

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
KATEDRA INFORMATIKY

Radek Janošík (radek.janostik01@upol.cz)

KMI/NLO – Neklasické logiky



9. října 2014

Abstrakt

Tento dokument je pouze přepisem zápisků a poznámek z přednášek předmětu KMI/NLO. Přednášel [doc. Vilém Vychodil PhD.](#)

Obsah

1. Přednáška 1 - jemný úvod	1
1.1. Formální logika	1
1.2. Odlišnosti logik	1
1.3. Co budeme zkoumat tento semestr	2
2. Přednáška 2 - reziduované svazy	3

Seznam obrázků

Seznam tabulek

1. Přednáška 1 - jemný úvod

1.1. Formální logika

- studium vyplývání \rightarrow formalizuje výroky, výrazy přirozeného jazyka \rightarrow formule. Definuje se, že formule je/není důsledkem jiných formulí.

1.2. Odlišnosti logik

1. Co vše popisuje jazyk - tj. co jsme schopni vyjádřit pomocí formulí.

Př.:

- (a) Výroková logika - zabývá se výroky - neformálně výraz, o kterém se uvažuje, že je pravdivý či ne.
Atomická formule - nemůže se dělit na podvýrazy pomocí spojek. Nahrazují je výrokové symboly
Složitější formule - 1) Výrokový symbol je formule.
2) Je-li φ formule, pak i $\neg\varphi$ je formule.
3) Jsou-li φ, ψ formule, pak i $\varphi \Rightarrow \psi$ je formule.
- (b) Predikátová logika - zabývá se (mj.) strukturou výroků
 $(\forall x)(\forall y)(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$ - formule jazyka, kde $R = \{\leq\}$, $F = \{f\}$
- (c) Modální logiky - formalizují modalitu - "muset", "moci" ...
Modální výroková - $\Box \dots$ musí, $\Diamond \dots$ může.
Formule: Je-li φ formule, pak i $\Box\varphi$ a $\Diamond\varphi$ jsou formule.
Paradox Arnošta Večerky: „Když mám 10 korun, koupím si čokoládu.“: $\varphi \Rightarrow \psi$
„Když mám 10 korun, koupím si bonbon.“: $\varphi \Rightarrow \chi$
 $T = \{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \chi\} \quad T \vdash \varphi \Rightarrow (\psi \wedge \chi)$
Modální logika dodá „může“. $T = \{\varphi \Rightarrow \Diamond\psi, \varphi \Rightarrow \Diamond\chi\} \quad T \vdash \varphi \Rightarrow (\Diamond\psi \wedge \Diamond\chi)$. Pozor:
 $T \not\vdash \varphi \Rightarrow \Diamond(\psi \wedge \chi)$

2. Tím, jak zavádí vyplývání

- (a) Sémantické - navrhne interpretaci formulí.
VL: zavedeme ohodnocení: $e : V \rightarrow \{0, 1\} \quad \|\varphi\|_e \dots$
PL: $\langle R, F, \sigma \rangle \rightarrow \mathbb{M} = \langle M, R^M, F^M \rangle \quad \|\varphi\|_{M,v} \dots T \models \varphi$
mod. VL: $\Box\varphi, \Diamond\varphi$ - Kripkeho struktura - $\mathbb{K} = \langle W, r, e \rangle$
 $r \subseteq W \times W \quad \langle w_1, w_2 \rangle \in r \dots w_2$ je dosažitelný z w_1
 $e : W \times V \rightarrow \{0, 1\}$
 $\|\Box\varphi\|_{\mathbb{K},w} = 1$ pokud pro každý $w' \in W$ platí: pokud $\langle w, w' \rangle \in r$ pak $\|\varphi\|_{\mathbb{K},w'} = 1$
 $\|\Diamond\varphi\|_{\mathbb{K},w} = 1 \dots$ existuje ...
- (b) Syntaktické ... důkaz
kl. VL: Pravidlo: z $\varphi, \varphi \Rightarrow \psi$ odvoď ψ
 $(Ax) : \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$
 $(\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$
 $(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$
PL: Pravidlo: z φ odvoď $(\forall x)\varphi$
Distrib: $(\forall x)\varphi \Rightarrow \varphi(x/t)$
Spec: $(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi)$

Lze zavést vyplývání jinak? - Alternativní syntaktické vyplývání - Gentzenovské dokazovací systémy - „natural deduction“

Např.: V.Vychodil - prahová booleovská logika.

