1. Pojam i primjena linearnog programiranja. Operaciona istraživanja?

- Ubrzan ekonomski razvoj => primjena više matematike i statistike u ekonomiji
- Matematika kao koncizno i objektivno sredstvo izražavanja veza između ekonomskih veličina
- Ekonomija primjenom matematike postaje egzaktna nauka jer su pojmovi i veze među njima toliko jasno definisani da se mogu iskazati univerzalnim jezikom matematike

Operaciona istraživanja

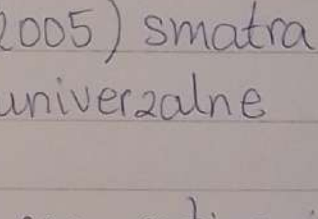
- Pojam vezan za početak Drugog svjetskog rata
- Džordž Dancig (George Dantzig, 1914-2005) smatra se „ocem linearnog programiranja" zbog univerzalne simpleks metode
- Transportna metoda, teorija duala, metode raspoređivanja

Modeli operacionih istraživanja = matematički izrazi određenih sistema

Metode operacionih istraživanja - dovode do optimalnog rješenja analiziranog problema

II svjetski rat

- rješavanje vojnih, borbenih zadataka
- u Velikoj Britaniji formirana grupa naučnika s ciljem da doprinesu odbrani od Nijemaca.



Nakon rata grupa je oformila klub za operaciona istra-
živanja i promovisala novu naučnu disciplinu kako bi
se uspjesi sa vojnih problema proširili na rješavanje
problema u industriji i privredi.

Razvoj OI ima karakteristike nezaustavljivog procesa.
Preduslov za primjenu matematike:

- Ekonomsko-matematički model: apstrakcija ekonomske stvarnosti prikazana skupom relacija koje označavaju međuzavisnost varijabli koje čine posmatranu ekonomsku pojavu.
- Elementi svakog ekonomskog modela su:
  - varijable
  - relacije
  - parametri

Linearno programiranje

Matematičko programiranje je oblast primijenjene matematike čiji je predmet istraživanje ekstremne vrijednosti funkcije više varijabli uz pretpostavku da postoje određena ograničenja vrijednosti tih varijabli i njihovih veza.

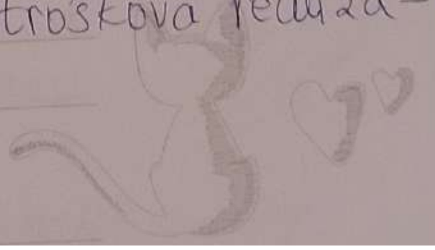
Uključuje linearno i nelinearno programiranje.
Mi izučavamo linearno.
Svaki matematički model (pa tako i model LP) ima:

1. funkciju cilja
2. sistem ograničavajućih faktora
3. uslov nenegativnosti

Predmet linearnog programiranja je određivanje optimalnog rješenja problema koji ima veći broj rješenja.
Linearno programiranje je matematički instrument pomoću kojeg se eliminiše subjektivizam, ono je objektivna osnova za određivanje najpovoljnijeg rješenja nekog problema.

Problemi linearnog programiranja

1. Problem izbora optimalne strukture nacionalne privrede
2. Izbor optimalne investicione odluke
3. Planiranje optimalne vrijednosti finalne potrošnje
4. Utvrđivanje optimalnog nivoa spoljno-trgovinske razmjene
5. Izračunavanje optimalnog programa korištenja sirovina
6. Utvrđivanje optimalnog programa proizvodnje
7. Problemi uskih grla pojedinih mašina/proizvodnih linija
8. Problemi kolektivne ishrane
9. Problemi mješavine
10. Problemi otpadaka
11. Problemi lokacije
12. Problemi transporta
13. Problemi raspoređivanja
14. Planiranje integracije i kooperacije preduzeća
15. Programiranje ukupnog vremena i troškova realizacije složenih projekata



2 Opšti oblik modela LP (Standardni i kanonski oblik, skalarni i matrični oblik)

Model linearnog programiranja je matematički izraz nekog problema prevedenog u linearne jednačine i nejednačine. Sastoji se iz funkcije cilja i sistema ograničenja.

Funkcija cilja je ~~kvalitativni~~ kvantitativni izraz zahtjeva koji se želi ostvariti rješavanjem posmatranog problema.
Sistem ograničenja je kvantitativni izraz ~~odgovarajućih~~ ograničavajućih faktora koji se javljaju u rješavanju posmatranog modela.
I funkcija cilja i SOF su u linearnoj formi.

Model LP sastoji se od veličina:

x_j - varijable $(j=\overline{1,k})$
c_j - koeficijenti uz varijable u funkciji cilja
z - funkcija cilja
a_{ij} - koeficijenti uz varijable u sistemu ograničenja
a_{i0} - slobodni članovi u SO $(i=\overline{1,m})$

Standardni oblik modela LP napisan u skalarnoj notaciji:

$$(\max); z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k \leq a_{10}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k \leq a_{20}$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k \leq a_{m0}$$
$$x_i \geq 0 \quad i=\overline{1,k} \text{ - uslov nenegativnosti}$$

Redukovana forma prethodnog:

$$(max);\ z = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \leq a_{i0} \quad (i = \overline{1,m})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,k})$$

Standardni oblik, matrična forma:

$$(max);\ z = \vec{C}\vec{X}$$

$$A\vec{X} = \vec{A_0}$$

$$\vec{X} \geq \vec{0}$$

$$C = [c_1\ c_2 \dots c_k] \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{bmatrix}$$

Kanonski oblik modela LP dobijamo uvođenjem izravnavajućih varijable x_{k+i}. Tako dobijamo sistem jednačina umjesto nejednačina.

Skalarna notacija: $(c_{k+i} = 0)$

$$(max);\ z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k + c_{k+1} x_k + \dots + c_{k+m} x_m$$

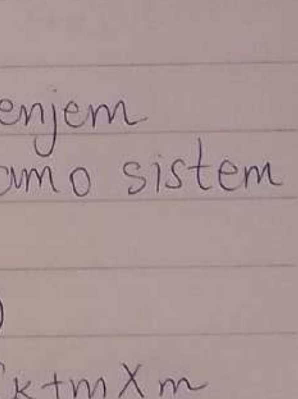
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + x_{k+1} = a_{10}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2k}x_k \quad + x_{k+2} = a_{20}$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k + \quad \dots + x_{k+m} = a_{m0}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, k+m})$$



Kanonski oblik, skalarna notacija, redukovana forma:

$$(max); z = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} c_{k+i} x_{k+i}$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_{j} + x_{k+i} = a_{i0} \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, k+m})$$

Kanonski oblik, matrična forma:

$$(max); z = \vec{C}\vec{X}$$

$$A\vec{X} = \vec{A_0}$$

$$\vec{X} \geq \vec{0}$$

$$\vec{C} = [c_1 \; c_2 \; \dots \; c_k \; c_{k+1} \; \dots \; c_{k+m}]$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+m} \end{bmatrix} \qquad \vec{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

3 Uslovi koje mora ispuniti jedan problem da bi se mogao rješavati metodama LP

1. Linearna veza

Između svih varijabli mora postojati linearna veza, što znači da su sve relacije linearne jednačine i nejednačine. Ovaj uslov podrazumijeva da budu ispunjene i pretpostavke o proporcionalnosti (da su ulazne i izlazne veličine proporcionalne) i aditivnosti (da se ukupna vrijednost funkcije cilja dobije kao zbir pojedinačnih doprinosa)

2. Postojanje cilja

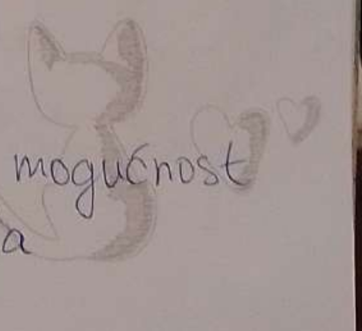
Da bi se između većeg broja mogućih rješenja izabralo optimalno, neophodno je definisati kriterij optimalnosti. Možemo govoriti o jednokriterijalnom i višekriterijalnom programiranju. Model jednokriterijalnog programiranja sadrži jednu funkciju cilja, a višekriterijalno ima više ciljeva.

3. Postojanje ograničavajućih faktora

U problemima se javljaju ograničenja, npr. određeni resursi u ograničenim količinama.

4. Višeznačna rješenja problema

Problem koji ima samo jedno rješenje ne može biti problem linearnog programiranja



Odsustvo bilo kojeg od 4 uslova isključuje mogućnost primjene metoda linearnog programiranja

4 Opšti oblik rješenja modela LP u 1. i 2. iteraciji

- Pretpostavka prve iteracije je da su realne varijable jednake nuli ($x_j = 0$, $j = \overline{1,k}$). Iz toga slijedi:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j}_{0} + x_{k+i} = a_{i0} \qquad i = \overline{1,m}$$

$$x_{k+i} = a_{i0}$$

Vrijednost funkcije cilja u prvoj iteraciji je:

$$z^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} c_{k+i} a_{i0}$$

- U drugoj iteraciji pretpostavićemo da je jedna realna varijabla pozitivna. Neka je to varijabla $x_v > 0$ i neka je koeficijent uz tu varijablu $a_{iv} > 0$ u barem jednoj jednačini.

