UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
KATEDRA INFORMATIKY

Radek Janoštík (radek.janostik01@upol.cz)

KMI/NLO – Neklasické logiky

16. října 2014

Abstrakt

Tento dokument je pouze přepisem zápisků a poznámek z přednášek předmětu KMI/NLO. Přednášel doc. Vilém Vychodil PhD.

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

1. Přednáška 1 - jemný úvod

1.1. Formální logika

- studium vyplývání $\rightarrow$ formalizuje výroky, výrazy přirozeného jazyka $\rightarrow$ formule. Definuje se, že formule je/není důsledkem jiných formulí.

1.2. Odlišnosti logik

1. Co vše popisuje jazyk - tj. co jsme schopni vyjádřit pomocí formulí.
   Př.:
   (a) Výroková logika - zabývá se výroky - neformálně výraz, o kterém se uvažuje, že je pravdivý či ne.
   Atomická formule - nemůže se dělit na podvýrazy pomocí spojek. Nahrazují je výrokové symboly
   Složitější formule - 1)Výrokový symbol je formule.
   2) Je-li φ formule, pak i $\neg\varphi$ je formule.
   3) Jsou-li φ, ψ formule, pak i $\varphi \Rightarrow \psi$ je formule.
   (b) Predikátová logika - zabývá se (mj.) strukturou výroků
   $(\forall x)(\forall y)(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$ - formule jazyka, kde $R = \{\leq\}$, $F = \{f\}$
   (c) Modální logiky - formalizují modality - "muset", "moci" ...
   Modální výroková - $\Box$ ... musí, $\diamond$ ... může.
   Formule: Je-li φ formule, pak i $\Box\varphi$ a $\diamond\varphi$ jsou formule.
   Paradox Arnošta Večerky: „Když mám 10 korun, koupím si čokoládu.“: $\varphi \Rightarrow \psi$
   „Když mám 10 korun, koupím si bonbon.“: $\varphi \Rightarrow \chi$
   $T = \{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \chi\}$ $T \vdash \varphi \Rightarrow (\psi \wedge \chi)$
   Modální logika dodá „může“. $T = \{\varphi \Rightarrow \diamond\psi, \varphi \Rightarrow \diamond\chi\}$ $T \vdash \varphi \Rightarrow (\diamond\psi \wedge \diamond\chi)$. Pozor: $T \nvdash \varphi \Rightarrow \diamond(\psi \wedge \chi)$
2. Tím, jak zavádí vyplývání
   (a) Sémantické - navrhneme interpretaci formulí.
   VL: zavedeme ohodnocení: $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ $||\varphi||_e$ ...
   PL: $\langle R, F, \sigma\rangle \rightarrow \mathbb{M} = \langle M, R^M, F^M\rangle$ $||\varphi||_{M,v}$ ... $T \models \varphi$
   mod. VL: $\Box\varphi, \diamond\varphi$ - Kripkeho struktura - $\mathbb{K} = \langle W, r, e\rangle$
   $r \subseteq W \times W$ $\langle w_1, w_2\rangle \in r$ ... w_2 je dosažitelný z w_1
   $e : W \times V \rightarrow \{0, 1\}$
   $||\Box\varphi||_{\mathbb{K},w} = 1$ pokud <u>pro každý</u> $w' \in W$ platí: pokud $\langle w, w'\rangle \in r$ pak $||\varphi||_{\mathbb{K},w'} = 1$
   $|| \diamond \varphi||_{\mathbb{K},w} = 1$ ... <u>existuje</u> ...
   (b) Syntaktické ... důkaz
   kl. VL: Pravidlo: z $\varphi, \varphi \Rightarrow \psi$ odvoď ψ
   $(Ax) : \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$
   $(\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$
   $(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$
   PL: Pravidlo: z φ odvoď $(\forall x)\varphi$
   Distrib: $(\forall x)\varphi \Rightarrow \varphi(x/t)$
   Spec: $(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi)$

   Lze zavést vyplývání jinak? - Alternativní syntaktické vyplývání - Gentzenovské dokazovací systémy - „natural deduction“

   Např.: V.Vychodil - prahová booleovská logika.

