Аннотация

Данная дипломная работа посвящена рассмотрению вопроса необходимости реализации курса линейной алгебры в школе с целью углубления курса физики для учащихся физико-математических классов. Обсуждаются проблемы современного курса линейной алгебры в вузах и ее актуальность в школьном курсе. Приводится литературный обзор уже существующих элективных курсов линейной алгебры в школе. В связи с выявленными проблемами делается вывод о необходимости создания двухгодового курса линейной алгебры с физическим применением для 10-11 физико-математических классов. Обсуждаются вопросы, возникающие при составлении курса. Рассматривается структура планируемого курса, состоящая из 16 разделов, посвященных основам линейной и тензорной алгебр и избранным темам школьного курса физики. Приводится подробный поурочный план курса, состоящий из 130 уроков, где уроки разделяются на теоретические (лекции), практические (семинары), и контрольные. Поясняются особенности в преподавании математической и физической частей курса. Обсуждается применение данного курса на примере других дисциплин. Делается анализ апробации первой половины курса на примере 10 физико-математического класса 57 школы г. Москвы. Приводятся готовые контрольно-измерительные материалы по проведенным занятиям, состоящие из примеров контрольных работ, домашних работ и лекционных тестов. Делается вывод о способности освоения данного курса учащимися. К работе прилагается методическое пособие, содержащее подробные конспекты отдельных уроков.

Оглавление

Введение

0.1 Предмет линейной алгебры

Линейная алгебра (также векторная алгебра) — это раздел математики, который занимается изучением линейных пространств и линейных отображений между ними, основным инструментом которого являются векторы и матрицы. Сюда же относится рассмотрение систем линейных уравнений. Одним из разделов линейной алгебры является тензорная алгебра, которая занимается изучением тензоров и операций, производимых между ними - так называемым тензорным исчислением.

Основной задачей линейной алгебры является изучение элементов линейных пространств, то есть векторов, матриц, без знания которых глубокое понимание таких наук как физика и математика сильно затрудняется. Тензорная алгебра позволяет использовать все изученные свойства в линейной алгебре, оперируя теми же понятиями, без привязки к конкретному линейному пространству - его виду и размерности. Такой подход позволяет рассматривать поставленные задачи в общем виде, который затем легко приводится к частному для конкретного случая.

Векторные пространства и их линейные отображения являются важным инструментом во многих областях математики. Помимо чистой математики, приложения можно найти в естественных науках (физике, астрономии), информатике, вычислительной математике (компьютерном моделировании), машинном обучении.

0.2 Актуальность работы

Становление из учеников физико-математических направлений высококвалифицированных специалистов в области прикладной физики и математики имеет важное значение для инженерного и промышленного будущего любой страны. В связи с чем в последнее время уделяется повышенное внимание учебной подготовке школьников. Так как программа технических вузов сложна и перегружена, она усваивается на высоком уровне лишь меньшинством студентов. Поэтому для обеспечения успешного профессионального будущего учеников необходимо снабдить их надежным теоретическим и практическим физико-математическим фундаментом еще на раннем этапе обучения – в школе. Более глубокое погружение в некоторые разделы школьного курса физики, которые в общеобразовательной программе физико-математических классов опускаются ввиду сложности используемого математического аппарата, является самым действенным способом достижения положительных результатов в физической подготовке будущих студентов и, помимо этого, помогает удовлетворить повышенный интерес мотивированных учеников и расширить их кругозор. Поэтому возникает необходимость создания курса, нацеленного на расширение уже имеющегося школьного курса физики. Так как углубленное изучение некоторых разделов физики требует, помимо знания основ математического анализа, знания основ линейной и тензорной алгебр, и возникает идея пропедевтики линейной алгебры в школьном курсе.

0.3 Цели и задачи работы

В связи с актуальностью описанной проблемы в данной дипломной работе ставятся следующие цели:

- расширенное изучение избранных глав школьного курса физики при помощи внедрения элементов линейной алгебры в школьный курс;
- проверка способности освоения старшеклассниками элементов программы технических вузов;
- построение теоретического и практического фундамента для более легкого и свободного вхождения учеников старших классов в изучение линейной и тензорной алгебр в вузе.

Для достижения поставленных целей выделяются следующие задачи:

- проведение литературного обзора с целью поиска уже существующих курсов линейной и тензорной алгебры для школьников старших классов. Анализ качества найденных материалов и их схожести с создаваемыми в ходе данной работы;
- Поиск подходящей литературы и подбор задач для иллюстрации практического применения полученных в ходе курса знаний;
- Составление поурочного плана планируемого курса;
- Апробация курса на примере 10 физико-математического класса 57 школы г. Москвы в рамках уроков по «Специальной физике»;
- Создание контрольно-измерительных материалов;
- Создание конспектов уроков;
- Оформление контрольно-измерительных материалов, готовых конспектов уроков и рекомендаций педагогам в виде единого методического пособия;
- Оценка освоения курса школьниками путем анализа контрольных работ.

Глава 1. Постановка задачи

1.1 Линейная алгебра, ее актуальность и сложность освоения в вузах

Линейная алгебра имеет огромный спектр применений в различных сферах науки. В связи этим возникает очевидная потребность в ее глубоком изучении и понимании для успешной самореализации и работы во многих отраслях. Линейная алгебра не входит в общеобразовательную программу старшей школы как отдельный предмет, а изучается лишь выборочно на уроках геометрии или алгебры (речь идет о решение систем уравнений, а также об использование векторов), чего недостаточно для углубленного изучения смежных дисциплин, использующих элементы линейной алгебры. По-настоящему линейная алгебра изучается в технических вузах на первых курсах бакалавриата в виде одногодичного курса, состоящего из лекций и семинаров. По причине того, что изучение такого важного и отнюдь не самого простого предмета происходит на начальном этапе бакалавриата без какой-либо начальной подготовки в школе, могут возникать некоторые проблемы с усвоением программы студентами. Очевидно, далее перечисленные сложности могут возникать не у всех обучающихся, однако большинство студентов с ними сталкивается, что было выявлено путем наблюдений за результатами многих сокурсников и студентов младших курсов, а также на собственном опыте. Стоит заметить, что следующее разделение проблем вполне условное: одни являются следствием других, или тем или иным образом связаны друг с другом.

Первая проблема современного курса линейной алгебры в вузах заключается в отсутствии полноценного применения изучаемого материала линейной алгебры в других предметах во время ее изучения. В связи с чем у студентов возникает некоторая иллюзия того, что линейная алгебра изучается как дисциплина, созданная лишь для расширения знаний в области математики. В отличие от таких тем математического анализа, как интеграл функции, ее производная, дифференциал и т.д., которые находят непосредственное применение сразу и одновременно с изучением на занятиях физики и информатики, использование элементов линейной алгебры на первом курсе встречается единожды в виде обзорной лекции - в 1 семестре на занятиях по общей физике при рассмотрении свойств движения твердого тела: его тензора инерции, эллипсоида инерции и их свойств. По-настоящему линейная и тензорная алгебры используются только после ее изучения - на 2-4 курсах - в таких дисциплинах как теоретическая механика, квантовая механика, теория поля.

Вторая проблема заключается в невозможности углубления в некоторые разделы физики, содержащие элементы линейной алгебры, ввиду ограниченного времени, выделяемого на столь большой объем программы. Конечно, студенты могут самостоятельно изучить некоторые вопросы подробнее, однако зачастую большая учебная нагрузка не позволяет большинству обучающихся изучать темы, выходящие за рамки программы. Вот почему возникает потребность осветить некоторые темы по физике более подробно в школьном курсе, где нагрузка на детей очевидно меньше. Именно с этой целью возникает идея внедрения линейной алгебры в школьный курс, чтобы расширить содержание некоторых физических вопросов, изучение которых неизбежно ведет к необходимости изучения элементов линейной и тензорной алгебр.

Третья проблема - отсутствие полноценного курса тензорной алгебры. В программе обучения бакалавриата технических вузов отсутствует отдельная дисциплина, которая занималась бы обучением студентов основам тензорного исчисления. Стоит заметить, что это не являлось бы проблемой, если бы не два существующих факта:

1) Отсутствие выделения достаточного времени в курсе линейной алгебры на раздел тензорной алгебры.

2) Полноценное использование элементов тензорной алгебры в последующих дисциплинах 2-4 курсов.

На основы тензорной алгебры отводится около одного лекционного и семинарского занятия в конце курса линейной алгебры или не выделяется вовсе (опускается преподавателем ввиду ограниченности времени или сложности основной программы), а предлагается студенту в виде самостоятельного изучения при помощи учебной литературы. Ввиду сложности тензорной алгебры самостоятельное изучение зачастую оказывается сильно затрудненным и в большинстве случаев почти невозможным. Внедрение элементов тензорной алгебры в такие предметы, как теория поля, квантовая механика, статистическая физика, теоретическая механика (последние два в меньшей степени) происходит мгновенно, практически в самом начале изучения, и преподносится как нечто, что студенты 2-4 курсов должны, разумеется, уже знать и уметь. По очевидным причинам у большинства студентов этого не происходит, что приводит к сложностям в изучении предмета и его непониманию, а также к отсутствию заинтересованности учащихся в изучении данных дисциплины на должном уровне, отчего целые предметные разделы остаются полностью неосвоенными или понятыми поверхностно.

1.2 Актуальность курса линейной алгебры в школьном курсе

Наряду с вопросами освоения линейной алгебры студентами существует не менее глобальная, а скорее даже более важная проблема, - отсутствие глубинного понимания изучаемых в школе предметов, а также отсутствие представления о предстоящих предметах в технических вузах у будущих выпускников физико-математических классов.

В современном мире ученикам физико-математических классов - будущим студентам физических, математических и смежных с ними направлений - для успешного и полноценного будущего развития следует знать больше основной общеобразовательной программы профильных классов. Объясняется это с тем, что, учась в школе, ребята или не получают вовсе, или получают лишь слабое представление об их будущем, связанном с техническими науками, после окончания школы.

Впоследствии это может приводить к проблемам, одна из которых заключается в несоответствии представления учеников о том, что изучается в вузе на занятиях по общей физике и математике, и реальной действительности. Иногда это может быть причиной потери мотивации изучения физики в институте и построения с ней свою дальнейшую профессиональную деятельность. Так как школьная программа физики рассчитана на знакомство учеников с основными физическими понятиями, законами и закономерностями, она не дает возможности в полной мере почувствовать настоящую прикладную и теоретическую физику, которой предстоит заниматься ученикам в будущем. В школе не происходит серьезного углубленного изучения некоторых разделов физики, ввиду чего не происходит знакомства с такими науками, как, например, квантовая механика, физика твердого тела. Небольшое знакомство школьников с основами институтских дисциплин при помощи углубления и расширения содержания некоторых разделов школьной программы по физике с использование элементов линейной алгебры может помочь ученикам не только лучше понять, что и каким образом изучается в вузах, но и получить более широкое представление о физике, как о науке о мире. Это даст возможность сделать более осознанный выбор направления развития в области физики и математики.

1.3 Применение линейной алгебры в других сферах знаний

Конечно, не только физика является отличным примером важности и необходимости знания линейной алгебры. Без линейной алгебры, наряду с физикой и математикой, не обходятся такие науки как экономика, вычислительная математика, квантовая механика, машинное обучение.

Применение линейной алгебры значительно упрощает решение многих задач в современной экономике. Для экономистов наибольшую ценность представляют знания о матрицах и работе с ними, а также о методах решения систем линейных уравнений, потому как множество экономических закономерностей можно достаточно легко представить в виде математических моделей, записанных в простой и компактной матричной форме. При помощи использования элементов линейной алгебры в экономике, например, упрощаются:

1) Записи таблиц, содержащих данные о каких-либо продуктах, например, данные о средних розничных ценах на автомобили в зависимости от срока их службы и года выпуска.

2) Решения задач на определение общей стоимости сырья разных видов и стоимости, используемых для различных видов техники с соответствующими нормами расхода.

3) Решения задач на прогнозирование расходов сырья на производстве и определение уровня экономического функционирования предприятия.

Вычислительная математика является одним из самых ярких примеров прикладного применения элементов линейной алгебры - простота обработки и анализа огромных массивов данных при помощи использования матриц и векторов делает ее незаменимым инструментом для любого человека, работающего в сфере вычислительной математики. Численные методы решения волнового уравнения и уравнения теплопроводности, методы моделирования распространения стоячей или бегущей волн, методы моделирования моделей физических объектов в играх и многое другое являются заслугой линейной алгебры, без использования которой современные компьютерные вычисления были бы просто невозможны.

Для квантовой механики линейная алгебра является необходимым языком вычислений. Именно при помощи нее описываются состояния кубитов и квантовых операций, производимых над ними. Так состояние кубита описывается волновой функцией, коэффициенты разложения по ортонормированному базису которой записываются в столбец, а все операции над кубитами производятся при помощи операторов, которые имеют матричный вид. Кубиты являются базовой конструкцией квантового компьютера, потому без их изучения, а соответственно, без знания линейной алгебры, исследование основ построения квантового компьютера не представляется возможным.

Линейная алгебра является незаменимым инструментом не только в уже сложившихся, но и в относительно новых науках, например, квантовой механике, а также в науках, которые только начинают свой путь, например, машинном обучении. Сложнее найти сферу машинного обучения, которая бы не использовала знаний линейной алгебры, чем привести пример ее использования. Ведь большинство методов и моделей классического машинного обучения, на основе которого и создаются популярные в настоящем мире нейронные сети, основано на операциях с матрицами и векторами. Сингулярное разложение матриц, метод главных компонент, метод опорных векторов и многое другое в машинном обучении требует очень хорошего знания линейной алгебры.

Нельзя также обойти стороной и такие науки, как теоретическая механика, теория поля, статистическая физика, где используются матрицы, векторы и их свойства при построении моделей физических процессов. В теории поля и статистической физики, также, как и в квантовой механике, линейная алгебра позволяет легко использовать операторы, заданные при помощи матриц, однако одновременно с этим современная теория поля практически немыслима без использования аппарата тензорного исчисления.

Осознав, насколько велико число наук, в которых тяжело, а в некоторых случаях невозможно обойтись без знания линейной алгебры, важно понять необходимость изучения элементов линейной алгебры как можно раньше, а именно, в школе. Именно в это время важно сформировать у учащихся представление об исследуемых в вузах науках, чтобы предоставить ученику возможность более осознанного выбора направления развития и дисциплин, с которыми он сможет связать свою дальнейшую профессиональную деятельность. Этого можно достичь путем создания курса линейной алгебры в школе, который сможет познакомить школьников с элементами линейной алгебры и ее применением в смежных научных сферах.

1.4 Необходимость пропедевтики линейной алгебры в школьном курсе

В связи с перечисленными выше сложностями изучения линейной алгебры в технических вузах, а также отсутствия глубинного понимания некоторых разделов физики и малой осведомленности со стороны школьников об институтских дисциплинах возникает идея пропедевтики курса линейной алгебры в школьном курсе с целью облегчения усвоения предмета в вузе и помощи в понимании его необходимости, а также ускорении темпов освоения программы. Перечисленные выше цели могут быть достигнуты путем внедрения элементов линейной алгебры в школьный курс путем создания элективного курса линейной алгебры в физико-математических классах. Так как вышеизложенные проблемы возникли не только сейчас и уже давно широко известны в педагогическом обществе, необходимо понять, были ли ранее предприняты попытки внедрения линейной алгебры в школьный курс, каковы цели уже существующих курсов, были ли они достигнуты и с каким успехом.

1.5 Литературный обзор по преподаванию линейной алгебры в школе

Проведя литературный обзор в интернете, помимо институтских курсов линейной алгебры, направленных на освоение базового материала, удалось отыскать несколько полноценных элективных курсов или программ курсов, делающих попытки привнести элементы линейной алгебры в школьный курс.

Ниже приведены ссылки на найденный полноценный курс и две программы курсов:

1) Открытый урок. «Элементы линейной алгебры. Программа элективного курса для 9-х классов основной школы» (https://urok.1sept.ru/articles/212298)

2) «Лекториум. Линейная алгебра и аналитическая геометрия» (https://www.lektorium.tv/linejnaya-algebra)

3) «Спецкурс «Линейка» (http://emsch.ru/archive/uchebnyj-god-2011-12/speckursy-2011-12/matematika/linejka/)

Проанализируем найденные материалы:

Первый источник не содержит в себе конспекты уроков, рекомендации педагогу для успешного ведения курса, материалы по проведению контрольных работ, подборку задач для домашних заданий и т.д. Имеется только программа элективного курса линейной алгебры для 9-х классов основной школы. Основные изучаемые темы: матрицы и операции над ними, определители матриц, обратная матрица, системы линейных уравнений. Применение полученных знаний происходит при решении систем линейных уравнений методами Крамера, Гаусса, обратной матрицы.