Treba izračunati vrijednosti realne varijable x_v i preostalih bazičnih izravnavajućih varijabli.

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j + x_{k+i} = a_{i0} \qquad i = \overline{1,m}$$

$$a_{iv} x_v + x_{k+i} = a_{i0}$$

$$x_{k+i} = a_{i0} - a_{iv} x_v \quad \forall i$$

Pošto važi uslov nenegativnosti

$$x_{k+i} = a_{i0} - a_{iv} x_v \geq 0$$

$$0 \leq x_v \leq \frac{a_{i0}}{a_{iv}}$$

$$x_v = \min_i \left\{ \frac{a_{i0}}{a_{iv}} \right\} = \frac{a_{r0}}{a_{rv}}$$

Vrijednost izravnavajućih varijabli biće

$$x_{k+i} = a_{i0} - a_{iv} \frac{a_{r0}}{a_{rv}} \quad \text{za} \quad i \neq r$$

$$x_{k+i} = 0 \quad i = r$$

Vrijednost funkcije cilja u drugoj iteraciji biće

$$z^{(2)} = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} c_{k+i} x_{k+i}$$

Za $j = v$ imamo

$$z^{(2)} = c_v x_v + \sum_{i=1}^{m} c_{k+i} x_{k+i}$$

Uopštena relacija glasi: $\qquad$ j-ta varijabla bazična

$$z'' = z' - \frac{a_{r0}}{a_{rv}} (z_j - c_j)$$

5. Vrste rješenja modela linearnog programiranja

Neka je dat model LP u matričnom obliku:

$$(max)\; z = \vec{C}\vec{X}$$
$$A \cdot \vec{X} \leq \vec{A_0}$$
$$\vec{X} \geq \vec{0}$$

Razlikujemo sljedeće vrste rješenja:

1. Moguće

Svaki vektor $\vec{X}$ koji zadovoljava nejednačinu $A\vec{X} \leq \vec{A_0}$ i uslov nenegativnosti $\vec{X} \geq \vec{0}$ predstavlja moguće rješenje.

2. Bazično moguće (degenerisano i nedegenerisano)

Ako vektor $\vec{X}$ koji je moguće rješenje ima najviše m pozitivnih koordinata (x_j) - gdje je m broj ograničenja - onda je on bazično moguće rješenje.

Nedegenerisano - vektor $\vec{X}$ ima TAČNO m pozitivnih koord.

Degenerisano - ima MANJE OD m poz. koord.

3. Optimalno

Ako vektor $\vec{X}$ koji je moguće rješenje modela ~~za~~ obezbjeđuje ekstremnu vrijednost funkcije cilja, onda je to opt. rješenje.

4. ~~Negativno~~ Nemoguće

Ukoliko je bar jedna koordinata vektora $\vec{X}$ negativna, takvo rješenje je nemoguće.

6. Dokazati teoremu: Skup svih mogućih rješenja modela LP je konveksan skup tačaka.

Pretpostavimo da su poznata dva moguća rješenja - $\vec{X_1}$ i $\vec{X_2}$

$$A\vec{X_1} = \vec{A_0} \quad \vec{X_1} \geq \vec{0}$$
$$A\vec{X_2} = \vec{A_0} \quad \vec{X_2} \geq \vec{0}$$
$$\vec{X_1}, \vec{X_2} \in K \qquad K\text{- konveksan skup tačaka}$$

Neka je $\vec{X_3} = \alpha\vec{X_1} + (1-\alpha)\vec{X_2}$, linearna konveksna kombinacija $\vec{X_1}$ i $\vec{X_2}$ i $\vec{X_3} \in K$. Ako dokažemo da je i $\vec{X_3}$ moguće rješenje, teorema je dokazana.

$$\vec{X_3} = \alpha\vec{X_1} + (1-\alpha)\vec{X_2} \quad / \cdot A$$
$$A\vec{X_3} = \alpha A\vec{X_1} + (1-\alpha)A\vec{X_2}$$
$$A\vec{X_3} = \alpha\vec{A_0} + \cancel{\alpha}\,\vec{A_0} - \alpha\vec{A_0}$$
$$A\vec{X_3} = \vec{A_0} \qquad \vec{X_3} \geq \vec{0}$$

*

7. Navesti ostale teoreme LP (bez dokaza)

- Funkcija cilja modela LP $z = \vec{C}\vec{X}$ postiže svoju maksimalnu ili minimalnu vrijednost u jednoj ekstremnoj tački $\vec{X_0}$, koja pripada skupu K ili u svakoj konveksnoj kombinaciji dvije ili više ekstremnih tačaka iz K koje obezbjeđuju ekstremnu vrijednost funkcije cilja.

- Ako postoji m linearno nezavisnih vektora $\vec{A_1}, \vec{A_2}, \dots, \vec{A_m}$ tako da je $\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = \vec{A_0}$, pri čemu je $x_j \geq 0$, tada je tačka $\vec{X'} = [x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0]$ ekstremna tačka konveksnog skupa K. Svih $(n-m)$ koordinata tačke $\vec{X}$ su nule.

- Ako je $\vec{X'} = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]$ ekstremna tačka konveksnog skupa K, onda su vektori kojim odgovaraju pozitivne koordinate x_j $(j = \overline{1,m})$ linearno nezavisni. Iz toga proističe da može biti najviše m pozitivnih koordinata x_j vektora $\vec{X}$.

- Skup svih mogućih rješenja modela LP je konveksan skup tačaka.

8 Dual duala je primar - Dokazati

Primarni model

$$(\min);\ z = \vec{C}\cdot\vec{X}$$
$$A\cdot\vec{X} \geq \vec{A_0}$$
$$\vec{X} \geqslant \vec{0}$$

Dualni model

$$(\max);\ g = \vec{Y}\vec{A_0}$$
$$\vec{Y}A \leq \vec{C}$$
$$\vec{Y} \geqslant \vec{0}$$

Pomnožimo dualni model sa (-1):

$$-(\max);\ g = -\vec{Y}\cdot\vec{A_0}$$
$$-\vec{Y}A \geqslant -\vec{C}$$

Zamijenimo $-(\max);\ g = (\min);\ (-g)$

$$(\min);\ (-g) = -\vec{Y}\vec{A_0}$$
$$-\vec{Y}A \geqslant \vec{C}$$

Dualni model tog modela je:

$$(\max);\ (-z) = -\vec{C}\vec{X} \qquad /\cdot -1$$
$$-A\vec{X} \leq -\vec{A_0} \qquad /\cdot -1$$
$$\vec{X} \geqslant \vec{0}$$

Imamo:

$$-(\max);\ (-z) = \vec{C}\vec{X} \ \rightarrow\ (\min);\ z = \vec{C}\vec{X}$$
$$A\vec{X} \geqslant \vec{A_0}$$
$$\vec{X} \geqslant \vec{0}$$

Dobijamo primarni model:

$$(\min);\ z = \vec{C}\vec{X}$$
$$A\vec{X} \geqslant \vec{0}$$
$$\vec{X} \geqslant \vec{0}$$

Ova teorema vrijedi samo za simetrične duale, odnosno one koji su nastali od primara kod kojih su sva ograničenja nejednačine istog relacijskog znaka.

9 Opisati transportni problem i zapisati odgovarajući model

Iako se simpleks metodom mogu rješiti svi problemi LP (univerzalna metoda), postoje problemi koji se brže i jednostavnije rješavaju pomoću specijalnih - transportnih metoda

Pomoću transportnih metoda se rješavaju problemi transporta robe iz više ishodišta u više odredišta, tako da ukupni troškovi transporta budu minimalni. Postoje i problemi koji nisu transportni, ali se mogu rješavati pomoću transportnih metoda. To su npr. lokacioni problemi, problemi razmještaja mašina po radnim mjestima, problemi uvoza i izvoza...

Opis transportnog problema

Osnovna pretpostavka transportnog problema jeste da postoji jedna vrsta proizvoda koja se može transportovati iz više ishodišta u više odredišta. Neka u opštem slučaju postoji m ishodišta i n odredišta. Neka je količina proizvoda kojom raspolaže svako ishodište a_i $(i=\overline{1,m})$, a količina proizvoda koju potražuje svako odredište b_j $(j=\overline{1,n})$. Troškovi transporta robe iz i-tog ishodišta u j-to odredište je c_{ij}, a količina robe koje i-to ishodište isporučuje j-tom odredištu je x_{ij}. To je veličina koju tražimo.

Transportna tabela:

		Odredišta						
		1	2	...	j	...	n	a_i
Ishodišta	1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1j}	...	X_{1n}	a_1
	2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2j}	...	X_{2n}	a_2
	⋮	...	...	...	...	...	...	...
	i	X_{i1}	X_{i2}	...	X_{ij}	...	X_{in}	a_i
	⋮	...	...	...	...	...	...	...
	m	X_{m1}	X_{m2}	...	X_{mj}	...	X_{mn}	a_m
b_j		b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Transportni model:

Pošto je to model LP, on ima funkcju cilja i sistem ograničenja. Cilj je minimiziranje troškova transporta. Rješenje transportnog problema je optimalno sa stanovišta zajedničkog interesa svih učesnika, a ne svakog pojedinačno.