1.3. Co budeme zkoumat tento semestr

Neklasické logiky, ve kterých se uvažuje, že atomické formule mohou nabývat stupňů pravdivosti - $0 \dots 1$ - mezní dva stupně.

$0 \dots$ (plně) nepravdivý

$1 \dots$ (plně) pravdivý

$0 < a < 1 \dots$ stupeň pravdivosti

$\rightarrow$ Základní interpretace $\rightarrow$ komparativní

$||\varphi||_a = a, ||\psi||_b = b$ $a \leq n \dots \varphi$ je méně pravdivá než ψ.

$e : V \rightarrow L$ $\mathbb{L} = \langle L, \leq, 0, 1 \rangle \dots$ ohraničená uspořádaná množina.

$||\varphi||_e \in L$

$\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle \dots$ úplný svaz (zbytečně silné)

$\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle \dots$ svaz (ohraničený)

Zbývá vyřešit, jak interpretovat logické spojky a které spojky vzít jako základní.

Princip kompozicionality: $||\varphi \Rightarrow \psi||_e = ||\varphi||_e \rightarrow ||\psi||_e$

$\rightarrow$ - logická operace, která interpretuje $\Rightarrow$:

$\rightarrow : L \times L \rightarrow L$:

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

60. léta Lotfi Askerzadeh - koncept fuzzy množiny - $\wedge \dots \min$, $\vee \dots \max$, $\neg \dots 1 - a$

J.A.Goguen - $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$

Modus ponens - $\frac{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}{\psi}$ - 1. pohled $\frac{||\varphi \Rightarrow \psi||_e = 1, ||\varphi||_e = 1}{||\psi||_e = 1}$

2. pohled - min. dolní mez pravdivosti ψ odvozujeme z min. dolních mezí předchozích dvou. $\frac{a \leq ||\varphi \Rightarrow \psi||, b \leq ||\varphi||}{a \otimes b \leq ||\psi||} \dots \otimes \rightarrow \{0, 1\} \dots$ pravdivostní funkce konjunkce.

Pozorování: $\Rightarrow \dots ||\varphi \Rightarrow \psi|| = ||\varphi|| \rightarrow ||\psi||$

$\otimes \dots$ pravdivostní funkce konjunkce

Jaký by měly mít vztah $(\otimes, \rightarrow)$? Chceme, aby zobecněné MP bylo korektní:

Pokud $a \leq ||\varphi \Rightarrow \psi||$ a $b \leq ||\varphi||$ pak $a \otimes b \leq ||\psi||$ pro $b = ||\varphi||$ a $c = ||\psi||$ použitím $||\varphi \Rightarrow \psi|| = ||\varphi|| \rightarrow ||\psi|| = b \rightarrow c$

Pokud $a \leq ||\varphi \Rightarrow \psi|| = b \rightarrow c$, pak $a \otimes b \leq c$

$a \leq b \rightarrow c$ pak $a \otimes b \leq c$

Zobecněné MP mělo maximální možnou sílu - $b = ||\varphi||, c = ||\psi||$:

Pokud $a \otimes b \leq ||\psi|| = c$, pak $a \leq ||\varphi|| \rightarrow ||\psi|| = b \rightarrow c$

Dohromady:

$$a \otimes b \leq c \text{ p.k. } a \leq b \rightarrow c \dots \text{ adjunkce}$$

(Úplný) reziduovaný svaz $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$

$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle \dots$ (úplný) svaz

$\langle L, \otimes, 1 \rangle \cdots \otimes \dots$ binární operace, komutativní, asociativní, $a \otimes 1 = a$

$\rightarrow \dots$ binární operace, která splňuje adjunkci.

