

Aplikasi Metode Numerik: Prediksi Pertumbuhan Populasi Menggunakan Metode Heun Tanpa Iterasi

Raddief Ezra Satrio Andaru
2306250693

Teknik Komputer
Universitas Indonesia

Muhammad Rafli
2306250730

Teknik Komputer
Universitas Indonesia

Muhammad Hilmi Al Muttaqi
2306267082

Teknik Komputer
Universitas Indonesia

Adhikananda Wira Januar
2306267113

Teknik Komputer
Universitas Indonesia

Abstract—Laporan ini membahas penerapan metode numerik Heun tanpa iterasi untuk memprediksi pertumbuhan populasi yang dimodelkan dengan persamaan diferensial eksponensial $\frac{dp}{dt} = Gp$. Dengan populasi awal 6000 orang dan laju pertumbuhan 0.075 per tahun, prediksi dilakukan hingga 20 tahun dengan langkah waktu 0.5 tahun. Laporan menyajikan perhitungan langkah demi langkah, analisis hasil, dan interpretasi grafik. Metode Heun memberikan pendekatan numerik yang lebih akurat dibanding Euler, serta efektif untuk simulasi dinamika populasi.

I. PENDAHULUAN

Pertumbuhan populasi merupakan aspek krusial dalam perencanaan sumber daya, penyusunan kebijakan publik, serta analisis demografi jangka panjang. Untuk memodelkan dinamika ini, model pertumbuhan eksponensial sering digunakan karena menyatakan bahwa laju perubahan populasi sebanding dengan jumlah populasi pada waktu tertentu. Secara matematis, model ini dinyatakan melalui persamaan diferensial:

$$\frac{dp}{dt} = Gp, \quad (1)$$

dengan $p(t)$ sebagai populasi pada waktu t , dan G sebagai laju pertumbuhan konstan. Solusi analitik dari model ini berbentuk fungsi eksponensial:

$$p(t) = p_0 e^{Gt} \quad (2)$$

Akan tetapi, dalam penerapan nyata, data populasi umumnya tersedia dalam bentuk diskrit dan sering kali dipengaruhi oleh kondisi dinamis yang tidak dapat dimodelkan secara eksak. Oleh karena itu, pendekatan numerik menjadi alternatif yang penting untuk melakukan estimasi nilai populasi secara bertahap.

Metode Euler sebagai pendekatan numerik dasar sering digunakan, tetapi memiliki keterbatasan akurasi terutama untuk langkah waktu yang besar. Metode Heun, atau Runge-Kutta orde dua, menawarkan peningkatan presisi dengan memperhitungkan rata-rata kemiringan pada titik awal dan titik prediksi. Dalam konteks ini, laporan ini menerapkan metode Heun **tanpa iterasi** untuk memprediksi pertumbuhan populasi dalam jangka waktu 20 tahun, dengan penekanan pada efisiensi komputasi dan tingkat akurasi terhadap solusi eksponensial.

II. STUDI LITERATUR

Metode Heun merupakan salah satu metode numerik yang termasuk dalam keluarga Runge-Kutta orde kedua, dan sering disebut sebagai *improved Euler method*. Metode ini dirancang untuk meningkatkan akurasi prediksi dibandingkan metode Euler biasa, dengan cara memperhitungkan rata-rata kemiringan (slope) antara titik awal dan titik prediksi.

Secara umum, proses perhitungan dalam metode Heun terdiri dari dua tahap estimasi kemiringan:

- **Slope awal di t_n :**

$$f(t_n, p_n) = Gp_n \quad (3)$$

- **Prediksi nilai populasi (Euler):**

$$p^* = p_n + hf(t_n, p_n) = p_n + hGp_n = p_n(1 + hG) \quad (4)$$

- **Slope akhir di t_{n+1} :**

$$f(t_{n+1}, p^*) = Gp^* \quad (5)$$

Dengan memperhitungkan rata-rata kedua slope tersebut, nilai populasi pada langkah selanjutnya diperoleh dari:

$$p_{n+1} = p_n + \frac{h}{2} (f(t_n, p_n) + f(t_{n+1}, p^*)) = p_n + \frac{hG}{2} (p_n + p^*) \quad (6)$$

