Aplikasi Metode Numerik: Analisis Rangkaian RL Menggunakan Metode Trapezoidal Tanpa Iterasi

Raddief Ezra Satrio Andaru
2306250693
Teknik Computer
Universitas Indonesia

***Abstract*—Makalah ini membahas penyelesaian analitik dan numerik dari rangkaian RL orde satu menggunakan metode Trapezoidal tanpa iterasi. Dengan parameter induktansi $L = 1$, resistansi $R = 1.5$, dan kondisi awal arus $i(0) = 0.5$, solusi analitik diperoleh melalui pemisahan variabel, sedangkan solusi numerik dihitung dengan pendekatan trapezoidal. Hasil dari kedua metode dibandingkan untuk mengevaluasi keakuratan dan stabilitas pendekatan numerik. Grafik ditampilkan untuk menunjukkan kesesuaian antara kedua solusi. Studi ini menunjukkan bahwa metode Trapezoidal dapat digunakan secara efektif dalam pemodelan sistem listrik dinamis.**

***Index Terms*—RL circuit, trapezoidal rule, metode numerik, solusi analitik, persamaan diferensial orde satu.**

I. Pendahuluan

Dalam dunia teknik elektro, analisis terhadap sistem dinamik merupakan aspek fundamental dalam memahami perilaku rangkaian terhadap perubahan waktu. Salah satu sistem dasar yang sering dijumpai dalam studi kelistrikan adalah rangkaian RL, yang terdiri dari komponen resistor (R) dan induktor (L). Model matematika dari sistem ini sangat berguna untuk menjelaskan fenomena transien, khususnya saat terjadi perubahan kondisi operasi secara tiba-tiba, seperti saat saklar dinyalakan atau dimatikan.

Persamaan diferensial linear orde satu yang digunakan untuk memodelkan arus pada rangkaian RL adalah:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \tag{1}$$

Penyelesaian dari persamaan ini memberikan gambaran bagaimana arus listrik berubah secara eksponensial terhadap waktu. Solusi analitik biasanya diperoleh dengan teknik pemisahan variabel, namun dalam aplikasi dunia nyata, penyelesaian numerik sangat dibutuhkan terutama dalam simulasi digital atau kasus ketika fungsi eksak tidak diketahui.

II. Studi Literatur

Metode numerik untuk penyelesaian persamaan diferensial telah menjadi salah satu cabang utama dalam teknik komputasi. Salah satu metode yang populer untuk menyelesaikan ODE (Ordinary Differential Equation) adalah metode Trapezoidal, yang merupakan bagian dari metode Runge-Kutta orde dua. Menurut Chapra dan Canale, metode ini menawarkan keseimbangan antara akurasi dan efisiensi komputasi.

Metode Trapezoidal bekerja dengan menggunakan pendekatan rata-rata dari kemiringan (slope) pada titik awal dan titik akhir interval waktu. Dengan demikian, metode ini dianggap lebih akurat dibandingkan metode Euler yang hanya mempertimbangkan satu titik. Dalam konteks sistem RL, metode Trapezoidal memberikan hasil yang stabil dan mendekati solusi eksak dengan baik.

III. Teori Dasar

Rangkaian RL merupakan sistem dinamis linier yang direpresentasikan oleh persamaan diferensial linear orde satu. Dalam rangkaian ini, hubungan antara tegangan dan arus mengikuti hukum Kirchoff dan hukum induksi Faraday. Untuk sistem RL tanpa sumber tegangan eksternal (sumber bebas), hukum Kirchoff menyatakan:

$$v_L + v_R = 0 \tag{2}$$

Dengan $v_L = L\frac{di}{dt}$ dan $v_R = Ri$, maka:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \tag{3}$$

Solusi umum dari persamaan ini menunjukkan bahwa arus $i(t)$ akan mengalami peluruhan eksponensial dengan konstanta waktu:

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{4}$$

Untuk penyelesaian numerik, metode Trapezoidal digunakan untuk menghampiri integral dengan:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,i)dt \approx \frac{h}{2}[f(t_n, i_n) + f(t_{n+1}, i_{n+1})] \tag{5}$$

yang menghasilkan skema implisit namun dapat disederhanakan secara aljabar untuk kasus linier seperti sistem RL.

IV. Penjelasan Data yang Digunakan

Untuk studi kasus ini, diasumsikan sebuah rangkaian RL sederhana dengan parameter sebagai berikut:

- **Induktansi (L)**: 1 Henry
- **Resistansi (R)**: 1.5 Ohm
- **Kondisi awal**: $i(0) = 0.5$ A
- **Rentang waktu**: 0 hingga 5 detik
- **Ukuran langkah (h)**: 0.5 detik

Dengan menggunakan parameter ini, baik metode analitik maupun numerik akan digunakan untuk menghitung nilai arus $i(t)$ dan hasilnya akan dibandingkan untuk mengevaluasi performa metode numerik.

