняются местами: инвертируется порядок написания матриц. Как вы уже понимаете, ввиду того, что в общем случае матрицы не перестановочны, факт инверсии порядка очень важен:

$(AB)^T = B^T A^T \neq A^T B^T; \quad (ABC)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T \neq A^T B^T C^T$

Домашнее задание по теме 3 и 4 уроков

1. Найти:

а) $2A - 3B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $3C - D$, где $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$

в) $2F - 3E$, где $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Можно ли сложить матрицы: а) A и B; б) A^T и B; в) A и B^T; г) A^T и B^T?

Если можно, выполните сложение.

3) Есть четыре матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Найдите (если такое возможно): а) $(A^T + B)(A + B^T)D$; б) BAC; в)$D^T BC$; г) Проверьте, равны ли произведения AB и BA.

Ответы на домашнее задание

1. а) $\begin{pmatrix} -29 & 12 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 11 & 14 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 8 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2. 1) а) нет, б) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 11 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}$, г) нельзя

2) а) $\begin{pmatrix} 36 & 42 \\ 81 & 96 \end{pmatrix}$, б) нельзя, в) $\begin{pmatrix} 14 & 29 & 44 \\ 19 & 40 & 61 \\ 24 & 51 & 78 \end{pmatrix}$, г) нельзя

3. а) $\begin{pmatrix} 98 \\ 30 \end{pmatrix}$, б) нельзя, в) $\begin{pmatrix} 38 & 18 & -6 \end{pmatrix}$, г)$AB$ - матрица 2×2, а BA - матрица 3×3

№5 урок

Детерминант матрицы

Список терминов, вводимых на уроке:

- Детерминант/определитель
- Минор матрицы
- Вырожденная матрица
- Элементарные преобразования матриц
- Алгебраическое дополнение

Закончив изучение основных свойств и операций над матрицами, можем приступать к двум последним важным вещам, связанным с матрицами, без которых дальнейшее продолжение темы попросту невозможно: детерминанту матрицы и обратной матрице.

Детерминант/определитель матрицы - скалярная величина, являющаяся основной числовой характеристикой любой квадратной матрицы. Заметим, что детерминант определен лишь для квадратной матрицы, для прямоугольных матриц он не определен и не имеет смысла.

Давайте научимся определять детерминант любой матрицы.

Общая формула вычисления определителя матрицы. Общая формула вычисления детерминанта квадратной матрицы размерами $n \times n$ любой размерности может быть записана двумя способами:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_j^1 \quad (1) \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}M_1^i \quad (2)$$

Видно, что формулы очень похожи, лишь отличаются индексы. Разберемся, что означают эти формулы на примере (1) формулы.

(1) формула есть детерминант матрицы A с элементами a_{ij}, разложенный по строке. Индекс i отвечает за номер строки, сразу видно, что в этой формуле его нет, точнее говоря он есть, просто зафиксирован и равен единице. Индекс j отвечает за номер столбца в матрице, по нему идет суммирование. Осталось разобраться с непонятным выражением M_j^1. Это минор матрицы.

Минор матрицы - это детерминант некоторой меньшей квадратной матрицы, вырезанной из первоначальной матрицы путем удаления строки с номером i и столбца с номером j.

Например, пусть мы имеем матрицу $A = \begin{pmatrix} 98 & 1 & 0 \\ 10 & 8 & 2 \\ 67 & 2 & 12 \end{pmatrix}$. Для нее минором M_1^2 будет определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$, минором M_3^1 будет определитель матрицы $\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 67 & 2 \end{pmatrix}$.

Может показаться, что мы оказались в замкнутом круге, ведь, определяя детерминант матрицы 3×3 мы переходим опять же к вычислению определителей 2×2. Однако не стоит отчаиваться, ведь для детерминанта матрицы 2×2 можно применить ту же формулу (1), нужно лишь найти миноры матриц 2×2. А это просто!

Например, имеем матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Для нее минором M_1^1 будет определитель матрицы $\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$, то есть просто число 2 (так как детерминант матрицы 1×1 есть число, стоящее внутри этой матрицы), минором M_2^1 будет определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, то есть просто 1.

Давайте найдем определитель матрицы 3×3, используя общую формулу (1), двигаясь по порядку с самого начала:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$detA = |A| = (-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot M_1^1 + (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot M_2^1 + (-1)^{1+3} \cdot (-3) \cdot M_1^1 =$$

$$= 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$5[(-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot M_1^1 + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot M_2^1] + 1[(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot M_1^1 + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot M_2^1] - 3[(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot M_1^1 + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot M_2^1] =$$

$$= 5 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-1) = 10 + 1 - 6 = 5$$

Отлично, мы справились! Оказалось не так сложно, с формулой (2) дело обстоит почти точно так же. Просто теперь мы будем фиксировать не первую строку и проводить суммирование по столбцам матрицы, а действовать наоборот: фиксировать первый столбец и двигаться по строкам.

Примечание: можно предложить учащимся показать для разобранного выше примера справедливость формулы (2) самостоятельно в виде домашего задания.

Стоит заметить, что формулы (1) и (2) приводят к одному и тому же результату, они равнозначны, потому использовать можно как одну, так и другую без опаски. Доказательство эквивалентности данных формул мы опустим ввиду отсутсвия надобности в нашем курсе.

Простые методы вычисления определителей матриц.Вы, наверное, заметили, что подсчет детерминанта матрицы не самое простое и, возможно, приятное дело, однако есть некоторое спасение: определители матриц 2×2 и 3×3 можно искать проще и быстрее!
Определитель матрицы 2×2 можно считать по следующей формуле:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$detA = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Примечание: можно предложить учащимся доказать эквивалентность общей формулы и формулы приведенной выше в виде домашнего задания.

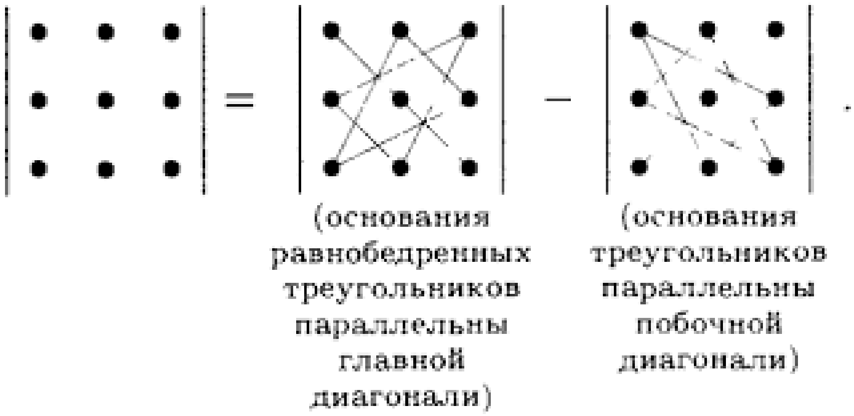
К примеру, имеем матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Ее определитель равен $detA = 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 11$

Определитель матрицы 3×3 считается по следующей формуле:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Данную формулу легко запомнить, посмотрев на картинку, приведеную ниже.



Примечание: можно предложить учащимся доказать эквивалентность общей формулы и формулы приведенной выше в виде домашнего задания.

К примеру, имеем матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ее определитель равен $detA = 0 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot (-3) - 0 \cdot 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 = 41$

Может встать вполне резонный вопрос: зачем мы совсем недавно изучили общие формулы для вычисления детерминанта, если есть методы намного проще?.. К сожалению, простые методы поиска определителей матриц заканчиваются на матрицах размерами 3×3. Для определителей матриц большей размерности простых формул не существует, потому при поиске определителя матрицы, к примеру, 4×4 необходимо один раз воспользоваться общей формулой, дабы свести все к поиску определителей матриц размерами 3×3, а далее пользоваться удобными формулами.

Сразу отметим два важных случая:
1) Детерминант единичной матрицы любой размерности равен единице:

$detE = 1$

2) Детерминант матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда матрица вырождена. Отсюда вытекает определение вырожденной матрицы:

<u>Вырожденная матрица</u> - матрица, определитель которой равен нулю.

Полезно и очень важно дать другое определение вырожденной матрицы:

<u>Вырожденная матрица</u> - матрица, строки или столбы которой являются линейно зависимыми.

Посмотрев на матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 14 & 3 \end{pmatrix}$ можно сразу сказать, чему равен ее детерминант - он равен нулю. Легко заметить, что строки матрицы A линейно зависимы, так как первую строку можно получить путем вычитания из третьей строки четвертой. Значит, матрица вырождена, следовательно, ее определитель равен нулю.

Также заметим, что если матрица содержит нулевую строку или нулевой столбец, то матрица вырождена, так как линейная комбинация строк или столбцов, содержащая нулевую строку или нулевой столбец обязательно линейно зависима.

Последние слова о вычислении детерминанта. Есть способ в самом начале (перед тем, как приступать к вычислению) упростить себе работу. Речь идет об элемнетарных преобразованиях, правильное применение которых не меняет значнеие детерминанта.

Элементарные преобразования матриц - такие преобразования, в результате которых сохраняется эквивалентность матриц, то есть, элементарные преобразования не изменяют множество решений системы линейных алгебраических уравнений, которую представляет эта матрица. Элементарные преобразования можно осуществлять как над строками, так и над столбцами - разницы нет.

Элементарные преобразования бывают следующими:

1) Перестановка местами любых двух строк матрицы
2) Умножение на ненулевую константу любой строки матрицы;
3) Прибавление к любой строке матрицы другой строки, умноженной на ненулевое число.

Проводя такие преобразования правильно мы никак не изменим значение детерминанта матрицы. Такие преобразования могут быть полезны для первоначального упрощения матрицы с целью упрощения процесса вычисления детерминанта. Ведь для любой невырожденной матрицы существует такая последовательность элементарных преобразований, при которой исходная матрица перейдет в единичную, определитель которой мы знаем!

Что значит правильно?

1) Перестановка местами любых двух строк матрицы меняет знак детерминанта! Есть такое правило: детерминант меняет знак при простейшей перестановке строк или столбцов матрицы (где простейшая перестановка - перестановка соседних строк или столбцов). Из этого следует следующее: если поменять, например, 1 и 2 строки матрицы местами, то знак детерминанта изменится на противоположный; если же поменять местами 1 и 3 строки, то знак не изменится (так как чтобы переставить местами 1 и 3 строки необходимо сначала поменять 1-ю со 2-ой, а затем "новую"2-ю с 3-й). Мы дважды совершаем простейшую перестановку, тем самым дважды меняя знак детерминанта на противоположный. Подытожим: чтобы детерминант не изменил знак, необходимо совершить четное количество простейших перестановок.

2) Общий множитель в строке или столбце можно выносить за знак определителя. Из этого следует, что при умножении строки или столбца матрицы на ненулевое число k, ее определитель увеличивается в k раз.

3) Прибавление к любой строке матрицы другой строки, умноженной на ненулевое число, не меняет детерминанта.

Свойства детерминанта. Запомним (без вывода) некоторые полезные в дальнейшем для нашего курса свойства детерминанта.

1) Определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц: $det(A \cdot B) = detA \cdot detB$.

2) Если матрица порядка n умножается на некоторое ненулевое число, то определитель полученной матрицы равен произведению определителя исходной матрицы на это число в степени n:

$$B = k \cdot A \Longrightarrow detB = k \cdot det(A)$$

3) При транспонировании значение определителя матрицы не меняется: $detA = detA^T$.

4) Определитель обратной матрицы равен определителю исходной матрицы в минус первой степени: $detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$

№6 урок

Обратная матрица

• Обратная матрица

Что такое обратная матрица? Сейчас узнаем!

Обратная матрица - такая матрица A^{-1}, при умножении на которую исходная матрица A даёт в результате единичную матрицу E: $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Сразу к свойствам!

Свойства обратной матрицы.
1) Обратная матрица существует лишь для квадратных невырожденных матриц!
2) Свойство, которое мы уже увидели в свойствах детерминанта: $detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$
3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5) $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$
6) $E^{-1} = E$

Заметим! Обратную матрицу можно грубо сравнить с обратным числом в поле действительных чисел. То есть числом, обратным к, например, пятерке будет дробь $\dfrac{1}{5}$, потому как $5 \cdot \dfrac{1}{5} = 1$. Проводя дальнейшую, не совсем терминологически верную, но тем не менее справедливую, аналогию, можно сказать, что все числа являются квадратными, и все, кроме нуля, являются невырожденными.

Так как обратная матрица - неотъемлемый объект нашего дальнейшего повествования, и искать ее и пользоваться ее свойствами придется еще не раз, нам просто необходимо разобраться с методами ее нахождения, не вдаваясь в теоретическое обоснование правдивости методов. Их всего 2, начнем по порядку:

Методы нахождения обратной матрицы.
1) Призовем на помощь единичную матрицу. Запишем справа от матрицы A единичную матрицу соответствующей размерности. Далее, путем элементарных преобразований, описанных выше, будем превращать матрицу A в единичную (как мы уже знаем, любую невырожденную матрицу можно путем элементарных преобразований привести к единичной), при этом все те же самые преобразования парллельно будем производить и с единичной матрицей. Тогда, когда вместо матрицы A получится единичная матрица, изначальная единичная матрица, которую мы приписывали справа, превратится в обратную. Поясним на примере матрицы 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Видно, что определитель матрицы не равен нулю, значит, она не вырождена. Следовательно, обратная матрица A^{-1} существует. Припишем справа единичную матрицу:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Затем проведем следующие линейные преобразования (не забываем, что преобразования производятся не только над матрицей A, но и над единичной матрицей E, приписанной справа от A): 1) Умножим вторую строку на 5 и сложим ее с первой строкой; 2) умножим первую строку на 11 и вычтем из нее вторую строку; 3) разделим первую строку на 55, а вторую - на 11.

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 55 & 0 & 10 & -5 \\ 0 & 11 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 10/55 & -5/55 \\ 0 & 1 & 1/11 & 5/11 \end{array}\right)$$

То, во что превратилась изначально приписанная справа единичная матрица, и есть обратная матрица A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Нетрудно убедиться проверкой, что найденная матрица действительно является обратной:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

2) Теперь призовем на помощь миноры, операции транспонирования и нахождения детерминанта матрицы с которыми мы уже хорошо знакомы.

Общая формула выглядит следующим образом:

$$A^{-1} = \frac{(A^{+})^{T}}{detA}$$

Где матрица A^{+} получается из матрицы A путем выписывания миноров матрицы A на соответствующие места новой матрицы с учетом знака, определяемого номером столбца и строки. Поясним на примере матрицы той же матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Выпишем все миноры этой матрицы:

$$M_1^1 = 2; \quad M_2^1 = -1; \quad M_1^2 = 1; \quad M_2^2 = 5;$$

Теперь необходимо вставить найденные миноры в новую матрицу на соответствующие места (то есть M_j^i это элемент новой матрицы, стоящий в i-ой строке в j-ом столбце). Назовем пока что эту матрицу матрице B:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Это еще не матрица A^{+}, ведь мы не учли знаки, о которых было сказано выше. Что это за знаки? Каждый элемент матрицы B (для получения матрицы A^{+}) необходимо умножить на $(-1)^{i+j}$. Как сразу можно заметить, ровно половина элементов изменит знак:

$$A^{+} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot 2 & (-1)^{1+2}\cdot(-1) \\ (-1)^{2+1}\cdot 1 & (-1)^{2+2}\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Далее дело обстоит проще. Протранспонируем матрицу A^{+}:

$$(A^+)^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Далее находим детерминант матрицы A:

$$detA = 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 11$$

И получаем искомую обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{(A^+)^T}{detA} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Проверку производить излишне: видно, что результат, полученный вторым методом, полностью совпадает с результатом первого!

Обратную матрицу больших размерностей можно искать теми же способами, только вычисления становятся более трудоемкими. Каким способом находить обратную матрицу - решать Вам. Совет один: стоит потренироваться в нахождении обратной матрицы, чтобы определить наиболее простой для Вас способ.

№7 урок

Замена базиса. Матрица перехода

Список терминов, вводимых на уроке:

• Матрица перехода

Приступим к финальной стадии подготовки нашей теоретической базы к погружению в мир тензоров! А именно к тому, как переходить из одной системы координат в другую (или из одного базиса в другой) и как легко при этом учесть все происходимые изменения.

Зачем нам это нужно? Зачастую базис, в котором задано условие задачи (то есть даны координаты векторов), жутко неудобен. Согласитесь, мало кому понравится работать в косоугольном ненормированном базисе. Ведь даже непонятно, как там считать скалярное произведение... Потому прямые вычисления в первоначальном базисе могут приводить к серьезным ошибкам ввиду тяжести или громозкости вычислений. Дабы упростить всем нам жизнь, к чему мы всегда так стремимся, было придумано переходить из одного базиса в другой, при этом перерасчитывая координаты векторов для нового базиса. Это может показаться всего лишь работой ради работы, однако это совсем не так. Если задача содержит большое количество вычислений, то проще будет один раз сменить базис и далее считать все просто и легко, чем каждый раз мучиться с подсчетом. Далее на примерах мы сможем увидеть всю мощь и полезность перехода между базисами.