Substitusi nilai $p^* = p_n(1 + hG)$ ke dalam persamaan menghasilkan bentuk tersederhanakan:

$$p_{n+1} = p_n \left[1 + \frac{hG}{2} (2 + hG) \right] \quad (7)$$

Faktor pengali yang diperoleh bersifat konstan selama iterasi, sehingga memungkinkan efisiensi perhitungan dalam kasus pertumbuhan populasi dengan laju tetap. Hal ini menjadikan metode Heun tanpa iterasi sebagai pendekatan praktis dan akurat untuk menyelesaikan masalah numerik dengan model diferensial linear.

III. PENJELASAN DATA YANG DIGUNAKAN

Dalam simulasi ini, model pertumbuhan populasi eksponensial digunakan untuk memprediksi jumlah populasi dalam rentang waktu 20 tahun. Beberapa parameter dasar yang digunakan dalam perhitungan metode Heun tanpa iterasi adalah sebagai berikut:

- **Populasi awal** (p_0): Sebanyak 6000 orang pada waktu $t = 0$.
- **Laju pertumbuhan** (G): Sebesar 0.075 per tahun, yang diasumsikan konstan sepanjang periode simulasi.
- **Interval waktu** (h): Ditetapkan sebesar 0.5 tahun untuk meningkatkan resolusi prediksi.
- **Periode prediksi**: Dihitung hingga $t = 20$ tahun, sehingga jumlah total langkah iterasi adalah 40.

Parameter-parameter ini dipilih untuk mencerminkan skenario pertumbuhan populasi yang realistis serta untuk menunjukkan efektivitas metode numerik dalam menghasilkan estimasi bertahap dengan akurasi yang tinggi.

IV. LANGKAH PERHITUNGAN

A. Menghitung Faktor Pengali

Langkah pertama dalam penerapan metode Heun tanpa iterasi adalah menghitung faktor pengali tetap yang akan digunakan dalam setiap iterasi. Berdasarkan parameter yang telah ditentukan sebelumnya, yaitu laju pertumbuhan $G = 0.075$ dan langkah waktu $h = 0.5$, diperoleh:

$$hG = 0.5 \times 0.075 = 0.0375$$

$$2 + hG = 2 + 0.0375 = 2.0375$$

$$\begin{aligned} \text{Faktor pengali} &= 1 + \frac{hG}{2}(2 + hG) \\ &= 1 + \frac{0.0375}{2} \times 2.0375 \\ &= 1 + 0.01914 \\ &= 1.03828 \end{aligned}$$

Faktor pengali ini bersifat konstan pada setiap iterasi, sehingga proses perhitungan dapat dilakukan dengan satu rumus rekurens sederhana tanpa perlu menghitung ulang slope pada setiap langkah.

B. Iterasi per Langkah

Dengan menggunakan faktor pengali tetap sebesar 1,03828, nilai populasi pada setiap waktu t_n dihitung berdasarkan populasi sebelumnya p_n menggunakan rumus berikut:

$$p_{n+1} = p_n \times 1,03828$$

Perhitungan ini dilakukan secara berulang sebanyak 40 langkah untuk mencakup seluruh periode waktu prediksi, yaitu dari $t = 0$ hingga $t = 20$ tahun, dengan interval waktu sebesar 0,5 tahun pada setiap langkah. Nilai populasi akan terus diperbarui secara bertahap hingga mencapai estimasi akhir pada tahun ke-20.