За неимением материалов уроков невозможно объективно оценить ценность данного курса, его цели, задачи, а также успех их достижения. Программа курса дает лишь понимание о том, какие темы предлагаются школьнику в ходе изучения. Однако на основе описания программы можно представить ожидаемые результаты в случае успешного освоения курса. Наиболее ценным навыком, приобретаемым школьниками в данном курсе, является навык решения систем линейных уравнений различными способами. Однако стоит заметить, что, хотя данный курс и выходит за рамки общеобразовательной программы, он не предполагает применения полученных знаний в других предметных областях, а ограничивается лишь рассмотрением различных способов решения систем линейных уравнений.

Потому можно сформулировать следующие недостатки данного курса: отсутствие межпредметные связей (т.е. применения полученных знаний в других предметах), ограниченность целей изучения только решением систем линейных уравнений, малая наполняемость курса (12 академических часов). Данные недостатки, по моему мнению, следует из возраста учеников - в 9 классе школьники еще не обладают достаточным математическим и физическим знаниями для успешного освоения дополнительных глав линейной алгебры или освоения применения уже изученного материала при углубленном изучении отдельных тем в физике.

Второй источник представляет из себя полноценный школьный онлайн курс линейной алгебры и аналитической геометрии, состоящий из следующих тем: базовые математические понятия, функциональная зависимость, основы векторной алгебры, линии на плоскости, элементы тригонометрии, системы уравнений, математические модели на основе алгебраических уравнений.

В отличие от предыдущего курса, данный курс является более полным (происходит охват большего теоретического материала), а также пытается показать применение линейной алгебры в задачах не только по математике, но и по физике и экономике. Однако примеры, на основе которых происходит демонстрация применимости изученного материала, являются очень простыми и совсем не раскрывают ценность линейной алгебры в полной степени. Используемые примеры без особого труда сможет решить и школьник, который не прослушал данный курс линейной алгебры, из чего можно сделать отрицательный вывод о ценности курса. Еще одно отличие, которое является недостатком данного курса, заключается в формате его проведения - совокупность 30 лекций в виде записанных видеороликов по 12 минут в среднем, а также пяти тестов в конце каждой темы. Такой подход безусловно имеет положительные стороны: возможность учащегося при желании пересматривать занятия, обучаться самостоятельно без учителя, а также учиться из дома. С точки зрения учителя также есть положительные стороны – возможность самостоятельно прослушать курс, а затем создать на его основе собственное поурочное планирование и подобрать недостающие теоретические и практические материалы. Тем не менее, для хорошего освоения линейной алгебры и его успешного применения в других науках школьниками, онлайн-формат считаю неприемлемым, так как такой сложный материал лучше объяснять учителю очно, чтобы иметь возможность объективно оценивать уровень понимания учениками и отвечать на все их интересующие вопросы. В ином случае тяжело найти отличия от вышеописанной проблемы самостоятельного изучения линейной алгебры.

Третий источник, как и первый, являясь курсом линейной алгебры для 9-11 классов, не предоставляет готовые теоретические и практические материалы для проведения уроков, а потому судить о ценности курса можно лишь по представленному на сайте “позанятийному плану”, который по наполняемости является чем-то средним между первым и вторым материалами.

Ввиду сильной схожести с первым материалом (отличие наблюдается только в количестве занятий и количестве предлагаемой учащемуся информации) данный курс обладает всеми его вышеперечисленными недостатками.

Подытожив все отрицательные стороны найденных курсов, можно с уверенностью сказать, что создаваемый курс является уникальным в своем роде, так как устанавливаемые и достигаемые цели не прослеживаются ни в одном из уже существующих курсов или прослеживаются не полностью.

Глава 2. Реализация курса введения в линейную алгебру в школе

2.1 Основные проблемы, которые могут возникнуть при составлении курса

Создание курса - непростая задача, которая требует внимания ко многим вопросам и деталям, возникающим как в начале создания курса, так и в ходе его создания. Постараемся выявить основные проблемы, которые могут возникнуть при планировании и составлении курса, а также придумать для них решение.

Первая проблема приходит на ум почти сразу: позволят ли школьникам полученные на момент начала курса знания из школьных предметов легко начать освоение планируемого курса? Чтобы ответить на данный вопрос и предупредить возникающую проблему, необходимо определиться с тем, какие знания необходимы школьнику для старта курса. Это поможет понять, на какой класс рассчитан данная программа.

Так как на начальном этапе изучения элементов линейных пространств необходимо оперировать векторами, то минимальным требованием для уровня школьников является знание понятия «вектор», свойств векторов, геометрического представления векторов и операций сложения и вычитания векторов. Для легкого вхождения в курс необходимо хорошо понимать, о каком геометрическом объекте идёт речь при упоминании слова «вектор», а также уметь применять все изученные свойства векторов. Дальнейшее уточнение понятия вектора, как элемента линейного пространства, происходит уже на первом занятии курса и не требует дополнительных знаний. Остальные используемые понятия, такие как, например, линейная зависимость, базис, матрица и т.д. вводятся с нуля как совершенно неизвестные ранее термины, потому дополнительной первоначальной подготовки школьников не требуют. Ввиду этого курс предполагается для изучения школьниками десятых, десятых-одиннадцатых или одиннадцатых классов в зависимости от длительности курса. Это приводит ко второй проблеме.

Какова должна быть длительность курса? Чтобы понять оптимальную длительность курса, необходимо сначала обозначить план тем, предлагаемых для изучения в ходе курса, то есть составить структуру курса. При помощи этого можно грубо оценить предполагаемое время, необходимое для освоения программы. Более точно предсказать длительность курса без апробации становится затруднительно по нескольким причинам:

1) Различие уровней школьников среди одного класса

Понятно, что некоторым ребятам удается освоить одну и ту же программу быстрее, чем другим, ввиду наличия индивидуальных особенностей и отличий детей, потому может возникнуть неравномерное освоение программы среди одного класса. В таком случае придется корректировать программу «на ходу», выделяя больше или меньше времени на отработку тех или иных разделов курса.

2) Различие уровней школьников среди разных классов

Хотя большинство школ имеют физико-математические классы, качество обучения в них по очевидным причинам разнится от школы к школе. Поэтому курс должен создаваться с осознанием отличий уровня подготовки школьников физико-математических классов в разных школах. Необходимо, чтобы теоретическое и практическое наполнение курса было создано максимально полным, развернутым и подробным, чтобы каждый школьник мог найти доступное для себя объяснение.

3) Наличие важных предметов и активностей в жизни школьника

Наличие основных школьных предметов может создать временные помехи изучению курса ввиду его сложности и достаточно большого объема любому ученику: не только слабо успевающим ребятам, но и даже отличникам, - ведь отнюдь не каждый школьник предпочтет отстать от основной общеобразовательной программы в пользу изучения дополнительного курса. Также, определившись с возрастом слушателей курса, стоит задуматься о наличии ЕГЭ и олимпиад, которые занимают важное место в жизни каждого ученика физико-математического класса. В связи с перечисленными проблемами ребята легко могут потерять желание продолжать изучение курса, если он будет неграмотно устроен с точки зрения распределения времени учащихся. Потому важно на конкретном примере класса подбирать оптимальные временные затраты, чтобы, с одной стороны, не помешать школьнику в достижении его основных целей, а с другой - достигнуть целей данного курса.

В связи с вышеизложенными обстоятельствами принято решение составить двухгодичный курс. Предполагаемое количество занятий - 2 академических часа в неделю. В зависимости от успеваемости конкретного класса можно легко уменьшать или увеличивать длительность курса, однако при нормальной скорости прохождения курса он осваивается за 2 года.

Готовы ли школьники к усвоению новой сложной информации уровня технических вузов? Верный ответ на данный вопрос без апробации дать довольно затруднительно. Однако точно можно сказать, что для достижения положительного результата – успешного освоения материала курса – необходим грамотный подбор тем и должное количество понятных школьнику теоретических выкладок и пояснений в ходе курса. Только таким образом можно достичь поставленной цели. Это будет наставлением при создании программы курса и методических материалов.

Немаловажным является вопрос, связанный с тем, что именно будет рассказано учащимся в рамках данного курса. Для этого необходимо продумать структуру курса, на основании которой можно будет понять, какие именно темы предлагаются для изучения учащимся и почему. Данный вопрос подробно освещается в разделе «2.2 Структура курса».

В заключение вспомним о том, кто будет использовать данный курс, - об учителе. Важно не просто создать программу курса с описанием затрагиваемых тем и разделов линейной алгебры и физики, но и также подобрать необходимые материалы, на основе которых учитель сможет вести занятия. По этой причине создано методическое пособие, которое содержит в себе поурочную подборку теоретического лекционного и практического семинарского материала с необходимыми пояснениями и комментариями, которые были бы полезны как ученику, так и учителю, поурочную подборку задач с решениями, которые необходимо решить для закрепления материала, поурочную подборку домашних заданий, контрольных работ и тестов.

2.2 Структура курса

Рассмотрим подробно, какие именно темы линейной алгебры и физики входят в разрабатываемый курс и почему. Планируемая структура курса представляет из себя совокупность следующих разделов:

Векторы

Ознакомление с линейной алгеброй, безусловно, немыслимо без обсуждения ее основного элемента изучения - линейных пространств. Здесь школьники знакомятся с понятием линейного пространства, его свойствами и объектами. Именно в этом разделе у учеников вырабатывается привычка к новому языку повествования и происходит переход от привычных представлений вектора как направленного отрезка. Сохраняя понятную ученикам геометрическую интерпретацию, вектор отныне позиционируется как элемент линейного пространства, в связи с чем неизбежно возникает большое количество новых терминов. Здесь при помощи определения линейной комбинации вводятся понятия линейной зависимости и независимости векторов, необходимые для дальнейшего определения базиса и понимания смысла вырожденности матриц. Новые термины обязательно сопровождаются понятными геометрическими примерами. Например, линейная зависимость поясняется на примере двух коллинеарных или трех компланарных векторов, а линейная независимость на примере двух перпендикулярных векторов в плоскости. После того, как школьники усвоили смысл линейной независимости, начинается рассказ о том, что такое базис, каковы его свойства и применение. Потому как без умения работы с базисом и понимания его необходимости как инструмента для однозначного определения вектора в пространстве, немыслимо дальнейшее повествование всего курса - ведь построение большинства физических моделей без использования систем координат невозможно. Для дальнейшего понимания отличий декартовых и криволинейных координат, которые в равной степени будут использоваться при рассмотрении физических применений линейной алгебры в курсе дальнейшем, также необходимо рассказать о видах базисов – нормированный, ортогональный, косоугольный.

В результате освоения данного раздела ученики должны: знать определения линейного пространства, векторного пространства, вектора; знать и понимать свойства линейных операций; различать коллинеарные и компланарные векторы; знать определения и свойства линейной независимости и зависимости векторов; уметь доказывать свойства линейной независимости (зависимости) и определять линейную зависимость (независимость) заданного набора векторов; знать определение, назначение и виды базиса; уметь определять возможность построения базиса из заданного набора векторов; знать понятие «разложение вектора по базису» и уметь находить координаты вектора в базисе.

Матрицы

Изучение матриц помогает сильно упростить записи многих выражений и вычислений во многих предметных областях, в том числе в физике. По этой причине важно уделить достаточно времени данному разделу, чтобы подробно обсудить и хорошо усвоить свойства матриц и действия, которые можно над ними производить. Почти ни одни выражения и вычисления в матричном представлении в физике и математике не обходятся без знания свойств сложения матриц, их умножения и транспонирования, а также операций поиска детерминанта матрицы и обратной матрицы. Простейшим примером является переход между базисами (который будет изучаться в следующем разделе), непосредственно использующий матрицу перехода. Помимо этого, рассматриваются всевозможные частные виды квадратных матриц: симметричная (антисимметричная), верхняя (нижняя) треугольная, диагональная матрицы. Эти знания необходимы для понимания свойств некоторых физических и математических объектов, таких как, например, тензор инерции твердого тела и метрический тензор, представляемых в виде симметричной матрицы, а также для понимания связи между видами матриц и видами переходов между базисами, которые они осуществляют: при помощи диагональной матрица перехода векторы базисы меняют свою длину, при помощи ортогональной матрицы происходит поворот базиса как целого (без изменения углов между базисными векторами) и т.д. По этой причине именно на данные темы уделяется немало времени и усилий при помощи использования многочисленных примеров и самостоятельных заданий. Конечно, в данном разделе также уделяется внимание изучению методов вычисления детерминанта матрицы, связи векторного произведения векторов и детерминанта матрицы, обратной матрице.

В результате освоения данного раздела ученики должны: знать определения матрицы, ее виды: квадратная и прямоугольная; знать обозначения в матрицах: главная (побочная) диагональ, столбец, строка; знать частные виды квадратных матриц; единичная матрица, нулевая, диагональная, симметричная, антисимметричная, верхняя (нижняя) треугольная матрица; уметь производить следующие операции над матрицами: сложение и вычитание матриц одинаковой размерности, умножение числа на матрицу, транспонирование матрицы, нахождение детерминанта матрицы, нахождение обратной матрицы; знать свойства всех перечисленных прежде операций; знать об отсутствии коммуникативности матриц; уметь производить элементарные преобразования над матрицами и находить детерминант матрицы при помощи общей формулы по столбцу и строке (используя понятие минора матрицы), а также при помощи упрощенных методов для матриц размерностей не выше 3-х; уметь находить обратную матрицу при помощи двух методов: с использованием миноров матрицы или с использованием единичной матрицы; знать определение вырожденной матрицы; понимать геометрический смысл детерминанта матрицы, связь между детерминантом и линейной зависимостью (независимостью) строк (столбцов); уметь находить векторное произведение векторов при помощи использования детерминанта матрицы.

Переход между базисами

Умение работать с математическими объектами в разных базисах необходимо во многих темах по физике и не только. Переход в центральные оси вращения твердого тела для упрощения вида тензора инерции тела (его диагонализации), изменение метрического тензора при переходе к новым координатам для получения формулы Бине – все эти физические примеры и многие другие требуют знания и понимания процесса смены базисов в пространстве. Это очень удобный инструмент, позволяющий во многих случаях упрощать расчеты или приводить уже известные закономерности к новым результатам. Именно поэтому появляется потребность в разделе, где школьникам будет показана связь между векторами в разных пространствах. В данном разделе необходимо обсудить такие понятия как матрица перехода, «старый» и «новый базис», «старые» и «новые» координаты вектора. Здесь же полезно обсудить связь между различными видами матриц и преобразованиями, которые они проводят над базисом. Для успешного овладения приемом перехода между базисами школьнику необходимо «прочувствовать», как и откуда появляется матрица перехода и как она связана с координатами векторов и базисами. Этого можно достичь путем подробных теоретических выкладок и множеством примеров со стороны учителя, а также в виде самостоятельных заданий.

В результате освоения данного раздела ученики должны: знать и понимать смысл матрицы перехода; уметь выражать «новые» базисные векторы через «старые» и наоборот, зная матрицу перехода; уметь выражать координаты произвольного вектора в «старом» базисе через координаты этого вектора в «новом» базисе и наоборот, зная матрицу перехода; уметь строить матрицу перехода, зная представление «новых» базисных векторов через «старые» и наоборот; уметь строить матрицу перехода, зная зависимость координат произвольного вектора в «старом» базисе от координат этого вектора в «новом» базисе и наоборот; уметь находить обратную матрицу перехода и строить ее связь с базисами и координатами вектора в соответствующих базисах.

Контравариантные и ковариантные координаты

Данный раздел открывает главу знакомства учащихся с элементами тензорной алгебры. Вклад использования тензорного исчисления в физике, теории поля, квантовой механике и других науках невозможно переоценить. Работа без привязки к конкретному пространству, позволяющая в максимально общем виде описывать физические закономерности, дает возможность избежать множество громоздких промежуточных вычислений и условностей, приводя тем не менее к верному и красивому результату. При помощи тензорной алгебры школьникам будет предложено получить давно известный и уже ставший привычным второй закон Ньютона в общем (тензорном) виде. Данный трудоемкий и, возможно, на первый взгляд необязательный процесс тем не менее позволит школьникам познакомиться с тензорным исчислением, которое почти неизбежно встретится им в будущем, а также получить удобный математический аппарат для лаконичной записи уже существующих законов и получения новых результатов. Применение второго закона Ньютона в тензорном виде будет далее показано на частном примере двумерного криволинейного пространства. Речь идет о формуле Бине – законе, позволяющем описать в полярных координатах движение материальной точки, двигающейся в поле центральных сил. Конкретно же в данном разделе учащиеся смогут впервые познакомиться с обозначениями, используемыми в тензорной алгебре – верхними и нижними (контравариантными и ковариантными) индексами. Узнают о том, откуда и как они берутся, а также смогут применить новые обозначения к уже известным вычислениям – нахождению квадрата модуля вектора и скалярного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе. Здесь же учащиеся узнают о правиле Эйнштейна, позволяющем сокращать известные записи, содержащие суммирование. Первое знакомство с таким аппаратом не является простым для школьника, потому необходимо максимально подробно и тщательно показывать и обосновывать процесс получения новых записей и терминов, ссылаясь на ранее известные и понятные школьнику обоснования.