Сразу заметим, что понятие "старый базис" и "новый базис" несут лишь смысловую нагрузку, означающую "базис, из которого мы переходим" и "базис, в который мы переходим"· Никакой из базисов, естественно, никогда не старел.

Давайте определимся с тем, что же вообще менется при переходе из одного базиса в другой. Переход к новому базису означает следующее: мы будем рассматривать векторы нашего пространства не относительно первоначального базиса, а относительно "нового который мы выберем сами (выберем $\Longleftrightarrow$ зададим координаты новых базисных векторов в ОНБ). Но ведь вполне очевидно, что сами векторы пространства от такого нашего перехода никак не изменились, их длина и полжение в пространстве остались абсолютно неизменными. Изменилось лишь одно: их координаты, - теперь они другие. Ведь, хоть мы и имеем тот же самый вектор, раскладываем его уже по совсем другому базису.

Как же найти связь между новыми координатами векторов и старыми координатами? Давайте подумаем: если мы решаем перейти в новый базис, значит на то у нас есть причины. Скорее всего мы посмотрели на старый базис, а именно, на координаты старых базисных векторов, заданные в ОНБ, ужаснулись и решили перейти к новому базису. Что здесь важно? Что мы решили перейти к новому базису лишь потому, что знали как выглядит старый, то есть знали координаты его базисных векторов! Лишь после этого мы можем каким-то образом модифицировать наш старый базис, превратив его в новый.

Давайте узнаем, как можно провести такую модификацию. Давайте попробуем выразить базисные векторы нового базиса через старый базис. Всегда ли мы можем так сделать? - Конечно! Ведь базисные векторы нового базиса - всего лишь векторы того же линейного пространства, где задан старый базис, и раз это базис, то по нему должен однозначным образом раскладываться любой вектор пространства (даже базисный вектор нового базиса). Далее будем обозначать старый базис как $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, а новый как $(\vec{e'_1},\vec{e'_2},\vec{e'_3})$.

Пусть базисные векторы нового базиса выражаются через базисные векторы старого базиса следующим образом:

$$\vec{e_1'} = s_1^1\vec{e_1} + s_1^2\vec{e_2} + s_1^3\vec{e_3}$$
$$\vec{e_2'} = s_2^1\vec{e_1} + s_2^2\vec{e_2} + s_2^3\vec{e_3}$$
$$\vec{e_3'} = s_3^1\vec{e_1} + s_3^2\vec{e_2} + s_3^3\vec{e_3}$$

Тогда, давайте соберем все коэффициенты в одну матрицу S следующим образом: стольцы матрицы должны состоять из коэффициентов разложениях новых базисных векторов по старым. То есть, например, коэффициенты разложения второго нового базисного вектора через три старых базисных должны стоять во втором столбце. Такую матрицу мы назовем матрицей перехода от базиса $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ к базису $(\vec{e_1'},\vec{e_2'},\vec{e_3'})$:

$$S = \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 & s_3^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 \\ s_1^3 & s_2^3 & s_3^3 \end{pmatrix}$$

Такая матрица при правильном умножении, а именно

$$(\vec{e_1'},\vec{e_2'},\vec{e_3'}) = (\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})S \quad (3)$$

будет осуществлять переход от старого базиса к новому - такова ее задача.

Заметим, что здесь $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ при умножении на S стоит рассматривать как вектор-строку с координатами $\vec{e_1}$,$\vec{e_2}$, и $\vec{e_3}$, держа в голове тот факт, что это на самом деле не координаты, а цельные векторы.

Формулу (3) можно подробнее представить как

$$(\vec{e_1'},\vec{e_2'},\vec{e_3'}) = (s_1^1\vec{e_1} + s_1^2\vec{e_2} + s_1^3\vec{e_3},\ \ s_2^1\vec{e_1} + s_2^2\vec{e_2} + s_2^3\vec{e_3},\ \ s_3^1\vec{e_1} + s_3^2\vec{e_2} + s_3^3\vec{e_3})$$

Вполне очевидно, что такую операцию можно производить не только в трехмерном пространстве. Матрица перехода позволяет переходить из одного базиса в другой в пространстве любой размерности. Отличие лишь будет состоять в размере матрицы.

Свойства матрицы перехода. Рассмотрим некоторые ажные свойства матрицы перехода.

1) Матрица перехода обязательно невырождена. Это следует из того простого факта, что базис - линейно независимая система векторов. Следовательно, их координаты, заданные в каком бы то ни было базисе, должны быть линейно независимыми. Следовательно, оперделитель матрицы, имеющей в виде столбцов координаты базисных векторов, обязан быть не равен нулю.

2) Свойство, которое выходит из предыдущего: матрица перехода имеет обратную матрицу.

3) Если новый базис является тем же старым базисом, но просто повернутым вокруг какой-либо оси на выбранный угол и/или отраженным относительно какой-то оси, то матрица перехода называется матрицей поворота. Свойство заключается в том, что определитель матрицы поворота равен ±1, а также в том, что такая матрица являтся отогональной, то есть $S^T = S^{-1}$.

Замечание: полезно предложить доказать 3 свойство школьникам самостоятельно в виде домашнего задания.

Используя второе свойство, можем сказать следующее:

$$(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}) = (\vec{e_1'},\vec{e_2'},\vec{e_3'})S^{-1}$$

То есть зная матрицу S перехода от старого базиса к новому и используя навыки нахождения обратной матрицы S^{-1}, описанные в предыдущем уроке, мы можем без труда определить базисные векторы старого базиса через базисные векторы нового базиса.

Вспоним, зачем мы вообще затяели все это дело. Мы хотели перейти к новому, более удобному для нас, базису. Это мы сделали. Но что произошло с координатами векторов? Как изменились они? Сейчас узнаем.

Пусть мы имеем вектор $\vec{a}$ в нашем трехмерном пространстве. Так как у нас есть два базиса в этом пространстве, то вектор $\vec{a}$ имеет два набора координат: одни координаты в старом базисе, другие - в новом. Значит, мы можем разложить этот вектор по двум базисам с соответствующими координатами:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = \alpha^1\vec{e_1} + \alpha^2\vec{e_2} + \alpha^3\vec{e_3}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha'^1 \\ \alpha'^2 \\ \alpha'^3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = \alpha'^1\vec{e_1'} + \alpha'^2\vec{e_2'} + \alpha'^3\vec{e_3'} \quad (4)$$

Давайте теперь подставим в (4) разложение новых базисных векторов через старые:

$$\vec{a} = \alpha'^1\vec{e_1'} + \alpha'^2\vec{e_2'} + \alpha'^3\vec{e_3'} =$$

$$= \alpha'^1(s_1^1\vec{e_1} + s_1^2\vec{e_2} + s_1^3\vec{e_3}) + \alpha'^2(s_2^1\vec{e_1} + s_2^2\vec{e_2} + s_2^3\vec{e_3}) + \alpha'^3(s_3^1\vec{e_1} + s_3^2\vec{e_2} + s_3^3\vec{e_3}) =$$

$$= (\alpha'^1 s_1^1 + \alpha'^2 s_2^1 + \alpha'^3 s_3^1)\vec{e_1} + (\alpha'^1 s_1^2 + \alpha'^2 s_2^2 + \alpha'^3 s_3^2)\vec{e_2} + (\alpha'^1 s_1^3 + \alpha'^2 s_2^3 + \alpha'^3 s_3^3)\vec{e_3}$$

И что же мы видим? Мы видим, что старые координаты вектора выражаются через его ноые координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \alpha'^1 s_1^1 + \alpha'^2 s_2^1 + \alpha'^3 s_3^1 \\ \alpha^2 &= \alpha'^2 s_1^2 + \alpha'^2 s_2^2 + \alpha'^3 s_3^2 \\ \alpha^3 &= \alpha'^3 s_1^3 + \alpha'^2 s_2^3 + \alpha'^3 s_3^3 \end{aligned}$$

Но тогда в этой записи можно углядеть уже знакомую нам матрицу S и переписать это все в виде:

$$\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \alpha'^1 \\ \alpha'^2 \\ \alpha'^3 \end{pmatrix}$$

Мы видим, что зная способ, которым мы переходим от базиса к базису, мы можем составить матрицу перехода S. А уже зная эту матрицу, мы можем без труда находить координаты одного и того же вектора в разных базисах. Однако зачастую мы уже знаем координаты вектора в старом базисе, и нам хотелось бы выразить через них новые. Как это сделать? - Воспользоваться обратной матрицей перехода!

$$\begin{pmatrix} \alpha'^1 \\ \alpha'^2 \\ \alpha'^3 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix}$$

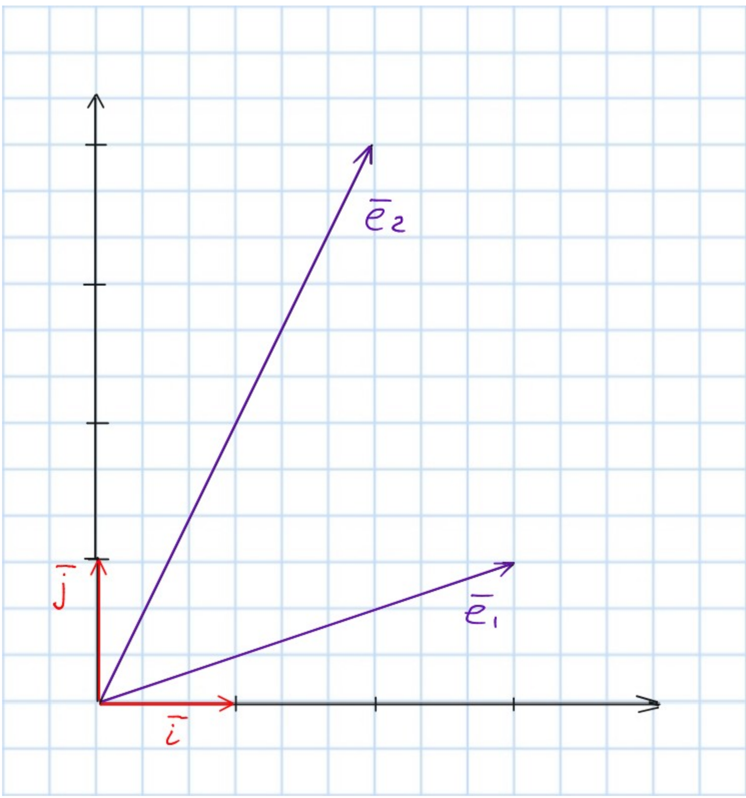
Вот и все! Задача о прееходе от одного базиса к другому решена. Мы можем находить теперь все, что там необходимо.

Запомнить эти формулы достаточно легко: **новый базис** находится **через старый** домножением на матрицу перехода **с** соответствующей (**правой**) **стороны**, а вот с координатами векторов все наоборот - **старые координаты** выражаются **через новые** путем домножения на матрицу перехода **с** соответствующей (**левой**) **стороны**.

Примеры. Рассмотрим пример применения матрицы перехода.

Для упрощения вычислений рассмотрим двухмерную задачу. Пусть в базисе $(\vec{e_1},\vec{e_2})$, где координаты базисных векторов заданы в ОНБ: $\vec{e_1} = (3,1)^T$, $\vec{e_2} = (2,4)^T$, заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координатами $(1,-1)^T$ и $(3,0)^T$, соответственно.
Давайте определим модуль вектора $\vec{a}$ и скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Очевидно, что модуль вектора $\vec{a}$ уже нельзя считать по формуле $\sqrt{(1)^2+(-1)^2}$, так как такая формула справедлива лишь в ОНБ. Та же самая загвоздка состоит и в нахождении скалярного произведения векторов. Давайте в таком случае перейдем в новый базис, который будет нормированным и ортоганальным, и затем уже там будем использовать давно известные нам формулы выисления модуля вектора при помощи теоремы Пифагора и вычисления скалярного произведения.



Чтобы построить новый базис $(\vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ из старого, давайте заметим, что этим новым базисом могут служить те самые орты $\vec{i}$ и $\vec{j}$, при помощи которых и задан наш базис $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. То есть мы можем все перефразировать: тот базис, что нам дан в условии, будет для нас новым базисом, а орты - старым базисом. Тогда, матрица перехода от старого базиса к новому имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Значит, координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в старом базисе (коим являются орты), выраженные через координаты в новом базисе (коим являляется данный нам базис) равны:

$$\vec{a} = (3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1), \quad 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1))^T = (1, \ -3)^T$$

$$\vec{b} = (3 \cdot 3 + 2 \cdot 0, \quad 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0)^T = (9, 3)^T$$

Тогда, модуль вектора $\vec{a}$ равен $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

А скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно $(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 9 + (-3) \cdot 3 = 0$

То есть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортоганальны.

Контрольный тест по теме 5 и 6 уроков

1.

Домашнее задание по теме 3 и 4 уроков

№8 урок

Контравариантные, ковариантные координаты. Правило Эйнштейна

Список терминов, вводимых на уроке:

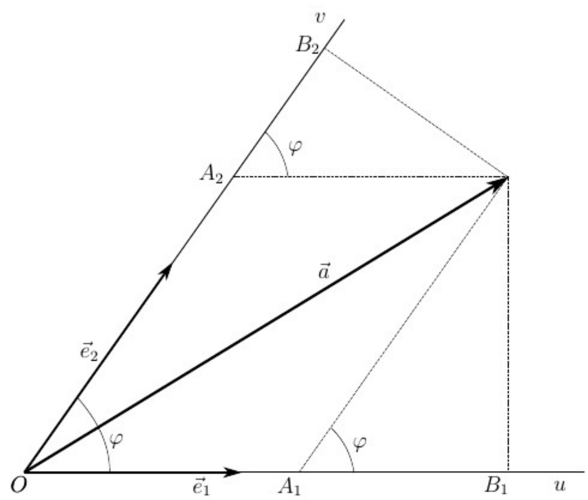
- Контравариантные координаты
- Ковариантные координаты
- Метрический тензор
- Правило Эйнштейна

На этом уроке мы наконец впервые познакомимся с тензорной записью, узнаем, что такое правило Эйнштейна, и зачем оно нужно, по-новому взглянем на скалярное произведение векторов. Итак, пойдем по порядку.

Контравариантные, ковариантные координаты и связь между ними. Рассмотрим вектор, и без потери общности наших рассуждений, рассмотрим вектор заданный на плоскости. Введем в этой плоскости косоугольный ненормированный базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Тогда, вектор $\vec{a}$ представим как:

$$\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2$$

Здесь и далее a^i, $i = \overline{1{,}2}$ — коэффициенты разложения вектора по базису, называемые контравариантными координатами вектора $\vec{a}$. Геометрически это можно изобразить так, как показано на рисунке ниже. Заданный нами базис задает косоугольную систему координат на плоскости, с осями $(u{,}v)$.



Исходя из чертежа длины отрезков OA_1 и OA_2 равны

$$OA_1 = a^1\left|\vec{e}_1\right|, OA_2 = a^2\left|\vec{e}_2\right|$$

Однако, это не единственный способ определить вектор $\vec{a}$ в данной системе координат. Его можно так же задать ортогональными проекциями на оси $(u{,}v)$. Эти проекции равны

$$OB_1 = OA_1 + OA_2\cos\varphi = a^1\left|\vec{e}_1\right| + a^2\left|\vec{e}_2\right|\cos\varphi$$

$$OB_2 = OA_1\cos\varphi + OA_2 = a^1\left|\vec{e}_1\right|\cos\varphi + a^2\left|\vec{e}_2\right|$$

Длины этих проекций можно выразить другим образом через длины базисных векторов:

$$OB_1 = a_u = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_1}{|\vec{e}_1|} = \frac{a_1}{|\vec{e}_1|}$$

$$OB_2 = a_v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_2}{|\vec{e}_2|} = \frac{a_2}{|\vec{e}_2|}$$

где $a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1$ и $a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2$ — <u>ковариантные координаты</u> вектора $\vec{a}$.

Сравнив полученные ранее результаты, видим:

$$\frac{a_1}{|\vec{e}_1|} = a^1\,|\vec{e}_1| + a^2\,|\vec{e}_2|\cos\varphi$$

$$\frac{a_2}{|\vec{e}_2|} = a^1\,|\vec{e}_1|\cos\varphi + a^2\,|\vec{e}_2|$$

Умножим первое равенство на $|\vec{e}_1|$, а второе - на $|\vec{e}_2|$ и преобразуем их

$$a_1 = a^1(\vec{e}_1,\vec{e}_1) + a^2(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$$

$$a_2 = a^1(\vec{e}_1,\vec{e}_2) + a^2(\vec{e}_2,\vec{e}_2)$$

Введем матрицу

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1,\vec{e}_1) & (\vec{e}_1,\vec{e}_2) \\ (\vec{e}_1,\vec{e}_2) & (\vec{e}_2,\vec{e}_2) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Тогда предыдущие два равенства можно выразить следующим соотношением

$$a_i = \sum_{j=1}^{2} g_{ij} a^j,\ i = 1{,}2 \quad (2)$$

Выражение (2) дает связь между ковариантными и контравариантными координатами вектора, определяемую лишь видом матрицы $\mathbf{g}$, зависящей от длин и взаимного расположения базисных векторов. Пока никак не будем интерпретировать полученный результат, а просто запомним его.

