UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
KATEDRA INFORMATIKY

Radek Janoštík (radek.janostik01@upol.cz)

KMI/NLO – Neklasické logiky

8. října 2014

Abstrakt

Tento dokument je pouze přepisem zápisků a poznámek z přednášek předmětu KMI/NLO. Přednášel doc. Vilém Vychodil PhD.

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

1. Přednáška 1 - jemný úvod

1.1. Formální logika

- studium vyplývání $\rightarrow$ formalizuje výroky, výrazy přirozeného jazyka $\rightarrow$ formule. Definuje se, že formule je/není důsledkem jiných formulí.

1.2. Odlišnosti logik

1. Co vše popisuje jazyk - tj. co jsme schopni vyjádřit pomocí formulí.
   Př.:
   (a) Výroková logika - zabývá se výroky - neformálně výraz, o kterém se uvažuje, že je pravdivý či ne.
   Atomická formule - nemůže se dělit na podvýrazy pomocí spojek. Nahrazují je výrokové symboly
   Složitější formule - 1)Výrokový symbol je formule.
   2) Je-li φ formule, pak i $\neg\varphi$ je formule.
   3) Jsou-li φ, ψ formule, pak i $\varphi \Rightarrow \psi$ je formule.
   (b) Predikátová logika - zabývá se (mj.) strukturou výroků
   $(\forall x)(\forall y)(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$ - formule jazyka, kde $R = \{\leq\}$, $F = \{f\}$
   (c) Modální logiky - formalizují modality - "muset", "moci" ...
   Modální výroková - $\Box$ ... musí, $\diamond$ ... může.
   Formule: Je-li φ formule, pak i $\Box\varphi$ a $\diamond\varphi$ jsou formule.
   Paradox Arnošta Večerky: „Když mám 10 korun, koupím si čokoládu.“: $\varphi \Rightarrow \psi$
   „Když mám 10 korun, koupím si bonbon.“: $\varphi \Rightarrow \chi$
   $T = \{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \chi\}$ $T \vdash \varphi \Rightarrow (\psi \wedge \chi)$
   Modální logika dodá „může“. $T = \{\varphi \Rightarrow \diamond\psi, \varphi \Rightarrow \diamond\chi\}$ $T \vdash \varphi \Rightarrow (\diamond\psi \wedge \diamond\chi)$. Pozor: $T \nvdash \varphi \Rightarrow \diamond(\psi \wedge \chi)$

2. Tím, jak zavádí vyplývání
   (a) Sémantické - navrhneme interpretaci formulí.
   VL: zavedeme ohodnocení: $e : V \rightarrow \{0,1\}$ $||\varphi||_e$ ...
   PL: $\langle R, F, \sigma\rangle \rightarrow \mathbb{M} = \langle M, R^M, F^M\rangle$ $||\varphi||_{M,v}$ ... $T \models \varphi$
   mod. VL: $\Box\varphi, \diamond\varphi$ - Kripkeho struktura - $\mathbb{K} = \langle W, r, e\rangle$
   $r \subseteq W \times W$ $\langle w_1, w_2\rangle \in r$ ... w_2 je dosažitelný z w_1
   $e : W \times V \rightarrow \{0,1\}$
   $||\Box\varphi||_{\mathbb{K},w} = 1$ pokud <u>pro každý</u> $w' \in W$ platí: pokud $\langle w, w'\rangle \in r$ pak $||\varphi||_{\mathbb{K},w'} = 1$
   $|| \diamond \varphi||_{\mathbb{K},w} = 1$ ... existuje ...
   (b) Syntaktické ... důkaz
   kl. VL: Pravidlo: z $\varphi, \varphi \Rightarrow \psi$ odvoď ψ
   $(Ax) : \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$
   $(\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$
   $(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$
   PL: Pravidlo: z φ odvoď $(\forall x)\varphi$
   Distrib: $(\forall x)\varphi \Rightarrow \varphi(x/t)$
   Spec: $(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi)$

   Lze zavést vyplývání jinak? - Alternativní syntaktické vyplývání - Gentzenovské dokazovací systémy - „natural deduction“

   Např.: V.Vychodil - prahová booleovská logika.

1.3. Co budeme zkoumat tento semestr

Neklasické logiky, ve kterých se uvažuje, že atomické formule mohou nabývat stupňů pravdivosti - 0...1 - mezní dva stupně.