В результате освоения данного раздела ученики должны: знать и уметь различать контравариантные и ковариантные координаты векторов; понимать разницу между ковариантными и контравариантными координатами векторов; знать и уметь пользоваться правилом Эйнштейна; уметь записывать суммирования, использующие знаки суммы, в простом виде, используя правило Эйнштейна; уметь записывать скалярное произведение векторов квадрат модуля вектора в ортонормированном базисе при помощи знака суммы и при помощи использования ковариантных и контравариантных координат векторов.

Тензоры. Метрический тензор

Данный раздел продолжает знакомство с элементами тензорной алгебры, знакомя учащихся с таким понятием как тензор и с первыми примерами тензоров – вектором и метрическим тензором. Обсуждаются отличия тензоров от простых матриц, вводятся понятия ранга тензора, ковариантность и контравариантность тензоров. Без изучения метрического тензора невозможно обойтись, так как несколько дальнейших разделов будут использовать знания о нем. Именно поэтому метрический тензор является первым, после вектора, тензорным математическим объектом в данном курсе. Здесь же учащимся показывается геометрический смысл метрического тензора, связанный с объемом параллелепипеда, образованного векторами базиса пространства, а также связь метрического тензора со скалярным произведением векторов. Наглядно показывается способ нахождения вида матрицы метрического тензора в конкретном базисе, а также независимость (инвариантность) скалярного произведения векторов в разных базисах. Помимо этого, учащиеся узнают о важном соотношении, которое будет использоваться в будущих разделах – формуле, отражающей изменение матрицы метрического тензора при переходе от одного базиса к другому. Напоследок, происходит систематизация знаний о тензорах, их свойствах, видах и операциях, производимых над ними. Рассматриваются примеры симметричного и антисимметричного тензоров, понятия ранга тензора.

В результате освоения данного раздела ученики должны: знать вид матрицы метрического тензора и его свойства; различать дважды ковариантный и дважды ковариантный тензор; уметь переходить от ковариантной записи вектора к контравариантной и наоборот при помощи метрического тензора; уметь записывать скалярное произведение векторов и модуль квадрата векторов в тензорном виде при помощи метрического тензора; уметь определять вид матрицы метрического тензора в конкретном базисе; знать формулу преобразования метрического тензора при смене базиса и уметь ею пользоваться; знать свойства и примеры антисимметричных и симметричных тензоров; уметь производить операции над тензорами различного ранга.

Криволинейные координаты

Данный раздел, помимо того, что он является вспомогательным для дальнейшего получения и использования формулы Бине, знакомит школьниками с новыми видами координат. Учащиеся узнают о том, что помимо привычных декартовых координат существую полярные, сферические, цилиндрические координаты и любые другие придуманные криволинейные координаты. Здесь же школьникам предлагается узнать об использовании криволинейных координат в вычислении площадей, ограниченных некоторыми кривыми при помощи интеграла. Помимо этого, учащиеся меняют знакомое представление о функции, как о зависимости между двумя переменными, изучая функцию нескольких переменных. Примерами таких функций в данном разделе будут функции $x = x(r, \varphi)$ и $y = y(r, \varphi)$, описывающие зависимость между декартовыми и полярными координатами. Уже обладая информацией о криволинейных координатах и функциях многих переменных, школьники знакомятся с лаконичной записью зависимости между разными криволинейными координатами с помощью матрицы Якоби и учатся применять матрицу Якоби в вычислении метрического тензора при смене координат в матричной и тензорной формах, а также вычислять элементы матрицы Якоби для конкретных криволинейных координат, что будет безусловно необходимо при работе с вторым законом Ньютона в тензорном виде.

В результате освоения данного раздела ученики должны: уметь находить частную производную функции нескольких переменных по любой из заданных переменных; уметь находить вторую и частную производные функции нескольких переменных; уметь определять, в каких случаях смешанные производные (с разным порядком взятия производной по одним и тем же координатам) равны; уметь работать с радиус-вектором, как с функцией нескольких переменных; уметь переходить от декартовых координат к полярным, сферическим, цилиндрическим, и наоборот; знать и понимать смысл координатной линии; уметь построить матрицу Якоби для перехода от декартовых координат к полярным, сферическим, цилиндрическим, и наоборот, а также от декартовых к любым произвольным координатам; уметь определять направление векторов локального базиса пользуясь понятием координатной линии; уметь строить локальный базис, заданный радиус-вектором при переходе от декартовых к полярным координатам; понимать, как изменяется направление векторов локального базиса при изменении радиус-вектора его задающего; знать определение векторов локального базиса через частную производную координат и начальный базис; уметь переходить от декартовых координат к полярным, используя матрицу Якоби; уметь находить коэффициенты метрического тензора в локальном базисе с помощью матрицы Якоби при переходе от декартовых координат к полярным.

Частная производная вектора в криволинейных координатах

Данный раздел является заключительным в подготовке к выводу записи второго закона Ньютона в тензорной форме с использованием криволинейных координат. Так как во втором законе Ньютона присутствует вектор ускорения (который по определению есть производная вектора скорости по времени) необходимо показать ученикам, как находить частную производную произвольного вектора в криволинейных координатах. Она отличается от обычной частной производной функции нескольких переменных добавочным членом, описывающем зависимость локального базиса от выбранной точки пространства. Этот добавочный член содержит в себе ранее не известный школьникам дважды ковариантный и один раз контравариантный тензор 3 ранга, называемый символами Кристоффеля 2-го рода, который зависит от изученных ранее метрического тензора и частных производных. В дальнейшем символы Кристоффеля 2-го рода могут еще не раз пригодиться при работе с криволинейными координатами, потому их изучение довольно целесообразно.

В результате освоения данного раздела ученики должны: понимать смысл введения символов Кристоффеля 2-го рода; уметь считать частные производные элементов метрического тензора по соответствующим криволинейным координатам; уметь считать элементы матрицы символов Кристоффеля 2-го рода при заданном метрическом тензоре в соответствующем локальном базисе; уметь находить частную производную произвольного вектора при использовании соответствующих криволинейных координат.

Второй закон Ньютона в тензорном виде

Этот раздел начинает знакомство с применением изученного в предыдущих разделах материала линейной и тензорной алгебр в физике. Здесь ученики узнают о важном термине, широко используемом в теоретической механике, - числе степеней свободы и возможном перемещении точки. Данные понятия сопровождаются поясняющими знакомыми любому школьнику физическими примерами. Помимо этого, учащимся предлагается по-новому взглянуть на привычный закон – 2-ой закон Ньютона. Используя все полученные ранее знания о метрическом тензоре, частной производной в криволинейных координатах и многом другом, учащиеся получают запись 2-го закона Ньютона в тензорном виде. Эта запись позволяет работать с привычным законом в любых необходимых координатах. В качестве конкретного примера удобства использования полученной записи в следующем разделе будет рассмотрена формула Бине.

В результате освоения данного раздела ученики должны: знать и понимать определение числа степеней свободы тела; уметь определять число степеней свободы тела на конкретных примерах; знать и понимать определение возможного перемещения точки; уметь выводить второй закон Ньютона в тензорной форме с использованием полученных ранее знаний.

Формула Бине

Данный раздел показывает наглядную физическую применимость второго закона Ньютона в тензорной форме при использовании полярных координат. Формула Бине, описывающая закон движения материальной точки в полярных координатах под действием центральных сил, позволяет углубиться в тему движения тела. В школьном курсе учащиеся узнают о возможности тела двигаться по окружности, эллипсу или гиперболе. Данный же закон, вывод которого описывается в данном разделе, позволяет углубиться в тему движения в поле центральных сил и показать учащимся, почему именно тело может двигаться по уже изученным траекториям под действием центральных сил. Помимо этого, ученики узнают о возможности тела двигаться в поле центральных сил не только по привычным траекториям, но и по таким траекториям, как кардиоида и лемниската. Вместе с этим школьники самостоятельно получают формулу центральной силы, под действием которой может происходить движение тела по таким траекториям. Данные задачи в курсе называются прямыми задачами Бине. Обратные же задачи Бине, позволяющие определить траектории движения тел под действием заданных центральных сил, предлагаются для решения школьникам только после необходимого для этого краткого введения в методы решения линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами. Умение решать данные задачи позволит учащимся узнать больше о движении в поле центральных сил, что поможет в будущем при более подробном изучении движения земных спутников.

В результате освоения данного раздела ученики должны: знать определение и свойства центральных сил; уметь считать элементы матрицы символов Кристоффеля 2-го рода в полярных координатах; уметь получать формулу Бине из второго закона Ньютона в тензорном виде; знать и понимать смысл секторной скорости; уметь находить вид формулы центральной силы при заданной траектории движения материальной точки в криволинейных координатах; уметь находить уравнение траектории движения материальной точки в полярных координатах, зная конкретный вид зависимости центральной силы от расстояния до тела (только после изучения методов решения линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами).

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Как было сказано ранее, данный раздел необходим для умения решать обратные задачи Бине. Здесь ученики узнают о том, как решать простейшие дифференциальные уравнения методом разделения переменных, а также о том, как находить общее решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка. Так как в формуле Бине центральная сила может иметь различную зависимость от расстояния между притягивающим центром и материальной точкой, необходимо рассмотреть 2 случая неоднородности в дифференциальных уравнениях - неоднородность в виде квазимногочлена, а также в виде произвольной функции. Полученные умения помимо того, что позволят школьникам решать обратные задачи Бине, также познакомят их с разделом математики, занимающимся решением дифференциальных уравнений, который также использует элементы линейной алгебры. Использование линейной алгебры в дифференциальных уравнениях учащиеся увидят при выводе метода решения дифференциальных уравнений с произвольной неоднородностью.

В результате освоения данного раздела ученики должны: уметь решать простейшее дифференциальное уравнение методом разделения переменных; знать общий вид записи неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами; знать и понимать смысл однородного, частного и общего решений дифференциального уравнения; уметь записывать характеристический многочлен дифференциального уравнения; понимать смысл кратности корня; уметь находить однородное, частное и общее решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами в случае неоднородности в виде квазимногочлена; уметь находить однородное, частное и общее решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами в случае неоднородности в виде произвольной функции.

Вращение твердого тела

Данный раздел представляет из себя большой блок информации о вращательном движении твердого тела. Основной упор делается на изучение закона моментов (или закона об изменении момента импульса), позволяющем показать школьникам множество интересных вещей, связанных с вращением тел. При изучении тензора инерции учащиеся знакомятся с занимательным эффектом Джанибекова и даже теоретически его обосновывают. В то же время, изучением закона моментов позволяет учащимся объяснить поведение фигуристов на льду, неповоротливость фиджет-спиннера и много других вещей, которые демонстрируются школьникам в рамках данного раздела. Помимо демонстрационных опытов ученикам предлагается множество интересных задач, при решении которых можно не только отработать изученный теоретический материал, но и познакомиться с интересными явлениями. Например, маятниками Максвелла и Обербека, катушкой с намотанной на нее нитью, которая может закручиваться или раскручиваться в зависимости от некоторых условий. Однако изучение данного раздела важно не только со стороны интереса школьников, связанного с восприятием и пониманием неожиданных вещей, но и со стороны применимости данной информации в дальнейшем. Так как следующий раздел расскажет ученикам о таких объектах, как гироскопы, знание механизма работы которых очень важно для современных инженеров и проектировщиков.

В результате освоения данного раздела ученики должны: уметь применять теорему Эйлера; уметь использовать закон моментов при решении задач и обосновании вращательных движений твердого тела; уметь получать вид матрицы тензора инерции; знать свойства тензора инерции; иметь представление об устойчивом неустойчивом вращениях и понимать их связь с осевыми моментами; уметь переходить в главные центральные оси тела; знать связь между осевым моментом инерции и тензором инерции; понимать геометрический смысл тензора инерции (эллипсоид инерции); уметь вычислять моменты инерции однородных тел простой формы; уметь пользоваться теоремой Гюйгенса-Штейнера; уметь решать задачи с применением полученных в разделе знаний.

Гироскопы

Ввиду широкого использования гироскопов в повседневной и рабочей жизни – системы определения положения игровых контроллеров и мобильных телефонов, системы навигации кораблей и самолетов и др. – возникает необходимость знакомства школьников физико-математических классов с данным объектом. В данном разделе учащиеся знакомятся с понятием гироскопа, принципом его работы и видами гироскопов. Полученные знания могут не только открыть школьникам новый взгляд на привычные вещи, такие как, например, движение стиральной машинки по полу во время отжима белья, но и дать возможность понять, как устроено множество сложных механизмов, разработкой и проектировкой которых занимаются современные инженеры.

В результате освоения данного раздела ученики должны: знать связь между угловой скоростью вращения гироскопа и его моментом инерции; уметь считать кинетическую энергию вращающегося гироскопа; уметь применять правило моментов при рассмотрении движения несвободного гироскопа.

Теория напряжений и деформаций

Данный раздел посвящен введению в теорию напряжений и деформаций твердых тел. Проектировка крыльев летательных аппаратов, подвесок автомобилей, даже создание строительных шурупов требует знания свойств деформации и максимально возможных напряжений тел для обеспечения надежности и долговечности работы их при непосредственной эксплуатации. В связи с такой широкой практической значимостью данной науки возникает очевидная потребность знакомства школьников с ее основами. Так как в школьном курсе знакомство учеников с деформациями тел ограничивается только законом Гука, данный раздел направлен не на полноценное введение в теорию деформаций (ввиду высокой сложности данной темы), а лишь на основы. Школьники узнают о видах сил, действующих на твердые тела, а также знакомятся с новым физическим объектом – тензором напряжений – и его свойствами. Как и в разделе, посвященном вращению твердого тела, учащимся предлагается узнать о геометрическом представлении тензора напряжений – поверхности Коши и геометрическом представлении напряжений твердого тела – эллипсоиде Ламе. Здесь же школьники встречают знакомый закон Гука, но уже в другой форме – с использованием понятия напряжения и модуля Юнга. Полученные знания рассматриваются на примере деформаций стержня и прямоугольного параллелепипеда, где параллельно ученики узнают об энергии упругой деформации и коэффициенте Пуассона.

В результате освоения данного раздела ученики должны: знать и различать виды внешних сил; знать понятие вектора механического напряжения; уметь получать тензор напряжений и знать его свойства; иметь представление о геометрической интерпретации напряжений – поверхности Коши и эллипсоиде Ламе – и выводах из этих интерпретаций; уметь решать задачи с использованием закона Гука на определение упругих деформаций тел простой формы и энергий этих деформаций в случае различных нагрузок.

Специальная теория относительности

К сожалению, в школьном курсе уделяется достаточно малое время изучению специальной теории относительности. Тем не менее, данная тема интересна не только ввиду наличия множества неожиданных парадоксов (таких как, например, парадокс близнецов), но и из-за стремительного развития теории космоса (теория струн и гравитационная теория). Объяснение процессов, происходящих во Вселенной, безусловно, невозможно без знания основ СТО. В школьном курсе ученики узнают только об основных понятиях СТО и ее постулатах, а также о существовании преобразований Лоренца. Однако получение формул преобразований Лоренца в школьном курсе опускается, что зачастую ведет к неуверенной работе с данными формулами даже в рамках задач ЕГЭ ввиду непонимания пути получения данных формул. Данная проблема также может вести к отсутствию понимания смысла СТО и того, чем она занимается. Поэтому в данном разделе происходит знакомство школьников с новым четырехмерным пространством – пространством Минковского. Учащиеся, узнав о постулатах СТО и основных используемых в ней терминах, таких как, например, событие и интервал, переходят к теоретическому выводу формул преобразования Лоренца для координаты, времени и скорости при помощи использования 4-векторов. После этого ученикам предлагается теоретическое обоснование некоторых парадоксов СТО на основе уже полученных знаний и представлений. Также школьники решают задачи на применение преобразований Лоренца и выводов, вытекающих из них.

В результате освоения данного раздела ученики должны: знать понятия события и интервала; знать вывод формулы интервала; понимать физический смысл инвариантности интервала; знать свойства интервала и его геометрическую интерпретацию в виде светового конуса; уметь получать формулы преобразования Лоренца; уметь применять формулы преобразования Лоренца при решении задач.