Набор контравариантных и ковариантных компонент, по сути, задают в выбранном базисе один и тот же вектор. При использовании контравариантных координат этот вектор задается матрицей-столбцом

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$$

а в ковариантной форме — матрицей-строкой

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_n \end{pmatrix}$$

Скалярное произведение векторов. Перейдем к пространству более высокой размерности и рассмотрим два вектора

$$\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = b^1\vec{e}_1 + b^2\vec{e}_2 + b^3\vec{e}_3$$

где базисные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, как и в предыдущем примере, - косоугольный ненормированный базис. Перемножим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ скалярно.

$$(\vec{a},\vec{b}) = \left(\left(a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3\right), \left(b^1\vec{e}_1 + b^2\vec{e}_2 + b^3\vec{e}_3\right)\right)$$

В последнем выражении аккуратно раскроем скобки

$$\begin{gathered}(\vec{a},\vec{b}) = a^1b^1(\vec{e}_1,\vec{e}_1) + a^2b^1(\vec{e}_2,\vec{e}_1) + a^3b^1(\vec{e}_3,\vec{e}_1) + \\ a^1b^2(\vec{e}_1,\vec{e}_2) + a^2b^2(\vec{e}_2,\vec{e}_2) + a^3b^2(\vec{e}_3,\vec{e}_2) + \\ a^1b^3(\vec{e}_1,\vec{e}_3) + a^2b^3(\vec{e}_2,\vec{e}_3) + a^3b^3(\vec{e}_3,\vec{e}_3)\end{gathered}$$

Заметим, что ввиду свойства скалярного произведения справедливо следующее: $(\vec{e}_2,\vec{e}_1) = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)$; $(\vec{e}_3,\vec{e}_1) = (\vec{e}_1,\vec{e}_3)$; $(\vec{e}_3,\vec{e}_2) = (\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

Снова введем матрицу $\mathbf{g}$:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1,\vec{e}_1) & (\vec{e}_1,\vec{e}_2) & (\vec{e}_1,\vec{e}_3) \\ (\vec{e}_1,\vec{e}_2) & (\vec{e}_2,\vec{e}_2) & (\vec{e}_2,\vec{e}_3) \\ (\vec{e}_1,\vec{e}_3) & (\vec{e}_2,\vec{e}_3) & (\vec{e}_3,\vec{e}_3) \end{pmatrix} \quad (3)$$

И тогда скалярное произведение можно свернуть весьма компактным образом

$$(\vec{a},\vec{b}) = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} g_{ij}a^j\right)b^i \quad (4)$$

Первое, что можно заметить, при уменьшении числа измерений пространства мы перейдем от (3) к (2) а выражение (4) будет работать и давать склярное произведение векторов, но уже на плоскости. То есть мы получили некую обобщающую форму записи операции скалярного умножения, не зависящую ни от размерности пространства, ни от рассматриваемого базиса, все свойства которого собраны в матрице $\mathbf{g}$. Но ведь это и есть назначение тензора - быть таким математическим объектом, общий вид которого не зависит от пространства, его вид одинаков везде! Матрица $\mathbf{g}$, речь о которой идет на протяжении всего урока - есть наш первый тензор, а именно, метрический тензор. Внимательно взглянув на (4) мы поймем ещё одну вещь

$$a_i = \sum_{j=1}^{3} g_{ij}a^j, i = 1,2,3 \quad (5)$$

что есть ничто иное как ковариантные координаты вектора $\vec{a}$. То есть, (4) можно переписать

$$(\vec{a},\vec{b}) = \sum_{i=1}^{3} a_i b^i \quad (6)$$

Но и это не предел упрощения!

Правило Эйнштейна. Существует правило суммирования, предложенное Альбертом Эйнштейном, которое позволяет избавиться от неудобного и порой загромождающего записи знака $\sum$. В выражениях (5) и (6) можно опустить знак суммы, подразумевая суммирование по повторяющемуся индексу, который называют «немым». То есть, (5) можно переписать следующим образом:

$$a_i = g_{ij}\, a^j, \, i = 1,2,3$$

здесь j — индекс, по которому происходит суммирование. По правилу, этот индекс должен чередовать свое положение — если у первого множителя он внизу, то у второго должен быть вверху, и наоборот. Выражение (6) будет выглядеть как

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_i\, b^i$$

Тогда, (4) придет к виду

$$(\vec{a},\vec{b}) = g_{ij}\, a^j\, b^i \quad (7)$$

Поздравялю! Мы записали наши первые выражения в тензорном виде! Дальше больше - на следующем уроке мы увидим, для чего это все нам было нужно.

Внимание! Необходимо добиться от учеников понимания того, по каким индексам как и что суммируется, должна появиться устойчивая и понятная картина того, как мы приходим к вышенаписанным суммам через общие рассуждения. Необходимо то для того, чтобы впоследствии школьники не пытались представить себе в голове, как будет выглядеть та или иная сложная сумма, а просто не задумываясь производили суммирование в голове, опуская индексы. Важно понять и усвоить правило Эйнштейна, потому как оно позволит в дальнейшем упрощать тензорные записи.

№9 урок

Метрический тензор

Список терминов, вводимых на уроке:

- Тензор
- Метрический тензор

На этом уроке рассмотрим пару простых примеров, на основе которых мы сможем лучше понять назначение и свойства метрического тензора.

Анализ на простых примерах. Допустим, наш базис — декартов, то есть ортонормированый. Тогда, матрица $\mathbf{g}$ становится единичной

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть вектор $\vec{a}$ задан в таком базисе. Квадрат длины вектора, как известно, это скалярное произведение этого вектора самого на себя, то есть

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = g_{ij}\, a^j\, a^i = \left(g_{11}a^1 + g_{12}a^2 + g_{13}a^3\right) a^1 +$$
$$+ \left(g_{21}a^1 + g_{22}a^2 + g_{23}a^3\right) a^2 + \left(g_{31}a^1 + g_{32}a^2 + g_{33}a^3\right) a^3 =$$
$$= (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$$

И мы получили… квадрат длины вектора, заданного в прямоугольной системе координат!

Ещё пример, дабы не загроможнать который, будем работать в двух измерениях. Пусть система координат есть нормированный косоугольный базис, и в ней задан вектор $\vec{b}$ своими контравариантными координатами. Тогда

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\varphi \\ \cos\varphi & 1 \end{pmatrix}$$

где φ — угол между векторами базиса. Вычислим длину вектора $\vec{b}$

$$|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} = g_{ij}\, b^j\, b^i = \left(g_{11}b^1 + g_{12}b^2\right) b^1 + \left(g_{21}b^1 + g_{22}b^2\right) b^2 =$$
$$= (b^1)^2 + b^2\, b^1 \cos\varphi + b^1\, b^2 \cos\varphi + (b^2)^2 = (b^1)^2 + (b^2)^2 + 2\, b^1\, b^2 \cos\varphi$$

Ровно такой же результат мы получим, если воспользуемся теоремой косинусов и найдем квадрат длины диагонали параллелограмма.

Что получается? Работая в разных системах координат, мы использовали одну единственную формулу (7) для вычисления скалярного произведения. И её вид совершенно не зависит ни от базиса, ни от числе измерений пространства, в котором мы работаем. Базисом определяются лишь конкретные значения компонент матрицы $\mathbf{g}$.

Так вот, уравнение (7) выражает скалярное произведение двух векторов в тензорной, то есть независимой от выбранного базиса форме.

Матрица $\mathbf{g}$ задает так называемый метрический тензор. Её вид определяет каким образом в выбранных координатах вычисляется расстояние между двумя точками.

Но почему мы называем эту матрицу тензором? Следует понимать, что математическая форма, в данном случае квадратная матрица, содержащая набор компонент, это ещё не тензор. Понятие тензора несколько шире, и прежде чем мы скажем, что такое тензор, мы рассмотрим ещё один вопрос.

5. Преобразование метрического тензора при смене базиса
Перепишем соотношение (7) в матричной форме, так нам будет легче оперировать им

$$c = \vec{a}^T \mathbf{g}\, \vec{b}$$

где c — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в каком-то начальном (нештрихованном) базисе, $\mathbf{g}$ - метрический тензор, имеющий конкретные матричные значения в этом базисе. Преобразование же векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к некоторой другой (штрихованной) системе координат описывается матрицей преобразования S, то есть

$$\vec{a} = S\,\vec{a'}, \quad \vec{b} = S\,\vec{b'} \quad (8)$$

Тогда

$$c = \left(S\,\vec{a'}\right)^T \mathbf{g}\, S\,\vec{b'} = \vec{a'}^T\, S^T \mathbf{g}\, S\,\vec{b'}$$

в последнем выражении

$$S^T \mathbf{g}\, S = \mathbf{g}' \quad (9)$$

это метрический тензор, компоненты которого определяются уже новым (штрихованным) базисом. То есть, в новом базисе операция скалярного произведения имеет аналогичную форму

$$c = \vec{a'}^T\, \mathbf{g}'\, \vec{b'}$$

Тем самым мы показали ещё одно свойство тензора — его компоненты меняются синхронно с компонентами векторов того пространства, в котором определен тензор. То есть теперь мы можем сказать, что

Тензор — это математический объект, представленный набором компонент и правилом их преобразования при смене базиса.

Теперь, используя правило Эйнштейна, перепишем (8) и (9) в тензорной форме (штрихи $\prime$ у векторов и тензоров далее будем писать в круглых скобках дабы не путать их с индексами):

$$a^i = s^i_k a^{k(\prime)}, \quad b^j = s^j_l b^{l(\prime)}$$

$$c = g_{ij} a^i b^j = g_{ij}\left(s^i_k a^{k(\prime)}\right)\left(s^j_l b^{l(\prime)}\right) = s^i_k s^j_l g_{ij} a^{k(\prime)} b^{l(\prime)} = g^{(\prime)}_{kl} a^{k(\prime)} b^{l(\prime)}$$

Где

$$g^{(\prime)}_{kl} = s^i_k s^j_l g_{ij} \quad (10)$$

Заметим, что s^q_p — элемент матрицы S, стоящий в q-й строке и p-м столбце. Т.е. индекс сверху показывает номер строки, а индекс снизу показывает номер столбца. Можете самостоятельно убедиться (вспомнив 6 урок) в том, что, например, s^2_1 - элемент матрицы, стоящий во 2 строке в 1 столбце.

Проиллюстрируем соответствие (9) и (10) на трехмерном примере. Пусть матрица преобразования координат имеет вид

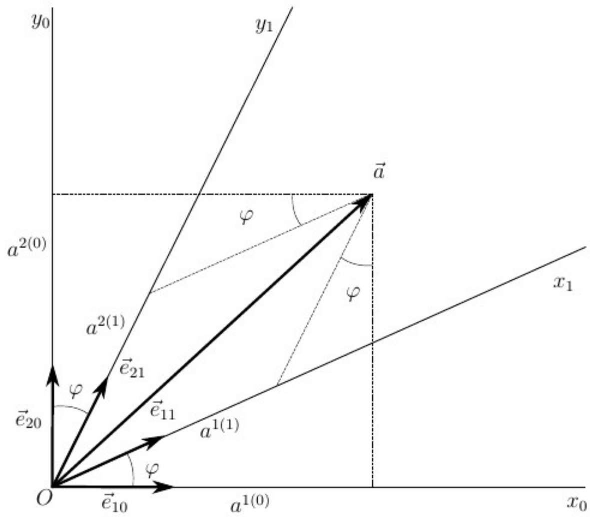
$$S = \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 & s_3^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 \\ s_1^3 & s_2^3 & s_3^3 \end{pmatrix}$$

Распишем преобразование компонента метрического тензора, выполняя суммирование по немым индексам i и j в (10)

$$\begin{gathered} g_{kl}^{(\prime)} = s_k^1\,\left(s_l^1\,g_{11} + s_l^2\,g_{21} + s_l^3\,g_{31}\right) + \\ s_k^2\,\left(s_l^1\,g_{12} + s_l^2\,g_{22} + s_l^3\,g_{32}\right) + \\ s_k^3\,\left(s_l^1\,g_{13} + s_l^2\,g_{23} + s_l^3\,g_{33}\right) \end{gathered}$$

откуда видно что в (10) выполняется транспонирование матрицы перехода, умножение результата на метрический тензор и умножение полученной матрицы на матрицу перехода, что как раз и описано в (9).

Давайте убедимся в том, что скалярное произведение векторов и длина вектора инвариантны относительно смены системы координат на конкретном примере. Пример рассмотрим на плоскости, чтобы не писать излишне громоздких выкладок:



Пусть вектор $\vec{a}$ задан в двух нормированных базисах: прямоугольном $(\vec{e}_{10},\, \vec{e}_{20})$ и косоугольном $(\vec{e}_{11}, \vec{e}_{21})$.

Далее индекс в круглых скобках означает номер базиса: (0) - прямоугольный базис, (1) - косоугольный.

Преобразование из косоугольной системы координат в прямоугольную выражается матрицей

$$S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 \\ s_1^2 & s_2^2 \end{pmatrix}$$

обратное преобразование

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi} & -\dfrac{\sin\varphi}{\cos 2\varphi} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{\cos 2\varphi} & \dfrac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_1^1 & \tilde{s}_2^1 \\ \tilde{s}_1^2 & \tilde{s}_2^2 \end{pmatrix}$$

То есть

$$(\vec{e}_{10},\vec{e}_{20}) = (\vec{e}_{11},\vec{e}_{21})S; \qquad (\vec{e}_{11},\vec{e}_{21}) = (\vec{e}_{10},\vec{e}_{20})S^{-1}$$

Пусть в прямоугольных координатах наш вектор имеет компоненты

$$\mathbf{a}^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Совсем нетрудно увидеть, что длина его в прямоугольльном базисе равна $|\vec{a}| = 5$. Метрический тензор в ортонормированном базисе представляется единичной матрицей

$$\mathbf{g}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

значит

$$|\vec{a}|^2 = g_{ij}^{(0)}\, a^{j(0)}\, a^{i(0)} = \left(g_{11}^{(0)}\, a^{1(0)} + g_{12}^{(0)}\, a^{2(0)}\right) a^{1(0)} + \left(g_{21}^{(0)}\, a^{1(0)} + g_{22}^{(0)}\, a^{2(0)}\right) a^{2(0)}$$
$$= 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 9 + 16 = 25.$$

Зададим угол наклона осей $\varphi = \frac{\pi}{6}$ и вычислим контравариантные компоненты вектора в косоугольных осях

$$a^{1(1)} = \tilde{\alpha}_1^1\, a^{1(0)} + \tilde{\alpha}_2^1\, a^{2(0)} = 3\sqrt{3} - 4$$
$$a^{2(1)} = \tilde{\alpha}_1^2\, a^{1(0)} + \tilde{\alpha}_2^2\, a^{2(0)} = -3 + 4\sqrt{3}$$

Вместе с вектором необходимо преобразовать и метрический тензор

$$g_{11}^{(1)} = \alpha_1^1\, \left(\alpha_1^1\, g_{11}^{(0)} + \alpha_1^2\, g_{21}^{(0)}\right) + \alpha_1^2\, \left(\alpha_1^1\, g_{12}^{(0)} + \alpha_1^2\, g_{22}^{(0)}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$g_{12}^{(1)} = \alpha_1^1\, \left(\alpha_2^1\, g_{11}^{(0)} + \alpha_2^2\, g_{21}^{(0)}\right) + \alpha_1^2\, \left(\alpha_2^1\, g_{12}^{(0)} + \alpha_2^2\, g_{22}^{(0)}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g_{21}^{(1)} = \alpha_2^1\, \left(\alpha_1^1\, g_{11}^{(0)} + \alpha_1^2\, g_{21}^{(0)}\right) + \alpha_2^2\, \left(\alpha_1^1\, g_{12}^{(0)} + \alpha_1^2\, g_{22}^{(0)}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g_{22}^{(1)} = \alpha_2^1\, \left(\alpha_2^1\, g_{11}^{(0)} + \alpha_2^2\, g_{21}^{(0)}\right) + \alpha_2^2\, \left(\alpha_2^1\, g_{12}^{(0)} + \alpha_2^2\, g_{22}^{(0)}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

Ну а теперь вычислим длину вектора в новом базисе

$$|\vec{a}|^2 = g_{ij}^{(1)}\, a^{j(1)}\, a^{i(1)} = \left(g_{11}^{(1)}\, a^{1(1)} + g_{12}^{(1)}\, a^{2(1)}\right) a^{1(1)} + \left(g_{21}^{(1)}\, a^{1(1)} + g_{22}^{(1)}\, a^{2(1)}\right) a^{2(1)} =$$

$$= \left(3\sqrt{3} - 4 - 3\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\right)\left(3\sqrt{3} - 4\right) + \left(\frac{9}{2} - 2\sqrt{3} - 3 + 4\sqrt{3}\right)\left(-3 + 4\sqrt{3}\right) =$$

$$= \frac{27}{2} + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 8 - \frac{9}{2} - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 24 = 9 + 16 = 25$$

то есть

$$|\vec{a}| = 5,$$

Что и требовалось увидеть: и скалярное произведение, и длина вектора инвариантны, то есть неизменны при преобразовании координат. При этом, мы использовали по сути одно и то же соотношение (7) для работы в разных базисах, предварительно преобразовав метрический тензор в соответствии с правилом преобразования (10).