Opšti oblik transportnog modela glasi:

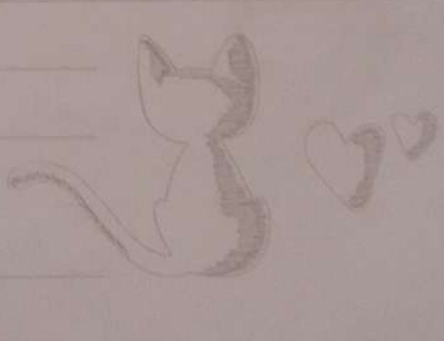
$$(min); z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = \overline{1,n}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$



Transportni modeli se dijele na:

1. zatvorene $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

2. otvorene $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$

Otvoreni model potrebno je zatvoriti.

1° $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

Uvodimo fiktivno odredište

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Model je onda:

$$(min); z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1, m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = \overline{1, n+1}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$c_{i,\, n+1} = 0$$

2° $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$

Fiktivno ishodište. $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$

$$(min); z = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1, m+1}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \quad j = \overline{1, n}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

10 Dokazati: U zatvorenom transportnom modelu u sistemu ograničenja postoji tačno $(m+n-1)$ linearno nezavisnih jednačina, odnosno svako njegovo bazično rješenje sadrži najviše $(m+n-1)$ bazičnih varijabli $x_{ij} \geq 0$. Svaka od preostalih $(m-1)(n-1)$ nebazičnih varijabli $x_{ij} = 0$.

Zatvoreni transportni model:

$$(\min);\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = \overline{1,n}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Tvrdnja ove teoreme je da se bilo koja od $(m+n)$ jednačina iz sistema može predstaviti pomoću preostalih $(m+n-1)$.

Izdvojimo jednu jednačinu iz sistema, za $i=1$:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = a_1$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = \overline{2,m} \quad / \cdot (-1) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} -\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= -a_i \quad i = \overline{2,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j \end{aligned}\right\} +$$

$$-\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=2}^{m} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \sum_{i=2}^{m} x_{ij}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = a_1$$

Time je dokazano da je rezultujuća jna - koja je lin. kombinacija $(m+n-1)$ jna zapravo izdvojena, prva jednačina sistema.

11 Dualni model transportnog modela

- Uslov nenegativnosti ne vryedi za ovaj model
- Dualni model glasi:

$$(max): g = \sum_{i=1}^{m} a_i r_i + \sum_{j=1}^{n} b_j k_j$$

$$r_i + k_j \leq c_{ij}$$

Značaj dualnog transportnog modela ogleda se u činjenici da se na ovom modelu zasniva MODI metoda. Iz ograničenja $r_i + k_j \leq c_{ij}$ mogu se izvesti dvije grupe relacija koje su temelj te metode:

1) $r_i + k_j + d_{ij} = c_{ij}$ d_{ij} - dualne izravnavajuće varijable
2) ako je $x_{ij} > 0$, $d_{ij} = 0$:

$$r_i + k_j = c_{ij}$$

ako je $x_{ij} = 0$, $d_{ij} = c_{ij} - (r_i + k_j)$

12. Opisati problem raspoređivanja i zapisati odgovarajući model

Problem raspoređivanja se javlja kada je potrebno rasporediti određene aktivnosti ili resurse na izvršioce ili radna mjesta, tako da se postigne najveća efikasnost.

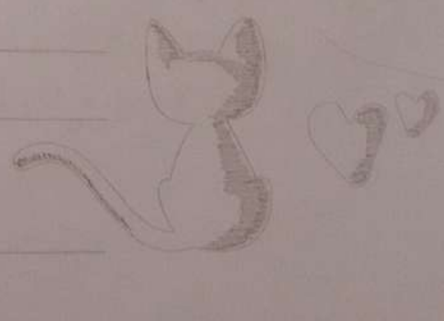
To je specijalni model LP, preciznije specijalni model transportnog modela.

Uzmimo da treba rasporediti m aktivnosti na n izvršilaca. Neka je raspoloživi broj aktivnosti i-te vrste a_i, a raspoloživi broj izvršilaca j-te kolone b_j. Označimo sa c_{ij} efikasnost i-te aktivnosti koja je dodijeljena j-tom izvršiocu, a sa x_{ij} varijablu koja pokazuje da je i-ta aktivnost dodijeljena j-tom izvršiocu

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je i-ta aktivnost raspoređena j-tom izvršiocu} \\ 0, & \text{ako i-ta aktivnost nije raspoređena j-tom izvr.} \end{cases}$$

Tabela raspoređivanja:

		Izvršioci				Broj aktivnosti a_i
		1	2	...	n	
Aktivnosti	1	$x_{11}^{c_{11}}$	$x_{12}^{c_{12}}$	...	$x_{1n}^{c_{1n}}$	1
	2	$x_{21}^{c_{21}}$	$x_{22}^{c_{22}}$	...	$x_{2n}^{c_{2n}}$	1
	⋮					...
	m	$x_{m1}^{c_{m1}}$	$x_{m2}^{c_{m2}}$	...	$x_{mn}^{c_{mn}}$	1
Broj izvrš. b_j		1	1	..	1	n \ m



Model raspoređivanja temelji se na pretpostavci da se jedna aktivnost može dodijeliti samo jednom izvršiocu.

Model raspoređivanja glasi:

$$(\overset{min}{\cancel{max}});\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i=\overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j=\overline{1,n}$$

$$x_{ij} = \{0,1\}$$

Ovaj model se zove nula-jedan model ili model binarnog programiranja.

Model raspoređivanja može biti zatvoreni ili otvoreni:

1. zatvoreni $m=n$
2. otvoreni $m\neq n$

1° $m<n$

$$(min);\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i=\overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad j=\overline{1,n}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

2. $n<m$

$$(min);\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad i=\overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j=\overline{1,n}$$

$$x_{ij} = \{0,1\}$$

1° fiktivna aktivnost $(m<n)$

$$(\min);\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c_{m+1}\, x_{m+1,j}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + x_{m+1,j} = 1$$

$$x_{ij} = \{0,1\}$$

2. fiktivni izvršilac $(n<m)$

$$(\min);\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} c_{i,n+1}\, x_{i,n+1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i,n+1} = 1 \quad i=\overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j=\overline{1,n}$$

$$x_{ij} = \{0,1\}$$

13. Dualni oblik modela raspoređivanja

Dualni oblik modela raspoređivanja zapisaćemo polazeći od sličnosti i razlika sa transportnim modelom. Te razlike koje vrijede za njihove primare, vrijede i za njihove duale.

Primar transportnog modela:

$$(\min);\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall j$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Primar trasportnog modela

$$(\min);\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$$

$$x_{ij} = \{0, 1\}$$

Iste funkcije cilja i lijeve strane u sistemu ograničenja, jedino što su u modelu raspoređivanja $a_i = b_j = 1$.

Dual transportnog modela

$$(\max);\ g = \sum_{i=1}^{m} a_i r_i + \sum_{j=1}^{n} b_j k_j$$

$$r_i + k_j \leq c_{ij}$$

$\Rightarrow$ Dual modela raspoređivanja

$$(\max);\ g = \sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{j=1}^{n} k_j$$

$$r_i + k_j \leq c_{ij}$$

Ni za jedan od ovih dualnih modela ne vrijedi uslov nenegativnosti.

14. Opšti oblik modela cjelobrojnog programiranja i njegova primjena

Pojam i primjena

Cjelobrojno programiranje je oblast matematičkog programiranja. Predmet našeg interesovanja su cjelobrojni linearni modeli.

Primjena:

1. Problem optimalnog programa proizvodnje u slučajevima kada varijable koje predstavljaju količinu nekog proizvoda moraju biti cijeli brojevi (npr. broj mašina koje se izrađuju)
2. Problem optimalnog proširenja kapaciteta postrojenja - broj novih mašina kojima će biti proširen postojeći kapacitet
3. Problem otpadaka - broj drvenih ploča, metalnih tabli ili valjaka papira standardnih dimenzija koji se sijeku po određenim varijantama moraju biti cijeli brojevi
4. Problem donošenja optimalne investicione odluke - (0-1) problem - uložiti ili ne
5. Problem raspoređivanja određenog broja radnika na određeni broj radnih mjesta

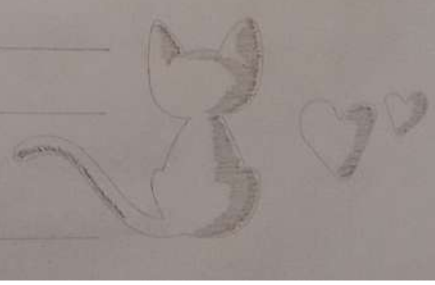
Opšti oblik modela cjelobrojnog programiranja

$$(max); z = \sum_{j=1}^{k_1} c_j x_j + \sum_{j=1}^{k_2} \overline{c}_j \overline{x}_j$$

$$\sum_{j=1}^{k_1} a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{k_2} \overline{a}_{ij} \overline{x}_j \leq a_{i0} \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, k_1}$$

$$\overline{x}_j \geq 0 \quad j = \overline{1, k_2}$$



Model je:

1. model potpuno cjelobrojnog programiranja: $k_1 > 0,\ k_2 = 0$
2. model djelimičnog cjelobrojnog prog: $k_1 > 0,\ k_2 > 0$
3. ordinarni model: $k_1 = 0,\ k_2 > 0$

Poseban slučaj modela cjelobrojnog programiranja je (0-1) mod

$$(max);\ z = \sum_{j=1}^{k_1} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{k_1} a_{ij} x_j \leq a_{i0} \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j = \{0, 1\}$$

15. Opšti oblik modela razlomljenog programiranja (skalarno i matrično) i njegova primjena.

Razlomljeno programiranje je oblast matematičkog programiranja, oblast nelinearnog programiranja. Funkcije cilja ovih modela sadrže razlomljene racionalne (nelinearne) funkcije.