MP: $\frac{\varphi, \neg\varphi \vee \psi}{\psi} \rightarrow \frac{\varphi \vee \psi, \neg\varphi}{\psi}$ skrytý sém. význam: $\frac{1 \leq ||\varphi \vee \psi||, ||\varphi|| \leq 0}{1 \leq ||\psi||}$

$\frac{a \leq ||\varphi \vee \psi||, ||\varphi|| \leq b}{c \leq ||\psi||}$, $c = a \ominus b$

$\ominus$	0	1
0	0	0
1	1	0

$a \ominus b = \neg(a \to b)$

$\vee \cdots \oplus$ $\ominus \ldots$ pravdivostní funkce abjunkce - „neimplikace“

Pro $b = ||\varphi||, c = ||\psi||$ korektnost: $a \leq ||\varphi \vee \psi|| = b \oplus c$ pak $a \ominus b \leq c$

síla: $a \ominus b \leq ||\psi|| = c$ pak $a \leq b \oplus c$

$\oplus \ldots$ komutativní, asociativní, neutrální vůči 0

$\ominus \ldots$ adjungovaná k $\oplus$

$$a \ominus b \leq c \text{ p. k. } a \leq b \oplus c$$

2. Přednáška 2 - reziduované svazy

$\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1 \rangle$

$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle \ldots$ – ohraničený nebo úplný svaz

$\leq \ldots a \leq b$ p.k. $a \wedge b = a$ p.k. $a \vee b = b$

$\langle L, \otimes, 1 \rangle \ldots$ komutativní monoid (= asociativní, neutrální prvek – 1)

$\to \ldots$ binární operace:

$$a \otimes b \leq c \text{ p.k. } a \leq b \to c \text{ pro } \forall a, b, c$$

Věta 1: $a \otimes 0 = 0 \otimes a$ tj. $\otimes$ se na hodnotách z $\{0, 1\}$ chová stejně jako pravdivostní funkce klasické konjunkce.

Důkaz. $0 \leq a \to 0$, protože 0 je nejmenší z L.

Z adjunkce: $0 \otimes a \leq 0$ tj. $0 \otimes a = 0$. Opačná nerovnost plyne z komutativity $\otimes$ □

Věta 2: $a \to b = 1$ p.k. $a \leq b$

$1 \to 0 = 0$ tj. $\to$ se na hodnotách $\{0, 1\}$ chová jako klasická implikace.

Důkaz. $a \leq b$ p.k. $a \otimes 1 \leq b$ p.k. $1 \leq a \to b$ ($\geq$ platí vždy - 1 je největší prvek)

$1 \to 0 \leq 1 \to 0$

$1 \otimes (1 \to 0) \leq 0$ z neutrality $1 \to 0 \leq 0$ ($\geq$ platí vždy - 0 je nejmenší prvek.) □

Věta 3: Reziduum $\to$ je jednoznačně dané součinem $\otimes$ a obráceně. (Ale nemusí vůbec existovat)

Důkaz. Nechť $\langle \otimes, \to_1 \rangle$ a $\langle \otimes, \to_2 \rangle$ jsou odjungované páry.

$a \leq b \to_1 c$ p.k. $a \otimes b \leq c$ p.k. $a \leq b \to_2 c$

Dále jasné: pro $a = b \to_1 c$ vyplývá $b \to_1 c \leq b \to_2 c$

pro $a = b \to_2 c$ vyplývá $b \to_2 c \leq b \to_1 c$ □

Příklad 1: Todo: Obrázek diamantu. Diamant $\mathbb{N}_3$ – neexistuje žádný adjungovaný pár.

Příklad 2: Todo: Obrázek 4hodnotové boolovy algebry. $x \otimes y = x \wedge y$

$x \to y = x \vee y \ldots$ 4hodnotová booleova algebra.