1.3. Co budeme zkoumat tento semestr

Neklasické logiky, ve kterých se uvažuje, že atomické formule mohou nabývat stupňů pravdivosti - $0 \dots 1$ - mezní dva stupně.

$0 \dots$ (plně) nepravdivý

$1 \dots$ (plně) pravdivý

$0 < a < 1 \dots$ stupeň pravdivosti

\rightarrow Základní interpretace \rightarrow komparativní

$\|\varphi\|_a = a, \|\psi\|_b = b \ a \leq b \dots \varphi$ je méně pravdivá než ψ .

$e: V \rightarrow L \ \mathbb{L} = \langle L, \leq, 0, 1 \rangle \dots$ ohraničená uspořádaná množina.

$\|\varphi\|_e \in L$

$\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle \dots$ úplný svaz (zbytečně silné)

$\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle \dots$ svaz (ohraničený)

Zbývá vyřešit, jak interpretovat logické spojky a které spojky vzít jako základní.

Princip kompozicionality: $\|\varphi \Rightarrow \psi\|_e = \|\varphi\|_e \rightarrow \|\psi\|_e$

\rightarrow - logická operace, která interpretuje \Rightarrow :

$$\rightarrow: L \times L \rightarrow L: \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

60. léta Lotfi Askerzadeh - koncept fuzzy množiny - $\wedge \dots \min, \vee \dots \max, \neg \dots 1 - a$

J.A.Goguen - $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$

Modus ponens - $\frac{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}{\psi}$ - 1. pohled $\frac{\|\varphi \Rightarrow \psi\|_e = 1, \|\varphi\|_e = 1}{\|\psi\|_e = 1}$

2. pohled - min. dolní mez pravdivosti ψ odvozujeme z min. dolních mezí předchozích dvou.
 $\frac{a \leq \|\varphi \Rightarrow \psi\|, b \leq \|\varphi\|}{a \otimes b \leq \|\psi\|} \dots \otimes \rightarrow \{0, 1\} \dots$ pravdivostní funkce konjunkce.

Pozorování: $\Rightarrow \dots \|\varphi \Rightarrow \psi\| = \|\varphi\| \rightarrow \|\psi\|$

$\otimes \dots$ pravdivostní funkce konjunkce

Jaký by měly mít vztah (\otimes, \rightarrow) ? Chceme, aby zobecněné MP bylo korektní:

Pokud $a \leq \|\varphi \Rightarrow \psi\|$ a $b \leq \|\varphi\|$ pak $a \otimes b \leq \|\psi\|$ pro $b = \|\varphi\|$ a $c = \|\psi\|$ použitím $\|\varphi \Rightarrow \psi\| = \|\varphi\| \rightarrow \|\psi\| = b \rightarrow c$

Pokud $a \leq \|\varphi \Rightarrow \psi\| = b \rightarrow c$, pak $a \otimes b \leq c$

$a \leq b \rightarrow c$ pak $a \otimes b \leq c$

Zobecněné MP mělo maximální možnou sílu - $b = \|\varphi\|, c = \|\psi\|$:

Pokud $a \otimes b \leq \|\psi\| = c$, pak $a \leq \|\varphi\| \rightarrow \|\psi\| = b \rightarrow c$

Dohromady:

$$a \otimes b \leq c \text{ p.k. } a \leq b \rightarrow c \dots \text{ adjunkce}$$

(Úplný) reziduovaný svaz $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$

$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle \dots$ (úplný) svaz

$\langle L, \otimes, 1 \rangle \dots \otimes \dots$ binární operace, komutativní, asociativní, $a \otimes 1 = a$

$\rightarrow \dots$ binární operace, která splňuje adjunkci.