Что мы выяснили? Если свойства пространства, в котором заданы векторы известны, то не составляет труда выполнить любые требуемые действия над векторами, используя соотношения, общий вид которых от выбранного пространства независим. Причем соотношения (7), и (10) дают нам и алгоритм вычисления, и способ преобразования компонент выражений, используемых. В этом и состоит удобсвто и прелесть тензорного подхода - не зная заранее свойств пространства, можно упростить трудоемкие вычисления к одному простому выражению, в котрое затем можно "втупую"подставлять свойства выбранного пространства.

Тензорная запись выражений применима там, где требуется получать уравнения, независимые от используемой системы координат.

Дополнительная информация
Взаимный или дуальный базис

Введем векторы $\vec{e^1}$, $\vec{e^2}$, $\vec{e^3}$, получаемые из векторов исходного базиса путем поднятия индекса

$$\vec{e^j} = g^{ji}\vec{e^i} \quad (1)$$

Теперь возьмем и умножим (1) скалярно на вектор $\vec{e}_k$

$$\vec{e^j} \cdot \vec{e}_k = g^{ji}\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k$$

но, мы знаем, что $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = g_{ik}$ - метрический тензор, поэтому, приходим к уравнению

$$\vec{e^j} \cdot \vec{e}_k = g^{ji}g_{ik}$$

$$\vec{e^j} \cdot \vec{e}_k = \delta^j_k \quad (2)$$

Если мы возьмем, например, вектор $\vec{e^1}$, то в силу (2) он перпендикулярен векторам $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ (его скалярное произведение с ними равно нулю), а скалярное произведение этого вектора на $\vec{e}_1$ - равно единице Дальше возьмем и умножим (1) скалярно на $\vec{e^k}$

$$\vec{e^j} \cdot \vec{e^k} = g^{ji}\vec{e}_i \cdot \vec{e^k}$$

и в силу (2) это дает контравариантный метрический тензор

$$\vec{e^j} \cdot \vec{e^k} = g^{jk} \quad (3)$$

Система векторов $\vec{e^1}$,$\vec{e^2}$,$\vec{e^3}$ тоже образует базис, который называют взаимным, сопряженным или дуальным с базисом $\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$,$\vec{e}_3$. Снова рассмотрим вектор $\vec{a}$. Следовательно,

$$\vec{a} = a^i\vec{e}_i = a_j g^{ji}\vec{e}_i = a_j\vec{e^j} \quad (4)$$

Умножим (4) скалярно на $\vec{e^k}$

$$\vec{a} \cdot \vec{e^k} = a_j\vec{e^j} \cdot \vec{e^k} = a_j g^{jk} = a^k$$

приходим к заключению, что любой вектор может быть разложен как по базису $\vec{e}_i$ - тогда его компоненты будут контравариантные, так и по базису $\vec{e^i}$– компоненты будут ковариантными

$$\vec{a} = a^i\vec{e}_i = a_i\vec{e^i}$$

При этом, ковариантные компоненты - это скалярные произведение вектора на векторы базиса $\vec{e}_i$ а контравариантные компоненты - скалярные произведения вектора на векторы базиса $\vec{e^i}$

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i, \quad a^i = \vec{a} \cdot \vec{e^i}$$

что ещё раз иллюстрирует взаимность этих базисов.

Тут надо отметить, что векторы базиса $\vec{e_i}$ получаются естественным путем - они касательны соответствующим координатным линиям и им можно приписать геометрический смысл. Что касается базиса $\vec{e^i}$, то его векторы не направлены по касательной координатным линиям, а перпендикулярны парам векторов касательного базиса. Такой базис иногда принято называть дуальным.

Контрольный тест по теме 8 и 9 уроков

Задача 1. Найти матрицу метрического тензора в базисе $(\vec{e_1'},\vec{e_2'},\vec{e_3'})$, если $\vec{e_1'} = \vec{e_1} - 3\vec{e_2} - 2\vec{e_3}$, $\vec{e_2'} = \vec{e_2} - 2\vec{e_3}$, $\vec{e_3'} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2}$. Где координаты базисных векторов базиса $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ заданы в ОНБ и равны: $\vec{e_1} = (1,2,0)^T$, $\vec{e_2} = (2,-1,0)^T$, $\vec{e_3} = (0,0,2)^T$.

Задача 2. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (1,3,5)^T$, и $\vec{b} = (0,-2,1)^T$, заданных в базисе $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, где $\vec{e_1} = (3,1,0)^T$, $\vec{e_2} = (2,0,-1)^T$, $\vec{e_3} = (-2,4,1)^T$. Координаты базисных векторов заданы в ортонормированном базисе.

Перед решением удостовериться в том, что векторы $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ действительно могут составлять базис в трехмерном пространстве.

Решить задачу двумя способами, сравнить полученные результаты и написать, какой способ оказался проще:

1) При помощи метрического тензора g_{ij}: $(\vec{a},\vec{b}) = g_{ij}a^j b^i$ в заданном базисе $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$.
2) Перейти в ортонормированный базис при помощи матрицы поворота, а затем найти скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе.

Найти, чему равен метрический тензор в ортонормированном базисе (из соображений логики или при помощи результата 1 задачи).

Задача 3. Определить угол между векторами $\vec{a} = (0,3,1)^T$, и $\vec{b} = (4,0,2)^T$, заданными в базисе $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, где $\vec{e_1} = (2,1,0)^T$, $\vec{e_2} = (1,0,-1)^T$, $\vec{e_3} = (3,0,1)^T$. Координаты базисных векторов заданы в ортонормированном базисе.

Перед решением удостовериться в том, что векторы $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ действительно могут составлять базис в трехмерном пространстве.

Решить задачу двумя способами, описанными в предыдущей задаче. Сравнить полученные результаты и написать, какой способ оказался проще.

Решение контрольного теста по теме 8 и 9 уроков

Задача 1. Очевидно, что нельзя посчитать матрицу метрического тензора в новом базисе простым умножением базисных векторов нового базиса, так как их координаты заданы не в ОНБ, а в каком-то базисе $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$. Воспользуемся доказанным свойством того, что что при переходе из одного базиса в другой при помощи матрицы перехода S, метрический тензор изменяется согласно правилу:

$$g^{(1)} = S^T g^{(0)} S$$

Где $g^{(1)}$ - метрический тензор, компоненты которого определяются новым базисом, $g^{(0)}$ - метрический тензор, компоненты которого определяются старым базисом, S - матрица перехода от старого базиса к новому. Новым базисом будет базис $(\vec{e_1'},\vec{e_2'},\vec{e_3'})$, а старым - $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$.

Найдем матрицу метрического тензора в старом базисе:

$$g^{(0)} = \begin{pmatrix} (\vec{e_1},\vec{e_1}) & (\vec{e_1},\vec{e_2}) & (\vec{e_1},\vec{e_3}) \\ (\vec{e_2},\vec{e_1}) & (\vec{e_2},\vec{e_2}) & (\vec{e_2},\vec{e_3}) \\ (\vec{e_3},\vec{e_1}) & (\vec{e_3},\vec{e_2}) & (\vec{e_3},\vec{e_3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Отсюда, кстати, можно заметить, что старый базис ялвяется ортогональным.
Матрица перехода S от старого базиса к новому равна

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда, матрицу метрического тензора в новом базисе определим, используя формулу выше:

$$g^{(1)} = S^T g^{(0)} S = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ -15 & 5 & -10 \\ -8 & -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 1 & 35 \\ 1 & 21 & -10 \\ 35 & -10 & 25 \end{pmatrix}$$

Матрица получилась симметричной (как и должно быть), значит, вычисления вероятнее всего были произведены безошибочно.

Можно заметить, что решение, которое представялет из себя заполнение матрицы метрического тензора скалярными произведенями базисных веткоров нового базиса при помощи перемножения их координат, заданных в старом базисе, действительно неверно (так как правило скалярного умножения $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ работает только для векторов, чьи координаты заданы в ОНБ. Матрица, которую мы таким способом получим, не будет являться матрицей метричского тензора в новом базисе. Неверность результата по сравнению с правильным, полученным выше, можно проверить:

$$g^{(1)} = \begin{pmatrix} (\vec{e_1'},\vec{e_1'}) & (\vec{e_1'},\vec{e_2'}) & (\vec{e_1'},\vec{e_3'}) \\ (\vec{e_2'},\vec{e_1'}) & (\vec{e_2'},\vec{e_2'}) & (\vec{e_2'},\vec{e_3'}) \\ (\vec{e_3'},\vec{e_1'}) & (\vec{e_3'},\vec{e_2'}) & (\vec{e_3'},\vec{e_3'}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 66 & 1 & 35 \\ 1 & 21 & -10 \\ 35 & -10 & 25 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Сначала проверим, что векторы $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ действительно могут составлять базис в трехмерном пространстве. Для этого найдем определитель матрицы, составленной из коодинат базисных векторов, и убедимся в том, что он не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

Рассмотрим 1 способ решения. Для этого нам необходимо составить матрицу метрического тензора, заданного в базисе $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$. Так как координаты базисных векторов заданы в ОНБ, то элементами матрицы метрического тензора будут соответствующие скалярные произведения базисных векторов:

$$g^{(0)} = \begin{pmatrix} (\vec{e_1},\vec{e_1}) & (\vec{e_1},\vec{e_2}) & (\vec{e_1},\vec{e_3}) \\ (\vec{e_2},\vec{e_1}) & (\vec{e_2},\vec{e_2}) & (\vec{e_2},\vec{e_3}) \\ (\vec{e_3},\vec{e_1}) & (\vec{e_3},\vec{e_2}) & (\vec{e_3},\vec{e_3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 6 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & 21 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$a_i = g_{ij}a^j = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 6 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -4 & 88 \end{pmatrix}$$

Заметим, что произведение матрицы 3×3 на столбец 3×1 в действительности должно быть равно столбцу 3×1. Однако в тензорной записи путем такого произведения мы должны получить из контраветкора ковектор, то есть в векторной записи должны получить из столбца строку. Потому возникает такая "странность" при получении строки, где ее будто быть не должно. Связано это с тем, что в линейной алгебре ковекторы представляются строками, а контравекторы - столбцами.

Тогда

$$(\vec{a},\vec{b}) = g_{ij}a^jb^i = \begin{pmatrix} 18 & -4 & 88 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 96$$

Теперь перейдем к рассмотрению 2 метода решения. Давайте перейдем в ОНБ и там произведем скалярной произведение по давно известной нам формуле. Пусть матрица перехода от нашего базиса к ОНБ есть S. Но заметим, что так как координаты базисных векторов заданы в ОНБ, то матрица, столбцами которой будут координаты заданных нам базисных векторов, будет являться матрица S^{-1} перехода от ОНБ к нашему базису, то есть S^{-1} Составим эту матрицу:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит, координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в ОНБ можно определить при помощи S^{-1}:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 21 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \\ \beta_3' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Тогда, соответственно, скалярное произведение равно

$$(\vec{a},\vec{b}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 96$$

Задача 3. Сначала проверим, что векторы $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ действительно могут составлять базис в трехмерном пространстве. Для этого найдем определитель матрицы, составленной из коодинат базисных векторов, и убедимся в том, что он не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Рассмотрим 1 способ решения. Для этого нам необходимо составить матрицу метрического тензора, заданного в базисе $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$. Так как координаты базисных векторов заданы в ОНБ, то элементами матрицы метрического тензора будут соответствующие скалярные произведения базисных векторов:

$$g = \begin{pmatrix} (\vec{e_1},\vec{e_1}) & (\vec{e_1},\vec{e_2}) & (\vec{e_1},\vec{e_3}) \\ (\vec{e_2},\vec{e_1}) & (\vec{e_2},\vec{e_2}) & (\vec{e_2},\vec{e_3}) \\ (\vec{e_3},\vec{e_1}) & (\vec{e_3},\vec{e_2}) & (\vec{e_3},\vec{e_3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$a_i = g_{ij}a^j = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$b_i = g_{ij}a^j = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 12 & 44 \end{pmatrix}$$

Заметим, что произведение матрицы 3×3 на столбец 3×1 в действительности должно быть равно столбцу 3×1. Однако в тензорной записи путем такого произведения мы должны получить из контраветкора ковектор, то есть в векторной записи должны получить из столбца строку. Потому возникает такая "странность" при получении строки, где ее будто быть не должно. Связано это с тем, что в линейной алгебре ковекторы представляются строками, а контравекторы - столбцами.

Тогда

$$(\vec{a},\vec{b}) = g_{ij}a^jb^i = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 80$$

Так как $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{a_ia^i} = 2\sqrt{10}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{(\vec{b},\vec{b})} = \sqrt{b_ib^i} = 6\sqrt{6}$, то угол α между векторами равен

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{80}{12\sqrt{60}} = \frac{\sqrt{60}}{9} \Longrightarrow \alpha = \arccos\frac{\sqrt{60}}{9}$$

Теперь перейдем к рассмотрению 2 метода решения. Давайте перейдем в ОНБ и там произведем скалярной произведение по давно известной нам формуле. Пусть матрица перехода от нашего базиса к ОНБ есть S. Но заметим, что так как координаты базисных векторов заданы в ОНБ, то матрица, столбцами которой будут координаты заданных нам базисных векторов, будет являться матрица S^{-1} перехода от ОНБ к нашему базису, то есть S^{-1} Составим эту матрицу:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит, координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в ОНБ можно определить при помощи S^{-1}:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \\ \beta_3' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Тогда, соответственно, скалярное произведение равно

$$(\vec{a},\vec{b}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 80$$

Так как $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = 2\sqrt{10}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{(\vec{b},\vec{b})} = 6\sqrt{6}$, то угол α между векторами равен

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{80}{12\sqrt{60}} = \frac{\sqrt{60}}{9} \Longrightarrow \alpha = \arccos\frac{\sqrt{60}}{9}$$

№10 урок

Функция нескольких переменных. Криволинейные координаты

Список терминов, вводимых на уроке:

- Функция нескольких переменных
- Частная производная
- Криволиненйные координаты
- Координатная линия

Обладая уже необходимыми базовыми знаниями в области тензорного исчисления, мы наконец можем приступить к физическому применению того, что мы изучили! Целью этого и следующего уроков будет рассмотрение 2-го закона Ньютона в самом общем его виде - тензорном. Что нам это даст? Это даст нам возможность решать уравнение, даваемое 2-м законом Ньютона, в абсолютно любой системе координат. Даже в криволинейной, с которой мы позакомимся чуть позже. В конце мы рассмотрим полученное выражение на примере полярной системы координат и увидим, как легко и просто решать задачи про движение в центральных полях при помощи формулы Бине! Но для начала нам необходимо узнать еще несколько понятий.

Функция нескольких переменных. Ранее мы всегда работали с функциями одной переменной. Например, с зависимостью координаты от времени $x(t)$ или радиус-вектора от времени $\vec{r}(t)$. Если обобщить, то мы работали с функцией f, которая зависит только от одной переменной x, то есть $f = f(x)$. Но ведь тот же радиус-вектор в трехмерном пространстве есть совокупность трех координат, то есть заведомо мы уже знакомы с функцией $\vec{r}(x,y,z)$, которая зависит от трех переменных. Большой смысловой разницы между функциями одной переменной и функциями нескольких переменных нет - в обоих случаях это некоторые зависимости. Только в одном случае зависимость присутствует только от одной переменной, а в другом - от нескольких.

Если каждому набору независимых друг от друга переменных $x_1,x_2,...,x_n$ ставится в соответствие переменная величина y, то y называется функцией нескольких переменных.

$$y = f(x_1,x_2,...,x_n) \quad \text{или} \quad y = y(x_1,x_2,...,x_n)$$

Частная производная. Разница появляется в том моменте, когда приходится искать производную функции по ее переменной. В случае функции одной переменной все ясно, а что делать с функцией нескольких переменных? - Как искать производную по какой-то переменной, если их там несколько?
В этом случае нам нужно ввести понятие частной производной. Частная производная — обобщение понятия производной на случай функции нескольких переменных. Не вдаваясь сильно в математический анализ, сформулируем понятие частной производной, достаточное нам для понимания и дальнейшего продвижения.

