CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

- **Otoczeniem** punktu x_0 o promieniu δ $(\delta > 0)$ nazywamy przedział $U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
- Symbolem U oznaczamy dowolne otoczenie punktu x_0,
- Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu U punktu x_0.

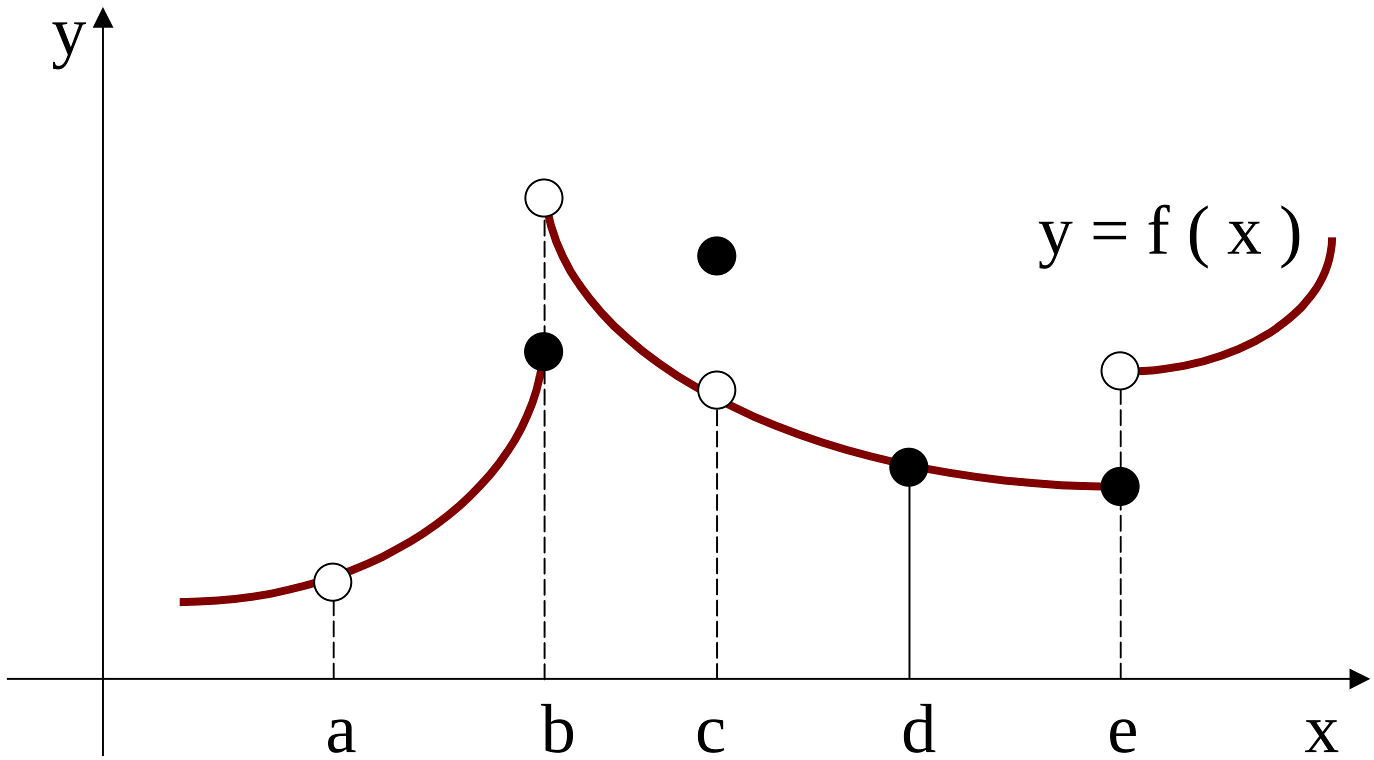
Definicja: **Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0** wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

1. istnieje w punkcie x_0 granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
2. funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 wartość $f(x_0)$
3. granica funkcji w punkcie x_0 równa się $f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Jeżeli nie jest spełniony w punkcie x_0 którykolwiek z wymienionych warunków, to mówimy, że funkcja $f(x)$ **nie jest ciągła w punkcie x_0,** a punkt x_0 nazywamy **punktem nieciągłości** tej funkcji.

Przykład:



Funkcja f jest **niециągła** w punktach:

- **a** – ponieważ nie jest w tym punkcie określona
- **b, e** – bo nie istnieją granice: $\lim_{x\to b} f(x)$, $\lim_{x\to e} f(x)$
- **c** **-** ponieważ $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$.

Funkcja jest **ciągła** w punkcie **d**.

Definicja Heinego:

Funkcja $f(x)$ **jest ciągła w punkcie x_0** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{x_n\}$ o wyrazach z otoczenia U zbieżnego do x_0, ciąg wartości funkcji $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny do $f(x_0)$.

Definicja Cauchy'ego:

Funkcja $f(x)$ **jest ciągła w punkcie x_0** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in U(x_0,\delta)} |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

Twierdzenia o ciągłości funkcji:

1. **Suma** dwóch funkcji ciągłych w punkcie x_0 jest funkcją ciągłą w tym punkcie.
2. **Iloczyn** dwóch funkcji ciągłych w punkcie x_0 jest funkcją ciągłą w tym punkcie.
3. **Iloraz** dwóch funkcji ciągłych w punkcie x_0 takim, że dzielnik jest różny od zera, jest funkcją ciągłą w tym punkcie.