Релятивистская механика

После изучения основ релятивистского движения, учащиеся переходят к разделу релятивистской механики, в котором речь идет об импульсах и энергиях релятивистских частиц. Рассматриваются формулы преобразования Лоренца для импульса и энергии с использованием 4-вектора импульса. Важное место в данном разделе занимает теория столкновения релятивистских частиц и их распада. Тема релятивистских частиц широко не раскрывается в общем школьном курсе, именно поэтому она представлена здесь с целью расширения знаний о процессах, происходящих с частицами, двигающимися с около световыми скоростями, ведь на изучении взаимодействия быстрых частиц построена вся современная физика, с которой в небольшой степени и знакомит школьников данный раздел. Здесь же учащиеся впервые узнают о новом для них понятии - действии, которое будет не раз использоваться и обсуждаться в следующем разделе. Новыми для школьников в данном разделе также являются также функция Лагранжа и функция Гамильтона.

Электродинамика

Электродинамика один из важнейших разделов физики, без изучения которого была бы невозможна современная радиотехника, спутниковая связь, изучение электрических свойств кристаллов и многое другое. Именно поэтому данному разделу уделяется значительное время в рамках данного курса. Электродинамика также открывает возможности к изучению таких наук, как электродинамика сплошных сред и нелинейная оптика. Основное внимание в данном разделе уделено нескольким вещам. Во-первых, движению релятивистской частицы в постоянном электрическом и магнитном полях. Такое движение изучается в школе, однако лишь в частном случае – в случае нерелятивистской частицы, поэтому возникает интерес рассмотреть данную задачу в общем случае. Во-вторых, рассматриваются преобразования Лоренца для электромагнитного поля и их следствия сразу после изучения тензора электромагнитного поля.

2.3 Программа курса

Подводя итоги предыдущего пункта, приведем поурочную программу курса.

№ урока	Вид урока	Тема урока	Содержание
1	Лекция	Векторы	Вектор. Нулевой вектор. Линейные операции. Множество, замкнутое относительно операций. Линейное пространство. Векторное пространство. Коллинеарные векторы. Сонаправленные векторы. Противоположно направленные векторы. Компланарные векторы. Линейная комбинация. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость векторов. Линейная независимость векторов
2	Лекция	Базис	Базис. Ортогональный базис. Нормированный базис. Ортонормированный базис. Разложение вектора по базису. Координаты вектора
3	Семинар	Векторы и базис	Решение задач на определение линейной зависимости (независимости) заданных векторов; нахождение координат заданного вектора в базисе, состоящем из других заданных векторов
4	Контрольная работа	Векторы и базис	Самостоятельное решение задач по теме 3 урока
5	Лекция	Матрицы. Виды матриц	Матрица. Размерность матрицы. Строка. Столбец. Квадратная матрица. Главная диагональ матрицы. Побочная диагональ матрицы. Единичная матрица. Симметричная матрица. Кососимметричная матрица. Верхняя треугольная матрица. Нижняя треугольная матрица. Диагональная матрица.
6	Лекция	Операции над матрицами	Умножение матрицы на число. Вынесение скалярного множителя из матрицы. Сложение и умножением матриц. Линейная комбинация матриц. Линейная зависимость матриц. Линейная независимость матриц. Транспонирование матрицы. Свойства транспонированных матриц
7	Семинар	Операции над матрицами	Решение задач на выполнение операций транспонирования, сложения, вычитания и умножения матриц разных размерностей; определение линейной зависимости (независимости) заданных матриц
8	Контрольная работа	Операции над матрицами	Самостоятельное решение задач по теме 7 урока
9	Лекция	Детерминант матрицы	Детерминант (определитель) матрицы. Минор матрицы. Общая формула вычисления детерминанта (определителя) матрицы. Простые методы вычисления детерминанта (определителя) матриц 3x3 и 2x2. Свойства детерминанта (определителя) матрицы. Вырожденная матрица. Элементарные преобразования матрицы. Алгебраическое дополнение. Векторное произведение векторов.

10	Лекция	Обратная матрица	Обратная матрица. Свойства обратной матрицы. Методы нахождения обратной матрицы
11	Семинар	Детерминант матрицы	Решение задач на нахождение детерминанта матриц 2х2, 3х3 и 4х4; определение вырожденности матриц; нахождение векторного произведения векторов при помощи определителя матрицы
12	Семинар	Обратная матрица	Решение задач на нахождение обратной матрицы различными методами и проверку правильности полученной матрицы.
13	Контрольная работа	Детерминант матрицы	Самостоятельное решение задач по теме 11 урока
14	Контрольная работа	Обратная матрица	Самостоятельное решение задач по теме 12 урока
15	Лекция	Замена базиса. Матрица перехода	Понятие старого базиса и нового базиса. Понятие старых координат вектора и новых координат вектора. Запись перехода от старого базиса к новому. Матрица перехода. Свойства матриц перехода. Запись формулы перехода от старых координат вектора к новым.
16	Семинар	Замена базиса. Матрица перехода	Решение задач на нахождение выражения старых базисных векторов через новые и наоборот при помощи матрицы перехода; нахождение матрицы перехода, зная выражение старых базисных векторов через новые.
17	Семинар	Замена базиса. Матрица перехода	Решение задач на нахождение выражения старых координат вектора через новые и наоборот при помощи матрицы перехода; нахождение матрицы перехода, зная выражение старых координат вектора через новые; нахождение скалярного произведения векторов в косоугольном базисе при помощи перехода в ОНБ.
18	Контрольная работа	Замена базиса. Матрица перехода	Самостоятельное решение задач по теме 16 урока
19	Контрольная работа	Замена базиса. Матрица перехода	Самостоятельное решение задач по теме 17 урока
20	Лекция	Контравариантные и ковариантные координаты. Правило Эйнштейна	Контравариантные координаты. Ковариантные координаты. Связь между контравариантными и ковариантными координатами. Геометрическая интерпретация контравариантных и ковариантных координат. Скалярное произведение векторов. Связь скалярного произведения векторов с контравариантными и ковариантными координатами векторов. Правило Эйнштейна.
21	Лекция	Метрический тензор	Метрический тензор. Связь квадрата модуля вектора с метрическим тензором. Связь скалярного произведения векторов с метрическим тензором. Связь

			между контравариантными и ковариантными координатами при помощи метрического тензора. Преобразование метрического тензора при смене базиса. Инвариантность скалярного произведения векторов и модуля вектора при замене базиса. Взаимный (дуальный) базис.
22	Семинар	Метрический тензор и его применение	Задачи на нахождение элементов матрицы метрического тензора в новом базисе, зная выражение старых базисных векторов через новые.
23	Семинар	Метрический тензор и его применение	Задачи на нахождение скалярного произведения векторов и угла между ними в косоугольном базисе при помощи метрического тензора.
24	Контрольная работа	Метрический тензор и его применение	Самостоятельное решение задач по теме 22 урока
25	Контрольная работа	Метрический тензор и его применение	Самостоятельное решение задач по теме 23 урока
26	Лекция	Тензоры. Действия над тензорами	Тензор. Отличие матрицы от тензора. Представление тензора в виде матрицы. Умножение тензора на скаляр. Сложение тензоров. Умножение тензоров. Диада. Перестановка индексов тензора. Свертка.
27	Семинар	Действия над тензорами	Отработка операций, производимых над тензорами на примере произвольных тензоров с заданными элементами соответствующих им матриц
28	Контрольная работа	Действия над тензорами	Контрольная работа по теме 27 урока
29	Лекция	Виды тензоров и их свойства	Симметричные и антисимметричные тензоры. Тензор Леви-Чивиты как пример антисимметричного тензора. Метрический тензор как пример симметричного тензора. Символ Кронекера.
30	Лекция	Тензор Леви-Чивиты	Вывод вида матрицы тензора Леви-Чивиты при помощи векторного произведения. Свойства тензора Леви-Чивиты.
31	Семинар	Применение тензора Леви-Чивиты	Вычисление векторного и смешанного произведений векторов в разных базисах при помощи тензора Леви-Чивиты
32	Контрольная работа	Применение тензора Леви-Чивиты	Самостоятельная работа по теме 31 урока
33	Лекция	Псевдотензор	Сопутствующий вектор тензора второго ранга. Связь тензора Леви-Чивиты с метрическим тензором. Псевдотензор. Псевдовектор.

34	Лекция	Функция нескольких переменных	Понятие функции нескольких переменных. Частная производная функции нескольких переменных. Правило нахождения частной производной функции нескольких переменных
35	Лекция	Криволинейные координаты	Координаты. Координатная линия. Декартовы координаты. Криволинейные координаты. Линейная независимость декартовых и криволинейных координат. Полярные, сферические и цилиндрические координаты.
36	Лекция	Локальный базис. Матрица Якоби	Локальный базис. Радиус-вектор. Матрица Якоби. Матрица Якоби при переходе от декартовых координат к полярным. Связь метрического тензора в обычном базисе с метрическим тензором в локальном базисе при помощи матрицы Якоби
37	Семинар	Матрица Якоби. Метрический тензор в локальном базисе	Решение задач на нахождение матрицы Якоби при переходе от декартовых координат к сферическим и цилиндрическим и наоборот; нахождение метрического тензора в локальном базисе, соответствующем криволинейным координатам
38	Контрольная работа	Матрица Якоби. Метрический тензор в локальном базисе	Решение задач на нахождение матрицы Якоби при переходе от декартовых координат к произвольным криволинейным; нахождение метрического тензора в локальном базисе, соответствующем произвольным криволинейным координатам
39	Лекция	Производная сложной функции. Дифференциал сложной функции	Правило нахождения производная сложной функции. Дифференциал сложной функции. Частная производная сложной функции нескольких переменных. Производная радиус-вектора по времени в соответствующих криволинейных координатах.
40	Лекция	Символы Кристоффеля 2-го рода. Частная производная вектора в криволинейных координатах	Производная произвольного вектора по времени в соответствующих криволинейных координатах. Символы Кристоффеля второго рода. Ковариантная частная производная контравариантных компонент произвольного вектора по криволинейным координатам
41	Лекция	Закон движения материальной точки	Число степеней свободы. Закон движения материальной точки. Несовпадение количества используемых для описания движения материальной точки криволинейных координат с размерностью пространства. Идеальные связи. Обобщенные координаты. Возможное перемещение точки.
42	Лекция	Второй закон Ньютона в тензорном виде	Второй закон Ньютона. Получение тензорного вида второго закона Ньютона в криволинейных координатах.

43	Лекция	Формула Бине	Центральные силы. Примеры центральных сил. Символы Кристоффеля второго рода для полярных координат. Вывод формулы Бине из тензорной записи второго закона Ньютона в криволинейных координатах. Секторная скорость. Уравнение Бине.
44	Лекция	Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами	Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Однородные дифференциальные уравнения. Неоднородные дифференциальные уравнения. Однородное решение дифференциального уравнения. Метод нахождения однородного решения. Характеристическое уравнение дифференциального уравнения. Кратность корня многочлена.
45	Лекция	Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами	Частное решение неоднородного дифференциального уравнения. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения. Неоднородность в виде квазимногочлена неоднородного дифференциального уравнения. Метод нахождения частного решения дифференциального уравнения с неоднородностью в виде квазимногочлена.
46	Лекция	Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами	Решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод нахождения частного решения дифференциального уравнения с неоднородностью в виде произвольной функции.
47	Семинар	Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами	Задачи на нахождение решения линейных дифференциальных уравнения 2-го порядка с неоднородностью в виде квазимногочлена
48	Семинар	Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами	Задачи на нахождение решения линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с неоднородностью в виде произвольной функции.
49	Контрольная работа	Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с	Самостоятельное решение задач по теме 47 урока

		постоянными коэффициентами	
50	Контрольная работа	Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами	Самостоятельное решение задач по теме 48 урока
51	Семинар	Прямые задачи Бине	Решение задач на нахождение формулы центральной силы, под действием которой может двигаться материальная точка по заданному в полярных координатах уравнению траектории
52	Семинар	Прямые задачи Бине	Решение задач на нахождение формулы центральной силы, под действием которой может двигаться материальная точка по заданному в полярных координатах уравнению траектории
53	Семинар	Обратные задачи Бине	Решение задач получение уравнения траектории движения материальной точки в полярных координатах в поле заданной центральной силы. Построение графика полученного уравнения траектории в программе Desmos
54	Семинар	Обратные задачи Бине	Решение задач получение уравнения траектории движения материальной точки в полярных координатах в поле заданной центральной силы. Построение графика полученного уравнения траектории в программе Desmos
55	Контрольная работа	Прямые задачи Бине	Самостоятельное решение задач по теме 51 и 52 уроков
56	Контрольная работа	Обратные задачи Бине	Самостоятельное решение задач по теме 53 и 54 уроков
57	Лекция	Угловая скорость	Угловая скорость как антисимметричный тензор второго ранга. Псевдовектор угловой скорости. Смысл псевдовектора
58	Лекция	Теорема Эйлера. Закон изменения момента импульса системы материальных точек	Вектор угловой скорости. Теорема Эйлера. Использование теоремы Эйлера на примере катящегося без проскальзывания шара и вращающегося жесткого стержня. Связь теоремы Эйлера с законом сложения скоростей. Независимость вектора угловой скорости от выбора полюса. Момент импульса материальной точки. Момент силы. Закон изменения момента импульса материальной точки. Закон изменения момента импульса системы материальных точек. Закон сохранения момента импульса системы материальных точек.

59	Лекция	Осевой момент инерции. Тензор инерции	Осевой момент инерции. Закон изменения момента импульса системы материальных точек с использованием осевого момента инерции. Угловое ускорение. Связь закона изменения момента импульса со вторым законом Ньютона. Закон сохранения момента импульса системы материальных точек. Получение тензора инерции твердого тела.
60	Лекция	Тензор инерции. Эллипсоид инерции	Свойства матрицы тензора инерции. Осевые и центробежные моменты инерции. Получение выражения осевого момента инерции твердого тела через компоненты тензора инерции. Направляющие косинусы. Получение уравнения эллипсоида инерции. Главные и центральные оси вращения. Оси симметрии. Свободные оси вращения. Устойчивые и неустойчивые оси вращения.
61	Лекция	Эффект Джанибекова. Демонстрация опытов.	Вывод уравнений Эйлера, описывающих вращение твердого тела в системе координат, связанной с самим телом. Теоретическое обоснование эффекта Джанибекова на основе уравнений Эйлера. Видеодемонстрация эффекта Джанибекова. Демонстрация эффекта Джанибекова с использованием бруска. Демонстрация закона об изменении момента импульса твердого тела с использованием фиджет-спиннера или скамьи Жуковского.
62	Лекция	Теорема Гюйгенса-Штейнера. Центральный момент инерции	Вывод теоремы Гюйгенса-Штейнера. Момент инерции тонкого стержня. Применение теоремы Гюйгенса-Штейнера при вычислении момента инерции прямоугольной однородной пластины. Центральный момент инерции. Применение центрального момента инерции при вычислении моментов инерции сферы и шара
63	Семинар	Моменты инерции однородных тел простейшей формы относительно некоторых осей	Вычисление моментов инерции полого и сплошного цилиндров; кольца; диска; кругового конуса; треугольника; квадратной и прямоугольной пластинок; квадратной и прямоугольной рамок
64	Семинар	Плоское движение твердого тела	Решение задач на скатывание различных твердых тел с наклонной плоскости; качение различных тел с проскальзыванием; маятник Обербека; маятник Максвелла
65	Семинар	Плоское движение твердого тела	Решение задач на движение катушки с намотанной нитью; совместное вращение двух тел; падение тел под действием силы тяжести с вращением
66	Контрольная работа	Плоское движение твердого тела	Самостоятельное решение задач наподобие рассматриваемых в 64 уроке