Частная производная — это производная функции нескольких переменных по какой-то выбранной координате, причем производная берется только по какой-то одной координате, в то время как остальные считаются константами. Частная производная функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ по переменной x_k обозначается так: $\dfrac{\partial f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_k}$ или просто $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$. Рассмотрим это подробнее на примерах:

Пример 1. Пусть $f = f(x,y,z) = zx^4 - 3e^x y + xy^2$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4zx^3 - 3e^x y + y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3e^x + 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x^4$$

То есть при взятии частной производной по переменной x переменные y и z считаются обычными константами, при взятии частной производной по переменной y переменные x и z считаются обычными константами, и т.д.

Пример 2. Объем конуса вычисляется по формуле $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$. Рассмотрим объем конуса как функцию, зависящую от двух переменных - r и h. Тогда частная производная V по, например, радиусу r $\dfrac{\partial V}{\partial r}$ покажет скорость, с которой изменяется объём конуса, если его радиус меняется, а высота остаётся неизменной.

Сразу заметим одно важное обстоятельство, которым мы воспользуемся далее на уроке: от частной производной функции f по любой из координат можно брать частную производную по любой переменной еще много раз в зависимости от того, соблюдаются ли некоторые условий, накладываемые на фукнцию f, обсуждение которых мы опустим в нашем повествовании ввиду того, что все функции f, с которыми мы будем работать в дальнейшем, будут удовлетворять этим условиям.

То есть, например, если мы имеем функцию двух переменных $f(x,y)$, то

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ - вторая производная функции f по переменной x;
$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ - вторая производная функции f по переменной y;
$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ - смешанная производная функции f по переменным x и y;
$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ - смешанная производная функции f по переменным x и y;

Внимание! В смешанной производной в знаменателе правее пишется та переменная, по которой в последний раз проходило дифференцирование функции.

Важно! Если обе смешанные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ определены в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и непрерывны в этой точке, то $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$. То есть "пропадает" разница между порядком взятия частной производной. Давайте рассмотрим пример:

Пример. Пусть $f(x,y) = x^4 y - x^2 y^3$. Тогда

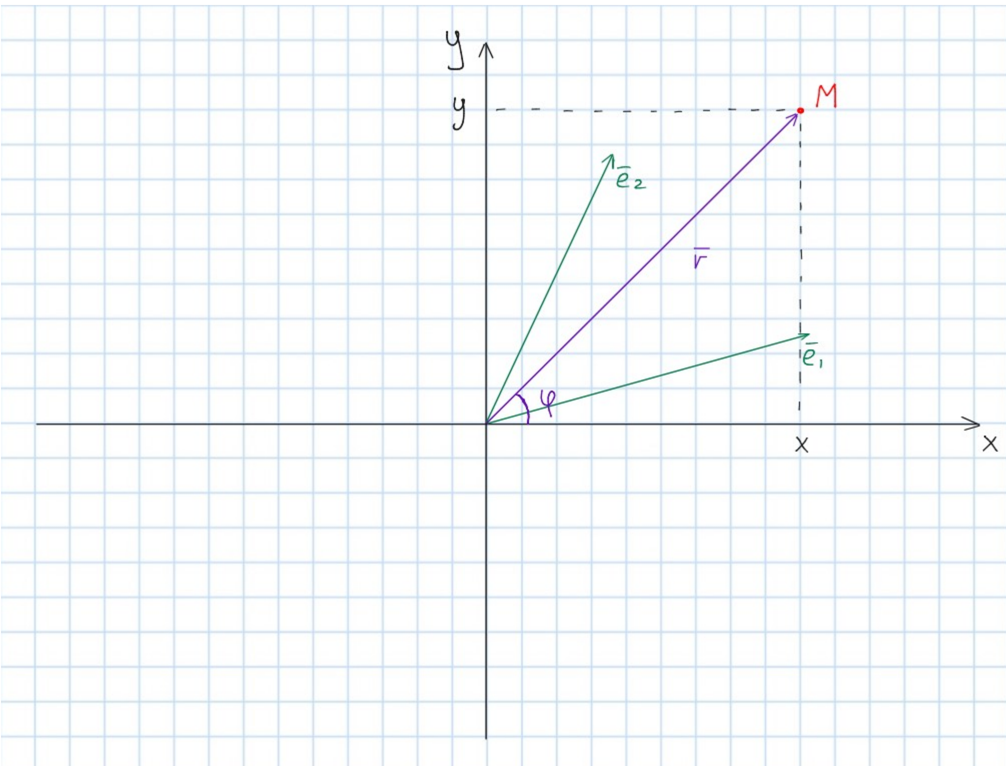
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 y - 2xy^3; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^4 - 3x^2 y^2;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4x^3 - 6xy^2; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x^3 - 6xy^2;$$

Так как обе смешанные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ определены в любой окрестности любой точки (x_0,y_0) и непрерывны в этой точке, то $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$, что не тяжело заметить в данном примере.

Криволиненйные координаты Теперь разберемся с тем, что такое криволинейные координаты. Стоит сказать, что координаты точки и координаты точки в базисе - разные вещи. Рассмотрим плоскость, в которой задан какой-то косоугольный базис $(\vec{e_1},\vec{e_2})$, состоящий из двух упорядоченных линейно независимых векторов с общим началом в точке O. Выберем на этой плоскости какую-то точку M. Координатами точки M в базисе будут 2 однозначно заданных числа a_1 и a_2 такие, что $\vec{OM} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$. Видно, что координаты в базисе у точки единственны. Что же с координатами? А вот координат у точки может быть много. Например, декартовы координаты. Давайте поместим в ту же точку O два единичных упорядоченных ортогональных друг другу вектора. Тогда по сути мы получили декартову систему координат, в этой системе мы без труда можем сказать, что у точки M есть какие-то координаты x и y. Но ведь положение точки в двумерном пространстве можно задать и другим способом, а именно, при помощи радиус-вектора, соединяющего точку 0 с точкой M, и угла между радиусом-вектором и координатной линией x.
В таком случае координатами точки M будут r и φ, причем между координатами x,y и координатами r,φ можно задать связь:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$



Координаты r и φ являются криволинейными координатами. Почему они криволинейные, откуда такое название? Мы сможем это понять, введя понятие координатной линии, которым мы уже воспользовались несколькими предложениями ранее.

Координатная линия - линия, вдоль которой изменяется только одна координата точки. Например, координатной линией для координаты x является горизонтальная прямая, ведь именно вдоль нее меняется x, но не меняется y, для координаты y это будет вертикальная прямая. А вот для координат r и φ координатные линии уже не будут прямыми. Потому как координатной линией для координаты r будет окружность радиуса r (ведь именно на этой окружности меняется φ но не меняется r), а вот для координаты φ координатной линией будет прямая, направленная вдоль r. Как раз на основании того, что координатная линия r не является прямой, такие координаты и называются криволинейными. Стоит заметить, что криволинейных координат существует бесконечное множество. Можно даже самому придумать такие координаты, связав их с координатами x и y каким-нибудь образом. Например, можно взять за координаты точки M координаты u и v такие, что

$$u = x + y \qquad v = x - y$$

Отсюда тогда

$$x = \frac{u+v}{2} \qquad y = \frac{u-v}{2}$$

Выбор координат зависит от конкретной задачи и от удобства использования. Зачастую на плоскости используются декартовы координаты x, y или координаты r, φ, которые называются полярными.

Важно! Декартовы координаты являются частным случаем криволинейных координат.

Подрезюмируем: помимо обычных декартовых координат существует множество других координат, все координаты в общем случае называются криволинейными (связано это с формой координатных линий в пространстве), декартовы координаты - лишь частный случай криволинейных. Примеры криволинейных координат, часто использующихся на практике: полярные координаты (r, φ), сферические (r, φ, θ), цилиндрические (r, φ, Z).

№11 урок

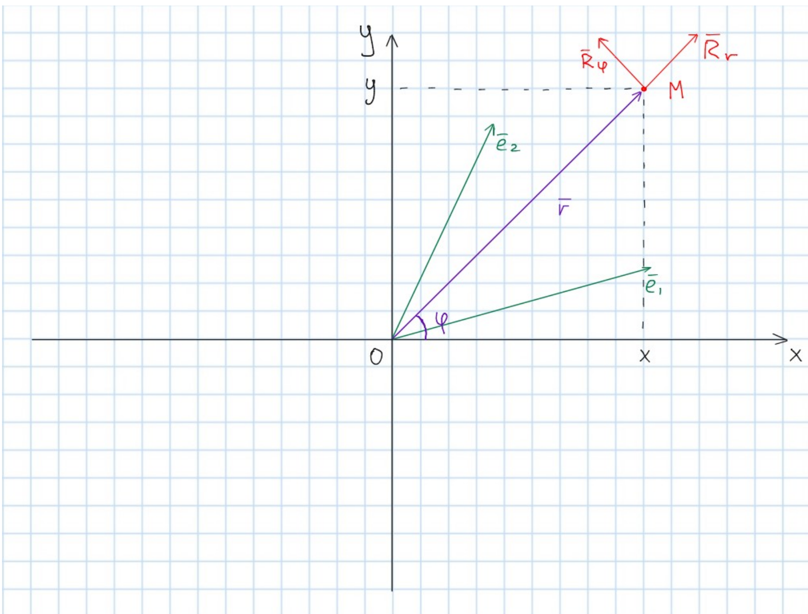
Локальный базис. Матрица Якоби

Список терминов, вводимых на уроке:

- Локальный базис
- Матрица Якоби

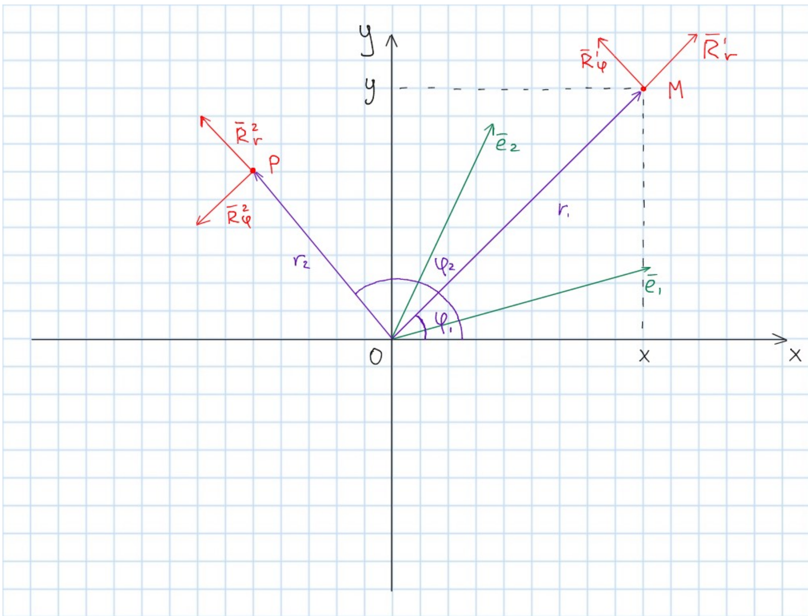
Перейдем к тому, что такое локальный базис. Давайте рассмотрим трехмерное пространство, в котором находится некоторая точка M. Эта точка обладает декартовыми координатами x,y,z и какими-то криволинейными координатами q_1,q_2,q_3 (в роли этих координат могут выступать любые криволинейные координаты: сферические, цилиндрические или собственно придуманные). Соединим начало декартовой системы координат (точку 0) с выбранной точкой M радиус вектором $\vec{r}$, направленным из точки O в точку M. Как мы уже заметили, декартовы координаты и любые криволинейные координаты точки всегда можно связать. Поэтому x,y,z связаны с q_1,q_2,q_3 некоторым образом.

Мы уже увидели, что существуют некоторые кривые, вдоль которых изменяется лишь одна координата - так называемые координатные линии. Давайте введем векторы $\vec{R_1}$,$\vec{R_2}$,$\vec{R_3}$ такие, что каждый направлен по касательной вдоль соответствующей координатной линии в направлении увеличения соответстующей координатной линии. То есть вектор $\vec{R_i}$ направлен по касательной к кординатной линии q_i в направлении увеличения q_i. Пример с полярными координатами (это двумерный случай) можно увидеть на рисунке ниже:



Вектор $\vec{R_r}$ направлен по касательной к кординатной линии координаты r вдоль ее увеличения, а вектор $\vec{R_\varphi}$ направлен по касательной к кординатной линии координаты φ вдоль ее увеличения.

Так как по криволинейным координатам, так же как и по декартовым, положение точки определяется единственным образом, то построенные векторы являются линейно независимыми, к тому же упорядоченными, их количество совпадает с размерностью пространства, потому с уверенностью можно сказать, что набор этих векторов составляет базис, так называемый <u>локальный базис</u> (или базис касательного пространства). Почему он локальный? Заметим, что любой базис (ортонормированный, ортогональный или косоугольный) не будет зависеть от положения рассматриваемой точки M в пространстве. Какую бы точку в пространстве мы ни рассмотрели, базис незименен, изменяется лишь координаты точки в этом базисе. А вот базис $(\vec{R_1},\vec{R_2},\vec{R_3})$ напрямую зависит от положения точки, ведь он зависит от координат r и φ, которые в свою очередь зависят от положения рассматриваемой точки. При изменении рассматриваемой точки локальный базис повернется, и имзенится модуль векторов этого базиса. Пример с полярными координатами изображен на рисунке ниже:



Рассмотрим следующую задачу: в трехмерном пространстве есть некоторая точку M и точка O, которая является началом декартовых координат (x_1,x_2,x_3), криволинейных координат (q_1,q_2,q_3) и общим началом векторов ортонормированного базиса $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, направленных вдоль соответсвующих координатных линий декартовой системы координат. Раз векторы базиса $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ направлены вдоль соответсвующих координатных линий декартовой системы координат, то координаты точки M в базисе и просто декартовы координаты точки M совпадают и равны (x_1,x_2,x_3).

Так как $(\vec{R_1},\vec{R_2},\vec{R_3})$ - базис, который построен вдоль касательных к координатным линиям, то в этом базисе можно разложить вектор $\vec{OM} = \vec{r}$. Причем его координаты в базисе $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ есть $(x_1,x_2,x_3)^T$, а в базисе $(\vec{R_1},\vec{R_2},\vec{R_3})$ есть $(q_1,q_2,q_3)^T$.

Тогда справедливо заметить, что

$$\vec{r} = q^i\vec{R_i} = x^j\vec{e_j} \quad (1)$$

Но как нам найти $\vec{R_i}$? Вам должно быть известно, что для того, чтобы найти касательную к какой-то кривой, заданной некоторой функцией $f(x)$, необходимо взять ее производную по координате x. Нашей функцией, задающей некоторую кривую, в данном случаей является вектор-функция $\vec{r}(x,y,z) = \vec{r}(q_1,q_2,q_3)$ - функция нескольких переменных. Соответственно, беря производные от этой функции нескольких переменных по соответствующим переменным, мы получим касательные к соответствующим координатным линиям. А так как вектор $\vec{R_i}$ направлен вдоль касательной к координатной линии q_i, то

$$\vec{R_i} = \frac{\partial \vec{r}(q_1,q_2,q_3)}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

Но так как $\vec{r} = x^j \vec{e_j}$, то

$$\vec{R_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial (x^j \vec{e_j})}{\partial q_i} = \frac{\partial x^j}{\partial q_i}\vec{e_j} + \frac{\partial \vec{e_j}}{\partial q_i}x^j = \frac{\partial x^j}{\partial q_i}\vec{e_j} \quad (2)$$

Слагаемое $\dfrac{\partial \vec{e_j}}{\partial q_i}x^j = 0$ по той причине, что базис $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, как мы уже замечали ранее, не зависит от положения выбранной точки, а значит, и от любых криволинейных координат ее задающих.

Тогда, подставив (2) в (1) получим

$$\vec{r} = q^i \frac{\partial x^j}{\partial q_i}\vec{e_j} = x^j \vec{e_j} \Longrightarrow x^j = q^i \frac{\partial x^j}{\partial q_i} \quad (3)$$

Важно! декартовы координаты точки M совпадают с координатами вектора r в базисе $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, где общая точка базисных векторов совпадает с началом вектора r, так как базисные векторы направлены вдоль координатных линий. По той же причине криволинейные координаты точки M совпадают с координатами вектора r в касательном базисе. То есть $\vec{r} = r\vec{R_1} + \varphi \vec{R_2}$. Однако можно заметить, что, выбирая за криволинейные координаты полярные, при разложении вектора r, который и задает локальный базис, по локальному базису коэффициент при векторе $\vec{R_2}$ должен быть всегда равен $\varphi = 0$, хотя координата точки φ в общем случае не равна нулю. На самом деле $\varphi \neq 0$ и действительно $\vec{r} = r\vec{R_1} + \varphi\vec{R_2}$. Просто сложение векторов $r\vec{R_1}$ и $\varphi\vec{R_2}$ происходит не по привычному нам правилу сложения векторов (которое работает в любой косоугольной, но не криволинейной СК), а по другому правилу, которое зависит от конкретной криволинейной СК - в полярной системе координат оно одно, в цилиндрическое другое и т.д.