Przykład:

1. **Funkcja stała** $f(x)=c$ jest funkcją ciągłą w każdym punkcie $x \in R$
2. **Funkcja tożsamościowa** $f(x)=x$ jest funkcją ciągłą w R
3. **Wielomian stopnia n** $(n \in N)$ jest funkcją ciągłą w R
4. **Funkcja wymierna** jest ciągła w każdym punkcie dziedziny:

   Funkcja $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+1}{(x+1)^3}$ jest ciągła dla każdego $x \in R-\{-1\}$.

Twierdzenie o ciągłości funkcji złożonej

Jeżeli **funkcja złożona** $f(g(x))$ jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, a funkcja f jest ciągła w punkcie u_0, gdzie $u_0 = g(x_0)$, to funkcja złożona $f(g(x))$ jest ciągła punkcie x_0.

Przykład:

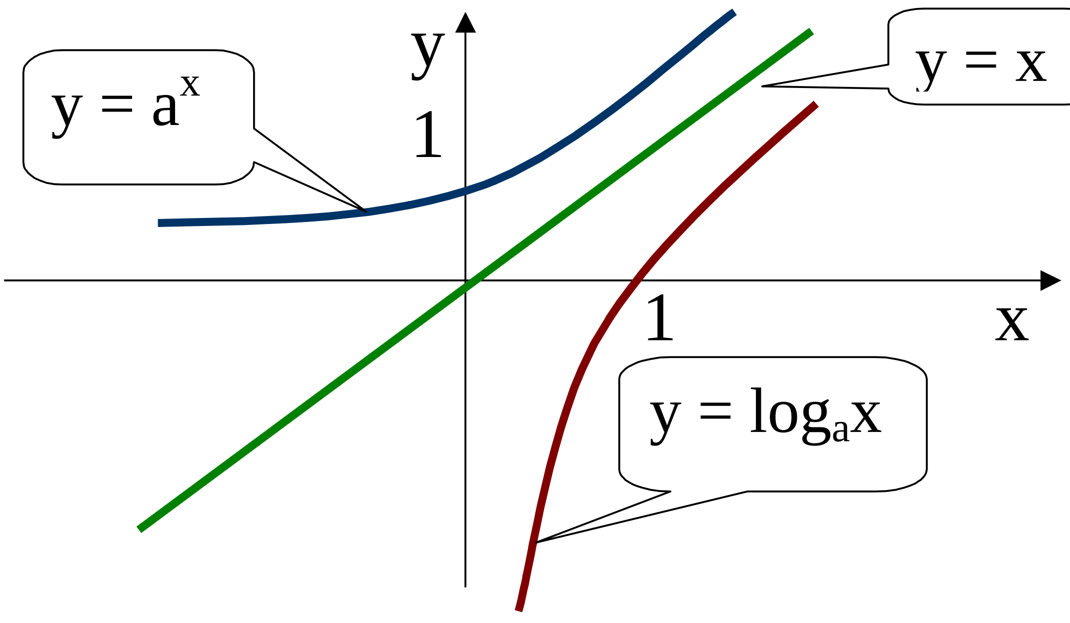
Funkcja złożona $f[g(x)] = \sin x^4$ jest ciągła dla każdego $x \in R$.

Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej

Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej i rosnącej (malejącej) jest ciągła i rosnąca (malejąca).

Przykład:

Funkcja $f(x) = a^x \; (a > 1)$ jest funkcja ciągłą i rosnącą, zatem funkcja $f^{-1}(x) = \log_a x, \; (a > 1)$ jest także funkcja ciągłą i rosnącą.



Definicja:

Funkcja $f(x)$ **jest ciągła lewostronnie w punkcie x_0** jeżeli spełnione są następujące warunki:

1. istnieje granica lewostronna $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$
2. funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 wartość $f(x_0)$
3. granica lewostronna funkcji w punkcie x_0 równa się $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Definicja:

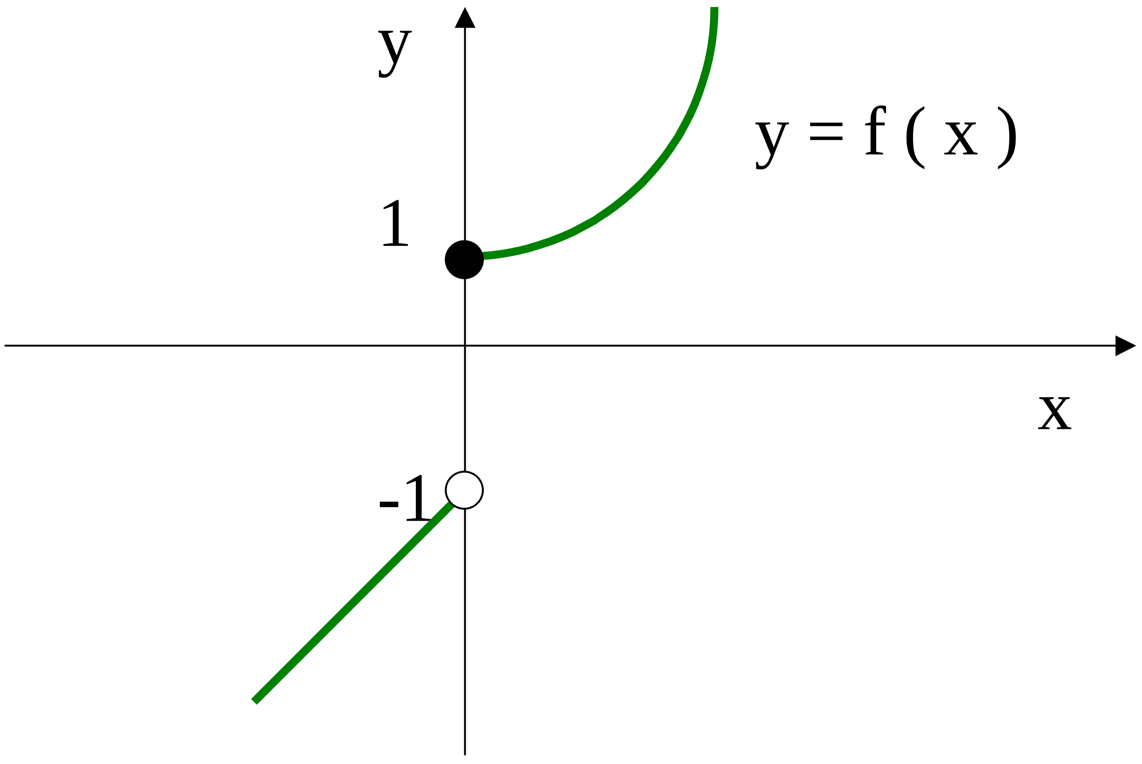
Funkcja $f(x)$ **jest ciągła prawostronnie w punkcie** x_0 jeżeli spełnione są następujące warunki:

1. istnieje granica prawostronna $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$
2. funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 wartość $f(x_0)$
3. granica prawostronna funkcji w punkcie x_0 równa się $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Przykład:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{dla} \quad x\in[0,+\infty) \\ x-1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,0) \end{cases}$$



Funkcja jest prawostronnie ciągła w punkcie x = 0, ponieważ

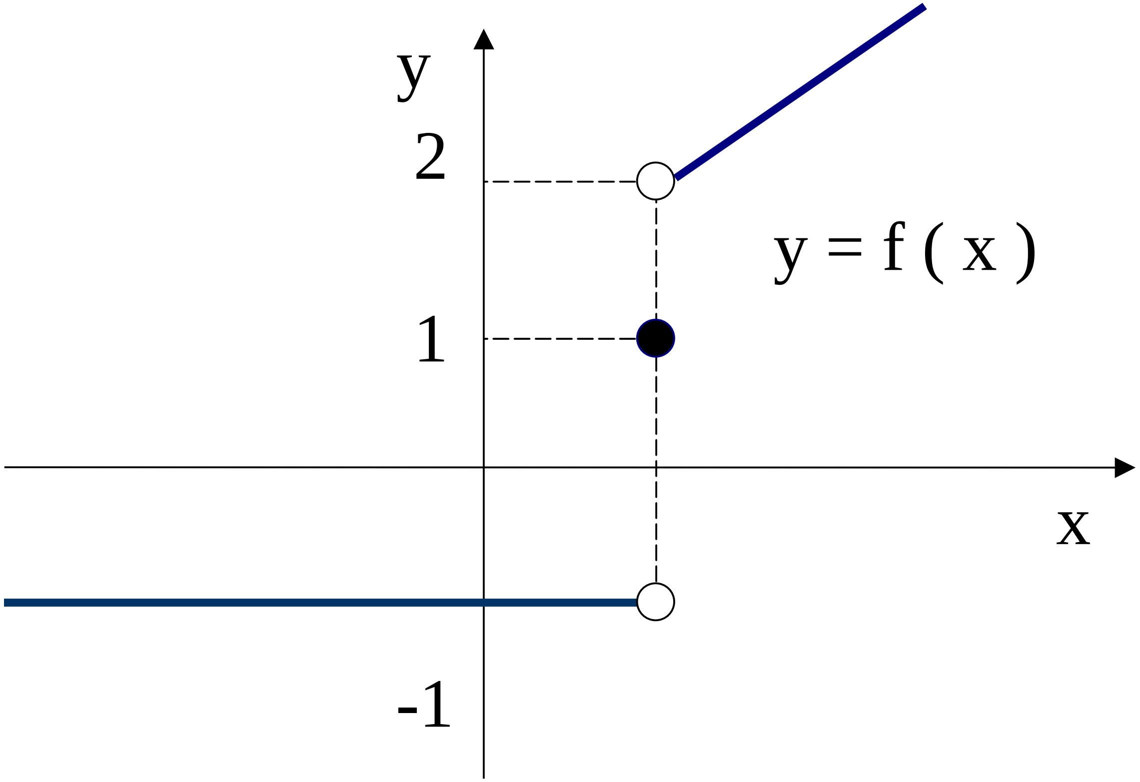
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 + 1\right) = 1 = f(0).$$

Funkcja ta nie jest lewostronnie ciągła w punkcie x = 0, ponieważ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x - 1) = -1 \neq f(0).$$

Przykład:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x\in(1,+\infty) \\ 1 & \text{dla} \quad x=1 \\ -1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,1) \end{cases}$$



Funkcja nie jest prawostronnie ciągła w punkcie x = 1, ponieważ

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2 \neq f(1).$$

Funkcja ta nie jest także lewostronnie ciągła w punkcie x = 1, ponieważ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-1) = -1 \neq f(1).$$

Wniosek:

- Jeżeli funkcja jest ciągła w punkcie x_0, to jest także w tym punkcie ciągła prawostronnie i lewostronnie.

- Jeżeli funkcja jest ciągła prawostronnie i lewostronnie w punkcie x_0, to funkcja jest ciągła w punkcie x_0.