67	Контрольная работа	Плоское движение твердого тела	Самостоятельное решение задач наподобие рассматриваемых в 65 уроке
68	Лекция	Движение свободного гироскопа.	Понятие гироскопа. Симметричный гироскоп. Точка опоры гироскопа. Вывод уравнения связи между угловой скорости вращения гироскопа и его моментом инерции. Энергия вращающегося гироскопа. Применение уравнения моментов в случае нулевого момента внешних сил к гироскопу. Регулярная прецессия гироскопа. Демонстрация свободного гироскопа.
69	Лекция	Приближенная теория гироскопа под действием сил	Гироскопические эффекты. Применение уравнения моментов в случае ненулевого момента внешних сил к гироскопу. Особенности движения несвободного гироскопа. Демонстрация несвободного гироскопа. Нутация. Разновидности гироскопов и их поведение в различных ситуациях.
70	Семинар	Гироскопы	Решение задач на применение основного уравнения гироскопии к свободным и несвободным гироскопам
71	Семинар	Гироскопы	Решение задач на применение основного уравнения гироскопии к свободным и несвободным гироскопам
72	Контрольная работа	Гироскопы	Самостоятельное решение задач по теме 70 урока
73	Контрольная работа	Гироскопы	Самостоятельное решение задач по теме 71 урока
74	Лекция	Виды внешних сил. Вектор напряжения	Поверхностные силы. Массовые силы. Вектор механического напряжения. Нормальная и касательная составляющие вектора напряжения
75	Лекция	Тензор напряжений	Теоретический вывод тензора напряжений. Вид матрицы тензора напряжений. Свойства тензора напряжений
76	Лекция	Действия над тензором напряжений	Преобразование компонент тензора при повороте координатных осей. Главные и касательные напряжения. Аналогия с тензором инерции твердого тела.
77	Лекция	Геометрическое представление тензора напряжений	Уравнение поверхности напряжений Коши. Главные оси поверхности Коши. Виды поверхностей напряжений (эллипсоид и совокупность гиперболоида и двуполостного гиперболоида). Напряжение растяжения. Напряжение сжатия.
78	Лекция	Геометрическая интерпретация напряжений Ламе	Вывод уравнения эллипсоида напряжений (или эллипсоида Ламе). Выводы о напряженном состоянии тела исходя из эллипсоида Ламе. Виды напряженных состояний: трехосное (объемное или), двухосное (или плоское), одноосное

79	Лекция	Закон Гука. Модуль Юнга	Растяжение и сжатие стержней. Относительное удлинение и сжатие стержня. Модуль Юнга и его смысл. Закон Гука через модуль Юнга, напряжение и относительное удлинение. Относительная ошибка расчетов по формуле Гука. Точность справедливости закона Гука
80	Лекция	Энергия упругой деформации стержня. Коэффициент Пуассона	Теоретический вывод формулы упругой энергии деформации сжатого или растянутого стержня. Объемная плотность упругой энергии. Коэффициент Пуассона
81	Лекция	Деформация прямоугольного параллелепипеда под действием трех взаимно перпендикулярных сил	Теоретический вывод формул относительных удлинений прямоугольного параллелепипеда вдоль каждой из осей. Плотность упругой энергии деформации прямоугольного параллелепипеда. Частный случай всестороннего одинакового сжатия. Модуль всестороннего сжатия
82	Семинар	Упругая деформация стержня	Решение задач на нахождение относительного удлинения стержня под действием собственного веса; определение максимальной кинетической энергии вращения с заданной прочностью разрыва; нахождение энергии деформации под действием собственного веса или силы извне
83	Семинар	Упругая деформация прямоугольного параллелепипеда	Решение задач на нахождение относительного изменения объема металлического полого шара, заполненного газом под высоким давлением; определение давления, испытываемого стороной зажатой пластинки под действием давления на другие стороны
84	Контрольная работа	Упругая деформация стержня	Решение задач по теме 82 урока
85	Контрольная работа	Упругая деформация прямоугольного параллелепипеда	Решение задач по теме 83 урока
86	Лекция	Специальная теория относительности	История создания СТО. Основные понятия СТО. Постулаты СТО. Скорость распространения взаимодействий. Одновременность событий.
87	Лекция	Пространство СТО	Событие. Мировые точки. Мировая линия. Интервал. Вывод формулы интервала между двумя событиями. Дифференциал интервала. Инвариантность интервала.
88	Лекция	Свойства интервалов. Геометриче-	Вещественные (времениподобные) интервалы. Мнимые (пространственноподобные) интервалы. Зависимость свойств интервала от системы отсчета. Абсолютно удаленные, абсолютно будущие и абсолютно прошедшие события. Световой конус.

		ская интерпретация событий	
89	Лекция	Преобразования Лоренца	Преобразования Галилея. Неудовлетворение преобразований Галилея требованием СТО. Вывод формул преобразований Лоренца для координат, времени и скорости при помощи вращения четырехмерной системы координат. Вывод формул обратных преобразований Лоренца для координат, времени и скорости
90	Лекция	Следствия из преобразований Лоренца	Переход преобразований Лоренца в преобразования Галилея в предельном случае. Некоммутативность преобразований Лоренца. Лоренцево сокращение длины и объема тела. Лоренцево сокращение времени. Получение формулы аберрации света при помощи преобразования Лоренца для скорости
91	Семинар	Преобразования Лоренца	Решение задач на нахождение относительной скорости релятивистских частиц; нахождение связи между размерами объектов в разных системах отсчета;
92	Семинар	Выводы из преобразований Лоренца	Решение задач на эффект Доплера; обоснование различных парадоксов СТО
93	Контрольная работа	Преобразования Лоренца	Самостоятельное решение задач по теме 91 урока
94	Контрольная работа	Выводы из преобразований Лоренца	Самостоятельно решение задач по теме 92 урока
95	Лекция	Пространство Минковского	Пространство Минковского. Метрический тензор в пространстве Минковского. 4-радиус-вектор. Преобразования Лоренца 4-радиус-вектора. Связь между ковариантными и контравариантными компонентами 4-радиус-вектора. Запись интервала при помощи 4-радиус-вектора и метрического тензора
96	Лекция	4-векторы в пространстве Минковского	4-градиент скалярной функции. 4-вектор-скорости. 4-вектор ускорения
97	Лекция	Релятивистское движение в пространстве Минковского	Решение задач на преобразование 4-симметричного и антисимметричного тензоров при преобразовании Лоренца; определение уравнения равноускоренного движения релятивистской частицы
98	Лекция	Релятивистская механика	Принцип наименьшего действия. Действие для свободной релятивистской частицы. Функция Лагранжа. Импульс и энергия релятивистской частицы. Энергия покоя. Связь между импульсом и энергией релятивистской частицы. Функция Гамильтона. 4-

			вектор импульса. Формулы преобразования импульса и энергии при переходе между инерциальными системами отсчета.
99	Лекция	Распад частиц	Самопроизвольный распад быстрой частицы на две быстрых частицы. Условие осуществления распада. Связь между энергией исходной частицы и энергиями полученных частиц
100	Семинар	Распад частиц	Задачи на определение связи между энергиями вылетевших частиц и углами их вылета; определение распределения частиц разных сортов по энергиям;
101	Семинар	Распад частиц	Задачи на определение распределения частиц по углам разлета при разных условиях, накладываемых на массы и соотношение масс получившихся частиц; нахождение максимально возможной энергии получившейся частицы
102	Контрольная работа	Распад частиц	Самостоятельное решение задач по теме 100 и 101 уроков
103	Лекция	Общий случай упругих столкновений релятивистских частиц	Уравнение сохранения 4-импульса. Вывод зависимости углов рассеяния частиц от их энергий и импульсов в общем случае. Распределение энергий частиц по углам рассеяния
104	Лекция	Частные случаи упругих столкновений релятивистских частиц	Случай налета более тяжелой частицы на более легкую и наоборот. Предельные случаи. Максимальный угол рассеяния. Связь между теряемой энергией одной частицы и приобретаемой энергией другой. Случай налета безмассовой частицы на покоящуюся частицу с ненулевой массой. Ультрарелятивистский случай
105	Семинар	Частные случаи упругих столкновений релятивистских частиц	Решение задач на нахождение углов рассеяния частиц после столкновения геометрическим способом; определение минимальных углов рассеяния частиц после столкновения в случае одинаковых частиц; определение зависимости энергии частиц от заданного угла рассеяния
106	Контрольная работа	Частные случаи упругих столкновений релятивистских частиц	Самостоятельное решение задач по теме 105 урока
107	Лекция	Движение заряженной частицы в однородном электрическом поле	Вывод зависимости координаты частицы от времени x(t) и уравнения траектории y(x) движения частицы в однородном постоянном электрическом поле, направленном вдоль одной оси
108	Лекция	Движение заряженной частицы в	Вывод зависимости координаты частицы от времени x(t) и уравнения траектории y(x) движения частицы

		постоянном магнитном поле	в однородном постоянном магнитном поле, направленном вдоль одной оси. Ларморовская частота
109	Лекция	Движение заряженной частицы в постоянных электрическом и магнитном полях	Вывод зависимости координаты частицы от времени x(t) и уравнения траектории y(x) движения частицы в скрещенных однородных постоянных магнитном и электрическом полях. Условие нерелятивистского случая.
110	Семинар	Движение релятивистской заряженной частицы в постоянных электрическом и магнитном полях	Решение задач на определение частоты колебаний заряженного осциллятора, находящегося в постоянном однородном магнитном поле; нахождение уравнения движения релятивистского заряда в параллельных электрических и магнитных полях
111	Семинар	Движение релятивистской заряженной частицы в постоянных электрическом и магнитном полях	Решение задач на нахождение уравнения движения релятивистского заряда во взаимно перпендикулярных электрических и магнитных полях; определение скорости дрейфа частицы в магнитном поле
112	Контрольная работа	Движение релятивистской заряженной частицы в постоянных электрическом и магнитном полях	Самостоятельное решение задач по теме 100 и 111 уроков
113	Лекция	Дифференциальные операторы	Ротор. Вектор набла. Связь вектора набла с градиентом функции. Геометрический смысл данных операторов. Комбинации операторов. Методы работы с данными операторами. Использование детерминанта матрицы при вычислении ротора векторной функции.
114	Семинар	Дифференциальные операторы	Решение задача на вычисление градиента скалярных функций и ротора векторных функций

115	Контрольная работа	Дифференциальные операторы	Самостоятельное решение задач по теме 114 урока
116	Лекция	Четырехмерный потенциал поля	4-вектор потенциал электромагнитного поля. Действие для заряда в электромагнитном поле. Функция Гамильтона для частицы, находящейся в электромагнитном поле.
117	Лекция	Тензор электромагнитного поля	Вывод вида матрицы тензора электромагнитного поля при помощи использования 4-вектора потенциала. Свойства тензора электромагнитного поля.
118	Лекция	Преобразования Лоренца для электромагнитного поля	Вывод формул преобразования Лоренца для электрического и магнитного полей при помощи использования 4-вектора потенциала. Векторная запись преобразований Лоренца для электромагнитного поля
119	Лекция	Инварианты электромагнитного поля	Получение инвариантов электромагнитного поля при помощи тензора электромагнитного поля. Выводы, вытекающие из инвариантности полученных выражений
120	Лекция	Первые два уравнения Максвелла	Получение первой пары уравнений Максвелла при помощи дифференциальных операторов и вектор потенциала. Физическое обоснование полученных уравнений при помощи теоремы Стокса и формулы Остроградского-Гаусса: закон Фарадея и отсутствие магнитных зарядов. Запись первых двух уравнений Максвелла в тензорной форме с использование тензора электромагнитного поля
121	Лекция	Действие электромагнитного поля	Вывод формулы действия для электромагнитного поля
122	Лекция	4-вектор тока	Получение 4-вектора плотности тока. Получение 4-вектора тока.
123	Лекция	Вторые два уравнения Максвелла	Получение второй пары уравнений Максвелла при помощи использования действия электромагнитного поля. Физическое обоснование полученных уравнений при помощи теоремы Стокса и формулы Остроградского-Гаусса: теорема Остроградского-Гаусса и наличие реального тока и тока смещение при циркуляции магнитного поля. Запись вторых двух уравнений Максвелла в тензорной форме с использование тензора электромагнитного поля
124	Лекция	Анизотропные вещества	Отличие изотропных веществ от анизотропных. Явления проявления анизотропности в веществах (генерация второй гармоники в кристаллах, двулучепреломление в кристаллах)
125	Лекция	Тензор диэлектрической проницаемости	Связь вектора напряженности электрического поля с вектором электрической индукции через диэлектрическую проницаемость. Тензор диэлектрической проницаемости. Свойства тензора диэлектрической проницаемости. Следствия нелинейной зависимости

			вектора напряженности электрического поля от вектора электрической индукции.
126	Лекция	Тензор магнитной проницаемости	Связь вектора напряженности магнитного поля с вектором магнитной индукции через магнитную проницаемость. Тензор диэлектрической проницаемости. Свойства тензора магнитной проницаемости. Следствия нелинейной зависимости вектора напряженности магнитного поля от вектора магнитной индукции.
127	Лекция	Плотность и поток энергии	Получение вектора Пойнтинга при помощи уравнений Максвелла. Физический смысл вектора Пойнтинга. Плотность энергии электромагнитного поля.
128	Лекция	Применение вектора Пойнтинга и формулы плотности энергии электромагнитного поля	Получение формулы энергии электрического поля конденсатора. Получение формулы энергии магнитного поля катушки индуктивности. Решение задач на данную тему.
129	Семинар	Применение вектора Пойнтинга и формулы плотности энергии электромагнитного поля	Решение задач с использованием формулы вектора Пойнтинга и формулы плотности энергии электромагнитного поля.
130	Контрольная работа	Применение вектора Пойнтинга и формулы плотности энергии электромагнитного поля	Самостоятельное решение задач на тему 129 урока

2.4 Особенности в преподавании математической части курса

Так как одной из целей курса является знакомство учеников с элементами линейной алгебры, необходимо со всей строгостью отнестись к ее терминологии. Именно поэтому материал на уроке должен вестись хоть и простым языком, но с использованием всех необходимых определений, теорем и их доказательств. Все это необходимо преподносить с присущей математической науке строгостью и точностью, чтобы сформировать у учеников четкое понимание структуры изучаемой дисциплины.

Хотя большинство используемых в курсе суждений и теорем линейной алгебры строго доказывается и обосновывается, подробное обсуждение и обоснование некоторых встречающихся моментов математического анализа и линейной алгебры нарочно опускается. Примерами этого могут служить: отсутствие доказательства теоремы о равенстве смешанных частных производных функции нескольких переменных в некоторой точке при условии определенности и непрерывности этих смешанных производных в данной точке; отсутствие доказательства непрерывности используемых вектор-функций (радиус-вектора) при решении задач; теорема Стокса и формула Остроградского-Гаусса. Данное обстоятельство связано со спецификой курса. Так как основной задачей курса является знакомство учеников с линейной алгеброй и ее применением в физике, слишком подробное погружение в некоторые тонкости математического аппарата считается излишним. В то же время, при наличии желания у учеников узнать больше о справедливости тех или иных суждений, можно предоставить учащимся необходимую литературу для самостоятельного изучения в дополнительное внеурочное время или выделить дополнительные уроки в рамках курса при наличии такой возможности.

Стоит также заметить, что в курсе присутствует множество тем, которые предполагаются уже известными школьнику на момент начала курса или в ходе его чтения и потому перед непосредственным использованием не объясняются. Примерами таким тем могут служить: скалярное произведение векторов; взятие производной функции одной переменной; работа с бесконечно малыми величинами; дифференциал функции одной переменной; комплексные числа. Тем не менее, учителю нужно быть готовым к возможному наличию проблем у учеников с использованием некоторых разделов в связи с их трудностью или отсутствием предшествующего знакомства с ними. В таких случаях необходимо уметь кратко пояснить материал прямо во время урока или выделить дополнительные уроки на более подробное пояснение. Если всего один или несколько учащихся испытывают затруднения, можно сопроводить их необходимыми теоретическими источниками для самостоятельного изучения за рамками курса. Однако важно проследить за успехами таких учеников, так у учащихся есть риск отстать от программы или пропустить некоторые разделы курса ввиду распространенных проблем с самостоятельным изучением.

Начальные навыки линейной алгебры, которые будут широко использоваться в ходе курса, должны быть отработаны школьниками до идеального уровня. Умение находить координаты вектора в базисе; находить определитель матрицы; сумму, произведение матриц; обратную матрицу; производить переход от базиса к базису и др. должно быть хорошо отточено учениками. Необходимо это для отсутствия дальнейших проблем с использованием изученного математического аппарата у учащихся при изучении последующих разделов. Именно поэтому в курсе встречается большое количество домашних и контрольных работ, (последние в начале курса проводятся с периодичностью в 2 урока) по результатам которых можно легко отследить успех учеников и вовремя исправить трудноусваиваемые моменты.

Некоторые рассматриваемые в данном курсе темы математического анализа или теории поля рассказываются школьникам не в начале курса, как логично может показаться на первый взгляд, а по мере возникновения таковой потребности при изучении физических тем. Излишняя математическая нагрузка на учеников в самом начале может повлечь за собой несколько негативных последствий в течение двухгодового курса. Во-первых, к моменту применения изученных в самом начале тем они могут забыться учениками, вследствие чего учителю придется повторять материал заново, отставая от программы курса. Во-вторых, у учеников может сложиться впечатление ненужности изучения данных тем, так как последующее применение изучаемому материалу находится далеко не сразу. По этим причинам урокам, которые требуют еще не известных элементов математического аппарата, предшествуют уроки с объяснением нового материала, который уже в следующем уроке будет применен при рассмотрении физических процессов. Примером таких математических тем могут быть: частная производная функции нескольких переменных, дифференциальные операторы (ротор, оператор набла).