Věta 4: (a) $a \leq b \to (a \otimes b) \ldots a \otimes b \leq a \otimes b$

(b) $b \leq a \to (a \otimes b \ldots$ z komutativity $\otimes$

(c) $a \otimes (a \to b) \leq b \ldots a \to b \leq a \to b$

(d) $a \leq (a \to b) \to b$

Důsledek 1: Tato věta + Věta 2: $a \to (b \to (a \otimes b)) = 1$

$$(a \otimes (a \to b)) \to b = 1$$

Věta 5: $a \to (b \to c) = (a \otimes b) \to c = b \to (a \to c)$

Důkaz. 1.

$$\begin{aligned}
a \to (b \to c) &\leq a \to (b \to c) \\
a \otimes (a \to (b \to c)) &\leq b \to c \\
b \otimes a \otimes (a \to (b \to c)) &\leq c \\
(a \otimes b) \otimes (a \to (b \to c)) &\leq c \\
a \to (b \to c) &\leq (a \otimes b) \to c
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(a \otimes b) \to c &\leq (a \otimes b) \to c \\
(a \otimes b) \otimes ((a \otimes b) \to c) &\leq c \\
a \otimes ((a \otimes b) \to c) &\leq b \to c \\
(a \otimes b) \to c &\leq a \to (b \to c)
\end{aligned}$$

Dokázána první rovnost, druhá plyne z komutativity $\otimes$.

$\square$

Věta 6: $\otimes$ je izotonní v obou argumentech. Pokud $a \leq b$ pak $a \otimes c \leq b \otimes c$. Tedy pokud $a_1 \leq b_1$ a $a_2 \leq b_2$ pak $a_1 \otimes a_2 \leq b_1 \otimes b_2$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
b \otimes c &\leq b \otimes c \\
b &\leq c \to (b \otimes c) \\
\text{tj.:} a &\leq c \to (b \otimes c) \text{ // z transitivity } \leq \\
a \otimes c &\leq b \otimes c
\end{aligned}$$

Druhý bod plyne dvojnásobným použitím předchozího: $a_1 \otimes a_2 \leq b_1 \otimes a_2 \leq b_1 \otimes b_2$ $\square$

Věta 7: $(a \to b) \otimes (b \to c) \leq a \to c$

Důkaz. Stačí ukázat, že platí:

$$\begin{aligned}
a \otimes (a \to b) \otimes (b \to c) &\leq c \\
a \otimes (a \to b) &\leq b \\
a \otimes (a \to b) \otimes (b \to c) &\leq b \otimes (b \to c) \leq c
\end{aligned}$$

$\square$

Věta 8: $\rightarrow$ je antitonní v prvním argumentu a izotonní v druhém argumentu. Tj. pokud $a \leq b$ pak $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$, pokud $b \leq c$ pak $a \rightarrow b \leq a \rightarrow c$

Důkaz. Pokud $a \leq b$ z

$$\begin{aligned}
b \rightarrow c &\leq b \rightarrow c \\
b \otimes (b \rightarrow c) &\leq c \\
b &\leq (b \rightarrow c) \rightarrow c \\
a &\leq (b \rightarrow c) \rightarrow c \\
(b \rightarrow c) \otimes a &\leq c \\
b \rightarrow c &\leq a \rightarrow c
\end{aligned}$$

Pokud $b \leq c$ z:

$$\begin{aligned}
a \rightarrow b &\leq a \rightarrow b \\
a \otimes (a \rightarrow b) &\leq b \\
a \otimes (a \rightarrow b) &\leq c \\
(a \rightarrow b) &\leq a \rightarrow c
\end{aligned}$$

□

Věta 9: $a \rightarrow b$ je největší prvek množiny $\{c \in L | a \otimes c \leq b\}$
$a \otimes b$ je nejmenší prvek množiny $\{c \in L | a \leq b \rightarrow c\}$

Důkaz. 1. $a \rightarrow b$ patří do $\{a \otimes c \leq b\}$ protože $a \otimes (a \rightarrow b) \leq b$. Nechť $a \otimes c \leq b \ldots$ z adjunkce $\ldots c \leq a \rightarrow b$