Definicja:

Funkcja jest ciągła w przedziale otwartym (ograniczonym lub nieograniczonym) jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Przykład:

1. Funkcja $f(x)=\dfrac{3}{x(x+4)}$ jest ciągła w przedziałach $(-\infty,-4),(-4,0),(0,+\infty)$.

2. Funkcja $f(x)=\sin x$ jest ciągła w przedziale nieograniczonym $(-\infty,+\infty)$.

Definicja:

Funkcja jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ jeżeli jest ciągła w przedziale otwartym (a, b) oraz jest ciągła prawostronnie w punkcie a i lewostronnie w punkcie b.

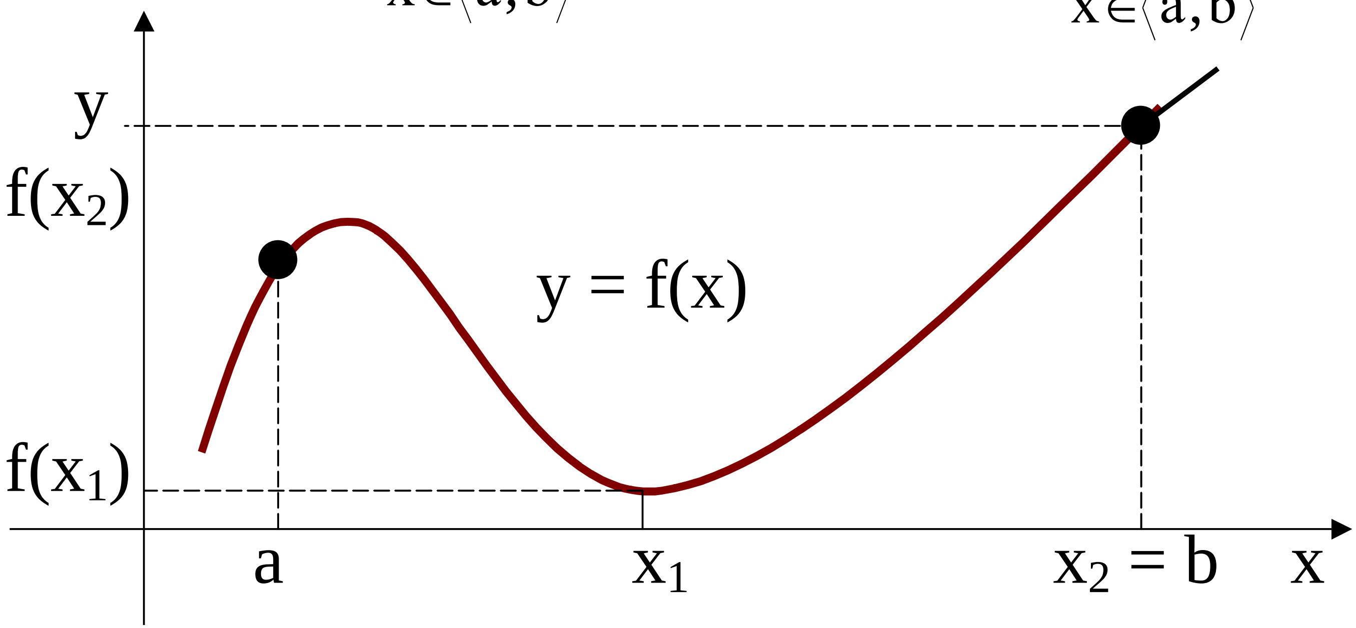
Przykład:

1. Funkcja $f(x)=\frac{2}{x}$, gdzie $0 < x \leq 1$ nie jest ciągła w przedziale domkniętym <0, 1>, jest natomiast ciągła w przedziale (0, 1>.
2. Funkcja $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ jest ciągła w przedziale domkniętym <-3, 3>.

Twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów przez funkcję ciągłą w przedziale domkniętym:

Jeżeli funkcją f(x) jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$, to jest w tym przedziale ograniczona oraz istnieją w tym przedziale takie dwa punkty x_1 i x_2, że

$$f(x_1) = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x), \qquad f(x_2) = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x).$$



Wniosek:

Każda funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga w tym przedziale kres dolny i kres górny zbioru swoich wartości.

Przykład:

Funkcja $f(x) = x^3$ jest ciągła w przedziale $\langle 0,4 \rangle$ oraz jest w tym przedziale ograniczona ponieważ $|f(x)| \leq 64$. Istnieją zatem w przedziale $\langle 0,4 \rangle$ punkty $x_1 = 0$ i $x_2 = 4$, takie, że

$$f(x_1) = 0^3 = 0 = \inf_{x \in \langle 0,4 \rangle} x^3,$$

oraz

$$f(x_2) = 4^3 = 64 = \sup_{x \in \langle 0,4 \rangle} x^3.$$

Uwaga:

Funkcja ciągła w przedziale otwartym może być na końcach tego przedziału nieograniczona, zatem kresy zbioru wartości funkcji ciągłej w przedziale otwartym mogą nie istnieć!