U zavisnosti od toga da li se u funkciji cilja i sistemu ograničenja javljaju samo linearne, i linearne i nelinearne, ili samo nelinearne funkcije, razlomljeno prog se dijeli na:

1. razlomljeno linearno
2. ~~ne~~razlomljeno nelinearno

Razlomljeno prog. je relativno mlada oblast primijenjene matematike.

Drugi naziv za razlomljeno programiranje je hiperboličko. (~~Navi~~ Naziv potiče otuda što je grafička reprezentacija razlomljene racionalne funkcije hiperbola)

Primjena:

1. maksimiranje koeficijenta produktivnosti
2. maksimiranje koeficijenta rentabilnosti
3. maksimiranje koeficijenta ekonomičnosti
4. maksimiranje koeficijenta sigurnosti poslovanja
5. maksimiranje dobiti
6. minimiziranje troškova proizvodnje

Opšti oblik modela RP (skalarno):

1. funkcija cilja: $(max);\ z = \dfrac{c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k + c_0}{d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_kx_k + d_0}$

2. sistem ograničenja:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k &\le a_{10} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k &\le a_{20} \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k &\le a_{m0} \\
x_j &\geq 0
\end{aligned}
$$

Matrično:

$$(max);\ z = \frac{\vec{C}\vec{X} + c_0}{\vec{D}\vec{X} + d_0}$$

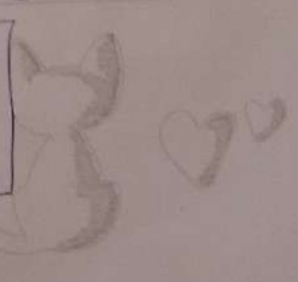
$$\vec{C} = [c_1\ c_2 \dots c_k]$$

$$\vec{D} = [d_1\ d_2 \dots d_k]$$

$$A\vec{X} \le \vec{A_0}$$

$$\vec{X} \geq \vec{0}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}$$



$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{bmatrix} \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

16. Osnovni pojmovi u teoriji strateških ~~igra~~ igara i vrste igara

Naziv teorija igara potiče od igara sa kartama i šahovskih igara. Počeci razvoja teorije igara vezuju se za 18. vijek. Danas nema oblasti gdje se teorija igara ne primjenjuje.

Predmet teorije igara je analiza konfliktnih situacija, odnosno situacija u kojim se suprotstavljaju interesi 2 ili više sukobljenih strana. Konačan rezultat tog sukoba zavisi od poteza koje preduzima svaka od strana. Konfliktne situacije su čest problem u realnom životu (privredi, politici, sportu, vojsci...)

Osnovni pojmovi u teoriji igara su:

1. igra
2. strategija
3. potez

Igra predstavlja skup pravila, dogovora, konvencija kojih se moraju pridržavati učesnici u sukobu.

Strategija je akcija koju će preduzeti jedan od igrača kako bi se suprotstavio svojim protivnicima. Cilj teorije igara je ~~sup~~ utvrđivanje optimalne strategije za svakog igrača.

Optimalna je ona strategija koja osigurava najveći dobitak za igrača koji dobija, a najmanji gubitak za igrača koji gubi.

Potez je izbor jedne od mogućih strategija.

Vrste igara:

1. U zavisnosti od toga koliko sposobnost igrača utiče na ishod igre:
   - igre na sreću - utiče sreća učesnika
   - strateške (matrične) igre - utiče sposobnost igrača

2. Prema broju raspoloživih strategija
   - sa konačnim brojem strategija - najčešće
   - sa beskonačnim brojem strategija

3. U zavisnosti od raspoloživih informacija u trenutku igre:
   - sa nepotpunim informacijama
   - sa potpunim informacijama

4. U zavisnosti od veze među igračima:
   - nekoalicione
   - koalicione

5. U zavisnosti od toga da li igrači ~~miješ~~ mijenjaju strategije:
   - sa čistom strategijom
   - sa mješovitim strategijama

6. U zavisnosti od rezultata igre
   - sa sumom nula
   - sa nenultom sumom

7. Prema broju igrača: sa dva, tri ili više igrača

17. Pojam matrice plaćanja u teoriji igara

Neka su u sukobu 2 igrača:

A - sa strategijama A_i $(i=\overline{1,m})$

B - sa strategijama B_j $(j=\overline{1,n})$

Ako se igrač A opredijeli za i-tu strategiju, a B za j-tu, tj. ishod igre je a_{ij}. Mogu da se jave slučajevi:

1. $a_{ij} > 0$ A dobija, a B gubi tu vrijednost
2. $a_{ij} < 0$ A gubi, a B dobija -II-
3. $a_{ij} = 0$ niti dobijaju niti gube

Matrica plaćanja $M = [a_{ij}]_{m\times n}$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Strategije igrača A su predstavljene vrstama, a igrača B kolonama matrice M.

	B	$\to j$		
A $\downarrow i$	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Pretpostavka je da su oba igrača razborita i inteligentna. Igrač A treba da za svaku svoju strategiju procjeni najmanji dobitak, pa među najmanjim izabere najveći. To je donja vrijednost igre:

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0}$$

Igrač B za svoje strategije procjeni najveće gubitke, pa bira najmanji od njih. To je gornja vrijednost igre

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i^0 j^0}$$

$(a_{i_0 j_0} \leq a_{i^0 j^0})$

18. Dokazati teoremu: Ako svaki element matrice plaćanja povećamo ili smanjimo za istu konstantu k, neće doći do promjene optimalnih strategija, a očekivana vrijednost igre će se povećati, odnosno umanjiti za tu konstantu.

$k>0$ Treba dokazati da vrijedi relacija:

$$\boxed{E^*(X,Y) = E(X,Y) \pm k}$$

$$E^*(X,Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i(a_{ij} \pm k)y_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j \pm \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i k y_j$$

$$= E(X,Y) \pm k \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j = E(X,Y) \pm k$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

Međusektorski modeli, metode i analiza

Osnovna karakteristika savremenih privreda je visok stepen specijalizacije i kooperacije svih učesnika. Idealna međusektorska tabela bi sadžala onoliko redova i kolona koliko ima različitih proizvoda, ali je nemoguće i zamisliti.

Proizvodni sektori su povezani međusobnim isporukama i nabavkama. Jedan sektor dio svoje proizvodnje isporučuje ostalim sektorima, a drugi dio zadrži za sebe, za potrebe reprodukcione potrošnje. S druge strane, svaki sektor je primalac dobara od ostalih sektora, a postoji i potreba za dobrima koja se nabavljaju van ovog sistema (vanjske nabavke, uvoz

Međusektorska (input-output) tabela daje pregled informacija o odnosima između sektora i odnosima sektora sa okruženjem.

Pretpostavićemo da je proizvodni sistem podijeljen na n sektora

X_{ij} - vrijednost proizvodnje koju i-ti sektor isporučuje j-tom

X_i - vrijednost raspodijeljene proizvodnje i-tog sektora

X_j - društveni-bruto*proizvod j-tog sektora

Y_i - finalna potrošnja i-tog sektora

M_j - vanjske nabavke j-tog sektora

D_j - društveni proizvod j-tog sektora

SI \ SP	1	2	3	...	n	$\sum_j x_{ij}$	Y_i	X_i
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{1n}	$\sum x_{1j}$	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}		x_{2n}	$\sum x_{2j}$	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}		x_{3n}	$\sum x_{3j}$	Y_3	X_3
⋮	...	...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}		x_{nn}	$\sum x_{nj}$	Y_n	X_n
$\sum_i x_{ij}$	$\sum x_{i1}$	$\sum x_{i2}$	$\sum x_{i3}$		$\sum x_{in}$	$\sum\sum x_{ij}$	$\sum Y_i$	$\sum X_i$
M_j	M_1	M_2	M_3	...	M_n	$\sum M_j$		
D_j	D_1	D_2	D_3		D_n	$\sum D_j$		
X_j	X_1	X_2	X_3		X_n	$\sum X_j$		

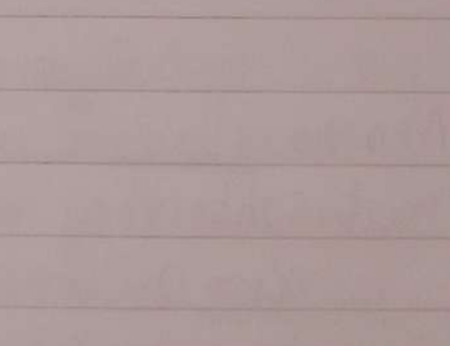
SI - sektori isporučioci

SP - sektori primaoci

$$X_i = \sum_j x_{ij} + Y_i$$

$$X_j = \sum_i x_{ij} + M_j + D_j$$

$$\sum_i Y_i = \sum_j M_j + \sum_j D_j$$



19 Postupno izvesti polazni i rješeni oblik međusektorskog modela

Polazimo od jednačina namjenske raspodjele proizvodnje pojedinih sektora.