2. Analogicky: $a \otimes b \in \{c | a \leq b \rightarrow c\}$ protože $a \leq b \rightarrow (a \otimes b)$
   Pokud $a \leq b \rightarrow c$ pak $a \otimes b \leq c$

□

Věta 10:

$$\begin{aligned}
a \otimes \bigvee b_i &= \bigvee (a \otimes b_i) \\
a \rightarrow \bigwedge b_i &= \bigwedge (a \rightarrow b_i) \\
\bigvee a_i \rightarrow b &= \bigwedge (a_i \rightarrow b)
\end{aligned}$$

– 1. řádek: součin je distributivní přes $\bigvee$

Důkaz. 1. Z monotonie $\otimes$: $a \otimes \bigvee_i b_i \geq a \otimes b_i$ (druhé i je zvolené) platí pro $\forall i$ tj. $a \otimes \bigvee b_i \geq \bigvee (a \otimes b_i)$

Pravá strana:

$$\begin{aligned}
a \otimes b_i &\leq \bigvee (a \otimes b_i) \\
b_i &\leq a \rightarrow \bigvee (a \otimes b_i) \text{ pro každé } i \\
\bigvee b_i &\leq a \rightarrow \bigvee (a \otimes b_i) \\
a \otimes \bigvee b_i &\leq \bigvee (a \otimes b_i)
\end{aligned}$$

2. $a \to \bigwedge i \leq a \to b_i$ plat pro $\forall i$, tedy $a \to \bigwedge b_i \leq \bigwedge(a \to b_i)$

$$\begin{aligned}
\bigwedge(a \to b_i) &\leq a \to b_i \text{ pro } \forall i \\
a \otimes \bigwedge(a \to b_i) &\leq b_i \text{ pro } \forall i \\
a \otimes \bigwedge(a \to b_i) &\leq \bigwedge b_i \\
\bigwedge(a \to b_i) &\leq a \to \bigwedge b_i
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\bigvee a_i \to b &\leq a_i \to b \text{ pro } \forall i \\
\bigvee a_i \to b &\leq \bigwedge(a_i \to b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigwedge(a_i \to b) &\leq a_i \to b \\
a_i \otimes \bigwedge(a_i \to b) &\leq b \\
a_i &\leq (\bigwedge(a_i \to b)) \to b \text{ pro každé } i \\
\bigvee a_i &\leq (\bigwedge(a_i \to b)) \to b \\
\bigwedge(a_i \to b) &\leq \bigvee a_i \to b \text{ (dvojí adjunkce)}
\end{aligned}$$

□

Poznámka 1: $\vdash (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi)$ – protějšek 2.[1]

Věta 11:

$$\begin{aligned}
a \otimes \bigwedge b_i &\leq \bigwedge(a \otimes b_i) \\
\bigvee(a \to b_i) &\leq a \to \bigvee b_i \\
\bigvee(a_i \to b) &\leq \bigwedge a_i \to b \\
\bigwedge(a_i \to b_i) &\leq \bigwedge a_i \to \bigwedge b_i \\
\bigwedge(a_i \to b_i) &\leq \bigvee a_i \to \bigvee b_i
\end{aligned}$$

Důkaz. 1-3 „jednoduché“, 4: $\bigvee a_i \otimes \bigwedge(a_i \to b_i) \leq a_i \otimes (a_i \to b_i) \leq \bigwedge b_i$
5: $\bigvee a_i \leq (a_i \to b_i) \to b_i \leq \bigwedge(a_i \to b_i) \to \bigvee b_i$ □

2.1. Proč nejde svaz N_3 reziduovat?

todo: obrázek diamantu N3

Důkaz. Sporem: Nechť existují $\otimes, \to$. Dle věty 10:
$a \otimes (b \vee c) = (a \otimes b) \vee (a \otimes c)$
$a \otimes 1 = a$ ... musí nastat alespoň jeden z případů:
$a \otimes b = a$ nebo $a \otimes c = a$

[1] Vůbec netuším, jak je to myšleno!