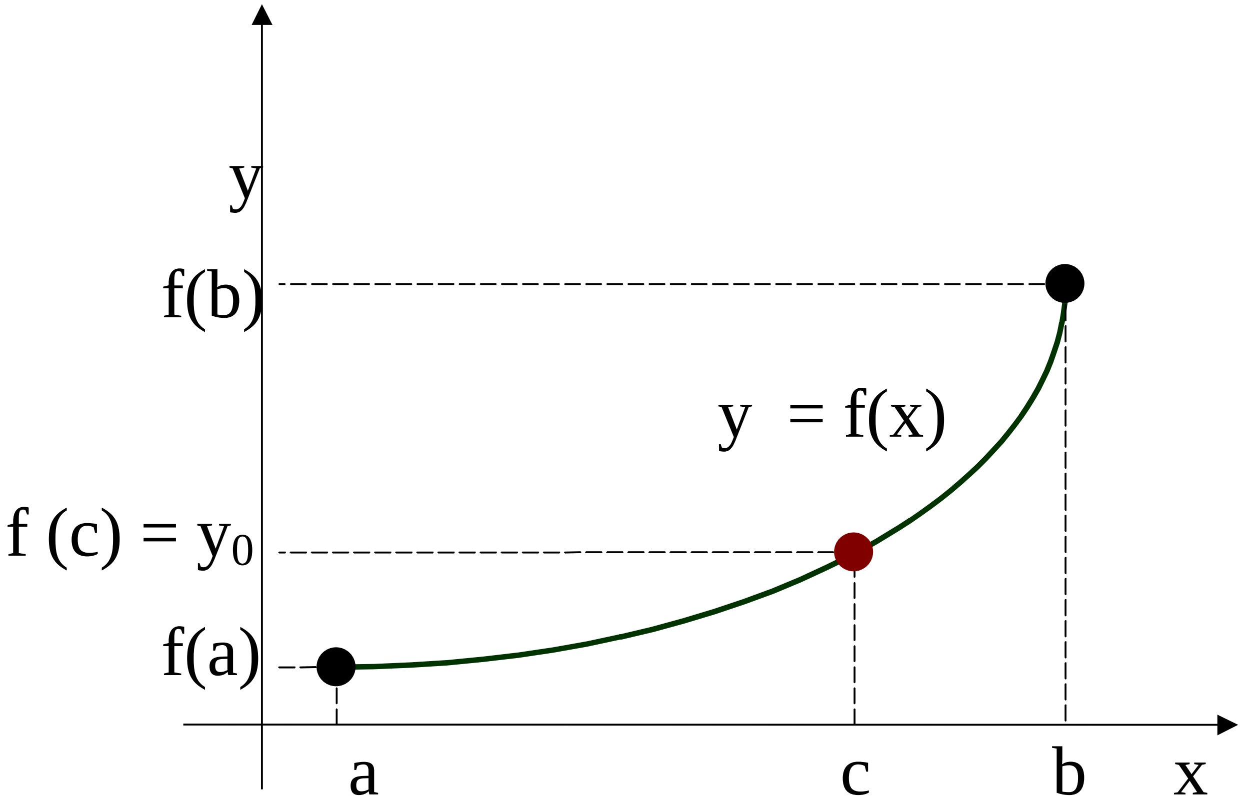
Przykład:

1. Nie istnieją kresy zbioru wartości funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$ w przedziale $(0, \pi)$.
2. Funkcja $f(x) = x^3$ rozważana w przedziale otwartym $(0,4)$ nie osiąga w tym przedziale kresów.

Twierdzenie Darboux

o przechodzeniu funkcji ciągłej przez wartości pośrednie:

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a,b\rangle$ przy czym $f(a)\neq f(b)$ oraz liczba y_0 jest zawarta między $f(a)$ i $f(b)$, to istnieje $c\in(a,b)$ takie, że $f(c)=y_0$.


y
f(b)
y = f(x)
f (c) = y0
f(a)
a
c
b
x

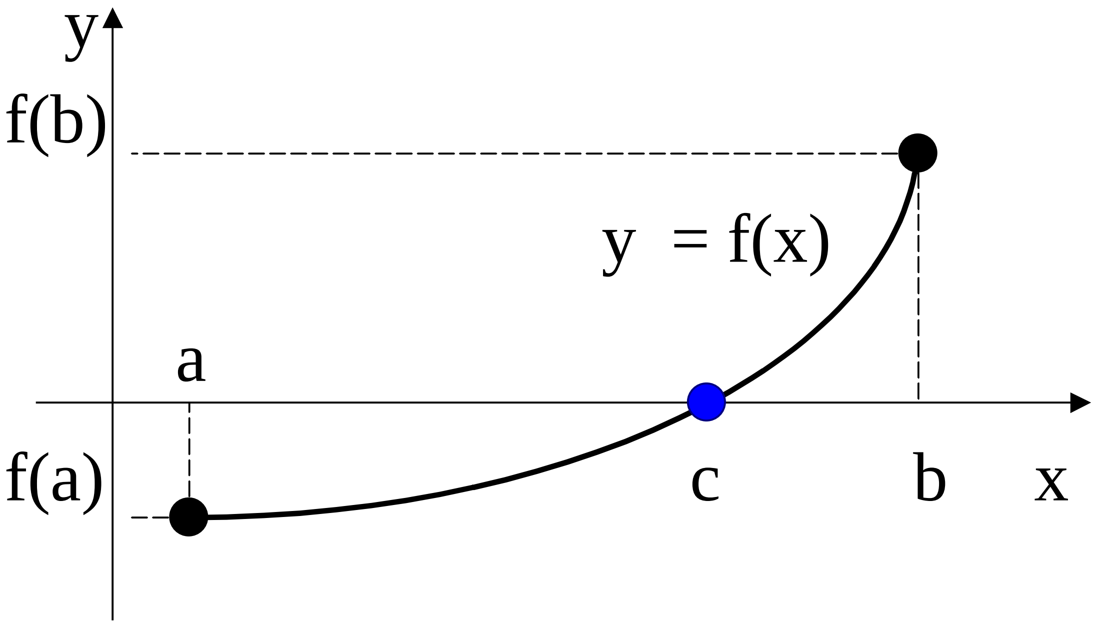
Przykład:

Funkcja f(x) = cos x - x jest ciągła w przedziale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Ponadto f(0) = 1>0 i $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$. Zatem w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ istnieje taki punkt c, że f(c) = 0

Wniosek:

Jeżeli funkcja jest ściśle monotoniczna i ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$ oraz $f(a)f(b) < 0$ (wartości funkcji na końcach przedziałów są różnych znaków), to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f(c) = 0$.