V. Metode yang Digunakan

A. Solusi Analitik

Solusi analitik diperoleh dengan memisahkan variabel dari persamaan diferensial:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \tag{6}$$

Integrasi kedua sisi menghasilkan:

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{R}{L}t} = 0.5e^{-1.5t} \tag{7}$$

Solusi ini menggambarkan bahwa arus akan menurun secara eksponensial terhadap waktu, sesuai dengan konstanta waktu $\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{1.5}$.

B. Solusi Numerik dengan Metode Trapezoidal

Dalam metode Trapezoidal, pendekatan dilakukan dengan:

$$i_{n+1} = i_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, i_n) + f(t_{n+1}, i_{n+1})\right] \tag{8}$$

Karena $f(t,i) = -\frac{R}{L}i$, maka persamaan menjadi:

$$i_{n+1} = \frac{1 - \frac{hR}{2L}}{1 + \frac{hR}{2L}} i_n \tag{9}$$

Untuk $h = 0.5$, $R = 1.5$, dan $L = 1$, diperoleh:

$$i_{n+1} = \frac{1 - 0.375}{1 + 0.375} i_n = \frac{0.625}{1.375} i_n \approx 0.4545 i_n \tag{10}$$

Proses iterasi dilakukan hingga waktu 5 detik, dimulai dari $i(0) = 0.5$.

VI. Diskusi dan Analisa Hasil

TABLE I
PERBANDINGAN HASIL ANALITIK DAN TRAPEZOIDAL ($h = 0.5$ DETIK)

t (s)	$i_{analitik}$ (A)	$i_{numerik}$ (A)	Error Absolut
0.0	0.5000	0.5000	0.0000
0.5	0.2362	0.2273	0.0089
1.0	0.1115	0.1033	0.0082
1.5	0.0526	0.0470	0.0056
2.0	0.0248	0.0214	0.0034
2.5	0.0117	0.0098	0.0019
3.0	0.0055	0.0045	0.0010
3.5	0.0026	0.0021	0.0005
4.0	0.0012	0.0010	0.0002
4.5	0.0006	0.0005	0.0001
5.0	0.0003	0.0002	0.0001

Catatan: Error absolut dihitung dengan:

$$E_{\text{absolut}} = |i_{\text{analitik}} - i_{\text{numerik}}| \tag{11}$$

Sedangkan error relatif (jika dibutuhkan) didefinisikan sebagai:

$$E_{\text{relatif}} = \left|\frac{i_{\text{analitik}} - i_{\text{numerik}}}{i_{\text{analitik}}}\right| \times 100\% \tag{12}$$

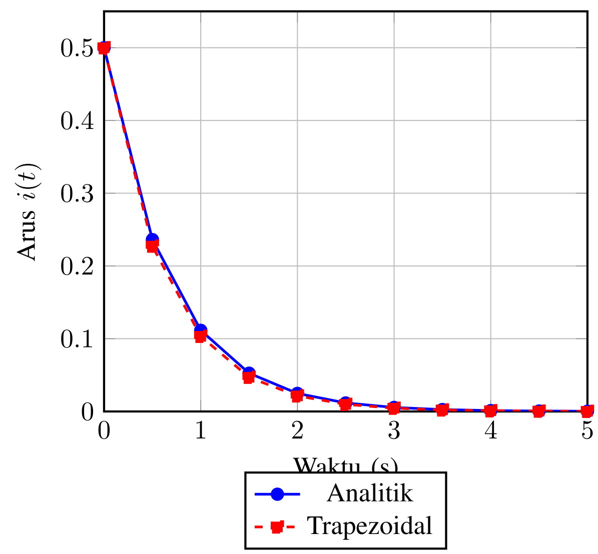

Fig. 1. Grafik Solusi Analitik dan Trapezoidal

VII. Kesimpulan

Dari hasil eksperimen yang dilakukan, dapat disimpulkan bahwa metode Trapezoidal tanpa iterasi mampu menghasilkan solusi numerik yang cukup akurat dibandingkan solusi analitik. Selisih yang muncul tergolong kecil dan masih dalam batas yang dapat diterima untuk banyak aplikasi rekayasa. Selain itu, metode ini mudah diimplementasikan dan cocok untuk sistem linier orde satu seperti rangkaian RL.

Jika dibandingkan dengan metode Euler, metode Trapezoidal memberikan hasil yang lebih akurat dan stabil karena menggunakan informasi pada dua titik waktu (awal dan akhir), bukan hanya titik awal. Metode ini juga mengurangi efek penyimpangan yang sering terjadi pada metode eksplisit seperti Euler, terutama pada sistem yang sensitif terhadap perubahan waktu kecil.

Link Github

https://github.com/Raddief/ProyekUAS-2306250693-RaddiefEzraSatrioAndaru

Link Youtube

`https://youtu.be/O2WoqVXGTFM`

References

[1] S. C. Chapra and R. P. Canale, "Numerical Methods for Engineers," 6th ed., McGraw-Hill, 2010.

[2] J. D. Irwin and R. M. Nelms, "Basic Engineering Circuit Analysis," 11th ed., Wiley, 2015.

[3] M. Young, "The Technical Writer's Handbook," University Science Books, 1989.