Заметим! Не обязательно рассматривать переход **именно** от декартовых координат к криволинейным и **именно** от ортонормированного базиса к локальному базису. Те же рассуждения будут верны и при переходе от любых криволинейных координат к любым криволинейным и от любого базиса к какому-то локлаьному. Важно лишь, чтобы векторы базиса, от которого происходит переход, были направлены вдоль координатных линий тех координат, от которых совершается переход. Как это и происходит в нашем рассмотрении.

Выражение (3) показывает нам, каким образом происходит преобразование от "новых" координат вектора $\vec{r}$ (то есть от координат в базисе $(\vec{R_1},\vec{R_2},\vec{R_3})$) "старым" координатам (то есть координатам в базисе $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$). Вспомнив предыдщуие уроки, где мы уже производили переход из одного базиса в другой, можем сказать, что

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}$$

Где J - матрица перехода от базиса $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ к базису $(\vec{R_1},\vec{R_2},\vec{R_3})$, или как ее принято называть, матрица Якоби. Матрица Якоби это матрица частных производных одних координат по другим. Давайте запишем ее:

$$\frac{\partial x^j}{\partial q_i} = J_i^j = J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial q_1} & \frac{\partial x^1}{\partial q_2} & \frac{\partial x^1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial q_1} & \frac{\partial x^2}{\partial q_2} & \frac{\partial x^2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial q_1} & \frac{\partial x^3}{\partial q_2} & \frac{\partial x^3}{\partial q_3} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим эту матрицу на конкретном примере. Пусть в качестве криволинейных координат выступают полярные координаты r,φ. Тогда, раз $x = r\cos\varphi$, а $y = r\sin\varphi$, то

$$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Заметим, что так же, как в случае с матрицей перехода S, с которой мы работали ранее работает следующее: метрический тензор базиса $(\vec{R_1},\vec{R_2},\vec{R_3})$ связан с метрическим тензором базиса $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ через матрицу перехода J следующим образом:

$$g_{kl} = J_k^i J_l^j g_{ij}$$

Где g_{ij} - метрический тензор базиса $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, а g_{kl} - метрический тензор базиса $(\vec{R_1},\vec{R_2},\vec{R_3})$.

Вывод данной формулы можно посмотреть в 9 уроке.

№12 урок

Символы Кристоффеля 2-го рода. Частная производная вектора в криволинейных координатах

Список терминов, вводимых на уроке:

• Символы Кристоффеля 2-го рода

Нашей целью, как мы уже говорили на прошлом уроке, является получение записи второго закона Ньютона в обобщей тензорной форме с применением криволинейных координат (чтобы затем иметь возможность подставлять в общую полученную формулу любые удобные в конкретной задаче криволинейные координаты и решать ее). Для того чтобы записать второй закон Ньютона для точки, которая в пространстве задается радиус-вектором $\vec{r}$, необходимо найти зависимость ускорения $\vec{a}$ от времени t. Сам вектор $\vec{r}$ задается некоторыми криволинейными координатами q_i, каждая из которых, имея зависимость от времени t, задает зависимость от времени для всей вектор-функции $\vec{r}$. То есть получается сложная вектор-функция нескольких переменных $\vec{r}(q(t))$. Сама вектор функция $\vec{r}$ не зависит непосредственно от времени, она зависит только от криволинейных координат q_i, которые уже в свою очередь зависят от времени t. Как же в таком случае найти производную вектор-функции по времени?

Рассмотрим более простой пример: сложную функцию $f(x)$ одной переменной, где $x = x(t)$. Сама функция f зависит только от x, но x в свою очередь зависит от t. Чтобы найти производную функции f по времени, то есть найти $f'_t(t)$, необходимо действовать по следующей формуле: $f'_t(t) = f'_x(x(t)) \cdot x'_t(t)$

Пример. $f(x) = x^3 - e^x$, $x(t) = t^3$. Отсюда видно, что $x'_t(t) = 3t^2$. Тогда, так как $f(x(t)) = x^3(t) - e^{x(t)}$, то

$$f'_t(t) = f'_x(x(t)) \cdot x'_t(t) = 3x^2(t) \cdot x'_t(t) - e^{x(t)} \cdot x'_t(t) =$$
$$= 3x^2(t) \cdot 3t^2 - e^{x(t)} \cdot 3t^2 = 3t^8 - 3t^2 e^{t^3}$$

То есть для того, чтобы найти производную сложной функции, необходимо вначале взять производную функции по той переменной, от которой она непосредственно зависит (будем называть ее "первой перемнной"), а затем умножить это на производную "первой перемнной"по той переменной, от которой она непосредственно зависит.

Такое же правило работает и для функции нескольких переменных, только обычная производная превращается в частную производную:

$$f = f(x^1, x^2, ..., x^n), \quad x^i = x^i(t) \qquad \Longrightarrow \qquad f'_t = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}$$

Выходит, что для того, чтобы найти скорость точки $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \dfrac{dq^i}{dt}$ и ускорение точки $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial q^i} \dfrac{dq^i}{dt}$, нам необходимо уметь искать частную производную вектора $\vec{r}$ по криволинейным координатам q_i, которые как раз и определяются радиус-вектором $\vec{r}$ (ведь он задает положение точки), и частную производную какого-то другого (отличного от $\vec{r}$) вектора по криволинейным координатам q^i.

Если с первым вопросом дело обстоит просто $\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}=\vec{R}_i\right)$ - это обсуждалось на предыдщуем уроке, то со вторым придется разобраться. Именно этим мы займемся на сегодняшнем уроке.

Давайте рассмотрим n-мерное пространство (n может быть равно 2 или 3), в котором задан вектор $\vec{r}$, соединяющий начало декартовых координат O с некоторой точкой M, и некоторый ортонормированный базис, векторы которого направлены вдоль координатных линий декартовой системы координат. Выберем некоторые криволинейные координаты q (пусть, например, полярные или сферические - неважно какие). Мы уже знаем, что в точке M можно ввести локальный базис $\vec{R}_i$, векторы которого однозначно задаются положением точки M, а значит радиус-вектором $\vec{r}$, а что еще более важно - криволинейными координатами вектора $\vec{r}$. Попытаемся теперь найти частную производную произвольного вектора $\vec{v}\neq\vec{r}$ по его криволинейным координатам q^i.

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial q^j}=\frac{\partial}{\partial q^j}\left(a^i\vec{R}_i\right)=\frac{\partial a^i}{\partial q^j}\vec{R}_i+a^i\frac{\partial\vec{R}_i}{\partial q^j}$$

Где в роли вектора $\vec{a}$ может выступать, например, вектор скорости $\vec{v}$ точки, пложение которой как раз задано радиус-вектором $\vec{r}$. Почему мы выписали производную от базисного вектора? По той причине, что базис в криволинейных координатах зависит от них, а значит его производная по этим координатам будет отлична от нуля. Производная вектора это тоже вектор, причем нам ничего не мешает разложить этот вектор по тому же локальному базису, например, через некоторый тензор 3-го ранга дважды ковариантный и единожды контравариантный.

$$\frac{\partial\vec{R}_i}{\partial q^j}=\Gamma^k_{ij}\vec{R}_k\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{\partial\vec{a}}{\partial q^j}=\frac{\partial}{\partial q^j}\left(a^i\vec{R}_i\right)=\frac{\partial a^i}{\partial q^j}\vec{R}_i+a^i\Gamma^k_{ij}\vec{R}_k\quad(1)$$

Теперь, если мы каким-то образом сможем найти, как выражается эта неизвестная Γ^k_{ij} через уже известные нам вещи, то задача о нахождении частной производной произвольного вектора по криволинейной координате будет решена. Займемся нахождением неизвестного тензора Γ^k_{ij}.

Давайте возьмем ковариантный метрический тензор, заданный в криволинейной системе координат, и продифференцируем его по указанной координате

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}=\frac{\partial(\vec{R}_i,\vec{R}_j)}{\partial q^k}=\left(\frac{\partial\vec{R}_i}{\partial q^k},\vec{R}_j\right)+\left(\vec{R}_i,\frac{\partial\vec{R}_j}{\partial q^k}\right)$$

Так как $\frac{\partial\vec{R}_i}{\partial q^k}=\Gamma^m_{ik}\vec{R}_m$ и $\frac{\partial\vec{R}_i}{\partial q^k}=\Gamma^m_{ik}\vec{R}_m$ получаем:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}=\Gamma^m_{ik}\left(\vec{R}_m,\vec{R}_j\right)+\Gamma^m_{jk}\left(\vec{R}_m,\vec{R}_i\right)$$

Так как $(\vec{R}_m,\vec{R}_j)=g_{mj}$ и $(\vec{R}_m,\vec{R}_i)=g_{mi}$, то

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}=\Gamma^m_{ik}g_{mj}+\Gamma^m_{jk}g_{mi}\quad(2)$$

Прежде чем продолжить работать с (2), немного отвлечемся и докажем один полезный для нас в дальнейшем факт относительно искомых коэффициентов разложения частной производной базисных векторов по тем же базисным векторам (то есть относительно Γ^k_{ij}). Воспользовавшись тем фактом, что $\vec{R}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}$, и тем, что смешанные производные второго порядка $\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q^i\partial q^j}$ и $\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q^j\partial q^i}$ непрерывны, а потому равны друг другу, придем к следующему выводу:

$$\Gamma_{ij}^{k}\vec{R}_k = \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q^i \partial q^j} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q^j \partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j}\right) = \frac{\partial \vec{R}_j}{\partial q^i} = \Gamma_{ji}^{k}\vec{R}_k$$

То есть мы можем заключить, что искомые коэффициенты разложения (или символы Кристоффеля 2-го рода) симметричны относительно своих ковариантных (нижних) индексов:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$$

На этом наше отступление закончено. Продолжаем работу с равенством (2).

Давайте в выражении (2) перествим индексы i и k:

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} = \Gamma_{ki}^{m} g_{mj} + \Gamma_{ji}^{m} g_{mk} \quad (3)$$

А теперь переставим в (2) индексы j и k:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} = \Gamma_{ij}^{m} g_{mk} + \Gamma_{kj}^{m} g_{mi} \quad (4)$$

Далее выполним сложение выражений (3) и (4), учитывая тот факт, что $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} = \Gamma_{kj}^{m} g_{mj} + \Gamma_{ij}^{m} g_{mk} + \Gamma_{ji}^{m} g_{mk} + \Gamma_{kj} = \Gamma_{kj}^{m} g_{mj} + 2\Gamma_{ij}^{m} g_{mk} + \Gamma_{kj}^{m} g_{mi} \quad (5)$$

Теперь вычтем (2) из (5), снова учитывая $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \Gamma_{ki}^{m} g_{mj} + 2\Gamma_{ij}^{m} g_{mk} + \Gamma_{kj}^{m} g_{mi} - \Gamma_{ik}^{m} g_{mj} - \Gamma_{jk}^{m} g_{mi} = 2\Gamma_{ij}^{m} g_{mk}$$

Умножаем предыдущее выражение на $\dfrac{1}{2}g^{mk}$, и окончательно получим:

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2} g^{mk}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right) \quad (6)$$

То есть теперь, зная конкретный вид метрического тензора в любом выбранном базисе, можно определить все коэффициенты символов Кристоффеля 2-го рода и, соответственно, определить через них частные производные базисных векторов по криволинейным координатам.

Вспоминая, для чего мы искали коэффициенты разложения, подставим (6) в (1) и наконец получим ковариантную частную производную контравариантных компонент произвольного вектора по криволинейным координатам:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial q^j} = \vec{\nabla}_j a^m = \left(\frac{\partial a^m}{\partial q^j} + a^i \Gamma_{ij}^{m}\right)\vec{R}_m$$

№13 урок

Второй закон Ньютона в тензорном виде

Список терминов, вводимых на уроке:

- Число степеней свободы
- Возможное перемещение точки

Итак, наконец настал момент применить все полученные знания для вывода второго закона Ньютона в тензорном виде. Давайте поставим условие нашей задачи.

Мы имеем некоторую точку M, движение которой мы хотим описать. Положение этой точки мы зададим при помощи радиус-вектора $\vec{r}$, который зависит от заданных криволинейных координат q^i, которые в свою очередь являются функциями времени, то есть $q^i = q^i(t)$. Когда мы задаем функцию $\vec{r} = r(\vec{q(t)}) = \vec{r}(t)$, мы задаем уравнение или закон движения точки. Зная этот закон движения можно определить скорость точки в любой момент времени $\vec{v}(t)$, а также ускорение точки в любой момент времени $\vec{a}(t)$. В качестве координат, которыми будет описываться положение точки, а также ее скорость и ускорение, мы выберем произвольные криволинейные координаты.

Заметим! Количество криволиненйных координат может не совпадать с размерностью пространства, в котором мы работаем. В некоторых случаях, рассматривая задачу в трехмерии (то есть в трехмерном пространстве), достаточно взять 2 или даже одну криволинейную координату. Обычно такие координаты, которые однозначно задают положение точки, учитывая при этом наложенные на нее связи, называют обобщенными. Все зависит лишь от числа степеней свободы рассматриваемого тела. Определений этого понятия можно привести целых два.

Число степеней свободы - разность между размерностью пространства и числом уравнений связи, наложенных на тело.

Число степеней свободы — число независимых параметров, однозначно определяющих положение тела в пространстве.

Рассмотрим подробнее на примерах:

Пример 1. Число координат, которым задается положение точки в пространстве, равно трем. Если движение точки не ограничено связями, то число степеней свободы будет так же равно трем. К примеру, молекула газа в неограниченном сосуде. Ее положение в трехмерном пространстве могут однозначно задать только три координаты. Например, декартовые x,y,z.

Пример 2. Если точка движется по некоторой поверхности, то её движение ограничено — поверхность и есть связь, налагающая условия на координаты точки. Это условие — уравнение поверхности, по которой движется точка, - есть уравнение связи. Число степеней свободы такой точки равно двум. Число обобщенных координат тоже будет равно двум — это будут криволинейные координаты, отсчитываемые вдоль поверхности. К примеру, брусок, движущийся на плоскости. Если не рассматривать случай отрыва бруска от плоскости, то его движение по плоскости можно однозначно задать всего двумя координатами, хотя задача и является трехмерной. Например, декартовыми x,y или полярными r,φ

Пример 3. Если точка движется по некоторой кривой, то на неё наложено уже две связи — кривая в пространстве задается как линия пересечения двух поверхностей. Число степеней свободы такой точки равно одному, а обобщенная координата — тоже одна — длина дуги, которую прошла точка по кривой. К примеру, бусинка, которая нанизана на нитку известной (то есть заданной) формы. Здесь обобщенной координатой может служить длина пройденной дуги l. Или шарик, привязанный к нити известной длины, который совершает движение по окружности, лежащей в одной и той же плоскости. Здесь обобщенной координатой здесь может служить как длина пройденной дуги l, так и угол, на который поворачивается шарик относительно первоначального положения φ

Таким образом, можно сказать, что обобщенные координаты автоматически учитывают геометрию наложенных на точку связей, что позволяет исключить из уравнений движения реакции связей и уменьшить количество расматриваемых координат.

Если движение точки ограничено какими-то связями, то перемещение точки ограничено этими связями, по этой причине можно говорить о возможном перемещении точки.

Возможное перемещение точки - такое перемещение точки, при котором не нарушаются наложенные на точку связи.

То есть, например, возможным перемещением бруска на плоскости будет являться любое перемещение вдоль плоскости. Воззможным перемещением бусинки, нанизанной на нитку, будет являться любое перемещение вдоль нити.

Зачем же давать отдельное название перемещению, которое не нарушает наложенных на точку связей? Замечательным является то, что силы реакций или силы связей на любом возможном перемещении точки всегда будут совершать нулевую работу. Это следует из того, что силы реакций всегда перпендикулярны любому возможному перемещению.

Вывод 2-го закона Ньютона. Пусть несвободная точка движется под действием активных сил, равнодействующая которых равна $\vec{F}$. Так как точка несвободна, то к ней приложены реакции связей, равнодействующая которых равна $\vec{R}$. В силу второго закона Ньютона и принципа суперпозиции справедливо следующее векторное уравнение:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}$$

Давайте умножим это уравнение скалярно на возможное перемещение точки $\delta\vec{r}$:

$$m(\vec{a}, \delta\vec{r}) = (\vec{F}, \delta\vec{r}) + (\vec{R}, \delta\vec{r})$$

Так как силы реакций на любом возможном перемещении точки совершают нулевую работу (то есть$(\vec{R}, \delta\vec{r}) = 0$), то

$$m(\vec{a}, \delta\vec{r}) = (\vec{F}, \delta\vec{r})$$

Так как возможное перемещение точки есть вектор, то его можно разложить по локальному базису $\vec{R}_i$ следующим образом: $\delta\vec{r} = \delta q^i \vec{R}_i$. Тогда

$$m(\vec{a}, \vec{R}_i)\delta q^i = (\vec{F}, \vec{R}_i)\delta q^i$$

Заметим, что $(\vec{a}, \vec{R}_i) = a_i$ - ковариантная проекция ускорения точки, а $(\vec{F}, \vec{R}_i) = F_i$ - ковариантная проекция активной силы, действующей на точку.

$$ma_i\delta q^i = F_i\delta q^i$$

Так как криволинейные координаты - независимые величины (действительно, например, в полярных координатах r и φ не выражаются друг через друга), то мы можем сказать, что

$$ma_i = F_i \quad (1)$$

Осталось определить выражение для ковариантной проекции ускорения, и уравнение второго закона Ньютона в тензорной форме готово!