$$X_1 = x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + Y_1$$
$$X_2 = x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + Y_2$$
$$\vdots$$
$$X_n = x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} + Y_n$$

Ovo je sistem od n jednačina sa $(2n + n^2)$ varyabli. Svešćemo broj varyabli na $2n$ tako što ćemo pretpostaviti da je x_{ij} funkcija vrijednosti proizvodnje j-tog sektora.

$$x_{ij} = f(X_j)$$

Neka je ova veza linearna:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j \qquad a_{ij} \text{ - tehnički koeficjent}$$

Ako to stavimo u polazni sistem dobijamo polazni oblik međusektorskog modela:

$$X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + Y_1$$
$$X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n + Y_2$$
$$\vdots$$
$$X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n + Y_n$$

ili matrično:

$$\vec{X} = A\vec{X} + \vec{Y}$$

Polazni oblik ima n jednačina i 2n varijabli, pa će rješenje biti jednoznačno ako n varijabli bude egzogeno zadano, a n varijabli endogeno. Moguća su dva rješenja:

1. rješenje po $\vec{Y}$:
$$\vec{X} = A\vec{X} + \vec{Y} \Rightarrow \boxed{\vec{Y} = (I-A)\cdot\vec{X}}$$
2. rješenje po $\vec{X}$
$$\vec{X} = A\vec{X} + \vec{Y} \Rightarrow \boxed{\vec{X} = (I-A)^{-1}\cdot\vec{Y}}$$

20. Matrica tehničkih koeficijenata, pojam, izračunavanje i osobine

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

Tehnički koeficijent a_{ij} pokazuje vrijednost proizvodnje i-tog sektora koju on isporučuje j-tom sektoru da bi j-ti sektor mogao da izradi jedinicu društvenog bruto proizvoda.
Sve tehničke koeficijente možemo smjestiti u matricu tehničkih koeficijenata.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ona je pokazatelj intenziteta veza između sektora. Što je tehnički koeficijent a_{ij} veći, to je povezanost sektora i i j veća.

Ukupni tehnički koeficijent: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

21. Matrica sektorskih multiplikatora (pojam, izračunavanje, osobine)

$(I-A)$ - matrica tehnologije

Matrica tehnologije je regularna $\Rightarrow$ ima inverznu matricu

$(I-A)^{-1}$ - matrica sektorskih multiplikatora

$$(I-A)^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

Redukovani ~~model~~ oblik medusektorskog modela $\vec{X} = (I-A)^{-1}\vec{Y}$ može se zapisati kao:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Odakle slijedi da je proizvodnja i-tog sektora:

$$X_1 = r_{11}Y_1 + r_{12}Y_2 + \dots + r_{1n}Y_n$$

Sektorski multiplikator r_{ij} pokazuje koliko je vrijednost proizvodnje i-tog sektora uslovljena jedinicom proizvodnje j-tog sektora koja je namjenjena finalnoj potrošnji.

Osobine matrice sektorskih multiplikatora:

1. Ova matrica je nenegativna

$$(I-A)^{-1} \geq 0 \quad , \quad r_{ij} \geq 0$$

2. Svaki element na glavnoj dijagonali ove matrice je veći od 1, $r_{ij} > 1 \quad i=j$

Ukupni sektorski multiplikator j-tog sektora:

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij}$$

22. Međusektorski model cijena

U sistemu tržišne privrede dolazi do promjene cijena dobara. Pretpostavimo da su povećane cijene ~~koje~~ dobara koje j-ti sektor nabavlja izvana za određeni procenat. Efekti tog poskupljenja neće se odraziti na ostale sektore ako ga j-ti sektor apsorbuje na račun svoje dobiti. Međutim, ako on može to poskupljenje prebaciti na ostale sektore tako što će povećati cijene svojih proizvoda, ostali sektori će ili povećati posljedično cijene svojih proizvoda ili apsorbovati poskupljenje na račun svoje dobiti. Ekonomski položaj ostalih sektora u odnosu na j-ti će se pogoršati i nastaće složen splet lančanih procesa koji će zahvatiti i j-ti sektor povećanjem njegovih proizvodnih troškova.

Naš zadatak je konstrukcija modela pomoću kojeg je moguće ~~po~~ pratiti ove lančane efekte.

Uvedimo oznake:

1. koeficijent promjene cijena proizvodnje

$$p_j = \frac{X_j^1}{X_j^0}$$

X_j^1 - vrijednost društvenog bruto proizvoda j-tog sektora nakon promjene cijena njegovih proizvoda

X_j^0 - prije promjene

$$\vec{p} = [p_1\ p_2 \ldots p_n]$$

2. koeficijent promjene cijena vanjskih nabavki

$$k_j = \frac{M_j^1}{M_j^0}$$

M_j^1 - vrijednost vanjskih nabavki nakon promjene cijena

M_j^0 - -ll- prije -ll-

$$\vec{k} = [k_1\ k_2 \ldots k_n]$$

3. koeficijent promjene ~~cijen~~ veličine društvenog proizvoda

$$z_j = \frac{D_j^1}{D_j^0}$$

D_j^1 - vrijednost društvenog proizvoda j-tog sektora nakon njegove promjene

D_j^0 - prije promjene

$$\vec{z} = [z_1\ z_2 \ldots z_n]$$

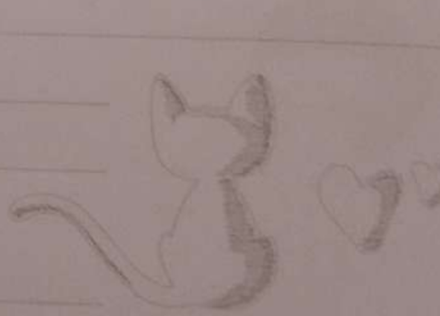
$\vec{p} = \vec{p}A + \vec{k}\hat{m} + \vec{z}\hat{d}$

Polazni oblik međusektorskog modela cyena ima 3 jednoznačna rješenja:

1. $\vec{p} = f(k, z)$ $\quad \vec{p} = \{k\hat{m} + z\hat{d}\}(I-A)^{-1}$
2. $\vec{k} = f(p, z)$ $\quad \vec{k} = \{\vec{p}(I-A) - \vec{z}\hat{d}\}\hat{m}^{-1}$
3. $\vec{z} = f(p, k)$ $\quad \vec{z} = \{\vec{p}(I-A) - k\hat{m}\}\cdot\hat{d}^{-1}$

23. Optimizacija finalne potrošnje.

./.



Mrežno planiranje / programiranje

- metode mrežnog planiranja su metode planiranja realizacije složenih zadataka
- omogućavaju:
    - jasan pregled realizacije čitavog projekta
    - prikaz logičkog slijeda i međuzavisnosti parcijalnih zadataka
    - preciziranje početka i završetka parcijalnih zadataka
    - ~~uvo~~ uvid u potrebna sredstva
    - saznanja o vremenski najopterećenjem toku

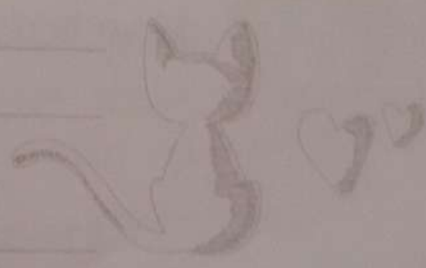
Mrežno planiranje je mlada oblast OI.
Dvije najznačajnije metode su:

CPM Critical Path Method

PERT ~~Project~~ Program Evaluation and Review Technique

Mrežno planiranje obuhvata:

1. analizu strukture
2. analizu vremena
3. analizu troškova
4. analizu resursa



24 Osnovni pojmovi u mrežnom programiranju

- Bez obzira da li se radi o CPM ili PERT metodi, prva faza MP je analiza strukture
- Analiza strukture podrazumijeva uspostavljanje logičkog redoslijeda i međuzavisnosti parcijalnih zadataka složenog zadatka.
- Osnovni pojmovi u MP su:
  1. projekat
  2. aktivnost
  3. Događaj

* Projekat je poduhvat, proces ili posao koji predstavlja predmet planiranja. To je složen zadatak koji će biti završen samo ako su završeni svi njegovi dijelovi.

Primjeri za projekte:
- građevinski projekti (zgrade, putevi, mostovi ...)
- naučno-istraživački i razvojni projekti (novi proizvod, eksperimenti)
- proizvodni projekti (~~nove~~ proizvodnja mašina, uređaja, opreme ...)
- planski projekti (izrada dugoročnih, srednjoročnih i godišnjih planova, finansijski planovi ...)
- planiranje kadra (planovi školovanja kadra, specijalizacije kadra ...)
- društveni i kulturni projekti (seminari, kongresi, savjetovanja, snimanja filmova ...)

* Aktivnost je dio projekta koji se može posmatrati kao zasebna cjelina, te joj se može odrediti početak, trajanje i kraj.