2.5 Особенности в преподавании физической части курса

Как и в случае математической части курса, физическая часть также содержит темы и разделы, которые в ходе прохождения курса считаются школьнику уже известными и потому не считаются необходимыми в дополнительном предварительном обосновании или пояснении. Но стоит заметить, что в отличие от избранных тем математического анализа, которые, действительно, могут еще быть не изучены школьниками некоторых физико-математических 10-11 классов, большинство физических тем, раскрываемых в данном курсе, уже должны быть, исходя из учебной программы, к этому моменту времени известны. Примерами таких тем могут быть: 2-й закон Ньютона; импульс материальной точки; показатель преломления среды; диэлектрическая проницаемость. Однако в случае возникновения пробелов в некоторых темах или их полного незнания со стороны учащихся, настоятельно рекомендуется выйти за рамки данного курса и включить в него дополнительные уроки, посвященные физическому обоснованию используемых формул и зависимостей. Так как в рамках данного курса, в отличие от математической, физическая часть имеет большую значимость.

Для успешного закрепления пройденного материала, а также для демонстрации применимости изученного материала линейной алгебры, необходимо продемонстрировать учащимся как можно больше интересных и разнообразных физических задач на изучаемые темы. При этом полезным будет объяснить школьникам необходимость умения решать данные задачи не только на примере физических исследований, но и на примере других дисциплин, в которых изучаемые темы в том или ином виде встречаются и используются. Например, тензор инерции является предметом изучения не только общей физики, но и такой науки, как теоретическая механика, в которой большое внимание уделяется изучению движения твердых тел, основывающемуся на базовых принципах, рассматриваемых в рамках курса.

Помимо решения задач, безусловно хорошо раскрывающих изучаемые физические процессы, полезно проводить учащимся хотя бы простые и небольшие демонстрации этих самых процессов. Например, при изучении раздела о вращении твердого тела и его тензоре инерции, можно показать устойчивость вращения твердого тела относительно минимального и максимального моментов инерции и неустойчивость относительно промежуточного на примере обычного телефона или любого весомого бруска. Изучение гироскопов может быть сопровождено демонстрацией вращения фиджет-спиннера, а изучение деформаций тела и анизотропии кристаллов демонстрацией расслаивания слюды на тонкие пластинки или прочности дерева в разных направлениях.

Разделы, изучаемые в данном курсе, расположены таким образом, чтобы знакомить школьников с ними уже после ознакомления в рамках общеобразовательной программы основного школьного курса. Сделано это для того, чтобы школьники перед началом изучения того или иного раздела курса уже имели минимальную физическую базу теории для углубленного изучения. Так, например, разделы, посвященные движению твердого тела и упругим деформациям тел, изучаются в первой половине курса, так как движение твердого тела и закон Гука учащиеся проходят в 9 классе; в то время как разделы, посвященные «Специальной теории относительности» и «Электродинамике», проходятся во второй половине данного курса во время их освоения в 11 классе.

2.6 Применение курса в других дисциплинах

После освоения курса учащиеся получают достаточное количество знаний из линейной алгебры для того, чтобы самостоятельно начать изучать другие дисциплины. Умение работы с матрицами и векторами, работа с различными базисами в пространстве, основы тензорной алгебры – все это является достаточной теоретической базой для прочтения научной литературы, посвященной теоретической механике, квантовой физике и теории поля. Конечно, могут и будут возникать трудности с математическим аппаратом, основанном на курсе математического анализа, однако выкладки, понимание которых основано только на знании линейной алгебры, дадутся ученикам без особого труда. Для школьников, заинтересованных экономическими задачами, будет возможность найти для себя новые методы решения задач и посмотреть на привычные вещи под новым углом. Программирование, которым интересуются даже школьники младших и средних классов, также станет более доступным и понятным. Кто-то может решить попробовать себя в машинном обучении, на изучение которого в настоящее время делают упор крупные мировые IT-компании. Таким образом, данный курс дает возможность ученикам начать изучать те вещи, которые раньше казались невозможными и недосягаемыми ввиду недостаточной математической образованности. Такая возможность может помочь будущим студентам найти свои научные интересы еще до поступления в вузы и, возможно, определиться с профессиональной деятельностью еще на начальном этапе построения будущей карьеры.

Глава 3. Практическая реализация на примере 10 класса 57 школы

3.1 Контрольно-измерительные материалы по проведенным урокам

Домашняя работа подразумевается после каждого семинара по соответствующим темам. После лекционных и контрольных занятий ученики освобождаются от домашнего задания, кроме случаев, когда преподаватель считает нужным дополнительно отработать какие-то темы семинаров или лекций в виде повторения изученного материала школьниками дома. Примеры домашних работ по соответствующим семинарам, проведенным в ходе апробации курса, можно увидеть в разделе «4.1 Примеры домашних работ».

Помимо домашних заданий в курсе присутствуют и контрольные работы. Контрольные работы проводятся после семинаров по тем темам, что были изучены на предшествующем или предшествующих семинарах (см. п. «2.3 Программа курса»). Ниже представлены варианты контрольных работ, проведенных в ходе апробации курса. Возможные варианты мини-тестов по проведенным лекциям можно увидеть в разделе «4.2 Примеры контрольных работ».

Также, для закрепления пройденного теоретического материала, полезно проводить небольшие пятиминутные лекционные тесты в начале каждого следующего после соответствующей лекции урока. Примеры лекционных тестов по проведенным лекциям можно увидеть в разделе «4.3 Примеры лекционных тестов».

3.2 Анализ проведенных контрольных работ

Первая контрольная в курсе, посвященная теме «Векторы и базис» в основном не вызвала затруднений у учащихся. Основные ошибки учеников были связаны с невнимательностью в вычислениях и проблемой у некоторых учащихся с составлением системы линейных уравнений. В связи с этим на семинаре перед контрольной необходимо сделать больший упор на правило составления систем линейных уравнений при определении линейной независимости векторов и координат вектора в базисе.

Контрольная, направленная на анализ освоения учениками выполнения операций сложения, транспонирования и умножения матриц, также была успешно выполнена большинством учеников. Основные трудности возникли при совершении вычислений, связанных с умножением матриц. Причем походу решения было видно, что данные ошибки связаны не с непониманием метода умножения матриц, а именно с арифметическими ошибками и невнимательностью.

Отработка методов нахождения детерминанта матрицы и поиска матрицы, обратной данной, в ходе контрольной работы также не составила проблем у учеников. Некоторые ошибки были связаны с вычислением определителя матрицы 4x4 ввиду большого количества арифметических вычислений, а также с определением знаков миноров матрицы и неправильным выполнением элементарных преобразований сопутствующей единичной матрицы ввиду невнимательности и излишней торопливости. Важно, что данные ошибки допускали те учащиеся, которые не успели или забыли выполнить проверку вычисленной обратной матрицы. Стоит заметить, что ученики пользовались разными методами нахождения обратной матрицы, то есть каждый учащийся смог определить для себя наиболее удобный способ ее вычисления в ходе семинара.

Заключительная контрольная, направленная на проверку полученных ранее знаний о работе с матрицами и базисами, ввиду большого объема материала, далась школьникам с немного большим трудом, чем предыдущие. Однако большинство ребят успешно освоили данную тему, что было выявлено при проверке работ. В основном, ошибки встречались при определении старых базисных векторов через новые, а также новых координат векторов через старые. Связано это с вычислительными ошибками при вычислении обратной матрицы перехода, что по очевидным причинам приводило к неправильному ответу. Однако стоит заметить, что большая часть учащихся не искала обратную матрицу напрямую, а использовала ее для получения системы линейных уравнений относительно старых и новых координат и ее последующего решения. Данный способ, использованный в основном теми ребятами, кто хорошо освоил метод вычисления обратной матрицы, значительно им упростил и ускорил процесс решения контрольных задач.

После хороших результатов школьников по теме работы с матрицами, вполне закономерным оказался успех в освоении метрического тензора и его применения - так как правильность выполнения контрольной зависела во многом от умения выполнения операций с матрицами. Некоторые ученики сумели придумать способ решения, отличающийся от предложенного. Затруднения возникали только у тех ребят, кто недостаточно внимательно прослушал лекцию о виде матрицы метрического тензора в разных координатах или плохо работал на семинаре. Вследствие этого возникали случаи вычисления скалярного произведения векторов в косоугольном не нормированном базисе по привычной формуле вычисления в ОНБ. Данное обстоятельство можно решить, делая больший упор на лекции и семинарах на зависимость вида матрицы метрического тензора от конкретного базиса и формулу, описывающую эту зависимость.

Применение второго встречающегося в курсе тензора - тензора Леви Чивиты - было успешно освоено школьниками. Ошибками учащихся, как и в случае с применением метрического тензора, было использование матрицы тензора Леви-Чивиты, заданной в ОНБ при работе в косоугольных ненормированных базисах. Данное упущение необходимо решать так же, как и в случае предыдущей контрольной - обращением особого внимания на вид матрицы тензора Леви-Чивиты в различных базисах и способы ее получения.

Большие, по сравнению с предыдущими темами, проблемы возникли у школьников на контрольной, посвященной решению линейных дифференциальных уравнений. Значительная часть учащихся дела грубые ошибки при нахождении частного решения дифференциальных уравнений как в случае неоднородности в виде квазимногочлена, так и в случае произвольной функции. Причиной этого может служить недостаточное количество времени, выделенное на семинарские занятия. вследствие этого случаи различных неоднородностей были рассмотрены на семинарах лишь на единичных примерах, а некоторые случаи не были рассмотрены вовсе. Предполагалось, что учащиеся сумеют без труда выполнить задачи с аналогичными случаями, основываясь на теории, рассказанной на лекции, однако предположение оказалось ошибочным. Также негативно сказалась недостаточная практика взятия производной и интеграла сложных функций у школьников. В связи со всем перечисленным необходимо увеличить количество семинарских занятий для более полноценного освоения работы с различными случаями неоднородных линейных дифференциальных уравнений.

Первая контрольная в курсе, посвященная физическому применению полученных знаний, оставила неоднозначные впечатления. С одной стороны, учащиеся поняли механизм работы формулы Бине и вполне успешно понимали ход решения прямых задач, с другой стороны, останавливались на половине выкладок, не доводя ответ до финального выражения. Школьники не доводили формулу центральной силы до финального вида, содержащего только зависимость от расстояния до точки, а оставляли в формуле члены, содержащие угол, что не является верным. Путем анализа хода решения было установлено, что некоторые учащиеся не понимали, как применить заданные на скорость и расстояния условия в произвольный момент времени и / или просто не доводили ответ до конца, то есть не выражали $\cos \varphi$ или $\sin \varphi$ через r при помощи заданного в условии уравнения траектории. В случае решения обратных задач у некоторых учащихся сказывалась недостаточная сноровка в решении неоднородных дифференциальных уравнений. Хотя в обратных задачах Бине получаемое дифференциальное уравнение содержало несложную функцию неоднородности, некоторые школьники ошибались в расчетах и получали неверные ответы. Данные проблемы решаются большим количеством семинарских занятий, посвященных решению неоднородных линейных дифференциальных уравнений, и обращением особого внимания на использование заданных в задаче условий.

3.3 Выводы по освоению курса

Опираясь на анализ контрольных тестирований учеников и общей заинтересованности ребят в изучении материала, можно сделать вывод о том, что освоение первой половины данного курса (первого года из планируемых двух) приходится по силам учащимся 10 физико-математического класса 57 школы.

Конечно, в ходе апробации возникали случаи тяжелой усвояемости учащимися материала по некоторым темам. Такими темами, например, являлись: дифференциальные уравнения, символы Кристоффеля 2-го рода и частная производная вектора по криволинейным координатам. В связи с этим иногда приходилось замедлять темп прохождения курса, уделяя большее внимание не входящим в план урока темам во время самого урока. Во время некоторых уроков приходилось отходить от плана урока, вследствие чего он сильно изменялся на ходу. Зачастую проблемы возникали ввиду недостаточной практики учащихся в области математического анализа – школьники с трудом воспринимали сложные выражения, содержащие производные или интегралы. Другая проблема, связанная со слабым пространственным мышлением, возникала всего у нескольких учащихся (и связана она только с ними), но тем не менее тоже немного замедляла прохождение курса. На основе данных проблем можно сделать вывод, заключающийся в том, что сложность некоторых тем была недооценена в момент составления плана курса, из-за чего приходилось задерживать учеников или в редких случаях выделять дополнительные уроки для пояснения трудных тем.

В то же время, были случаи намеренного ускорения прохождения некоторых тем или даже их пропуска, причем причиной такого ускорения служило не отставание от намеченного плана курса, а довольно быстрое понимание материала школьниками или его изучение в прошлом в школьном курсе математики и физики. Например, ввиду наличия хороших первоначальных знаний школьников о векторах, знакомство с ними как с элементами линейных пространств прошло довольно быстро, в связи с чем в конце первого урока осталось достаточно времени для начала рассказа материала 2 урока. С этим же пришлось столкнуться при изучении матриц. Так как школьники уже обладали первоначальными знаниями о системах линейных уравнений, им было легко понять смысл матриц и методы работы с ними.

Стоит отдельно упомянуть о положительном отклике со стороны школьников на данный курс. В конце курса был проведен опрос среди учащихся, в ходе которого было выяснено, что у школьников осталось положительное впечатление от курса. Особенно ученикам запомнились такие темы, как решение дифференциальных уравнений, формула Бине и введение в тензорную алгебру.

Обобщая все отрицательные и положительные моменты курса, можно с уверенностью утверждать, что, несмотря на все возникающие трудности, прочтенный теоретический материал был полностью освоен учениками и успешно применен на практике при решении математических и физических задач.

Заключение

В рамках данной работы были рассмотрены недостатки современного курса линейной алгебры в вузах, заключающиеся в отсутствии должной своевременной применимости изучаемого материала в других дисциплинах и курса введения в тензорную алгебру. Помимо этого, были рассмотрены проблемы отсутствия изучения элементов линейной алгебры в школе, проявляющиеся в отсутствии широкой физической картины мира из-за недостаточного углубления в некоторые разделы физики и недостаточным уровнем знакомства школьников с основами современной физикой и многими ее разделами, изучаемыми в вузах.

В связи с выявленными проблемами была выдвинута гипотеза о создании элективного курса линейной алгебры для учеников старших физико-математических классов с целью расширения знаний учащихся в области физики. Идея привнесения элементов линейной алгебры в школы, естественно, не нова, поэтому, для определения новизны данной работы, был сделан литературный обзор с целью поиска курсов, которые могли бы преследовать схожие с данной дипломной работой цели. В ходе исследования было показано, что аналогов создаваемому курсу на данный момент не существует, что оправдывает актуальность работы.

Идея составления курса, безусловно, повлекла за собой возникновение множества вопросов, связанных с минимальным теоретическим порогом вхождения учеников в изучение материала курса, планируемой длительностью курса и программой курса. Планирование структуры курса позволило ответить на эти вопросы. В связи с составленной структурой курса было принято решение о создании двухгодового курса для учащихся 10-11 физико-математических классов.

При составлении структуры курса было выделено 16 разделов: Векторы; Матрицы; Переход между базисами; Контравариантные и ковариантные координаты; Тензоры. Метрический тензор; Криволинейные координаты; Частная производная вектора в криволинейных координатах; Второй закон Ньютона в тензорном виде; Формула Бине; Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами; Вращение твердого тела; Гироскопы; Теория напряжений и деформаций; Специальная теория относительности; Релятивистская механика; Электродинамика. К каждому разделу было создано его тематическое содержание, а также краткое пояснение причины выбора конкретного раздела и содержащихся в нем тем при составлении курса.

После определения структуры курса, ввиду необходимости понимания отведенного на каждый раздел (и его темы) времени, был создан подробный поурочный план курса. Всего курс насчитывает 130 уроков разного характера. Часть уроков представляет из себя лекционные занятия, где преподаватель объясняет новый темы, другая часть (семинары) посвящена решению задач, основанных на изученном во время лекций материале, остальные уроки (контрольные работы) созданы для контроля над успехами освоения материала школьниками.

С целью анализа способности учеников освоить данный курс была проведена апробация первой половины данного курса в 10 физико-математическом классе 57 школы. В ходе апробации были созданы контрольно-измерительные материалы - набор контрольных работ, домашних работ и лекционных тестирований по проведенным за год занятиям. Помимо этого, было создано методическое пособие, содержащее теоретический материал для проведения лекционных уроков, задачи с решениями для проведения семинаров, контрольно-измерительные материалы и комментарии для педагогов к каждому апробированному уроку.

По результатам проведенных контрольных работ был сделан положительный вывод о способности освоения первой половины созданного курса учащимися 10 класса физико-математического класса 57 школы г. Москвы.

Список литературы

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики: Учеб. пособие для вузов В 5 т. Т. 1. Механика — 6-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 560 с. — ISBN 978-5-9221-1512-4.
2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. — 10-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. —304 с. — 15ВМ 5-9221-0304-0.
3. Беклемишева Л.А. Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейно алгебре: Учебн. пособие / Под ред. Д.В. Беклемишева. 2-е изд., перераб. —М; ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 496 с. — 15ВМ 5-9221-0010-6.
4. Магия тензорной алгебры [интернет-ресурс] URL: https://habr.com/ru/post/261421/. (Дата обращения: 21.03.2022).
5. Якута А.А. Лекции по механике [интернет-ресурс] URL: https://teach-in.ru/course/mechanics-yakuta. (Дата обращения: 19.06.2022).
6. Википедия [интернет-ресурс] URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/. (Дата обращения: 27.05.2022).
7. Амензаде Ю. А. Теория упругости. Учебник для университетов. Изд. 3-е, доп. М., «Высшая школа», 1976.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. II. Теория поля / Под ред. Л.П. Питаевского. — 9-е изд., стереотип. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 508 с. — ISBN 978-5-9221-1568-1 (Т. II).
9. Теоретическая механика в примерах и задачах, т. 1 (статика и кинематика), Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С.
10. Сборник задач по теоретической механике, Мещерский И. В. изд. 34, стереотипное, М., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975.

Приложения

4.1 Примеры домашних работ

Домашняя работа по теме 2 урока
Векторы и базис

1. Определить, являются данные векторы линейно зависимыми или линейно независимыми:

а) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 18 \\ 16 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$;
г) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 28 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

2. В некотором ортонормированном базисе на плоскости заданы координаты векторов $\vec{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ и $\vec{c}\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$. Проверьте, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы, и найдите координаты $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$.

3. В некотором ортонормированном базисе на плоскости заданы координаты векторов $\vec{a}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{c}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{d}\begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$. Проверьте, что $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы, и найдите координаты $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Домашняя работа по теме 7 урока
Операции над матрицами

1. Найти:

а) $2A - 3B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $3C - D$, где $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$

в) $2F - 3E$, где $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Можно ли сложить матрицы: а) A и B; б) A^T и B; в) A и B^T; г) A^T и B^T?

Если можно, выполните сложение.

3) Есть четыре матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Найдите (если такое возможно): а) $(A^T + B)(A + B^T)D$; б) BAC; в)$D^T BC$; г) Проверьте, равны ли произведения AB и BA.

Домашняя работа по теме 11 урока

Детерминант матрицы

1. Найдите определитель следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Определите, являются ли данные матрицы вырожденными:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 7 \\ 7 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

3. Определите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} = (5, 1, 3)^T$ и $\vec{b} = (4, 0, 1)^T$, координаты которых заданы в ОНБ.

4. Определите объем параллелепипеда, построенный на векторах $\vec{a} = (4, 3, 1)^T$, $\vec{b} = (0, 3, 2)^T$ и $\vec{c} = (1, 5, 6)^T$. Координаты всех векторов заданы в ОНБ.

Домашняя работа по теме 12 урока

Обратная матрица

1. Найдите матрицы, обратные данным двумя способами (при помощи присоединенной единичной матрицы и при помощи миноров) и проверьте полученные результаты:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Найдите матрицу, обратную данной и проверьте полученный результат:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 7 \\ 20 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Определите, являются ли данные матрицы ортогональными:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}96 & -0{,}28 \\ 0{,}28 & 0{,}96 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Домашняя работа по теме 16 урока

Замена базиса. Матрица перехода

1. Координаты x,y,z каждой точки пространства в системе координат O, $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$,$\mathbf{e}_3$ выражаются через координаты x',y',z' этой же точки в системе O', $\mathbf{e}'_1$,$\mathbf{e}'_2$,$\mathbf{e}'_3$ формулами

$$x = x' + y' + z', \qquad y = -x' + z', \qquad z = -x' - y'$$

Найти матрицу перехода от системы O, $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$,$\mathbf{e}_3$ к системе O', $\mathbf{e}'_1$,$\mathbf{e}'_2$,$\mathbf{e}'_3$.

2. Векторы нового базиса $(\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}')$ выражаются через векторы старого базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ следующим образом:

$$\vec{e_1}' = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 4\vec{e_3}; \qquad \vec{e_2}' = \vec{e_2} - 7\vec{e_3}; \qquad \vec{e_3}' = -\vec{e_1} + \vec{e_2}$$

Определите матрицу перехода от старого базиса к новому и наоборот.

3. Дана матрица перехода от старого базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к новому $(\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}')$

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдите выражение старых базисных векторов через новые.

4. Дана матрица перехода от старых координат к новым:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Выразите старые базисные вектора через новые.

Домашняя работа по теме 17 урока

Замена базиса. Матрица перехода

1. Дана матрица перехода от старого базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к новому $(\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}')$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 10 & -5 & 0 \\ 1 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

Найдите выражение старых координат произвольного вектора через новые.

2. Дана матрица перехода от нового базиса $(\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}')$ к старому $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 7 \\ 5 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите выражение старых координат произвольного вектора через новые.

3. Координаты произвольного вектора в старом базисе выражаются через координаты вектора в новом базисе

$$x = 2x' + y' - z', \qquad y = -3x' + 2z', \qquad z = 6x' - 3y'$$

Получите матрицу перехода от старого базиса к новому.

4. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} = (1, 5, 7)^T$ и $\vec{a} = (4, 1, 3)^T$, заданных в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, если $\vec{e_1} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{e_2} = \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{e_3} = \vec{i} - 2\vec{j}$. Где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты ОНБ.

Домашняя работа по теме 22 урока

Метрический тензор и его применение

1. Найти матрицу метрического тензора в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, если $\vec{e_1} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{e_2} = \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{e_3} = \vec{i} - 2\vec{j}$. Где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты ОНБ.

Перед решением удостовериться в том, что векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ действительно могут составлять базис в трехмерном пространстве.

2. Найти матрицу метрического тензора в базисе $(\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \vec{e'_3})$, если $\vec{e'_1} = \vec{e_1} - 3\vec{e_2} - 2\vec{e_3}$, $\vec{e'_2} = \vec{e_2} - 2\vec{e_3}$, $\vec{e'_3} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2}$. Где координаты базисных векторов базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ заданы в ОНБ и равны: $\vec{e_1} = (1,2,0)^T$, $\vec{e_2} = (2,-1,0)^T$, $\vec{e_3} = (0,0,2)^T$.

Перед решением удостовериться в том, что векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ действительно могут составлять базис в трехмерном пространстве.

Домашняя работа по теме 23 урока

Действия над тензорами

1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (1{,}3{,}5)^T$, и $\vec{b} = (0,-2{,}1)^T$, заданных в базисе $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, где $\vec{e_1} = (3{,}1{,}0)^T$, $\vec{e_2} = (2{,}0,-1)^T$, $\vec{e_3} = (-2{,}4{,}1)^T$. Координаты базисных векторов заданы в ортонормированном базисе.

Перед решением удостовериться в том, что векторы $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ действительно могут составлять базис в трехмерном пространстве.

Решить задачу двумя способами, сравнить полученные результаты и написать, какой способ оказался проще:

1) При помощи метрического тензора g_{ij}: $(\vec{a},\vec{b}) = g_{ij}a^j b^i$ в заданном базисе $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$.
2) Перейти в ортонормированный базис при помощи матрицы поворота, а затем найти скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе.

2. Определить угол между векторами $\vec{a} = (0{,}3{,}1)^T$, и $\vec{b} = (4{,}0{,}2)^T$, заданными в базисе $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, где $\vec{e_1} = (2{,}1{,}0)^T$, $\vec{e_2} = (1{,}0,-1)^T$, $\vec{e_3} = (3{,}0{,}1)^T$. Координаты базисных векторов заданы в ортонормированном базисе.

Перед решением удостовериться в том, что векторы $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ действительно могут составлять базис в трехмерном пространстве.

Решить задачу двумя способами, описанными в предыдущей задаче. Сравнить полученные результаты и написать, какой способ оказался проще.

Домашняя работа по теме 27 урока

Метрический тензор и его применение

1. Задайте произвольные числовые компоненты матрицы 4×4. Заданная Вами матрица будет являться тензором h_{ij}. Теперь запишите вид матрицы тензора h^{ji}. А затем произведите свертку $g_{ik}h^{ji}$ и запишите в ответ матрицу получившегося тензора. g_{ik} - метрический тензор ОНБ.

2. Найдите произведение тензоров a_i и b_j и запишите матрицу получившегося тензора в общем виде. $i = \overline{1{,}3}$, $j = \overline{1{,}3}$.

3. Задайте произвольные числовые компоненты матрицы 3×3. Заданная Вами матрица будет являться тензором h_{ij}. Произведите свертку получившегося тензора и запишите численный результат.

4. Запишите в тензорном виде произвольный дважды ковариантный симметричный тензор и дважды ковариантный один раз контравариантный антисимметричный тензор. Запишите матрицы этих тензоров в произвольном виде.

5. Найдите матрицу получившегося в результате данных вычислений тензора:

$$(\lambda f_{ik} + \beta h^{cp})d_c^i$$

Матрицы тензоров f_{ik}, h^{cp}, d_c^i заполните произвольными ненулевыми числами. Матрицы не должны быть единичными. λ и β - произвольные ненулевые числа.

Домашняя работа по теме 31 урока

Применение тензора Леви-Чивиты

1. Определите компоненты матрицы тензора Леви-Чивиты в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Базисные векторы заданы через единичные ортогональные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ следующим образом:

$$\vec{e_1} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}; \qquad \vec{e_2} = 2\vec{i}; \qquad \vec{e_3} = -4\vec{j} - \vec{k}$$

2. Определите векторное произведение векторов $\vec{a} = (1{,}2{,}0)^T$ и $\vec{b} = (3{,}1{,}2)^T$ в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, используя тензор Леви-Чивиты. Базисные векторы заданы через единичные ортогональные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ следующим образом:

$$\vec{e_1} = 3\vec{i} + 2\vec{j}; \qquad \vec{e_2} = \vec{i} - 4\vec{j}; \qquad \vec{e_3} = 5\vec{k}$$

3. Определите смешанное произведение векторов $\vec{a} = (2{,}6{,}1)^T$, $\vec{b} = (4{,}5{,}0)^T$ и $\vec{c} = (1{,}3{,}0)^T$ в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, используя матрицу Леви-Чивиты. Базисные векторы заданы через единичные ортогональные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ следующим образом:

$$\vec{e_1} = \vec{i} - 4\vec{j}; \qquad \vec{e_2} = 2\vec{i} + 3\vec{j}; \qquad \vec{e_3} = -4\vec{j} + 5\vec{k}$$

Домашняя работа по теме 37 урока

Матрица Якоби. Метрический тензор в локальном базисе

1. Определите компоненты матрицы Якоби при переходе от декартовых координат x, y, z к сферическим кординатам r, θ, φ. В ответ запишите матрицу Якоби.
Декартовы кординаты выражаются через сферические следующим образом:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad z = r\cos\theta$$

2. Определите компоненты матрицы Якоби при переходе от декартовых координат x, y, z к цилинидрическим кординатам r, φ, z. В ответ запишите матрицу Якоби.
Декартовы кординаты выражаются через цилинидрические следующим образом:

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = z$$

3. Найдите матрицу, обратную матрице Якоби, полученной в 1 задании, и сравните ее с матрицей Якоби при переходе от сферических координат r, θ, φ к декартовым координатам x, y, z. В ответ запишите полученные матрицы и результат их сравнения.

4. Найдите матрицу, обратную матрице Якоби, полученной в 2 задании, и сравните ее с матрицей Якоби при переходе от цилиндрических координат r, φ, z к декартовым координатам x, y, z. В ответ запишите полученные матрицы и результат их сравнения.

5. Определите компоненты матрицы метрического тензора в локальном базисе, полученном при переходе от декартовых координат x, y, z к сферическим кординатам r, θ, φ.

6. Определите компоненты матрицы метрического тензора в локальном базисе, полученном при переходе от декартовых координат x, y, z к цилинидрическим кординатам r, φ, z.

Домашняя работа по теме 47 урока

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами с неоднородностью в виде квазимногочлена

Решите следующие дифференциальные уравнения:

$$\text{а) } y'' - 2y' + 2y = 0 \qquad \text{б) } y''' + 4y'' - y' - 4y = 0$$

$$\text{в) } y'' + 6y' + 9y = 36xe^{3x} \qquad \text{г) } y'' - 4y' = -8e^{2x}\cos 2x - 8x + 2$$

$$\text{д) } y''' + y' = -2e^{x}(\cos x + 3\sin x) - 2\cos x$$

Домашняя работа по теме 48 урока

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами с неоднородностью в виде произвольной функции

$$\text{а) } y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{x}} \qquad \text{б) } y'' - 4y' + 8y = 4\left(7 - 21x + 18x^2\right)\sqrt[3]{x}$$

$$\text{в) } y'' - y' = -\frac{x+1}{x^2} \qquad \text{г) } y'' + 2y' + y = (x+2)\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{д) } y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x+1}$$

Домашняя работа по теме 51 урока

Прямые задачи Бине

Точка массы 0,2 кг, движущаяся под влиянием силы притяжения к неподвижному центру по закону тяготения Ньютона, описывает полный эллипс с полуосями 0,1 м и 0,08 м в течение 50 с. Определить наибольшую и наименьшую величины силы притяжения F при этом движении.

Домашняя работа по теме 52 урока

Прямые задачи Бине

Точка, двигаясь в плоскости, описывает логарифмическую спираль, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$r = ae^{b\varphi}$$

Где a и b — некоторые константы. Определите центральную силу, под действием которой движение могло бы происходить по такой траектории.

Домашняя работа по теме 53 урока

Обратные задачи Бине

Частица M массы 1 кг притягивается к неподвижному центру O силой, обратно пропорциональной пятой степени расстояния. Эта сила равна 8 Н на расстоянии 1 м. В начальный момент частица находится на расстоянии $OM_0 = 2$ м и имеет скорость, перпендикулярную к OM_0 и равную 0,5 м/с. Определите траекторию движения частицы в полярных координатах и постройте ее график в программе Desmos.

Домашняя работа по теме 54 урока

Обратные задачи Бине

2. Определите уравнение движения точки в полярных координатах. Масса точки 1 кг. Движется точка под действием центральной силы притяжения, обратно пропорциональной кубу расстояния точки от центра притяжения, при следующих данных: на расстоянии 1 м сила равна 1 Н. В начальный момент расстояние точки от центра притяжения равно 2 м, скорость $v_0 = 0{,}5$ м/с и составляет угол 45° с направлением прямой, проведенной из центра к точке.

4.2 Примеры контрольных работ

Контрольная работа по теме 2 урока
Векторы и базис

1. Определить, являются данные векторы линейно зависимыми или линейно независимыми:

а) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$;
г) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

2. Приведите пример ненормированного неортогонального базиса в пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. В задании необходимо записать координаты векторов, которые будут составлять ненормированный неортогональный базис в ортонормированных базисах пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

3. В некотором ортонормированном базисе на плоскости заданы координаты векторов $\vec{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\vec{c}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Проверьте, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы, и найдите координаты $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Контрольная работа по теме 7 урока
Операции над матрицами

1. Найти:

а) $A+2B$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$; б) $-3C+D$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 4 & 10 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}$
в) $2F-3E$, где $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 13 & 5 \\ -10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 14 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Можно ли сложить матрицы: а) A и B; б) A^T и B; в) A и B^T; г) A^T и B^T?

Если можно, выполните сложение.

3) Есть четыре матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & -2 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 4 & 0 & -7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Найдите (если такое возможно): а) $(A^T + B)(A + B^T)D$; б) BAC; в)$D^T BC$; г) Проверьте, равны ли произведения AB и BA.

Контрольная работа по теме 11 урока

Детерминант матрицы

1. Найдите определитель следующих матриц:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -21 & -7 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} -2 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad C=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 4 \\ 1 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Определите, являются ли данные матрицы вырожденными:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 4 & 7 & 21 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Определите объем параллелепипеда, построенный на векторах $\vec{a}=(0,1,5)^T$, $\vec{b}=(7,0,2)^T$ и $\vec{c}=(4,2,3)^T$. Координаты всех векторов заданы в ОНБ.

Контрольная работа по теме 12 урока

Обратная матрица

1. Найдите матрицы, обратные данным двумя способами (при помощи присоединенной единичной матрицы и при помощи миноров):

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -21 & -7 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Найдите матрицу, обратную данной и проверьте полученный результат:

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 10 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Контрольная работа по теме 16 урока

Замена базиса. Матрица перехода

1. Координаты x,y,z каждой точки пространства в системе координат O, $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$,$\mathbf{e}_3$ выражаются через координаты x',y',z' этой же точки в системе O', $\mathbf{e}'_1$,$\mathbf{e}'_2$,$\mathbf{e}'_3$ формулами

$$x'=3x+y-z, \qquad y'=3y, \qquad z'=2x+y+z$$

Найти матрицу перехода от системы O', $\mathbf{e}'_1$,$\mathbf{e}'_2$,$\mathbf{e}'_3$ к системе O, $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$,$\mathbf{e}_3$.

2. Дана матрица перехода от старого базиса $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ к новому $(\vec{e_1}',\vec{e_2}',\vec{e_3}')$

$$S=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдите выражение новых базисных векторов через старые.

3. Дана матрица перехода от новых координат к старым:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 11 \\ -2 & 2 & -8 \\ 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

Выразите старые базисные вектора через новые.

Контрольная работа по теме 17 урока

Замена базиса. Матрица перехода

1. Дана матрица перехода от старого базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к новому $(\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}')$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 6 & -5 & 4 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Найдите выражение новых координат произвольного вектора через старые.

2. Дана матрица перехода от нового базиса $(\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}')$ к старому $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите выражение старых координат произвольного вектора через новые.

3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} = (4, 2, 0)^T$ и $\vec{a} = (6, 2, 1)^T$, заданных в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, если $\vec{e_1} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{e_2} = -4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{e_3} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$. Где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты ОНБ.

Контрольная работа по теме 22 урока

Метрический тензор и его применение

1. Найти матрицу метрического тензора в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, если $\vec{e_1} = 2\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{e_2} = 3\vec{j} + 1\vec{k}$, $\vec{e_3} = 4\vec{i} + \vec{j}$. Где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты ОНБ.

Перед решением удостовериться в том, что векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ действительно могут составлять базис в трехмерном пространстве.

2. Найти матрицу метрического тензора в базисе $(\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \vec{e'_3})$, если $\vec{e'_1} = -\vec{e_1} + 3\vec{e_2} - \vec{e_3}$, $\vec{e'_2} = 2\vec{e_2} - \vec{e_3}$, $\vec{e'_3} = 5\vec{e_1} - 4\vec{e_2}$. Где координаты базисных векторов базиса $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ заданы в ОНБ и равны: $\vec{e_1} = (0,1,2)^T$, $\vec{e_2} = (0,1,5)^T$, $\vec{e_3} = (1,0,2)^T$.

Перед решением удостовериться в том, что векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ действительно могут составлять базис в трехмерном пространстве.

Контрольная работа по теме 23 урока

Метрический тензор и его применение

1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (1{,}3{,}5)^T$, и $\vec{b} = (0, -2{,}1)^T$, заданных в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, где $\vec{e_1} = (3{,}1{,}0)^T$, $\vec{e_2} = (2{,}0, -1)^T$, $\vec{e_3} = (-2{,}4{,}1)^T$. Координаты базисных векторов заданы в ортонормированном базисе.

Перед решением удостовериться в том, что векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ действительно могут составлять базис в трехмерном пространстве.

Решить задачу двумя способами, сравнить полученные результаты и написать, какой способ оказался проще:

1) При помощи метрического тензора g_{ij}: $(\vec{a}, \vec{b}) = g_{ij}a^j b^i$ в заданном базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.
2) Перейти в ортонормированный базис при помощи матрицы поворота, а затем найти скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе.

2. Определить угол между векторами $\vec{a} = (0{,}3{,}1)^T$, и $\vec{b} = (4{,}0{,}2)^T$, заданными в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, где $\vec{e_1} = (2{,}1{,}0)^T$, $\vec{e_2} = (1{,}0, -1)^T$, $\vec{e_3} = (3{,}0{,}1)^T$. Координаты базисных векторов заданы в ортонормированном базисе.

Перед решением удостовериться в том, что векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ действительно могут составлять базис в трехмерном пространстве.

Решить задачу двумя способами, описанными в предыдущей задаче. Сравнить полученные результаты и написать, какой способ оказался проще.

Контрольная работа по теме 27 урока

Действия над тензорами

1. Задайте произвольные числовые компоненты матрицы 3×3. Заданная Вами матрица будет являться тензором h_{ij}. Теперь запишите вид матрицы тензора h^{ji}. А затем произведите свертку $g_{ik}h^{ji}$ и запишите в ответ матрицу получившегося тензора. g_{ik} - метрический тензор ОНБ.

2. Задайте произвольные числовые компоненты матрицы 2×2. Заданная Вами матрица будет являться тензором f_{ij}. Произведите свертку получившегося тензора и запишите численный результат.

3. Найдите матрицу получившегося в результате данных вычислений тензора:

$$(\alpha g_{ik} - \beta h^{cp}) f_c^i$$

Матрицы тензоров h^{cp}, d_c^i заполните произвольными ненулевыми числами. Матрицы не должны быть единичными. α и β - произвольные ненулевые числа. g_{ik} - метрический тензор в ОНБ.

Контрольная работа по теме 31 урока

Применение тензора Леви-Чивиты

1. Определите векторное произведение векторов $\vec{a} = (5{,}1{,}1)^T$ и $\vec{b} = (3{,}1{,}2)^T$ в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, используя тензор Леви-Чивиты. Базисные векторы заданы через единичные ортогональные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ следующим образом:

$$\vec{e_1} = \vec{j}; \qquad \vec{e_2} = 3\vec{i} - \vec{j}; \qquad \vec{e_3} = 2\vec{k} + 2\vec{i}$$

2. Определите смешанное произведение векторов $\vec{a} = (0{,}0{,}1)^T$, $\vec{b} = (1{,}3{,}0)^T$ и $\vec{c} = (2{,}3{,}7)^T$ в базисе $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, используя тензор Леви-Чивиты. Базисные векторы заданы через единичные ортогональные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ следующим образом:

$$\vec{e_1} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}; \qquad \vec{e_2} = 2\vec{i}; \qquad \vec{e_3} = -4\vec{j} - \vec{k}$$

Контрольная работа по теме 37 урока

Матрица Якоби. Метрический тензор в локальном базисе

1. Определите компоненты матрицы Якоби при переходе от декартовых координат x, y, z к произвольным криволинейным кординатам v, u, h. В ответ запишите полученную матрицу Якоби. Произвольные криволинейные кординаты выражаются через декартовы следующим образом:

$$v = x^2 - y^2 \quad u = x^2 + y^2 \quad h = zy$$

2. Сделайте вывод о линейной зависимости или независимости криволинейных координат при помощи нахождения определителя матрицы Якоби, найденной в 1 задании.

3. Определите компоненты матрицы метрического тензора в локальном базисе, полученном при переходе от декартовых координат x, y, z к произвольным криволинейным кординатам v, u, h.

4. Определите компоненты матрицы Якоби при переходе от произвольных криволинейных координат v, u, h к декартовым координатам x, y, z и сравните полученную матрицу Якоби с матрицей, обратной той матрице Якоби, что была получена в 1 задании. В ответ запишите полученные матрицы и результат их сравнения.

Контрольная работа по теме 47 урока

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами с неоднородностью в виде квазимногочлена

Решите следующие дифференциальные уравнения:

$$\text{а) } y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x} \qquad \text{б) } \ddot{x} + x = t\sin t$$

$$\text{в) } y'' - 2y' + 3y = 4\cos x - 2\sin x + 4e^{3x} \qquad \text{г) } y'' + y' = (5 - 2x)e^{-x} - 10\sin 2x$$

Контрольная работа по теме 48 урока

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами с неоднородностью в виде произвольной функции

Решите следующие дифференциальные уравнения:

$$\text{а) } y'' + 3y' = \frac{3x - 1}{x^2} \qquad \text{б) } y'' + y = -ctg^2 x$$

$$\text{в) } y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^x} \qquad \text{г) } y'' - 2y' + 10y = \frac{9e^x}{\cos 3x}$$

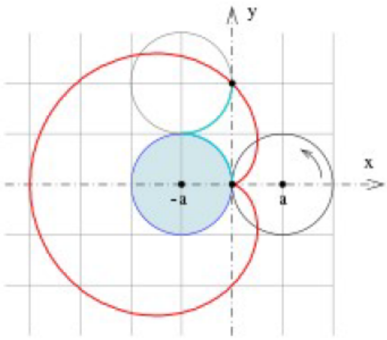
Контрольная работа по теме 51 и 52 уроков

Прямые задачи Бине

Точка, двигаясь в плоскости, описывает кардиоиду, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$r = 2a(1 - \cos\varphi)$$

Кардиоидой называется кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности, в случае, когда радиусы обеих окружностей равны друг другу и равны a. Определить центральную силу, под действием которой движение могло бы происходить по такой траектории.



Контрольная работа по теме 53 и 54 уроков

Обратные задачи Бине

Планета массой m движется в поле силы тяжести, создаваемом Солнцем. Известно, что 1) когда планета находится на расстоянии $r_0 = 4{,}5 \cdot 10^9$ км от Солнца, она обладает скоростью $2v_0 = 72000$ км/ч, направленной под углом $\alpha = 30°$ к прямой, соединяющей планету с частицей; 2) расстояния от планеты до частицы, измеренные в один момент времени и в другой, когда частица повернулась на $90°$ относительно первого момента времени, равны $2r_0$ и $3r_0$. Найдите уравнение движения частицы в полярных координатах, постройте его график в программе Desmos и определите из графика форму траектории движения планеты.

Примечание: на столь больших расстояниях Солнце и планету можно считать точечными. Масса планеты мала по сравнению с массой Солнца.

4.3 Примеры лекционных тестов

Лекционный тест по теме 1 урока

Что такое линейная комбинация векторов? Какие векторы называются линейно зависимыми? Какие векторы называются линейно независимыми? Приведите пример линейно зависимых и независимых векторов.

Лекционный тест по теме 2 урока

Дайте определение базису. Сколько существует способов разложения вектора по базису в N-мерном пространстве? В чем отличие ортогонального базиса от нормированного? Что такое ортонормированный базис? Чему равно количество базисных векторов?

Лекционный тест по теме 5 урока

Чем задается размерность матрицы? Запишите трехмерную единичную матрицу. Является ли она симметричной? А диагональной? Покажите на примере общий вид диагональной матрицы. Приведите пример матрицы 1 x 3 и 3 x 1.

Лекционный тест по теме 6 урока

Как матричные элементы изменяются при умножении матрицы на число? Напишите результат перемножения двух единичных матриц размерности 3 x 3. Что происходит со столбцами матриц при транспонировании? Можно ли сложить две матрицы, одна из которых имеет размерность 2 x 3, а другая 3 x 2? Можно ли умножить две матрицы, одна из которых имеет размерность 2 x 3, а другая 3 x 2?

Лекционный тест по теме 9 урока

Чему равен детерминант произвольной диагональной матрицы? Запишите общий вид формулы вычисления детерминанта матрицы 2 x 2. Дайте определение вырожденной матрицы. Запишите формулу векторного произведения векторов при помощи определителя матрицы.

Лекционный тест по теме 10 урока

Что называется обратной матрицей? Чему равна размерность матрицы, обратной к матрице размерности M x N? А M x M? Назовите свойства обратной матрицы. Какие методы нахождения обратной матрицы вы знаете?

Лекционный тест по теме 15 урока

Что называется переходом от старого базиса к новому? Дайте определение матрице перехода. Запишите формулы перехода от старых координат вектора к новым.

Лекционный тест по теме 20 урока

Чем отличаются контравариантные координаты от ковариантных? Запишите формулу скалярного произведения двух векторов в тензорном виде. В чем заключается правило Эйнштейна?

Лекционный тест по теме 21 урока

Дайте определение метрическому тензору. В чем заключается связь квадрата модуля вектора с метрическим тензором? Каков геометрический смысл определителя матрицы метрического тензора? Изменится ли скалярное произведение двух векторов при замене базиса?

Лекционный тест по теме 26 урока

В чем заключается отличие матрицы от тензора? Что происходит с матрицей тензора при его умножении на скаляр? Что такое диада? Что происходит с матрицей тензора при перестановке его индексов? Что такое свертка тензоров?

Лекционный тест по теме 29 урока

В чем заключается отличие симметричных от антисимметричных тензоров? Приведите пример антисимметричного и симметричного тензоров. Как записывается символ Кронекера?

Лекционный тест по теме 30 урока

Назовите свойства тензора Леви-Чивиты. Как выглядит матрица тензора Леви-Чивиты? Запишите векторное и смешанное произведение векторов в тензорном виде при помощи тензора Леви-Чивиты.

Лекционный тест по теме 33 урока

Что такое сопутствующий вектор тензора? В чем заключается связь тензора Леви-Чивиты с метрическим тензором? Что такое псевдовектор и псевдотензор?

Лекционный тест по теме 34 урока

Приведите пример функции нескольких переменных. Зачем нужна частная производная? Определите скорость возрастания объема прямоугольного параллелепипеда со сторонами $a > b > c$, если меньшая и большая стороны остаются постоянными.

Лекционный тест по теме 35 урока

Что такое координатная линия? В чем отличие криволинейных координат от декартовых с точки зрения координатной линии? Запишите связь между декартовыми и полярными координатами. Приведите пример криволинейных координат (помимо полярных).

Лекционный тест по теме 36 урока

Что такое локальный базис? Что такое матрица Якоби? Является ли матрица Якоби вырожденной? Запишите зависимость метрического тензора в локальном базисе от метрического тензора в обычном базисе в тензорном и матричном видах.

Лекционный тест по теме 39 урока

Найдите производную сложной функции $f(x)$ по времени t, если $f(x) = x^2 e^x$, а $x(t) = t^2 - t$.

Лекционный тест по теме 40 урока

Что такое символы Кристоффеля 2-го рода. Запишите формулу символов Кристоффеля 2-го рода. Запишите формулу ковариантной частной производной вектора по криволинейным координатам.

Лекционный тест по теме 41 урока

Дайте определение числу степеней свободы. Чему равно число степеней свободы свободного атома? Дайте определение идеальным связям. Чем отличаются обобщенные координаты от обычных координат. Дайте определение возможному перемещению точки.

Лекционный тест по теме 42 урока

Запишите второй закон Ньютона в тензорном виде.

Лекционный тест по теме 43 урока

Дайте определение центральной силы. Приведите пример центральной силы. От чего зависит центральная сила? Что такое секторная скорость. Запишите формулу Бине.

Лекционный тест по теме 44 урока

Запишите общий вид линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. В чем отличие однородных дифференциальных уравнений от неоднородных? Что такое решение однородного уравнения? Приведите пример линейного дифференциального уравнения 4-го порядка с постоянными коэффициентами и его характеристического уравнения.

Лекционный тест по теме 45 урока

Что такое частное решение дифференциального уравнения? Что такое общее решение дифференциального уравнения? Что такое квазимногочлен? Приведите пример квазимногочлена.

Лекционный тест по теме 46 урока

Запишите общую формулу нахождения частного решения дифференциального уравнения с неоднородностью в виде произвольной функции.

Лекционный тест по теме 57 урока

Запишите матрицу угловой скорости как антисимметричного тензора 2-го ранга. Каков смысл псевдовектора?

Лекционный тест по теме 58 урока

Сформулируйте теорему Эйлера. По какому правилу меняется угловая скорости при смене полюса вращения в твердом теле? Запишите закон моментов. Сформулируйте словами закон сохранения момента импульса?

Лекционный тест по теме 59 урока

Запишите матрицу тензора инерции. Как связан осевой момент инерции с тензором инерции? Запишите закон моментов при помощи осевого момента инерции. Запишите закон моментов при помощи тензора инерции.

Лекционный тест по теме 60 урока

Сформулируйте свойства тензора инерции. Что такое направляющие косинусы? Сколько главных и центробежных моментов инерции имеет тензор инерции? Дайте определение свободной оси вращения. Какие оси вращения являются устойчивыми, а какие неустойчивыми? Как они связаны с главными центральными моментами инерции?

4.4 Методическое пособие

Методическое пособие в виде pdf-файла под названием specmat.pdf можно найти в репозитории при помощи QR-кода, приведенного ниже.