TABLE I: Prediksi Populasi dengan Metode Heun Tanpa Iterasi ($h = 0.5$ tahun)

n	t (tahun)	p_n (orang)
0	0.0	6000.00
1	0.5	6229.22
2	1.0	6467.19
3	1.5	6714.26
4	2.0	6970.77
5	2.5	7237.07
6	3.0	7513.55
7	3.5	7800.59
8	4.0	8098.60
9	4.5	8407.99
10	5.0	8729.20
11	5.5	9062.69
12	6.0	9408.91
13	6.5	9768.36
14	7.0	10141.54
15	7.5	10528.98
16	8.0	10931.22
17	8.5	11348.82
18	9.0	11782.39
19	9.5	12232.51
20	10.0	12699.83
21	10.5	13185.00
22	11.0	13688.71
23	11.5	14211.66
24	12.0	14754.59
25	12.5	15318.26
26	13.0	15903.47
27	13.5	16511.03
28	14.0	17141.80
29	14.5	17796.68
30	15.0	18476.56
31	15.5	19182.43
32	16.0	19915.25
33	16.5	20676.08
34	17.0	21465.97
35	17.5	22286.04
36	18.0	23137.43
37	18.5	24021.36
38	19.0	24939.05
39	19.5	25891.80
40	20.0	26880.94

V. ANALISIS HASIL

Populasi meningkat secara eksponensial sesuai model. Misalnya, solusi analitik pada $t = 20$ tahun:

$$\begin{aligned} p(20) &= 6000 \times e^{0,075 \times 20} \\ &= 6000 \times e^{1,5} \\ &\approx 6000 \times 4,4817 \\ &= 26\,890,2 \end{aligned}$$

Hasil metode numerik $p_{40} = 26880.94$ sangat mendekati solusi analitik, membuktikan akurasi metode Heun tanpa iterasi. Perbedaan hasil yang sangat kecil menunjukkan bahwa pendekatan ini mampu memberikan estimasi yang andal meskipun tanpa proses iteratif tambahan, menjadikannya cocok untuk simulasi populasi jangka panjang dengan efisiensi komputasi yang tinggi.

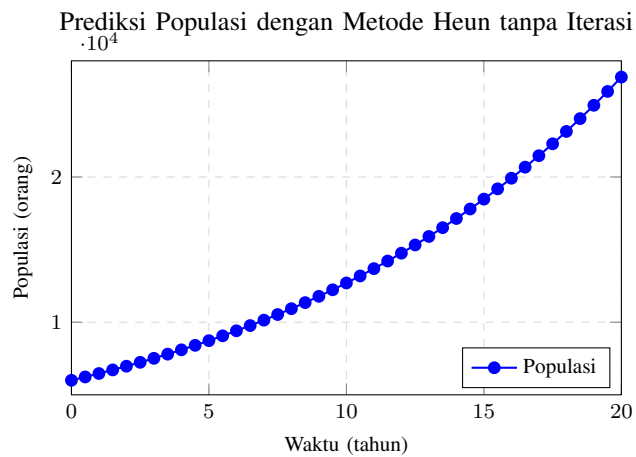


Fig. 1: Grafik Prediksi Populasi terhadap Waktu

VI. KESIMPULAN

Metode Heun tanpa iterasi memberikan solusi numerik yang akurat dan efisien untuk memprediksi pertumbuhan populasi berdasarkan model eksponensial. Dengan perhitungan yang sederhana dan penggunaan faktor pengali konstan, metode ini dapat diaplikasikan dalam berbagai kasus pertumbuhan dinamis yang melibatkan data diskrit. Perbandingan dengan solusi analitik menunjukkan bahwa metode ini dapat menghasilkan estimasi yang sangat mendekati nilai sebenarnya. Grafik semilogaritmik menegaskan sifat eksponensial dari model pertumbuhan populasi.

VII. LINK GITHUB

Kode sumber dan dokumentasi tugas ini dapat diakses melalui tautan berikut:

<https://github.com/Raddief/Kelompok11-TugasPemrogramanB>

REFERENCES

- [1] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, 5th ed. New York: McGraw-Hill, 2006. [Online]. Available: https://www.mbit.edu.in/wp-content/uploads/2020/05/Numerical_methods_for_engineers_for_engi.pdf
- [2] Castigliana Luo, "METODE HEUN," Scribd, 2013. [Online]. Tersedia: <https://www.scribd.com/doc/142993637/METODE-HEUN>