Получить это будет совсем несложно. Для этого проведем некоторые математичесие преобразования и воспользуемся результатом, полученным в конце 10 урока (частной производной произвольного вектора по криволинейным координатам):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} = \frac{dq^i}{dt}\vec{R}_i = \dot{q}^i\vec{R}_i$$

В последнем равенстве $\dfrac{dq^i}{dt}$ (то есть контравариантные компоненты вектора скорости) мы обозначили за $\dot{q}^i$.

Теперь, чтобы получить ускорение точки, нужно продифференцировать скорость по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial q^i}\dot{q}^i$$

Вспоминаем определение ковариантной производной из предыдущего урока и записываем производную вектора скорости по обобщенной координате

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial q^i} = \left(\frac{\partial\dot{q}^k}{\partial q^i} + \Gamma^k_{ji}\dot{q}^j\right)\vec{e}_k$$

где Γ^k_{ji} - символы Кристоффеля 2 рода. Окончательно получаем:

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial\dot{q}^k}{\partial q^i} + \Gamma^k_{ji}\dot{q}^j\right)\dot{q}^i\vec{e}_k = \left(\frac{\partial\dot{q}^k}{\partial q^i}\dot{q}^i + \Gamma^k_{ji}\dot{q}^j\dot{q}^i\right)\vec{e}_k$$

Так как $\dfrac{\partial\dot{q}^k}{\partial q^i}\dot{q}^i = \dfrac{\partial\dot{q}^k}{\partial q^i}\dfrac{\partial q^i}{\partial t} = \dfrac{\partial\dot{q}^k}{\partial t} = \ddot{q}^k$, то окончательно получаем

$$a^k = \ddot{q}^k + \Gamma^k_{ji}\dot{q}^j\dot{q}^i \quad (2)$$

Теперь, подставляя (2) в (1), приходим к финишу - к тензорной записи второго закона Ньютона в криволинейных координатах!

$$mg_{ij}\left(\ddot{q}^j + \Gamma^j_{kl}\dot{q}^k\dot{q}^l\right) = F_i \quad i = \overline{1,s}$$

Где s - количество степеней свободы.

№14 урок

Формула Бине

Список терминов, вводимых на уроке:

• Центральная сила
• Секторная (секториальная) скорость
• Формула Бине

Тот факт, что мы получили второй закон Ньютона в тензорной форме, несомненно замечателен. Однако хотелось бы на конкретных физических примерах "почувствовать" надобность того, что мы получили. Как мы понимаем, наиболее общий случай рассмотрения есть трехмехмерный случай, то есть трехмерное пространство, в котором можно использовать такие криволинейные координаты, как сферические, цилиндрические и т.д. Однако вычисления, хоть их алгоритм уже и дается готовой тензорной формулой, довольно сложны и многочисленны в трехмерном случае. По этой причине предлагается рассмотреть следующий частный случай: движение точки в поле центральных сил в двухмерном пространстве (на плоскости) - так называемое уравнение Бине.

Центральная сила - Сила F, действующая на точку P, называется центральной с центром в точке O, если во всё время движения она действует вдоль линии, соединяющей точки O и P.

Поставим задачу следующим образом: пусть имеется центральная сила F с центром притяжения в точке O, в поле которой движется точка M массой m по некоторой траектории. Займемся поиском уравнения, которое сможет связать уравнение траектории, по которой в поле такой силы будет двигаться точка, с центральной силой, зависящей от расстояния от точки O до точки M.

За криволинейные координаты выберем полярные координаты r и φ. То есть в уравнении 2-го закона Ньютона в тензорной форме $q^1 = r$, $q^2 = \varphi$. Где r - расстояние от точки O до точки M, а φ - угол между r в какой-то моент времени и r_0 (расстоянием от точки O до точки M в начальный момент времени).

Исходя из определения центральной силы, мы понимаем, что (так как центральная сила направлена всегда вдоль прямой, соединяющего притягательный центр с точкой M) проекция силы на координатную линию φ в любой момент времени равна нулю, то есть $F_\varphi = 0$. Проекция силы F на координатную линию r равна F_r.

Заметим! Так как r соединяет именно точку O с точкой M (то есть начало радиус вектора $\vec{r}$ в точке O, а конец в точке M), то координатная линия r увеличивается вдоль направления движения от точки O к точке M. Но так как сила направлена от точки M к точке O, то проекция силы F на координатную линию r, равная F_r, будет всегда отрицательной величиной. Например, при рассмотрении гравитационной силы притяжения F_r будет равна $-G\dfrac{mM}{r^2}$.
Не забываем знак минус!

Чтобы привести уравнение 2-го закона Ньютона в тензорной форме к более "читаемому" виду, необходимо найти элементы матрицы метрического тензора в локальном базисе, заданном полярными координатами (для чего придется найти матрицу Якоби), а также определить элементы символа Кристоффеля 2-го рода (которых будет 8, учитывая тот факт, что размерность пространства равна двум). Давайте начнем с более простого - с определения элементов матрицы метрического тензора.

Как уже говорилось в предыдущих уроках, метрический тензор в "новом" базисе связан с метрическим тензором в "старом" базисе следующим образом:

$$g'_{kl} = J^i_k J^j_l g_{ij} \qquad \text{или} \qquad g' = J^T g J$$

Где J - матрица Якоби (матрица перехода от "старых" координат к "новым"), g' - метрический тензор в "новом" базисе, а g - метрический тензор в "старом" базисе. Давайте в виде "старых" координат и "старого" базиса возьмем декартовы координаты и отртонормированный базис, соответственно. Вид матрицы Якоби при переходе от декартовых координат к полярным был получен в конце 9 урока. А так как матрица метрического тензора в ортонормированном базисе есть единичная матрица, то получаем матрицу метрического тензора в локальном базисе, заданном полярными координатами:

$$g' = J^T g J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Далее g' будем обозначать просто за g, понимая, что речь идет о метрическом тензоре в локальном базисе.

Помимо дважды ковариантного тензора g_{ij} нам понадобится также дважды контравариантный тензор g^{ij}, матрица которого есть матрица, обратная матрице g^{-1}. Путем несложных вычислений (метод нахождения обратной матрицы был описан в предыдущих уроках) найдем матрицу g^{-1}:

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix}$$

Теперь займемся вычислением элементов матрицы символа Кристоффеля 2-го рода.

Используем общую формулу, полученную в конце 10 урока:

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2} g^{mk} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right)$$

Получаем следующие элементы (первый элемент Γ^1_{11} будет разобран максимально подробно):

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{1k} \left(\frac{\partial g_{k1}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial q^k} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial q^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{\partial 1}{\partial r} + \frac{\partial 1}{\partial r} - \frac{\partial 1}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \cdot 0 \left(\frac{\partial 0}{\partial r} + \frac{\partial 0}{\partial r} - \frac{\partial 1}{\partial \varphi} \right) = 0$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}g^{1k}\left(\frac{\partial g_{k2}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial q^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial q^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial q^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial q^1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial q^2}\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{21} = \frac{1}{2}g^{1k}\left(\frac{\partial g_{k1}}{\partial q^2} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{21}}{\partial q^k}\right) = 0$$

Важно! Полезно дать ребятам самостоятельно найти оставшиеся 5 элементов прямо на уроке или в виде домашнего задания заранее, дабы не останавливаться надолго на данном вопросе.

$$\Gamma^1_{22} = -r \qquad \Gamma^2_{11} = 0 \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^2_{22} = 0$$

Теперь подставим найденные элементы во второй закон Ньютона в тензорном виде, который мы получили в конце предыдущего урока:

$$mg_{ij}\left(\ddot{q}^j + \Gamma^j_{kl}\dot{q}^k\dot{q}^l\right) = F_i$$

Учитывая, что $F_1 = F_r$, а $F_2 = 0$ и только Γ^1_{22}, Γ^2_{12}, Γ^2_{21} ненулевые, получим два уравнения:

$$mg_{11}\left(\ddot{q}^1 + \Gamma^1_{22}\,(\dot{q}^2)^2\right) = F_1 \qquad \Longrightarrow \qquad m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = F_r \quad (1)$$

$$m\,g_{21}\,\left(\ddot{q}^1 + 2\,\Gamma^2_{12}\,\dot{q}^1\dot{q}^2\right) + m\,g_{22}\,\left(\ddot{q}^2 + 2\,\Gamma^2_{21}\,\dot{q}^2\dot{q}^1\right) = F_2 \qquad \Longrightarrow \qquad m\,r^2\left(\ddot{\varphi} - \frac{2}{r}\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\right) = 0 \quad (2)$$

Заметим во (2), что $r^2\ddot{\varphi} - 2r\,\dot{r}\,\dot{\varphi} = \dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$.

Отсюда следует, что выражение $r^2\dot{\varphi}$ не зависит от времени, а потому является постоянной величиной. Эта величина называется удвоенной секторной (секториальной) скоростью.

$$r^2\dot{\varphi} = 2|\vec{\sigma}| = const = c \quad (3)$$

Секторная скорость — физическая величина, определяющая быстроту изменения площади, заметаемой радиус-вектором точки при её движении по кривой. Секторная скорость является векторной величиной и равна половине векторного произведения радиус-вектора на вектор скорости движения точки:

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}]$$

Заметим, что неизменность секторной скорости при движении в поле центральных сил является следствием закона сохранения момента испульса или второго закона Кеплера.

Выразим из (3) $\dot{\varphi}$ и подставим в (1). Получим:

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = \frac{F_r}{m} \quad (4)$$

Давайте найдем вторую производную радиус-вектора по времени.

Функцию $r(t)$ можно рассмотреть как сложную функцию $r(\varphi(t))$. В таком случае

$$\dot r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot\varphi = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -c\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (5)$$

$$\ddot r = \frac{d\dot r}{dt} = \frac{d\dot r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\dot r}{d\varphi}\dot\varphi \overset{(3)}{=} \frac{c}{r^2}\frac{d\dot r}{d\varphi} \overset{(5)}{=} -\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (6)$$

Подставляем (6) в (4)

$$-\frac{c^2}{r^2}\,\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{c^2}{r^3} = \frac{F_r}{m}$$

И, наконец, умножая обе части на $-\dfrac{r^2}{c^2}$, получаем

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{F_r\,r^2}{m\,c^2}$$

Данное уравнение известно как уравнение Бине. Это уравнение движения точки в центральном поле в полярных координатах.

№15 урок

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Список терминов, вводимых на уроке:

- Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами
- Однородное дифференциальное уравнение
- Неднородное дифференциальное уравнение
- Однородное решение дифференциального уравнения
- Частное решение дифференциального уравнения
- Кратность корня многочлена

Для успешного решения прямых и обратных задач с использованием формулы Бине, нам необходимо научиться решать один из видов дифференциальных уравнений, а именно, линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Общий вид такого уравнения относительно функции $y(x)$ показан ниже:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (1)$$

Где a_1,a_2,...,a_n - действительные числа, причем $a_n \neq 0$. $y^{(n)}$ - n-ая производная функции y.

Заметим, что в правой части равенства (1) написана некоторая непрерывная функция $f(x)$, которая в частном случае может быть равна нулю. По этой причине различают однородное дифференциальное уравнение и неоднородное. Выражение (1) - пример неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами при условии $f(x) \neq 0$. А вот уравнение (2):

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (2)$$

пример однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Конечно, зачастую в физике и математике рассматриваются неоднородные д.у., однако, как мы далее увидим, ни одно неоднородное д.у. не решается без знания того, как решается однородное д.у.

Для начала давайте поймем следующее: общее решение неоднородного д.у. есть частное решение - какая-то найденная функция, удовлетворяющая неоднородному дифференциальному уравнению, $+$ однородное решение - совокупность функций, удовлетворяющих однородному дифференциальному уравнению. То есть

$$y_{\text{об}} = y_{\text{од}} + y_{\text{ч}}$$

Почему это так? $y_{\text{од}}$ - такая функция $y(x)$, которая, будучи подставленной в (2), даст верное равенство, а $y_{\text{ч}}$ - такая функция $y(x)$, которая тоже даст верное равенство, только уже будучи подставленной в (1). Давайте предположим, что общее решение действительно есть сумма частного и однородного, давайте подставим общее решение $y_{\text{об}} = y_{\text{од}} + y_{\text{ч}}$ в (1) и проверим, выполнится ли равенство:

$$a_n (y_{\text{од}} + y_{\text{ч}})^{(n)} + a_{n-1} (y_{\text{од}} + y_{\text{ч}})^{(n-1)} + ... + a_1 (y_{\text{од}} + y_{\text{ч}})' + a_0 (y_{\text{од}} + y_{\text{ч}}) = f(x)$$

Так как операция взятия производной любого порядка - линейная операция, то есть $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$, то выражение выше преобразуется:

$$a_n y_{\text{од}}^{(n)} + a_n y_{\text{ч}}^{(n)} + a_{n-1} y_{\text{од}}^{(n-1)} + a_{n-1} y_{\text{ч}}^{(n-1)} + ... + a_1 y_{\text{од}}' + a_1 y_{\text{ч}}' + a_0 y_{\text{од}} + a_0 y_{\text{ч}}) = f(x)$$

$$\left(a_n y_{\text{од}}^{(n)} + a_{n-1} y_{\text{од}}^{(n-1)} + ... + a_1 y_{\text{од}}' + a_0 y_{\text{од}}\right) + \left(a_n y_{\text{ч}}^{(n)} + a_{n-1} y_{\text{ч}}^{(n-1)} + ... + a_1 y_{\text{ч}}' + a_0 y_{\text{од}} + a_0 y_{\text{ч}}\right) = f(x)$$

Учитывая (1) и (2) приходим к верному равенству.

Встает вопрос, почему бы в виде $y_{\text{од}}$ не взять просто $y_{\text{ч}}$? - Ведь они же оба удовлетворяют равенству (2). Ответ таков: $y_{\text{од}}$ задает полное множество решений вместе с $y_{\text{ч}}$. Без $y_{\text{од}}$ решение неоднородного дифференцаильного уравнения будет не полным - оно не будет учитывать все возможные решения. Проводя ананлогию, можно сказать, что $y_{\text{од}}$ нужно так же, как константа при поиске первообразной какой-либо функции.

Итак, двигаемся дальше. Теперь нам необходимо выяснить алгоритм нахождения однородного решения $y_{\text{од}}$ и частного решения $y_{\text{ч}}$. Далее - дело в кармане! Начнем с алгоритма поиска однородного решения $y_{\text{од}}$.

Для это мы записываем начальное д.у. без неоднородности в правой части, то есть при $f(x) = 0$:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (3)$$

Давайте искать наше однородное решение $y_{\text{од}}$ в виде функции $e^{\lambda x}$, где λ - комплексное число.

Подставим $y = e^{\lambda x}$ в уравнение (3), пользуясь тем, что $(e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$:

$$a_n \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + a_1 \lambda^1 e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0$$

Поделив равенство на $e^{\lambda x} \neq 0$, получим:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + ... + a_1 \lambda^1 + a_0 = 0 \quad (4)$$

Данное уравнение (4) называется характеристическим уравнением уравнения (3)

Важно! Чтобы получить характеристическое уравнение, не обязательно каждый раз выполнять подстановку $y = e^{\lambda x}$ и последующее сокращение на $e^{\lambda x}$. Достаточно просто заменить $y^{(n)}$ на λ^n.

Далее необходимо найти все возможные значения λ, при которых будет выполняться равенство (4) - то есть найти корни уравнения (4). Таких значений λ должно быть ровно n - количество совпадает с порядком дифференциального уравнения. Однако может возникнуть ситуация, при которой **различных** значений λ будет меньше n, в таком случае некоторые корни уравнения обладают кратностью больше единицы. Поясним это на примере квадратного и кубического уравнений:

Пример 1. Квадратное уравнение $x^2 - 6x + 9 = 0$ должно иметь два корня ввиду того, что это квадратное уравнение. Однако, найдя корни этого уравнения: $x_1 = 3$ и $x_2 = 3$, мы увидим, что они совпадают. В таком случае можно сказать двояко: 1) квадратное уравнение имеет два корня, причем они совпадают; или 2) квадратное уравнение имеет 1 корень кратности 2.

Пример 2. Квадратное уравнение $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ должно иметь три корня ввиду того, что это квадратное уравнение. Однако, найдя корни этого уравнения: $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$ и $x_3 = 1$, мы увидим, что они совпадают. В таком случае можно сказать двояко: 1) кубическое уравнение имеет три корня, причем они совпадают; или 2) кубическое уравнение имеет 1 корень кратности 3.