MP: $\frac{\varphi, \neg \varphi \vee \psi}{\psi} \rightarrow \frac{\varphi \vee \psi, \neg \varphi}{\psi}$ skrytý sém. význam: $\frac{1 \leq \|\varphi \vee \psi\|, \|\varphi\| \leq 0}{1 \leq \|\psi\|}$

$$\frac{a \leq \|\varphi \vee \psi\|, \|\varphi\| \leq b}{c \leq \|\psi\|},$$

$$c = a \ominus b$$

\ominus	0	1	$a \ominus b = \neg(a \rightarrow b)$
0	0	0	
1	1	0	

$$\vee \dots \oplus$$

$\ominus \dots$ pravdivostní funkce abjunkce - „neimplikace“

Pro $b = \|\varphi\|, c = \|\psi\|$ korektnost: $a \leq \|\varphi \vee \psi\| = b \oplus c$ pak $a \ominus b \leq c$

síla: $a \ominus b \leq \|\psi\| = c$ pak $a \leq b \oplus c$

$\oplus \dots$ komutativní, asociativní, neutrální vůči 0

$\ominus \dots$ adjungovaná k \oplus

$$a \ominus b \leq c \text{ p. k. } a \leq b \oplus c$$

2. Přednáška 2 - reziduované svazy

$$\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$$

$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle \dots$ – ohraničený nebo úplný svaz

$\leq \dots a \leq b$ p.k. $a \wedge b = a$ p.k. $a \vee b = b$

$\langle L, \otimes, 1 \rangle \dots$ komutativní monoid (= asociativní, neutrální prvek – 1)

$\rightarrow \dots$ binární operace:

$$a \otimes b \leq c \text{ p.k. } a \leq b \rightarrow c \text{ pro } \forall a, b, c$$

Věta 1: $a \otimes 0 = 0 \otimes a$ tj. \otimes se na hodnotách z $\{0, 1\}$ chová stejně jako pravdivostní funkce klasické konjunkce.

Důkaz. $0 \leq a \rightarrow 0$, protože 0 je nejmenší z L .

Z adjunkce: $0 \otimes a \leq 0$ tj. $0 \otimes a = 0$. Opačná nerovnost plyne z komutativity \otimes

□

Věta 2: $a \rightarrow b = 1$ p.k. $a \leq b$

$1 \rightarrow 0 = 0$ tj. \rightarrow se na hodnotách $\{0, 1\}$ chová jako klasická implikace.

Důkaz. $a \leq b$ p.k. $a \otimes 1 \leq b$ p.k. $1 \leq a \rightarrow b$ (\geq platí vždy - 1 je největší prvek)

$$1 \rightarrow 0 \leq 1 \rightarrow 0$$

$1 \otimes (1 \rightarrow 0) \leq 0$ z neutrality $1 \rightarrow 0 \leq 0$ (\geq platí vždy - 0 je nejmenší prvek.)

□

Věta 3: Reziduum \rightarrow je jednoznačně dané součinem \otimes a obráceně. (Ale nemusí vůbec existovat)

Důkaz. Nechť $\langle \otimes, \rightarrow_1 \rangle$ a $\langle \otimes, \rightarrow_2 \rangle$ jsou odjungované páry.

$$a \leq b \rightarrow_1 c \text{ p.k. } a \otimes b \leq c \text{ p.k. } a \leq b \rightarrow_2 c$$

Dále jasné: pro $a = b \rightarrow_1 c$ vyplývá $b \rightarrow_1 c \leq b \rightarrow_2 c$

$$\text{pro } a = b \rightarrow_2 c \text{ vyplývá } b \rightarrow_2 c \leq b \rightarrow_1 c$$

□

Příklad 1: Todo: Obrázek diamantu. Diamant \mathbb{N}_3 – neexistuje žádný adjungovaný pár.

Příklad 2: Todo: Obrázek 4hodnotové boolovy algebry. $x \otimes y = x \wedge y$

$x \rightarrow y = x \vee y \dots$ 4hodnotová booleova algebra.