RACHUNEK RÓŻNICZKOWY
W ZAKRESIE FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

- Rozpatrzmy funkcję $y = f(x)$ określoną w pewnym otoczeniu $U(x_0, \delta)$ punktu x_0.
- Symbolem Δx oznaczamy przyrost zmiennej niezależnej różny od zera taki, że $x_0 + \Delta x \in U(x_0, \delta)$.
- Przyrostowi Δx odpowiada przyrost wartości funkcji Δy:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Definicja: **Ilorazem różnicowym funkcji** $y = f(x)$ **w punkcie** $\mathbf{x_0}$ dla przyrostu Δx nazywamy iloraz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

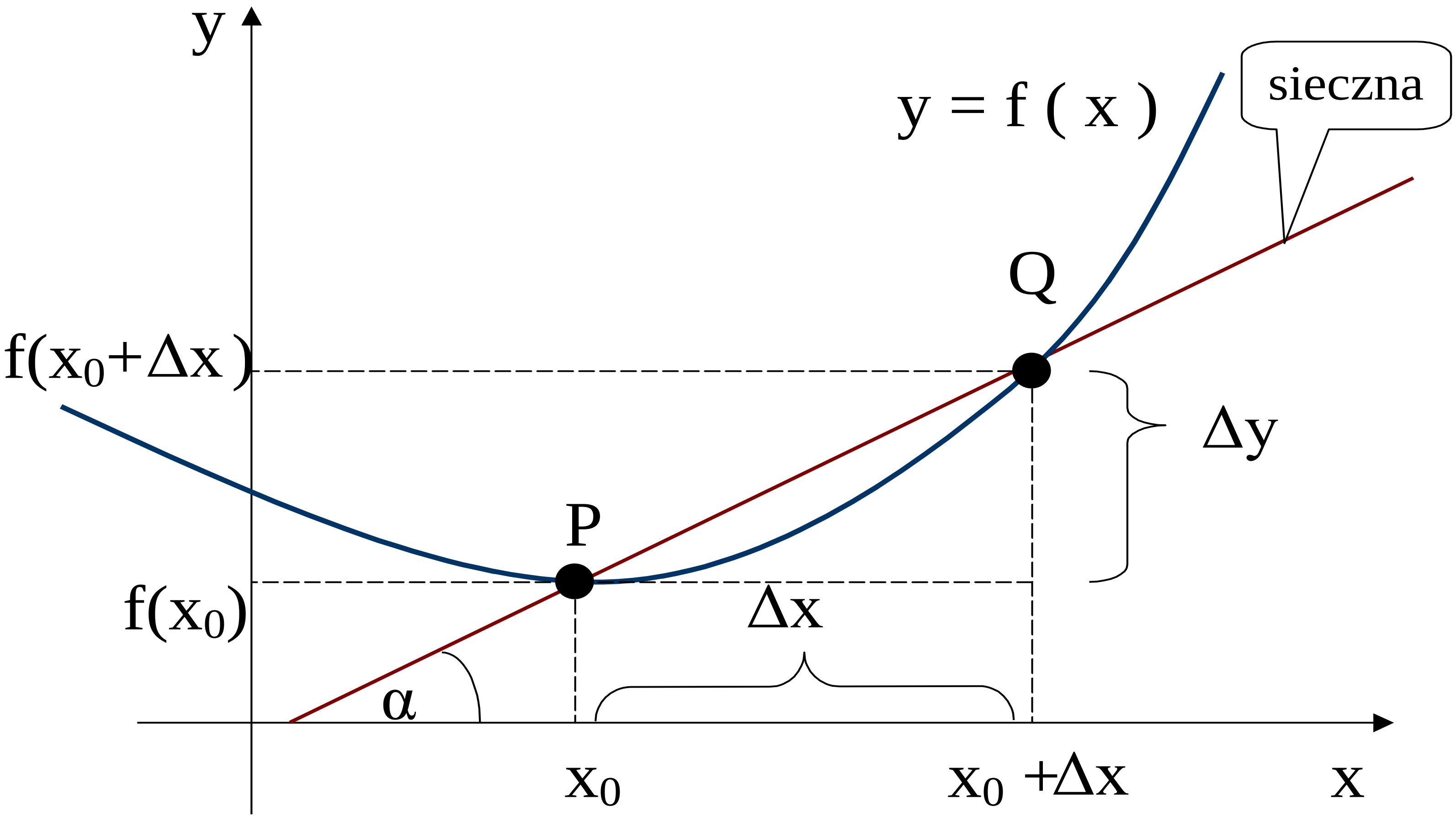
Przykład:

Iloraz różnicowy funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie x_0 dla przyrostu Δx wynosi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} =$$

$$= 2x_0 + \Delta x$$

Interpretacja geometryczna **ilorazu różnicowego**:



Punkty wykresu:

$$P = (x_0, f(x_0)), \quad Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)).$$

Z wykresu: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$

- Iloraz różnicowy jest równy współczynnikowi kierunkowemu siecznej PQ.