0...(plně) nepravdivý

1...(plně) pravdivý

$0 < a < 1$ ...stupeň pravdivosti

$\rightarrow$ Základní interpretace $\rightarrow$ komparativní

$||\varphi||_a = a, ||\psi||_b = b$ $a \leq n$ ... φ je méně pravdivá než ψ.

$e : V \rightarrow L$ $\mathbb{L} = \langle L, \leq, 0, 1\rangle$ ...ohraničená uspořádaná množina.

$||\varphi||_e \in L$

$\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ ...úplný svaz (zbytečně silné)

$\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ ...svaz (ohraničený)

Zbývá vyřešit, jak interpretovat logické spojky a které spojky vzít jako základní.

Princip kompozicionality: $||\varphi \Rightarrow \psi||_e = ||\varphi||_e \rightarrow ||\psi||_e$

$\rightarrow$ - logická operace, která interpretuje $\Rightarrow$:

$\rightarrow: L \times L \rightarrow L$: $\begin{array}{c|cc} \rightarrow & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$

60. léta Lotfi Askerzadeh - koncept fuzzy množiny - $\wedge$...min, $\vee$...max, $\neg$...$1 - a$

J.A.Goguen - $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$

Modus ponens - $\frac{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}{\psi}$ - 1. pohled $\frac{||\varphi \Rightarrow \psi||_e = 1, ||\varphi||_e = 1}{||\psi||_e = 1}$

2. pohled - min. dolní mez pravdivosti ψ odvozujeme z min. dolních mezí předchozích dvou. $\frac{a \leq ||\varphi \Rightarrow \psi||, b \leq ||\varphi||}{a \otimes b \leq ||\psi||}$ ... $\otimes \rightarrow \{0, 1\}$ ... pravdivostní funkce konjunkce.

Pozorování: $\Rightarrow$ ... $||\varphi \Rightarrow \psi|| = ||\varphi|| \rightarrow ||\psi||$

$\otimes$... pravdivostní funkce konjunkce

Jaký by měly mít vztah $(\otimes, \rightarrow)$? Chceme, aby zobecněné MP bylo korektní:

Pokud $a \leq ||\varphi \Rightarrow \psi||$ a $b \leq ||\varphi||$ pak $a \otimes b \leq ||\psi||$ pro $b = ||\varphi||$ a $c = ||\psi||$ použitím $||\varphi \Rightarrow \psi|| = ||\varphi|| \rightarrow ||\psi|| = b \rightarrow c$

Pokud $a \leq ||\varphi \Rightarrow \psi|| = b \rightarrow c$, pak $a \otimes b \leq c$

$a \leq b \rightarrow c$ pak $a \otimes b \leq c$

Zobecněné MP mělo maximální možnou sílu - $b = ||\varphi||, c = ||\psi||$:

Pokud $a \otimes b \leq ||\psi|| = c$, pak $a \leq ||\varphi|| \rightarrow ||\psi|| = b \rightarrow c$

Dohromady:

$$a \otimes b \leq c \text{ p.k. } a \leq b \rightarrow c \ldots \text{ adjunkce}$$

(Úplný) reziduovaný svaz $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1\rangle$

$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$...(úplný) svaz

$\langle L, \otimes, 1\rangle \cdots \otimes$...binární operace, komutativní, asociativní, $a \otimes 1 = a$

$\rightarrow$... binární operace, která splňuje adjunkci.

MP: $\frac{\varphi, \neg\varphi \vee \psi}{\psi} \rightarrow \frac{\varphi \vee \psi, \neg\varphi}{\psi}$ skrytý sém. význam: $\frac{1 \leq ||\varphi \vee \psi||, ||\varphi|| \leq 0}{1 \leq ||\psi||}$

$\frac{a\leq||\varphi\vee\psi||,||\varphi||\leq b}{c\leq||\psi||}$, $c = a \ominus b$

$\ominus$	0	1
0	0	0
1	1	0

$a \ominus b = \neg(a \to b)$

$\vee \cdots \oplus$ $\ominus \ldots$ pravdivostní funkce abjunkce - „neimplikace“

Pro $b = ||\varphi||, c = ||\psi||$ korektnost: $a \leq ||\varphi \vee \psi|| = b \oplus c$ pak $a \ominus b \leq c$

síla: $a \ominus b \leq ||\psi|| = c$ pak $a \leq b \oplus c$

$\oplus \ldots$ komutativní, asociativní, neutrální vůči 0

$\ominus \ldots$ adjungovaná k $\oplus$

$$a \ominus b \leq c \text{ p. k. } a \leq b \oplus c$$