Věta 4: (a) $a \leq b \rightarrow (a \otimes b) \dots a \otimes b \leq a \otimes b$

(b) $b \leq a \rightarrow (a \otimes b \dots \text{z komutativity } \otimes$

(c) $a \otimes (a \rightarrow b) \leq b \dots a \rightarrow b \leq a \rightarrow b$

(d) $a \leq (a \rightarrow b) \rightarrow b$

Důsledek 1: Tato věta + Věta 2: $a \rightarrow (b \rightarrow (a \otimes b)) = 1$

$$(a \otimes (a \rightarrow b)) \rightarrow b = 1$$

Věta 5: $a \rightarrow (b \rightarrow c) = (a \otimes b) \rightarrow c = b \rightarrow (a \rightarrow c)$

Důkaz. 1.

$$\begin{aligned} a \rightarrow (b \rightarrow c) &\leq a \rightarrow (b \rightarrow c) \\ a \otimes (a \rightarrow (b \rightarrow c)) &\leq b \rightarrow c \\ b \otimes a \otimes (a \rightarrow (b \rightarrow c)) &\leq c \\ (a \otimes b) \otimes (a \rightarrow (b \rightarrow c)) &\leq c \\ a \rightarrow (b \rightarrow c) &\leq (a \otimes b) \rightarrow c \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (a \otimes b) \rightarrow c &\leq (a \otimes b) \rightarrow c \\ (a \otimes b) \otimes ((a \otimes b) \rightarrow c) &\leq c \\ a \otimes ((a \otimes b) \rightarrow c) &\leq b \rightarrow c \\ (a \otimes b) \rightarrow c &\leq a \rightarrow (b \rightarrow c) \end{aligned}$$

Dokázána první rovnost, druhá plyne z komutativity \otimes .

□

Věta 6: \otimes je izotonní v obou argumentech. Pokud $a \leq b$ pak $a \otimes c \leq b \otimes c$. Tedy pokud $a_1 \leq b_1$ a $a_2 \leq b_2$ pak $a_1 \otimes a_2 \leq b_1 \otimes b_2$

Důkaz.

$$\begin{aligned} b \otimes c &\leq b \otimes c \\ b &\leq c \rightarrow (b \otimes c) \\ \text{tj.:} a &\leq c \rightarrow (b \otimes c) // \text{z transitivity } \leq \\ a \otimes c &\leq b \otimes c \end{aligned}$$

Druhý bod plyne dvojnásobným použitím předchozího: $a_1 \otimes a_2 \leq b_1 \otimes a_2 \leq b_1 \otimes b_2$

□

Věta 7: $(a \rightarrow b) \otimes (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c$

Důkaz. Stačí ukázat, že platí:

$$\begin{aligned} a \otimes (a \rightarrow b) \otimes (b \rightarrow c) &\leq c \\ a \otimes (a \rightarrow b) &\leq b \\ a \otimes (a \rightarrow b) \otimes (b \rightarrow c) &\leq b \otimes (b \rightarrow c) \leq c \end{aligned}$$

□

Věta 8: \rightarrow je antitonní v prvním argumentu a izotonní v druhém argumentu. Tj. pokud $a \leq b$ pak $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$, pokud $b \leq c$ pak $a \rightarrow b \leq a \rightarrow c$

Důkaz. Pokud $a \leq b$ z

$$\begin{aligned} b \rightarrow c &\leq b \rightarrow c \\ b \otimes (b \rightarrow c) &\leq c \\ b &\leq (b \rightarrow c) \rightarrow c \\ a &\leq (b \rightarrow c) \rightarrow c \\ (b \rightarrow c) \otimes a &\leq c \\ b \rightarrow c &\leq a \rightarrow c \end{aligned}$$

Pokud $b \leq c$ z:

$$\begin{aligned} a \rightarrow b &\leq a \rightarrow b \\ a \otimes (a \rightarrow b) &\leq b \\ a \otimes (a \rightarrow b) &\leq c \\ (a \rightarrow b) &\leq a \rightarrow c \end{aligned}$$

□