- Jeżeli przyjmiemy, że $\Delta x > 0$, to iloraz $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ równy jest zmianie wartości funkcji f(x) w przedziale $\langle x_0, x_0 + \Delta x \rangle$ przypadającej na jednostkę miary x

- Iloraz różnicowy można nazwać <u>średnią prędkością zmiany wartości funkcji</u> w przedziale $\langle x_0, x_0 + \Delta x \rangle$

<u>Definicja:</u> Pochodną funkcji f(x) w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą ilorazu różnicowego

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

gdy $\Delta x \to 0$.

Pochodną funkcji f(x) w punkcie x_0 oznaczamy symbolem $f'(x_0)$.

Zatem

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Przykład:

Korzystając z definicji oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punktach $x_0 = 0$ i $x_0 = 3$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

$$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0, \qquad f'(3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Uwaga:

Jeżeli nie istnieje granica właściwa ilorazu różnicowego dla $\Delta x \to 0$, to mówimy, że pochodna $f'(x_0)$ nie istnieje.

Funkcja pochodna

Jeżeli pochodna funkcji f(x) istnieje w każdym punkcie pewnego przedziału otwartego V, to każdej liczbie $x_0 \in V$ przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba $f'(x_0)$. Mówimy, że w przedziale V określona jest nowa funkcja, zwana **funkcją pochodną funkcji f(x)** i oznaczana jest symbolem $f'(x)$. Funkcję pochodną nazywamy krótko **pochodną**.

Przykład: Funkcja $f(x) = x^2$ ma funkcję pochodną $f'(x) = 2x$ dla każdego $x \in R$.

Twierdzenie: Funkcja może mieć w punkcie x_0 co najwyżej jedną pochodną.

POCHODNA FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

Podstawowe wzory

FUNKCJA	POCHODNA FUNKCJI
$f(x) = p(x)+g(x)$	$f'(x) = p'(x)+g'(x)$
$f(x) = p(x)-g(x)$	$f'(x) = p'(x)-g'(x)$
$f(x) = ag(x)$	$f'(x) = ag'(x)$

$$f(x) = p(x)g(x) \qquad f'(x) = p'(x)g(x) + p(x)g'(x)$$

$$f(x) = p(x)/g(x) \qquad f'(x) = [p'(x)g(x) - p(x)g'(x)] / [g(x)]^2$$

$$f(x) = p(g(x)) \qquad f'(x) = p'(g(x))g'(x)$$

$$f(x) = \ln p(x) \qquad f'(x) = p'(x)/p(x)$$

Pochodne podstawowych funkcji

FUNKCJA	POCHODNA FUNKCJI
a	0
x	1
ax	a
x^n	nx^{n-1}
$\ln x$	$1/x$
$\ln a^x$	$\ln a$
e^x	e^x
e^{mx}	me^{mx}

a^x	$a^x \ln a$, $a>0$
x^x	$x^x (\ln x + 1)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$- \sin x$
$tg\ x$	$1/\cos^2 x$
$ctg\ x$	$-1/\sin^2 x$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$

arc sin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arc cos x	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
arc tg x	$\frac{1}{1+x^2}$
arc ctg x	$\frac{-1}{1+x^2}$

Pochodne jednostronne funkcji

<u>Definicja</u>: Pochodną lewostronną funkcji f(x) w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą ilorazu różnicowego gdy $\Delta x \to 0^-$:

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

<u>Definicja</u>: Pochodną prawostronną funkcji f(x) w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą ilorazu różnicowego gdy $\Delta x \to 0^+$:

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Uwaga:

- Jeżeli istnieje pochodna $f'(x_0)$, to istnieją pochodne jednostronne $f'\left(x_0^-\right)$, $f'\left(x_0^+\right)$ oraz
$$f'(x_0) = f'\left(x_0^-\right) = f'\left(x_0^+\right)$$
- Jeżeli istnieją pochodne jednostronne $f'\left(x_0^-\right)$, $f'\left(x_0^+\right)$ i są sobie równe to istnieje pochodna $f'(x_0)$ równa pochodnym jednostronnym.
- Istnienie granic właściwych $f'\left(x_0^-\right)$, $f'\left(x_0^+\right)$ nie zapewnia istnienia pochodnej!!!

Przykład:

Funkcja $f(x)=|x|$ ma w punkcie $x_0 = 0$ pochodne jednostronne:

$$f'(0^-)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}(-1)=-1$$

$$f'(0^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}1=1$$

Nie istnieje pochodna $f'(0)$ ponieważ $f'(x_0^-)\neq f'(x_0^+)$.