Кратность корня многочлена по сути показывает количество повторений корня.

Итак, после того как мы определили все корни уравнения (4), то есть нашли все различные λ и указали их кратности (обычно кратность записывается в нижнем индексе в скобках, то есть корень $\lambda = 2$ кратности 2 записывается как $\lambda_{(2)} = 2$), то пора наконец записывать однородное решение следующим образом:

Пусть решением уравненения (4) оказались следующие корни: $\lambda_{(s_1)} = p_1$, $\lambda_{(s_2)} = p_2$,... $\lambda_{(s_m)} = p_m$. Тогда решение будет выглядеть как

$$y_{\text{од}} = (A_1e^{p_1x}+A_2xe^{p_1x}+A_3x^2e^{p_1x}+...+A_{s_1}x^{s_1-1}e^{p_1x})+(B_1e^{p_2x}+B_2xe^{p_2x}+B_3x^2e^{p_2x}+...+B_{s_2}x^{s_2-1}e^{p_2x})+...$$

$$+(C_1e^{p_mx} + C_2xe^{p_mx} + C_3x^2e^{p_mx} + ... + C_{s_1}x^{s_m-1}e^{p_mx})$$

Хотя запись в общем виде и выглядит устрашающе, сильных сложностей в конкретных примерах нет, в чем мы сейчас и убедимся:

Пример 1. Пусть есть следующее линейное однородное дифференциальное уравнение 3-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{(3)}$$

№16 урок

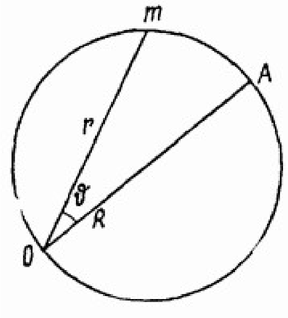
Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами (продолжение)

Список терминов, вводимых на уроке:

№17 урок

Решение прямых задач при помощи формулы Бине

Задача 1. Материальная точка массой m описывает окружность радиуса R. Какой должна быть центральная сила, если ее центр находится на окружности в точке 0? на максимальном удалении от притягивающего центра скорость точки равна v_0.



Решение За полярную ось примем диаметр окружности, проходящий через центр силы. Тогда уравнение траектории запишется в виде

$$r = 2R\cos\varphi,$$

или

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2R\cos\varphi}.$$

Вычислим производные от $\dfrac{1}{r}$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2R}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi};$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{2R}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right) = \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + 2\frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}\right)$$

Подставляя эти значения в формулу Бине, будем иметь

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right) = -\frac{mc^2}{4R^2\cos^2\varphi}\left(\frac{1}{R}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} + \frac{1}{2R\cos\varphi} + \frac{1}{2R\cos\varphi}\right) =$$

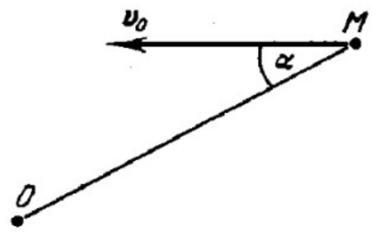
$$= -\frac{mc^2}{8R^3\cos^2\varphi}\left(\frac{2\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} + \left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{\cos^2\varphi}\right) + \frac{2}{\cos\varphi}\right) = -\frac{mc^2}{8R^3\cos^2\varphi}\left(\frac{2}{\cos^3\varphi} - \frac{2}{\cos\varphi} + \frac{2}{\cos\varphi}\right) =$$

$$= -\frac{mc^2}{4R^3\cos^5\varphi} = -\frac{8mc^2R^2}{32R^5\cos^5\varphi} = -\frac{8mc^2R^2}{r^5}$$

Откуда видно, что на точку действует центральная сила притяжения, обратно пропорциональная пятой степени расстояния точки от притягивающего центра Величина силы зависит от закона движения точки по траектории. Так как в наиболее удаленной точке траектории скорость равна v_0, то постоянная площадей $c = 2Rv_0$, и для силы получим значение

$$F = -\frac{32R^4v_0^2}{r^5}$$

Задача 2. Точка совершает движение в поле центральной силы. Траектория точки - лемниската, уравнение которой в полярных координатах выглядит следующим образом: $r^2 = 2b^2\cos 2\varphi$, где r расстояние точки от центра O, а b - постоянная величина. В начальный момент $r = r_0$, а скорость точки равна v_0, причем она образует угол α с прямой, соединяющей движущуюся точку с центром O. Определить ускорение точки.



Решение. Для решения воспользуемся формулой Бине

$$\frac{F}{m} = a_r = -c^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)$$

где $c = 2\cdot\frac{1}{2}[\vec{r},\vec{v}]$ - удвоенная секторная скорость (постоянная величина), а $u = \frac{1}{r}$. Так как c - постоянная величина, то при любых r и φ c сохраняет свое значение, значит

$$c = 2\cdot\frac{1}{2}[\vec{r},\vec{v}] = \frac{1}{2}[\vec{r},\vec{v}] = [\vec{r_0},\vec{v_0}] = r_0\cdot v_0\cdot\sin\alpha$$

Далее, находим

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{b\sqrt{2\cos 2\varphi}}$$

$$\frac{du}{d\varphi} =$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{1}{b\sqrt{2}}\left(\frac{2+\sin^2 2\varphi}{\cos^{2,5} 2\varphi}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{2+\sin^2 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}\right)$$

Внося значения (2), (5) и (6) в формулу Бине (1), получаем окончательно

$$a = a_r = -r_0v_0\sin\alpha\frac{1}{r^3}\left(\frac{\cos^2 2\varphi + 2 + \sin^2 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}\right) =$$

$$= -\frac{12b^4r_0^2v_0^2\sin^2\alpha}{r^7}$$

Таким образом, ускорение точки является радиальным ускорением, а его модуль обратно пропорционален седьмой степени расстояния точки до непоцвижного центра.

Задача 3. Точка описывает эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ под действием силы притяжения к его геометрическому центру. Определить эту силу.

Решение. Введем полярные координаты

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi.$$

Тогда, заменив x и y в уравнении эллипса, получим

$$r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)=1,$$

или

$$\frac{1}{r^2}=\frac{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}{a^2b^2}$$

Вычислим производные от $\frac{1}{r}$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\right)=\frac{2}{r}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{r}{2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\right)=\frac{r}{a^2b^2}\left(a^2-b^2\right)\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}r\left(\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right)$$

Подставляя эти значения в формулу Бине для силы, будем иметь

$$F=-\frac{mc^2}{r^2}\left(-\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^4b^4}r^3\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right)$$

$$\left(+\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}r\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)+\frac{1}{r}\right)=$$

$$=-\frac{mC^2r}{a^4b^4}\left[-\left(a^2-b^2\right)^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta+\left(a^2-b^2\right)\left(b^2\cos^2\vartheta+a^2\sin^2\vartheta\right)\times\right.$$

$$\left.\times\cos 2\vartheta+\left(b^2\cos^2\vartheta+a^2\sin^2\vartheta\right)\right]$$

или после приведения подобных членов

$$F=-\frac{mc^2r}{a^2b^2}.$$

Сила будет полностью определена, если будет известен закон движения точки для чего достаточно определить постоянную площадей, задав для этого скорость v_0 на каком-то расстоянии r_0 от притягивающего центра.

№18 урок

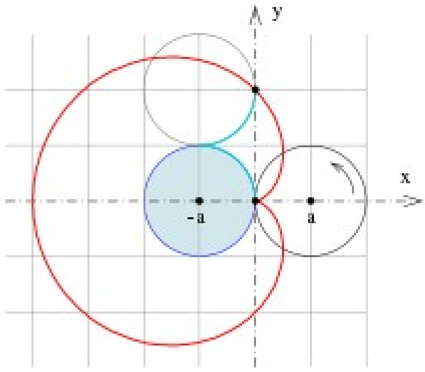
Решение обратных задач при помощи формулы Бине

Контрольный тест по теме 17 и 18 уроков

Задача 1. Точка, двигаясь в плоскости, описывает кардиоиду, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$r = 2a(1 - \cos\varphi)$$

Кардиоидой называется кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности, в случае, когда радиусы обеих окружностей равны друг другу и равны a. Определить центральную силу, под действием которой движение могло бы происходить по такой траектории.



Задача 2. Планета массой m движется в поле силы тяжести, создаваемом Солнцем. Известно, что 1) когда планета находится на расстоянии $r_0 = 4{,}5 \cdot 10^9$ км от Солнца, она обладает скоростью $2v_0 = 72000$ км/ч, направленной под углом $\alpha = 30^\circ$ к прямой, соединяющей планету с частицей; 2) расстояния от планеты до частицы, измеренные в один момент времени и в другой, когда частица повернулась на 90° относительно первого момента времени, равны $2r_0$ и $3r_0$. Найдите уравнение движения частицы в полярных координатах, постройте его график (для этого воспользуйтесь любым сайтом, способным построить график в полярных координатах, например этим) и определите из графика форму траектории движения планеты.

Примечание: на столь больших расстояниях Солнце и планету можно считать точечными. Масса планеты мала по сравнению с массой Солнца.

Решение контрольного теста по теме 17 и 18 уроков

Задача 1. Найдем первую и вторую производные функции $\frac{1}{r}$ по переменной φ:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2a(1-\cos\varphi)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\sin\varphi}{2a(1-\cos\varphi)^2}$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = -\frac{\cos\varphi(1-\cos\varphi)^2 - 2(1-\cos\varphi)\sin^2\varphi}{2a(1-\cos\varphi)^4} = -\frac{\cos\varphi - \cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi}{2a(1-\cos\varphi)^3}$$

Выразим проекцию силы на координатную линию r из формулы Бине:

$$F_r = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right)$$

Тогда

$$F_r = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{1}{2a(1-\cos\varphi)} - \frac{\cos\varphi - \cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi}{2a(1-\cos\varphi)^3}\right) =$$
$$= -\frac{mc^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi - \cos\varphi + \cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi)}{2ar^2(1-\cos\varphi)^3} = -\frac{mc^2(3 - 3\cos\varphi)}{2ar^2(1-\cos\varphi)^3} =$$
$$= -\frac{3mc^2}{2ar^2(1-\cos\varphi)^2} = -\frac{6amc^2}{r^4}$$

Задача 2. Так как движение происходит в гравитационном поле Солнца, то по закону всемирного тяготения на планету действует центральная сила $F = \frac{GMm}{r^2}$. Значит, проекция этой силы на координатную линию r равна $F_r = -\frac{GMm}{r^2}$. Минус появляется в связи с тем, что сила, действующая на планету, направлена от планеты к Солнцу, а координатная линия r - наоборот - от Солнца к планете.

Тогда, дифференциальное уравнение, задаваемое формулой Бине, будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{c^2}$$

Обозначим функцию $\frac{1}{r}(\varphi)$ за функцию $u(\varphi)$ для удобства вычислений:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{c^2}$$

Тогда, чтобы решить наше дифференциальное уравнение, нам необходимо решить сначала однородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm i$$

Значит

$$u_{\text{од}} = C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi$$

Частное решение можно подобрать. Не тяжело заметить, что частным решением может служить то, что стоит в правой части изначального неоднородного дифференциального уравнения. То есть

$$u_{\text{ч}} = \frac{GM}{c^2}$$

Получаем решение исходного дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi + \frac{GM}{c^2}$$

Так как, когда планета находится на расстоянии $r_0 = 4{,}5 \cdot 10^9$ км от Солнца, она обладает скоростью $2v_0 = 72000$ км/ч, направленной под углом $\alpha = 30^\circ$ к прямой, соединяющей планету с частицей, то

$$c^2 = (r^2\dot{\varphi})^2 = [\vec{r_0}, 2\vec{v_0}]^2 = r_0^2(2v_0)^2 \sin^2\alpha = r_0^2 v_0^2$$

После подстановки получим:

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi + \frac{GM}{r_0^2 v_0^2}$$

Константы C_1 и C_2 можно определить из того условия, что расстояния от планеты до частицы, измеренные в один момент времени и в другой, когда частица повернулась на 90° относительно первого момента времени, равны $2r_0$ и $3r_0$. Положим $\varphi = 0$ в первый момент времени и $\varphi = 90^\circ$ во второй. Тогда

$$\frac{1}{2r_0} = C_1 + \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \Longrightarrow C_1 = \frac{r_0 v_0^2 - 2GM}{2r_0^2 v_0^2}$$

$$\frac{1}{3r_0} = C_2 + \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \Longrightarrow C_2 = \frac{r_0 v_0^2 - 3GM}{3r_0^2 v_0^2}$$

Наконец приходим к зависимости $r(\varphi)$:

$$r = r_0^2 v_0^2 \left(\frac{r_0 v_0^2 - 2GM}{2r_0^2 v_0^2} \cos\varphi + \frac{r_0 v_0^2 - 3GM}{3r_0^2 v_0^2} \sin\varphi + GM \right)^{-1}$$

Подставляя числовые значения, данные в условии, получим:

$$20{,}25 \cdot 10^{13} \cdot (9{,}5 \cos\varphi + 2 \sin\varphi + 13)^{-1}$$

График в полярных координатах изображен ниже. Траектория движения планеты в поле Солнца с заданными условиями - эллипс.

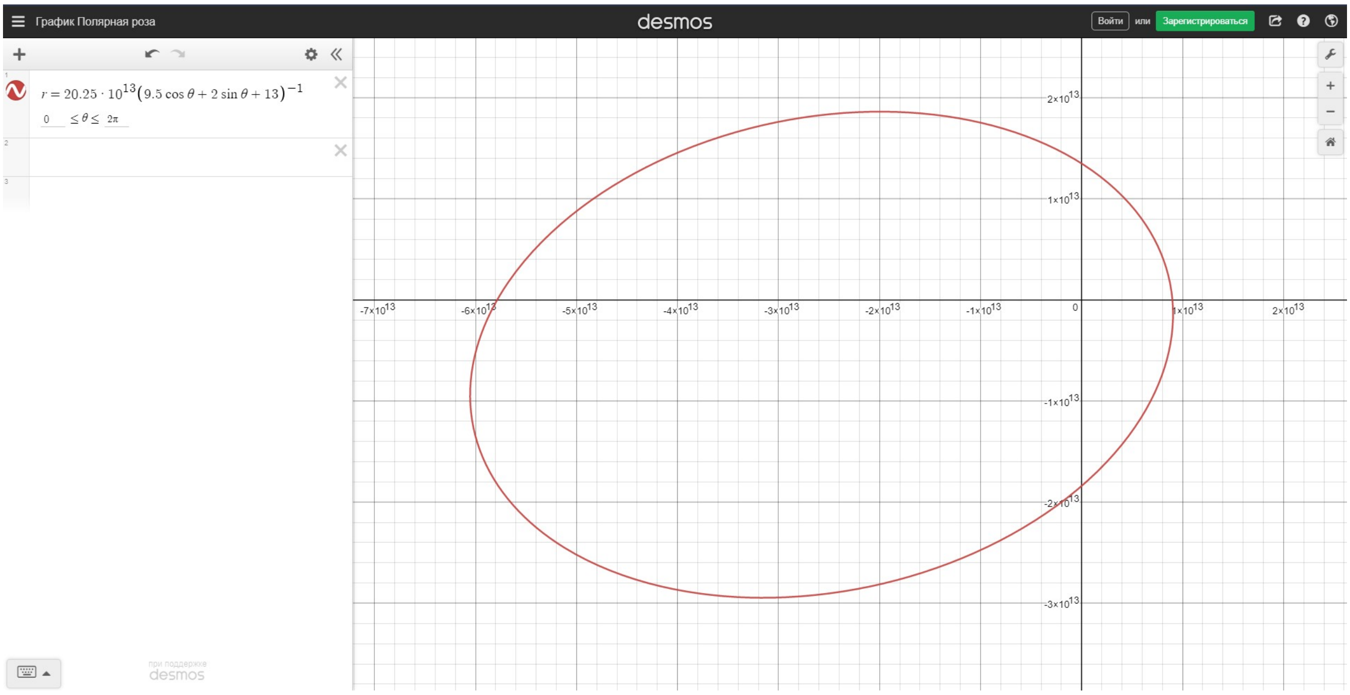


График Полярная роза
desmos
Войти
или
Зарегистрироваться
$r = 20.25 \cdot 10^{13}(9.5\cos\theta + 2\sin\theta + 13)^{-1}$
$0 \le \theta \le 2\pi$
-7×10^13
-6×10^13
-5×10^13
-4×10^13
-3×10^13
-2×10^13
-1×10^13
0
1×10^13
2×10^13
-1×10^13
-2×10^13
-3×10^13

№19 урок

Момент инерции твердого тела. Тензор инерции

№20 урок

Эллипсоид инерции. Свободные оси вращения

Список используемой литературы

Теоретическая часть

- www.habr.com. Магия тензорной алгебры
- Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры

Список рекомендованной литературы

Практическая часть (задачи)

- Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю. Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах