

# Laboratório de Computação de Electromagnetismo(F102)

3 de Abril de 2017

## Potencial e campo eléctrico de um conjunto de cargas pontuais

O potencial eléctrico de um conjunto (discreto) de cargas pontuais é dado, escolhendo potencial nulo no infinito, por

$$V = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_i|}$$

onde o índice  $i$  corre sobre as  $N$  cargas de carga  $q_i$  na posição  $\mathbf{r}_i$ .

## Dipolo

**Potencial eléctrico** Um dipolo corresponde a um par de cargas de mesma grandeza mas sinal oposto, separadas por uma distância  $a$ . O vector dipolo eléctrico é definido pelo produto do módulo das cargas pelo vector que vai da carga negativa para a positiva,  $\mathbf{p} = |q|\mathbf{a}$ .

Consideremos então 2 cargas colocadas no eixo dos  $yy$ , a carga  $+q$  em  $+a/2$  e a carga  $-q$  colocada em  $-a/2$ . O potencial correspondente é:

$$\begin{aligned} V_d &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right] \\ &\simeq \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r^3} \end{aligned}$$

onde  $r_{\pm}$  são as grandezas dos vectores de posição do ponto onde queremos calcular o potencial,  $P$ , face às posições das cargas  $\pm q$ , respectivamente. A segunda linha corresponde à aproximação do campo longínquo, e  $r$ , a posição do ponto de observação, é medida a partir do ponto médio entre as cargas, e  $\theta$  é o seu ângulo com o eixo dos  $yy$ . Em termos de coordenadas cartesianas temos as relações:

$$\begin{aligned} r_- &= \left[ x^2 + (y - a)^2 \right]^{1/2} \\ r_+ &= \left[ x^2 + (y + a)^2 \right]^{1/2} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan \left( \frac{y}{x} \right). \end{aligned}$$

Como a distribuição tem simetria de rotação em torno do eixo dos  $yy$ , basta fazer o cálculo no plano  $xy$  (é independente de  $z$ ), por um lado, e é invariante na troca  $x \rightarrow -x$ . Assim basta calcular num semiplano e impor a condição  $\frac{\partial V}{\partial x}(0) = 0$ .

**Campo eléctrico** O campo resultante encontra-se no plano formado pelas duas cargas mais o ponto de observação, P. No plano  $xy$  teremos que os ângulos formados pelo campo devido a cada carga (que é na direcção e sentido do vector do vector posição que une P à carga respectiva) são dados por:

$$\begin{aligned}\theta_+ &= \arctan\left(\frac{y-a/2}{x}\right) = \arcsin\left(\frac{y-a/2}{r_+}\right) = \arccos\left(\frac{x}{r_+}\right) \\ \theta_- &= \arctan\left(\frac{y+a/2}{x}\right) = \arcsin\left(\frac{y+a/2}{r_-}\right) = \arccos\left(\frac{x}{r_-}\right).\end{aligned}$$

O campo total é então:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = |\mathbf{E}_+| \hat{\mathbf{e}}_+ - |\mathbf{E}_-| \hat{\mathbf{e}}_- \\ &= |\mathbf{E}_+| (\mathbf{e}_{+,x} + \mathbf{e}_{+,y}) - |\mathbf{E}_-| (\mathbf{e}_{-,x} + \mathbf{e}_{-,y}) \\ &= [|\mathbf{E}_+| \mathbf{e}_{+,x} - |\mathbf{E}_-| \mathbf{e}_{-,x}] + [|\mathbf{E}_+| \mathbf{e}_{+,y} - |\mathbf{E}_-| \mathbf{e}_{-,y}] \\ &= [|\mathbf{E}_+| \cos \theta_+ \hat{\mathbf{e}}_x - |\mathbf{E}_-| \cos \theta_- \hat{\mathbf{e}}_x] + [|\mathbf{E}_+| \sin \theta_+ \hat{\mathbf{e}}_y - |\mathbf{E}_-| \sin \theta_- \hat{\mathbf{e}}_y] \\ &= \left[ |\mathbf{E}_+| \frac{x}{r_+} - |\mathbf{E}_-| \frac{x}{r_-} \right] \hat{\mathbf{e}}_x + \left[ |\mathbf{E}_+| \frac{y-a/2}{r_+} - |\mathbf{E}_-| \frac{y+a/2}{r_-} \right] \hat{\mathbf{e}}_y.\end{aligned}$$

Como a grandeza de cada contribuição é

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}_+| &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_+^2} \\ |\mathbf{E}_-| &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_-^2},\end{aligned}$$

teremos finalmente

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} x \left( \frac{1}{r_+^3} - \frac{1}{r_-^3} \right) \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{y-a/2}{r_+^3} - \frac{y+a/2}{r_-^3} \right) \hat{\mathbf{e}}_y.$$

### Placa circular carregada

Consideremos agora o caso de uma placa circular de raio  $R$ , carregada com uma densidade superficial de carga constante  $\sigma$ . Analiticamente podemos calcular com certa facilidade o campo em qualquer ponto do eixo que passa pelo ponto central da placa e é normal a esta. Mas fora desse eixo o problema é mais complicado. Vamos fazer esse cálculo numericamente.

Consideremos um sistema de eixos com origem no centro da placa e em que o eixo dos  $zz$  é normal a esta. Vamos fazer o cálculo no plano  $xz$ . Em qualquer outro plano normal à placa o resultado é equivalente. Nesse plano o campo eléctrico não tem componente segundo  $y$ . Podemos fazer o cálculo considerando a contribuição da metade da placa com  $y > 0$  e depois multiplicamos por 2 o resultado. Vamos dividir a placa em pequenos elementos de área (idealmente infinitesimais) segundo uma grelha em coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ . Teremos  $0 \leq \rho \leq R$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$  (só fazemos metade da placa e  $\theta$  é o ângulo com o eixo dos  $xx$ ). Dividimos o intervalo de  $\rho$  em  $N$  partes (de comprimento  $d\rho$  cada) e o de  $\theta$  em  $M$  partes (de comprimento  $d\theta$ ) cada. Consideramos o elemento como sendo equivalente a uma carga pontual concentrada no ponto “central” do elemento, de coordenadas  $\rho_k = (k-1/2) * d\rho$  e  $\theta_l = (l-1/2) * d\theta$  e cada elemento tem área  $dA_k = d\rho \times (\rho_k d\theta) = (k-1/2) d\rho^2 d\theta$  (as coordenadas cartesianas correspondentes são  $u_{kl} = \rho_k \cos \theta_l$  e  $v_{kl} = \rho_k \sin \theta_l$ ). Note-se que os elementos não são todos iguais, dado que o comprimento do arco aumenta à medida que nos afastamos do centro. A carga contida nesse elemento é  $dq_{kl} = \sigma dA_k = (k-1/2) \sigma d\rho^2 d\theta$ .

A distância do elemento ( $kl$ ) ao ponto de observação P é:

$$r_{kl} = \sqrt{(u_{kl} - x_P)^2 + z_P^2 + v_{kl}^2}.$$

Então o potencial em P é dado por:

$$V_P = 2 \sum_{kl} \frac{dq_{kl}}{4\pi\epsilon_0 r_{kl}} = 2 \frac{\sigma d \rho^2 d\theta}{4\pi\epsilon_0} \sum_{kl} \frac{(k - \frac{1}{2})}{[(u_{kl} - x_P)^2 + z_P^2 + v_{kl}^2]^{1/2}}.$$

**Cálculo do campo eléctrico** Invocando a simetria do problema o campo não tem componente segundo  $y$ . Temos então que calcular as contribuições para as componentes  $x$  e  $z$  de cada elemento.

A direcção do campo devida a um elemento da placa tem a direcção do vector que une o elemento ao ponto P. O versor dessa direcção é:

$$\hat{\mathbf{e}}_P = \frac{\mathbf{r}_{kl}}{r_{kl}}.$$

Mas então a componente  $x$  é

$$\vec{e}_{P,x} = \frac{(\mathbf{r}_{kl} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) \hat{\mathbf{e}}_x}{r_{kl}}$$

e a componente  $z$  é

$$\vec{e}_{P,z} = \frac{(\mathbf{r}_{kl} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) \hat{\mathbf{e}}_z}{r_{kl}}.$$

A grandeza do campo é

$$|d\vec{\mathbf{E}}_P|_{kl} = \frac{dq_{kl}}{4\pi\epsilon_0 r_{kl}^2}.$$

Assim a componente  $x$  da contribuição do elemento ( $kl$ ) para o campo em P é:

$$|d\vec{\mathbf{E}}_{P,x}|_{kl} = \frac{dq_{kl}}{4\pi\epsilon_0 r_{kl}^3} (\mathbf{r}_{kl} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) = \frac{dq_{kl}}{4\pi\epsilon_0 r_{kl}^3} (x_P - u_{kl})$$

e a componente  $z$  é:

$$|d\vec{\mathbf{E}}_{P,z}|_{kl} = \frac{dq_{kl}}{4\pi\epsilon_0 r_{kl}^3} (\mathbf{r}_{kl} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) = \frac{dq_{kl}}{4\pi\epsilon_0 r_{kl}^3} z_P.$$

Então o campo total é

$$E_{P,x} = 2 \sum_{kl} \frac{dq_{kl}}{4\pi\epsilon_0 r_{kl}^3} (x_P - u_{kl}) = 2 \frac{\sigma d \rho^2 d\theta}{4\pi\epsilon_0} \sum_{kl} \frac{(k - \frac{1}{2}) (x_P - u_{kl})}{[(u_{kl} - x_P)^2 + z_P^2 + v_{kl}^2]^{3/2}}$$

e

$$E_{P,z} = 2 \sum_{kl} \frac{dq_{kl}}{4\pi\epsilon_0 r_{kl}^3} z_P = 2 \frac{\sigma d \rho^2 d\theta}{4\pi\epsilon_0} z_P \sum_{kl} \frac{(k - \frac{1}{2})}{[(u_{kl} - x_P)^2 + z_P^2 + v_{kl}^2]^{3/2}}.$$

### Resultados analíticos

É possível calcular exactamente quer o potencial quer o campo eléctrico em qualquer ponto no eixo dos  $zz$  (perpendicular a, e passando pelo centro da, placa). Temos:

$$V(0, 0, z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right],$$

e

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \left[ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{z^2} + 1}} \right].$$

### Placas carregadas – condensador

Vamos usar as equações de Laplace/Poisson para calcular o potencial eléctrico e/ou o campo eléctrico numa região do espaço onde se encontram corpos a potenciais determinados. Procuramos determinar, por exemplo, a capacidade entre dois condutores.

### Diferenças finitas

Para resolver a equação de Laplace no computador teremos que discretizar o problema. Para isso dividimos o domínio (contínuo) de interesse numa série de pontos, em geral dispostos numa rede regular. Vamos determinar o potencial nesses pontos, e não em todos os pontos do domínio, que são em número infinito (não numerável). A forma da rede que escolhemos é arbitrária, mas tornará a resolução mais fácil aproveitar quaisquer simetrias do sistema. Para condutores planos será mais fácil usar coordenadas cartesianas.

O passo seguinte é aproximar a equação diferencial pela sua equivalente em diferenças finitas, que relaciona o valor da variável dependente num ponto da grelha com os valores em pontos vizinhos.

Finalmente resolvemos as equações de diferenças sujeitas às condições fronteira e/ou condições iniciais impostas.

Não há uma forma única de aproximar uma dada equação diferencial por diferenças finitas. Há vários esquemas disponíveis, sendo a diferença entre eles em geral no compromisso ordem de aproximação vs complexidade de resolução das equações resultantes (isto é, computação necessária).

A equação de Laplace a 2D tem um termo em derivadas de segunda ordem nas variáveis espaciais:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

que podem ser aproximadas por um esquema de “diferenças centrais”:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{V(i+1, j) - 2V(i, j) + V(i-1, j)}{(\Delta x)^2},$$

onde  $V(i, j)$  é o valor da função  $V$  no ponto  $x = i * \Delta x$ ,  $y = j * \Delta y$ , e  $\Delta x, \Delta y$  são as distâncias entre pontos sucessivos na grelha nas direcções  $x$  e  $y$ , respectivamente. A derivada em ordem a  $y$  calcula-se de um modo análogo. A equação de Laplace em diferenças finitas lê-se então:

$$V(i+1, j) + V(i-1, j) + V(i, j+1) + V(i, j-1) - 4V(i, j) = 0,$$

ou

$$V(i, j) = \frac{1}{4} [V(i+1, j) + V(i-1, j) + V(i, j+1) + V(i, j-1)]. \quad (1)$$

O resultado é um sistema de tantas equações quantos os pontos na grelha cujo potencial desconhecemos, ditos nodos livres. Nalguns pontos o potencial é imposto por condições fronteira, conhecidas. Como vemos da equação acima as equações são acopladas. A sua resolução pode ser conseguida usando métodos de Álgebra Linear (como decomposição LU), ou por métodos iterativos. Estes são mais usados quando o número de nodos livres (equações) é muito elevado (algumas dezenas de milhar). Apesar do nosso sistema não ser muito grande, é esse método que vamos usar.

### Simetrias

Qualquer redução do número de equações a resolver é bem-vindo. Devemos então procurar tirar partido de todas as simetrias do sistema. Por exemplo, se o nosso sistema tiver simetria de reflexão no eixo dos  $yy$ , então podemos dividir o sistema em metade, resolver essa metade (obrigando a solução a ter a simetria de reflexão que nos permitiu ignorar a outra metade), e sabemos que o lado não resolvido tem como solução a reflexão da solução obtida na parte resolvida. A condição a aplicar é

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

onde  $\hat{n}$  é o versor da direcção normal à linha de simetria. Usando diferenças finitas centrais para a equação acima temos

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V(i+1, j) - V(i-1, j)}{2\Delta x} = 0.$$

Isto implica  $V(i+1, j) = V(i-1, j)$ , pelo que em todos esses pontos o cálculo de  $V(i, j)$  se simplifica a

$$V(i, j) = \frac{1}{4} [2V(i+1, j) + V(i, j+1) + V(i, j-1)]. \quad (2)$$

No caso de termos uma interface entre dois dieléctricos temos que ter presente que devem ser obedecidas as condições fronteira decorrentes das equações de Maxwell, neste caso que a componente normal à interface do deslocamento eléctrico deve ser contínua  $D_{1n} = D_{2n}$ . Esta condição decorre da lei de Gauss para o campo eléctrico:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Sigma} \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Q_{inc} = 0.$$

Como  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , temos

$$0 = \oint_{\Sigma} \epsilon \nabla V \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Sigma} \epsilon \cdot \frac{\partial V}{\partial n} ds.$$

Aplicado a uma interface entre um dieléctrico de permitividade  $\epsilon_1$  (acima) e outro de permitividade  $\epsilon_2$  (abaixo) este resultado dá (onde  $V_0 \equiv V(i, j)$ ;  $V_1 \equiv V(i, j+1)$ ;  $V_2 \equiv V(i-1, j)$ ;  $V_3 \equiv V(i, j-1)$ ;  $V_4 \equiv V(i+1, j)$ ):

$$0 = \epsilon_1 \frac{V_1 - V_0}{h} h + \epsilon_1 \frac{V_2 - V_0}{h} \frac{h}{2} + \epsilon_2 \frac{V_2 - V_0}{h} \frac{h}{2} + \epsilon_2 \frac{V_3 - V_0}{h} h + \epsilon_2 \frac{V_4 - V_0}{h} \frac{h}{2} + \epsilon_1 \frac{V_4 - V_0}{h} \frac{h}{2}$$

ou

$$V_0 = \frac{\epsilon_1}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} V_1 + \frac{\epsilon_2}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} V_3 + \frac{1}{4} V_2 + \frac{1}{4} V_4. \quad (3)$$

Como se nota, em cada ponto precisamos de saber o valor dos quatro vizinhos. Mas tal conhecimento não existe nos pontos da fronteira, a não ser que sejam impostas condições fronteira. Mas isso quer dizer que esse pontos não podem variar e por isso não serão considerados na iteração como variáveis (ou no método de inversão, se for esse o método usado).

### Método iterativo para resolver o sistema de equações

Um método iterativo usa uma aproximação para calcular uma nova aproximação, esta para calcular uma seguinte, e assim sucessivamente, até que sucessivas aproximações difiram entre si por menos que um valor limite desejado.