Vrste aktivnosti:

1. 1.1. realne - one za čiju realizaciju treba vrijeme i troškovi
   1.2. vještačke - nije potrebno vrijeme i troškovi
2. 2.1. složene - mogu se dalje dijeliti na jednostavnije
   2.2. proste - nedjeljive
3. 3.1. prethodne - moraju biti završene da bi otpočela realizacija posmatrane aktivnosti
   3.2. naredne - one čija realizacija može da počne kad završi posmatrana aktivnost

Primjeri aktivnosti u projektu izgradnje zgrade:
- otkup zemljišta, izrada dokumentacije, kopanje temelja, izgradnja temelja, prvog sprata, drugog sprata ...

Aktivnosti se grafički predstavljaju usmjerenim dužima (→)
Dužina duži ne predstavlja trajanje aktivnosti.

* Događaj je vremenski trenutak početka ili završetka neke aktivnosti. Dijelimo ih na početne i završne. Događaj se odigrava trenutno i odražava stanje u kojem nema nikakve aktivnosti. Ako više aktivnosti ima jedan zajednički završni događaj, smatra se da je završni događaj određen najkasnijim završetkom jedne od tih aktivnosti. Zajednički početni događaj više aktivnosti određen je početkom aktivnosti koja je najranije počela.
Događaj se grafički ilustruje kružnicom.

25. Pojam mrežnog dijagrama i pravila za njegovo crtanje

Analiza strukture obuhvata:

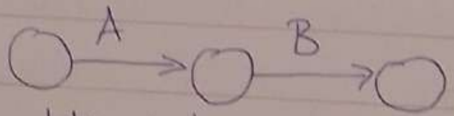
1. sastavljanje tabele međuzavisnosti
2. formiranje matrice međuzavisnosti
3. crtanje mrežnog dijagrama

U tabeli međuzavisnosti dat je popis svih aktivnosti i informacije o tome koje aktivnosti su prethodne, a koje naredne za ostale aktivnosti.

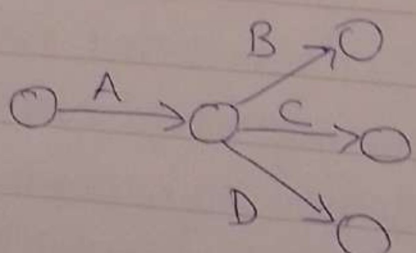
Matrica međuzavisnosti je kvadratna matrica u kojoj su informacije koje aktivnosti su nezavisne, i koje su prethodne a koje naredne za svaku posmatranu aktivnost.

Mrežni dijagram je grafička ilustracija složenog zadatka.
Pravila za crtanje su:

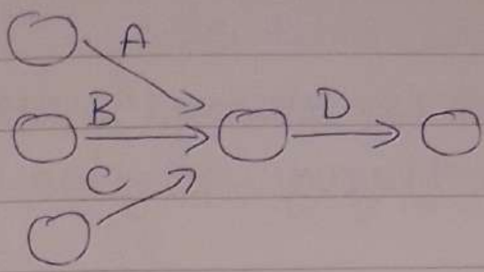
1. Činjenica da aktivnost B može početi tek kad završi aktivnost A, grafički se predstavlja na sljedeći način:



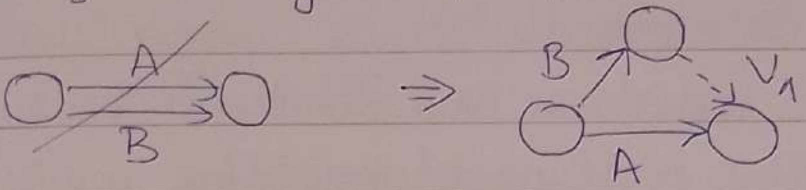
2. više aktivnosti može početi tek kad se završi jedna prethodna aktivnost:



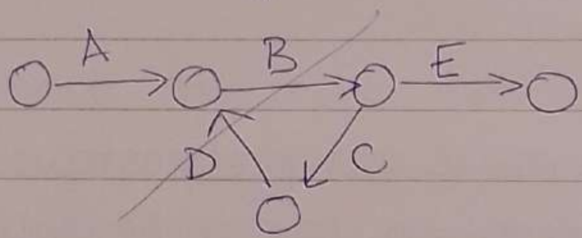
(3) više aktivnosti mora biti završeno da bi jedna počela



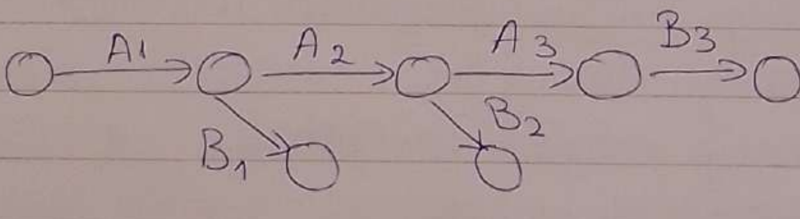
(4.) nije dozvoljeno ~~pre~~ paralelno crtanje aktivnosti



(5.) nisu dozvoljene petlje



(6.) složena aktivnost A se može podijeliti na više prostih aktivnosti (A_1, A_2, A_3) pa neka od narednih aktivnosti B može početi čim se izvrše neki dijelovi



Numeracija događaja: Metoda rastućih sukcesivnih brojeva. Ako više događaja treba dobiti isti broj, numeracija se obavlja slijeva udesno, odnosno odozgo nadolje.

Analiza vremena

Analiza projekta postaje sveobuhvatnija kad se u model uključi vrijeme. Analiza vremena obuhvata:

- izračunavanje ~~v~~ vremena izvršavanja svake aktivnosti
- izračunavanje vremena trajanja projekta

Metode za analizu vremena:

1. CPM - Critical Path Method
2. PERT - Program Evaluation and Review Technique

Prva je deterministička, a druga stohastička.

26. Metoda kritičnog puta

CPM - Critical Path Method

Metoda kritičnog puta bazira se na pretpostavci da je moguće odrediti tačno vrijeme za koje će se završiti svaka pojedinačna aktivnost (deterministička metoda)

Vrijeme trajanja aktivnosti označavamo sa t_{ij}.

Za svaku aktivnost vezana su 4 zbivanja događaja:

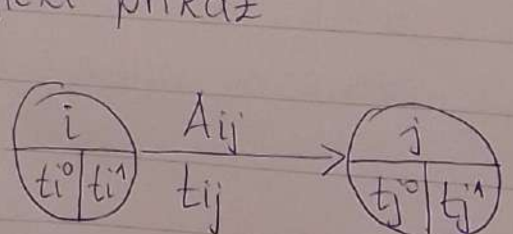
t_i^0 - najraniji mogući početak aktivnosti A_{ij}

t_i^1 - najkasniji dozvoljeni -||-

t_j^0 - najraniji mogući završetak -||-

t_j^1 - najkasniji dozvoljeni -||-

Grafički prikaz



Uzima se da projekat kao cjelina otpočinje u nekom nultom trenutku $(t_i^0 = 0)$

Aktivnost A_{ij} može otpočeti onda kada je završena aktivnost sa najdužim trajanjem od svih aktivnosti koje prethode aktivnosti A_{ij}.

Najraniji mogući završetak projekta jednak je najranijem ~~mogućem~~ završetku one aktivnosti koja ima završni događaj u završnom događaju projekta, a kojoj odgovara

$$\max\{t_j^0\}$$

Aktivnost A_{ij} mora biti završena najkasnije u momentu koji osigurava da ne dođe do produžavanja vremena završetka projekta (najkasniji dozvoljeni završetak aktivnosti A_{ij})

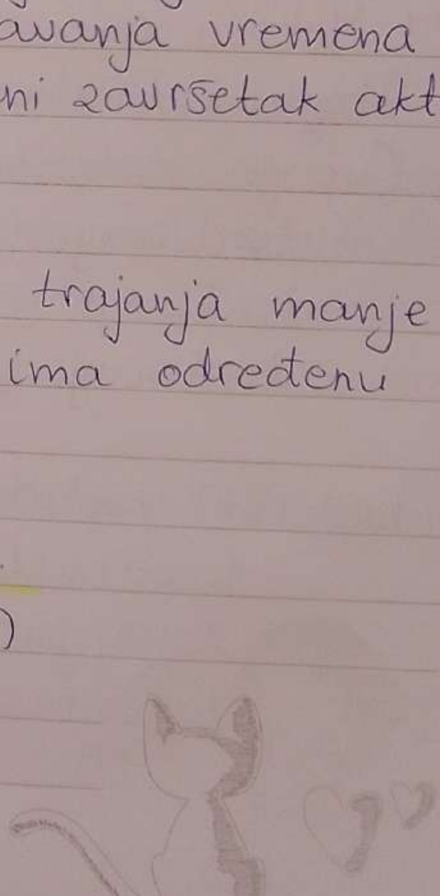
Svaka aktivnost kod koje je vrijeme trajanja manje od maksimalno dozvoljenog vremena ima određenu vremensku rezervu:

$$t_j^1 - t_{ij} - t_i^0 \geq 0$$

Razlikujemo sljedeće vremenske rezerve:

1. opštu $R_{ij}^u = t_j^1 - t_{ij} - t_i^0$ (ukupnu)
2. slobodnu $R_{ij}^s = t_j^0 - t_{ij} - t_i^0$
3. nezavisnu $R_{ij}^n = t_j^0 - t_{ij} - t_i^1$
4. zavisnu $R_i^z = t_i^1 - t_i^0$

$$R_j^z = t_j^1 - t_j^0$$



Kritične aktivnosti su aktivnosti koje moraju početi u svojim najranijim počecima, da bi bile završene u svojim najkasnijim završecima. Vrijeme trajanja projekta kao geline može se skratiti samo skraćivanjem vremena trajanja kritičnih aktivnosti. Vrijeme trajanja projekta jednako je vremenu trajanja kritičnog puta. Da bi aktivnost bila proglašena kritičnom, mora ispunjavati dva uslova:

1. potreban uslov

$$R_{ij}^{u} = t_j^1 - t_{ij} - t_i^0 = 0$$

2. dovoljan uslov

$$R_i^z = t_i^1 - t_i^0 = 0$$

$$R_j^z = t_j^1 - t_j^0 = 0$$

27. Metoda ocjene i revizije projekta - PERT metoda

Program Evaluation and Review Technique

Ovo je stohastička metoda koja obezbjeđuje:

- utvrđivanje očekivanog vremena trajanja svake aktivno
- utvrđivanje očekivanog trenutka zbivanja svakog događaja
- utvrđivanje očekivanog vremena trajanja projekta

Kod PERT metode potrebno je odrediti sljedeća trajanja

1. optimističko vrijeme (a_{ij})
2. najvjerovatnije vrijeme (m_{ij})
3. pesimističko vrijeme (b_{ij})

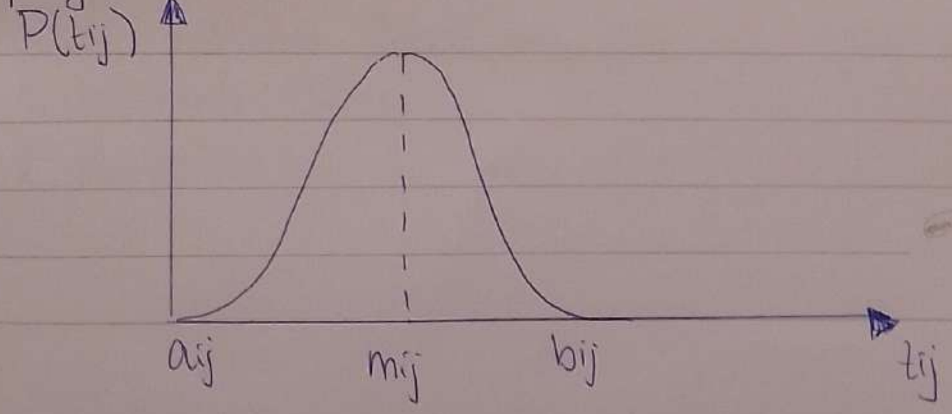
Optimističko trajanje je najkraće vrijeme za koje će se neka aktivnost završiti. To je vrijeme za koje će se aktivnost A_{ij} završiti pod uslovom da se dešava pod najpovoljnijim uslovima. Vjerovatnoća da će se aktivnost završiti za kraće vrijeme od ovog vremena je zanemarljivo mala (≈ 0)

Najvjerovatnije trajanje je vrijeme za koje će se aktivnost A_{ij} završiti najveći broj puta pod pretpostavkom da se njena realizacija ponavlja više puta i uvijek pod istim uslovima. Vjerovatnoća da će se aktivnost završiti za m_{ij} vremenskih jedinica veća je od vjerovatnoće njenog završetka za bilo koje drugo trajanje.

Pesimističko trajanje je najduže trajanje do kojeg će doći ako se aktivnost A_{ij} realizuje pod najnepovoljnihijim uslovima. Vjerovatnoća da će vrijeme završetka aktivnosti biti duže od pesimističkog je nula.

$$a_{ij} < m_{ij} < b_{ij}$$

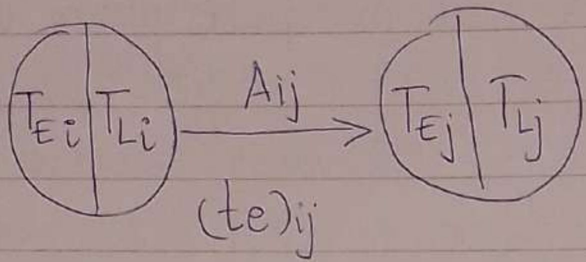
Odnos tih trajanja može se grafički predstaviti Gausovom raspodjelom:



Očekivano vrijeme završetka aktivnosti A_{ij}, $(t_e)_{ij}$ biće jednako vrijednosti izraza:

$$t_{eij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}$$

Trenutke zbivanja događaja utvrđujemo na isti način kao kod CPM metode. Svi trenuci zbivanja su očekivane veličine.



T_{Ei} - najraniji očekivani trenutak zbivanja događaja i
T_{Li} - najkasniji -11-
T_{Ej} - najraniji -11- j
T_{Lj} - najkasniji -11- j

Očekivano trajanje projekta je jednako očekivanom trenutku zbivanja n-tog događaja.

$$(T_E)_n = (T_L)_n$$

Projekat se može završiti za vrijeme kraće ili duže od očekivanog.

Programiranje zaliha

Zalihe predstavljaju robu koja se nalazi u skladištu u određeno vrijeme i pod određenim uslovima, a koja je namijenjena bilo za reprodukcionu ili krajnju potrošnju.
Cilj koji se želi postići držanjem zaliha je obezbjeđivanje neprekidnosti proizvodnog procesa.
Pojmom zalihe obuhvataju se sirovine i reprodukcioni materijali, rezervni dijelovi, poluproizvodi, finalni proizvodi i trgovačka roba.
Zalihe se dijele na:
1. proizvodne (u koje spadaju sve osim trg. robe)
2. trgovačke (trgovačka roba)

Zadatak programiranja zaliha je određivanje količine robe koja će se nalaziti između minimalne i maksimalne količine. Optimalna strategija je ona kod koje se obezbjeđuje neprekidnost proizvodnje i minimalni troškovi skladištenja robe.

Troškovi hitne nabavke su troškovi koje je preduzeće spremno podnijeti da bi izvršilo hitnu nabavku određene količine robe da proces proizvodnje ne bi bio prekinut.

Modeli zaliha dijele se na:
1. determinističke
2. stohastičke

Deterministički modeli zaliha su oni kod kojih je poznata količina robe koja će biti potraživana, odnosno trošena u jedinici vremena. Kod Stohastičkih to nije poznato, odnosno potrošnja sirovine nije konstantna u jedinici vremena.

28. Deterministički model zaliha bez hitnih nabavki.

Pretpostavimo da preduzeće nabavlja sirovinu R koja mu je potrebna za izradu proizvoda P. Neka ukupno potrebna količina ~~proizvo~~ sirovine R u planskom razdoblju od Θ vremenskih jedinica iznosi Q jedinica. Potrebna količina od Q jedinica neće biti nabavljena odjednom već u više istovjetnih porudžbina. Posmatrani interval od Θ vrem. jedinica dijeli se na n podintervala (jednakih). Na početku svakog podintervala vrši se jedna redovna nabavka sirovine R i to u količini koja je dovoljna za odvijanje procesa proizvodnje u trajanju od T vremenskih jedinica.

Pretpostavka ovog modela je da nije dozvoljeno postojanje nepodmirene potražnje. U modelu postoje dvije vrste troškova:

1. c_1 - troškovi redovne nabavke
2. c_2 - troškovi skladištenja

Označimo sa S količinu sirovine R u jednoj porudžbini.

$$n = Q/S$$

$$n = \theta/T$$

Poći ćemo od funkcije ukupnih troškova redovne nabavke i skladištenja:

$$C(S) = \left(c_1 + c_2 \frac{S}{2} T\right) n$$

$$C(S) = c_1 \cdot \frac{Q}{S} + c_2 \frac{S}{2} \theta$$

$$C_1(S) = \frac{c_1 Q}{S} \qquad C_2(S) = c_2 \frac{S}{2} \cancel{\theta}$$

Tražimo količinu robe/sirovine R koja je sadržana u jednoj porudžbini, uz uslov da ukupni troškovi budu najmanji. Potreban uslov da funkcija C(S) ima ekstrem je:

$$C'(S) = -\frac{c_1 Q}{S^2} + \frac{c_2 \cancel{\theta}}{2} = 0$$

Optimalna količina zaliha sirovine R je:

$$S_0 = ?$$

$$\frac{c_1 Q}{S^2} = \frac{c_2 \cancel{\theta}}{2}$$

$$S^2 = \frac{2 c_1 Q}{c_2 \cancel{\theta}}$$

$$\boxed{S_0 = \sqrt{\frac{2 c_1 Q}{c_2 \cancel{\theta}}}}$$

Optimalni broj porudžbina je

$$n_0 = \frac{Q}{S_0} = \sqrt{\frac{c_2 Q \theta}{2 c_1}}$$

Optimalni vremenski razmak između 2 porudžbine je:

$$T_0 = \frac{\theta}{n_0} = \sqrt{\frac{2 c_1 \theta}{c_2 Q}}$$

Funkcija ukupnih minimalnih troškova:

$$C(S_0) = \sqrt{2 Q \theta c_1 c_2}$$

29 Deterministički model zaliha sa hitnim nabavkama

Dozvoljeno je ~~dozvoljeno~~ postojanje nepodmirene potražnje. Količina sirovine R koja se nabavi na početku jednog podintervala nije dovoljna za odvijanje procesa proizvodnje u trajanju od T vr. jed. Količina koja se nabavi na početku podintervala, istrošiće se prije kraja njegovog trajanja. Da proces proizvodnje ne bi stao, odlučujemo se za hitnu nabavku količine koja nedostaje do kraja podintervala. Otuda imamo i troškove hitne nabavke - C_3. Ovi troškovi su, po pravilu, visoki, jer se za hitne nabavke odlučujemo i pod nepovoljnim uslovima samo da proces proizvodnje ne bi stao.