Spor s monotonií $\otimes b$

$a \leq 1 \qquad a \otimes b \leq 1 \otimes b$

$a \otimes b \leq b$ což je nesrovnatelné. $\square$

2.2. Příklady struktur reziduovaných svazů

$\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$, kde $L = [0,1]$, $\wedge \ldots min, \vee \ldots max$

1. Łukasiewicz: $a \otimes b = max(0, a + b - 1)$

   $a \rightarrow b = min(1, 1 - a + b)$

2. Gödel: $a \otimes b = min(a, b)$

   $$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & a \leq b \\ b & \text{jinak} \end{cases}$$

3. Goguenova (produktová): $a \otimes b = a \cdot b$

   $$a \rightarrow b \begin{cases} 1 & a \leq b \\ b/a & \text{jinak} \end{cases}$$

2.2.1. Protipříklady

$\mathbb{L} \ldots$ Gödelova struktura na $[0,1]$

1. $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \ldots a_i \in L$

   $\lim_{i\rightarrow\infty} = 0$ a $a_i > 0$ pro každéi

   $\bigwedge a_i = 0$ pro $b = 0$ platí:

   $\bigwedge a_i \rightarrow b = 0 \rightarrow 0 = 1$

   $\bigvee(a_i \rightarrow b) = \bigvee b = b = 0$

   $\bigvee(a_i \rightarrow b) \leq \bigwedge a_i \rightarrow b$

2. $\{b\}_{i=0}^{\infty} \ldots b_i \in L$

   $\lim_{i\rightarrow\infty} b_i = a = 0.5$

   $b_i \leq a$

   $\bigvee(a \rightarrow b_i) = \bigvee b_i = 0.5$

   $a \rightarrow \bigvee b_i = 0.5 \rightarrow 0.5$!!!

   $\bigvee(a \rightarrow b_i < a \rightarrow \bigvee b_i$!!!

Věta 12: Nechť $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$ je úplný svaz svaz a $\langle L, \otimes, 1\rangle$ je komutativní monoid. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

$$\text{k } \otimes \exists \rightarrow \text{ splňující adjunkci} \tag{1}$$

$$\otimes \text{ je monotonní a } \{c \in L | a \otimes c \leq b\} \text{ má největší prvek} \tag{2}$$

$$a \otimes \bigvee b_i = \bigvee(a \otimes b_i) \tag{3}$$

$$\otimes \text{ je adjungovaná k } \rightarrow \text{ definovaná:} a \rightarrow b = \bigvee\{c \in L | a \otimes c \leq b\} \tag{4}$$

Důkaz. Víme: (1) $\Rightarrow$ (2) // Věta 6, Věta 9

(1) $\Rightarrow$(3) // Věta 10

(4) $\Rightarrow$ (1) // triviálně

(2) $\Rightarrow$ (4): Položíme $a \to b = \bigvee\{c \in L | a \otimes c \leq b\}$ tj. $a \to b \in \{c \in L | a \otimes c \leq b\}$

$a \otimes (a \to b \leq b$

Když $a \otimes c \leq b$ pak $c \leq a \to b$ (z definice $\to$)

Opačně: Nechť $c \leq a \to b$ z monotonie součinu (předpoklad): $a \otimes c \leq a \otimes (a \to b) \leq b$

(3) $\Rightarrow$ (4): Monotonie $\otimes$ je důsledkem distributivity $\otimes$ k $\bigvee$

$a \leq b \ldots a \vee b = b$

$c \otimes (a \vee b) = (c \otimes a) \vee (c \otimes b)$

$c \otimes b \leq c \otimes a$

$a \otimes c \leq b$ implikuje $c \leq a \to b$ z definice $\to$

Pokud $c \leq a \to b$, pak $c \leq \bigvee\{d | a \otimes d \leq b\}$

$a \otimes c \leq a \otimes \bigvee\{d | a \otimes d \leq b\} = \bigvee\{a \otimes d | a \otimes d \leq b\}$ □