Para ver como funciona o método iterativo que vamos usar, SOR, ou “successive over-relaxation” (sobre-relaxação sucessiva), começamos por definir o resíduo,  $R(i, j)$ , no nodo  $(i, j)$  como a quantidade de que a quantidade  $V(i, j)$  difere da equação (1):

$$R(i, j) = V(i+1, j) + V(i-1, j) + V(i, j+1) + V(i, j-1) - 4V(i, j). \quad (4)$$

Podemos ver o resíduo na iteração  $k$  ( que denotamos por  $R^k(i, j)$ ) como a quantidade que é necessário adicionar a  $V(i, j)$  para a aproximar do valor correcto. Assim, para aumentar a taxa de convergência, multiplicamos o resíduo por um número  $\omega$  e adicionamos o resultado ao valor da  $k$ -ésima iteração para  $V(i, j)$  para obter a  $k+1$ -ésima iteração para  $V(i, j)$ :

$$V^{k+1}(i, j) = V^k(i, j) + \frac{\omega}{4} R^k(i, j)$$

ou

$$V^{k+1}(i, j) = V^k(i, j) + \frac{\omega}{4} [V(i+1, j) + V(i-1, j) + V(i, j+1) + V(i, j-1) - 4V(i, j)]. \quad (5)$$

O parâmetro  $\omega$  é chamado o factor de sobre-relaxação e está entre 1 e 2. O seu valor óptimo pode ser obtido por tentativas. Nalguns casos é possível fazer uma análise analítica para determinar o seu valor. No caso de um domínio rectangular pode mostrar-se que o factor de sobre-relaxação óptimo é dado pela menor raiz da equação

$$t^2 \omega^2 - 16\omega + 16 = 0,$$

onde  $t = \cos(\pi/N_x) + \cos(\pi/N_y)$ , e  $N_x, N_y$  são o número de intervalos ao longo dos eixos dos  $xx$  e dos  $yy$ , respectivamente.

Para iniciar a iteração usamos um valor arbitrário para os  $V^0(i, j)$  de cada nodo livre. Tipicamente usa-se  $V^0(i, j) = 0$  ou a média dos  $V(i, j)$  nos nodos fixos.

### Cálculo da capacidade

Se  $V_d$  for a diferença de potencial entre dois condutores, a capacitância entre eles é  $C = Q/V_d$ . Basta-nos então calcular a carga. Para tal usamos a lei de Gauss aplicada a uma superfície fechada  $\Sigma$  em torno de um dos condutores. Podemos escolher a superfície com secção rectangular entre dois rectângulos (segundo os nodos) adjacentes. Então:

$$\begin{aligned} Q &= \oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Sigma} \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} ds. \\ &= \epsilon \left( \frac{V_P - V_N}{\Delta x} \right) \Delta y + \epsilon \left( \frac{V_M - V_L}{\Delta x} \right) \Delta y + \epsilon \left( \frac{V_H - V_L}{\Delta x} \right) \Delta y \\ &\quad + \epsilon \left( \frac{V_G - V_K}{\Delta y} \right) \Delta x + \dots \end{aligned}$$

Como  $\Delta x = \Delta y = h$  vem

$$Q = (\epsilon V_P + \epsilon V_M + \epsilon V_H + \epsilon V_G + \dots) - (\epsilon V_N + 2\epsilon V_L + \epsilon V_K + \dots)$$

ou

$$Q = \epsilon_0 \left[ \sum \epsilon_{ri} V_i \quad \text{para os nodos } i \text{ no rectângulo exterior GHJMP sem contar os cantos (como J)} \right] \\ - \epsilon_0 \left[ \sum \epsilon_{ri} V_i \quad \text{para os nodos } i \text{ no rectângulo interior KLN} \right. \\ \left. \text{com os cantos (como JL contados duas vezes)} \right]$$

Se  $i$  estiver numa interface entre dieléctricos  $\epsilon_{ri} = (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})/2$ . Se  $i$  estiver numa linha de simetria usamos  $V_i/2$  em vez de  $V_i$ , para que este não seja contado duas vezes. (É claro que a carga terá que ser multiplicada por um factor equivalente se só simularmos metade ou um quarto do domínio por razões de simetria).