$\hat{S}$ - količina sirovine koja se nabavi redovnim putem

$(S-\hat{S})$ - količina sadržana u hitnoj nabavci

T_1 - period u kojem će se udovoljiti tražnji

T_2 - period u kojem nije zadovoljena tražnja

Funkcija ukupnih troškova:

$$C(S,\hat{S}) = \left(c_1 + c_2 \frac{\hat{S}}{2} T_1 + c_3 \frac{S-\hat{S}}{2} T_2\right) n$$

$$n = \frac{Q}{S} = \frac{\Theta}{T}$$

$$C(S,\hat{S}) = c_1 \frac{Q}{S} + c_2 \frac{\hat{S}}{2} T_1 \frac{\Theta}{T} + c_3 \frac{S-\hat{S}}{2} T_2 \frac{\Theta}{T}$$

$$\hat{S} : S = T_1 : T \qquad T_1 = \frac{\hat{S}T}{S}$$

$$\frac{S-\hat{S}}{S} = \frac{T_2}{T}$$

$$T_2 = \frac{S-\hat{S}}{S} \cdot T$$

$$C(S,\hat{S}) = c_1 \frac{Q}{S} + c_2 \frac{\hat{S}}{2} \cdot \frac{\hat{S}\cancel{T}}{S} \cdot \frac{\theta}{\cancel{T}} + c_3 \frac{S-\hat{S}}{2} \cdot \frac{S-\hat{S}}{S} \cdot \cancel{T} \cdot \frac{\theta}{\cancel{T}}$$

$$C(S,\hat{S}) = c_1 \frac{Q}{S} + c_2 \theta \frac{\hat{S}^2}{2S} + c_3 \theta \frac{(S-\hat{S})^2}{2S}$$

Potreban uslov da funkcija $C(S,\hat{S})$ ima ekstrem je:

$$\frac{dC}{dS} = 0 \quad i \quad \frac{dC}{d\hat{S}} = 0$$

$$\frac{dC}{dS} = -\frac{c_1 Q}{S^2} - \frac{c_2 \theta \hat{S}^2}{2S^2} + \frac{c_3 \theta \left[(S-\hat{S}) \cdot 2S - (S-\hat{S})^2 \right]}{2S^2} = 0$$

$$\frac{dC}{d\hat{S}} = -\frac{c_2 \theta \hat{S}}{S} + \frac{c_3 \theta (S-\hat{S})}{S} = 0$$

Rješenje ovog sistema po S i $\hat{S}$ je:

$$S = \sqrt{\frac{2Qc_1}{\theta c_2}} \cdot \sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}}$$

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{2Qc_1}{\theta c_2}} \cdot \sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$

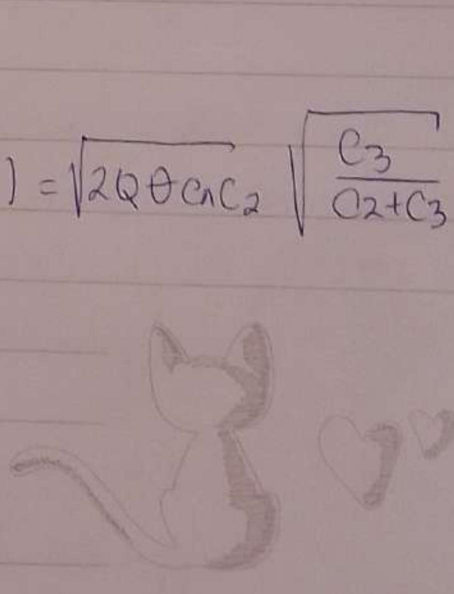
Zamjenom u $C(S,\hat{S})$ dobijamo:

- funkciju min. ukupnih troškova: $C(S,\hat{S}) = \sqrt{2Q\theta c_1 c_2} \sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}}$
- optimalni broj porudžbina:

$$n_0 = \frac{Q}{S_0} = \sqrt{\frac{Q\theta c_2}{2c_1}} \cdot \sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$

- optimalno vrijeme

$$T_0 = \frac{Q}{n_0} = \sqrt{\frac{2Qc_1}{\theta c_2}} \cdot \sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}}$$



$$T_{10} = \frac{T_0}{S_0} \hat{S} = kT_0$$

$$T_{20} = \frac{T_0}{S_0} (S - \hat{S}) = (1-k) T_0$$

Koeficyent $k = \frac{C_3}{C_2+C_3}$ vrši korekcyu modela u kojem nisu dozvoyene hitne nabavke.

k je pokazatey značaja hitnih nabavki $(0 < k < 1)$

$$\hat{S}_0 = k S_0$$

30. Stohastički model zaliha kad je potražnja prekidna

Pretpostavimo da privredni subjekt P jednom godišnje ispituje ispravnost rezervnih dyelova D na svojim mašinama i vrši zamjenu neispravnih dyelova. Unaprijed nije poznato koliko je rezervnih dyelova potrebno nabavljati. Da proces proizvodnje ne bi stao (zbog kvara dyela D) neophodno je imati na zalihama određeni broj rezervnih dyelova. ~~Unaprij~~

q - potreban broj rezervnih dyelova D koje treba zamjeniti
S - raspoloživi broj rezervnih dyelova
p(q) - vjerovatnoća da treba zamjeniti tačno q jedinica dyela D.

Ako je ~~$S-q>0$~~ $S>q$ javlja se višak od $(S-q)$ dyelova D koje treba skladištiti. Pretpostavimo da su

troškovi skladištenja jedinice rezervnog dijela u jedinici vremena c_2 n.j.
Ako je $S<q$, javlja se manjak rezervnih dijelova koje treba nabaviti hitnim putem. Troškovi nabavke iznose c_3 n.j.

U slučaju prekidne potražnje, funkcija očekivanih ukupnih troškova će biti:

$$C(S) = c_2 \sum_{q=0}^{S} (S-q)p(q) + c_3 \sum_{q=S+1}^{+\infty} (q-S)p(q)$$

...

$$p(q \leq S-1) \leq \frac{c_3}{c_2+c_3}$$ - kumulativna vjerovatnoća

da na zalihama ne treba imati više od $(S-1)$ rezervnih dijelova D.

$$p(q \leq S-1) < \frac{c_3}{c_2+c_3} < p(q \leq S)$$

kumulativna vjer. da ne treba više

So-vrijednost koja svodi funkciju od S dijelova na zalihama $C(S)$ na minimum.

$$p(q \leq S_0-1) < \frac{c_3}{c_2+c_3} < p(q \leq S_0)$$

Ova nejednačina predstavlja kriterijum za određivanje optimalnog obima zaliha. To se postiže tako što se odredi količnik $k = c_3/(c_2+c_3)$, pa se u radnoj tabeli, u koloni kumulativnih vjerovatnoća traže vrijednosti između kojih se nalazi k.
Ona vrijednost S koja odgovara gornjoj granici tog intervala jeste optimalni nivo zaliha S_0.

31. Stohastički model u slučaju kad je potražnja neprekidna/kontinuirana

Neka je potražnja za nekim proizvodom stohastička i neka je zadana zakonom vjerovatnoće $f(q)$. Vjerovatnoća da će potražnja biti u granicama (S_1, S_2) definisana je integralom $\int_{S_1}^{S_2} f(q)\,dq$ dok je vjerovatnoća da potražnja neće premašiti vrijednost S jednaka $\int_0^S f(q)\,dq = F(S)$.

Funkcija očekivanih ukupnih troškova je

$$C(S) = c_2 \int_0^S (S-q) f(q)\,dq - c_3 \int_S^{\infty} (q-S) f(q)\,dq$$

Izvod funkcije je:

$$C'(S) = c_2 \int_0^S f(q)\,dq - c_3 \int_S^{\infty} f(q)\,dq$$

Kako je $\int_0^S f(q)\,dq + \int_S^{+\infty} f(q)\,dq = 1$

$$C'(S) = c_2 \int_0^S f(q)\,dq - c_3 + c_3 \int_0^S f(q)\,dq$$

$$F(S) = \int_0^S f(q)\,dq = \frac{c_3}{c_2+c_3} \; *$$

Upućuje na zaključak da je vjerovatnoća da ne treba imati više od S jedinica robe na zalihama jednaka količniku S_3/S_2-S_3.

Rješenje relacije * daje optimalno S_0.