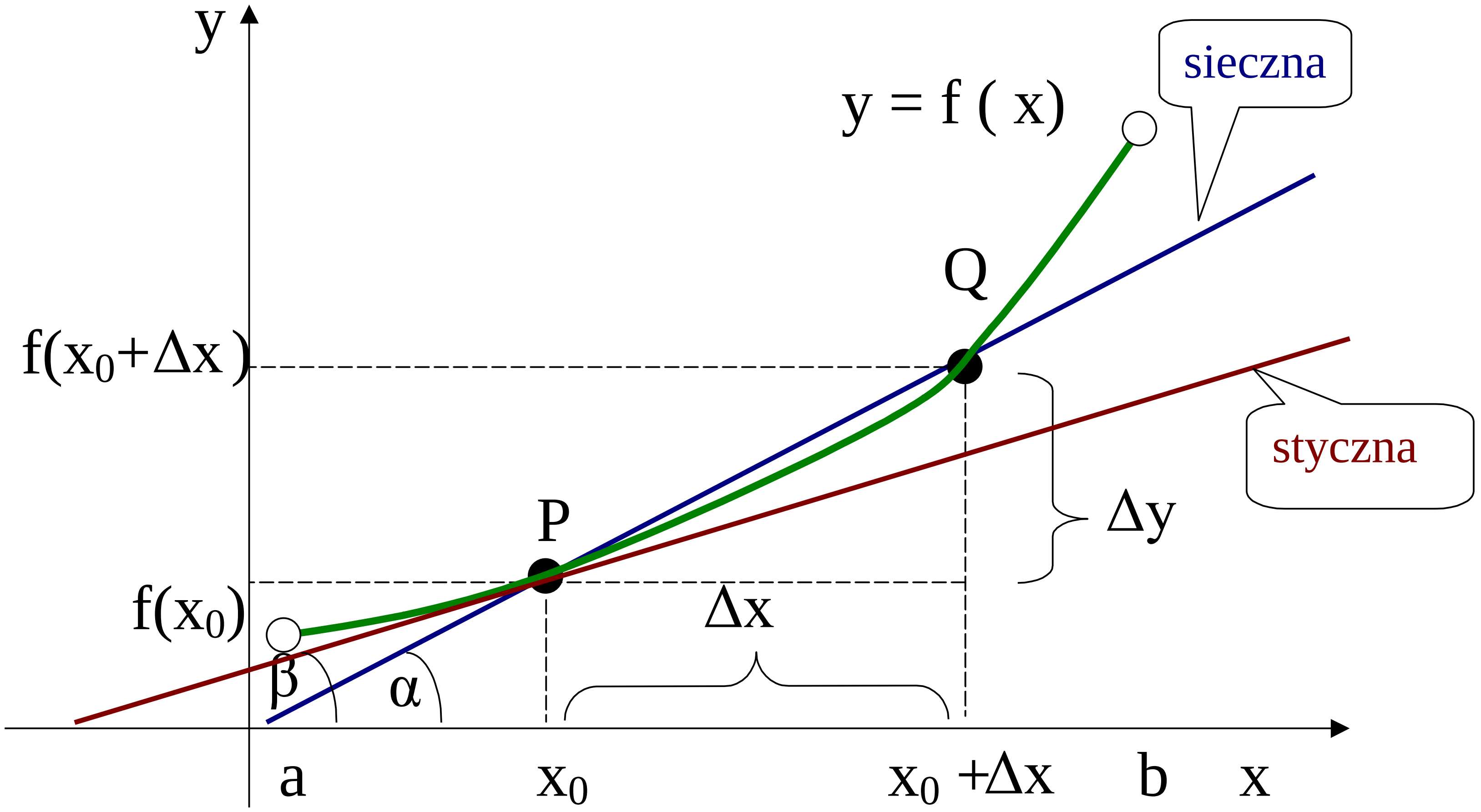
Twierdzenie: Jeżeli funkcja ma pochodną w punkcie x_0 to jest w tym punkcie ciągła.

Uwaga: Funkcja ciągła w punkcie x_0 nie musi mieć pochodnej w x_0.

***Przykład*:** Funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła w $x_0 = 0$, ale nie ma w tym punkcie pochodnej!

Interpretacja geometryczna **pochodnej**:

Zakładamy, że funkcja f(x) jest określona w przedziale (a, b) i ciągła w punkcie x_0 należącym do tego przedziału.



y
y = f (x)
sieczna
Q
f(x0+Δx)
styczna
Δy
P
f(x0)
Δx
β
α
a
x0
x0 +Δx
b
x

Równanie siecznej: $y = k(\Delta x)(x - x_0) + y_0,$

$$\text{gdzie } k(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Równanie stycznej: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$

Twierdzenie: Jeżeli funkcja f(x) jest ciągła w punkcie x_0, to do wykresu tej funkcji istnieje **styczna** o równaniu

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \qquad (y_0 = f(x_0))$$

wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f(x) ma w punkcie x_0 pochodną.

RÓŻNICZKA FUNKCJI

Twierdzenie o przedstawieniu przyrostu funkcji

Jeżeli funkcja f(x), określona w pewnym otoczeniu $U(x_0, \delta)$ punktu x_0, ma pochodną $f'(x_0)$, to dla każdego przyrostu Δx takiego, że $(x_0 + \Delta x) \in U(x_0, \delta)$, odpowiadający przyrost funkcji

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

można przedstawić w następujący sposób:

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

przy czym $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$

Definicja:

Funkcję f(x) nazywamy różniczkowalną w punkcie x_0 jeżeli jej przyrost $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ można przedstawić dla każdego Δx dostatecznie bliskiego zeru w postaci

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

gdzie A jest stałą oraz $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$

Wniosek: Jeżeli istnieje $f'(x_0)$, to funkcja f(x) jest w tym punkcie różniczkowalna oraz $A = f'(x_0)$. Jeżeli funkcja jest w punkcie x_0 różniczkowalna to $A = f'(x_0)$.

Definicja: **Różniczką funkcji f(x) w punkcie x_0** dla przyrostu Δx zmiennej niezależnej x nazywamy iloczyn pochodnej $f'(x_0)$ i przyrostu Δx. Różniczkę funkcji f(x) w punkcie x_0 oznaczamy symbolem

$$df(x_0, \Delta x) = df(x_0) = df = dy$$

Zatem $$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x .$$

Przykład: Oblicz różniczkę funkcji $f(x) = 3x^2$ w punkcie x_0 dla przyrostu zmiennej niezależnej x.

$$dy = 6x_0 \cdot \Delta x .$$

Przykład: Różniczka funkcji f(x) = x jest równa

$$dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x .$$

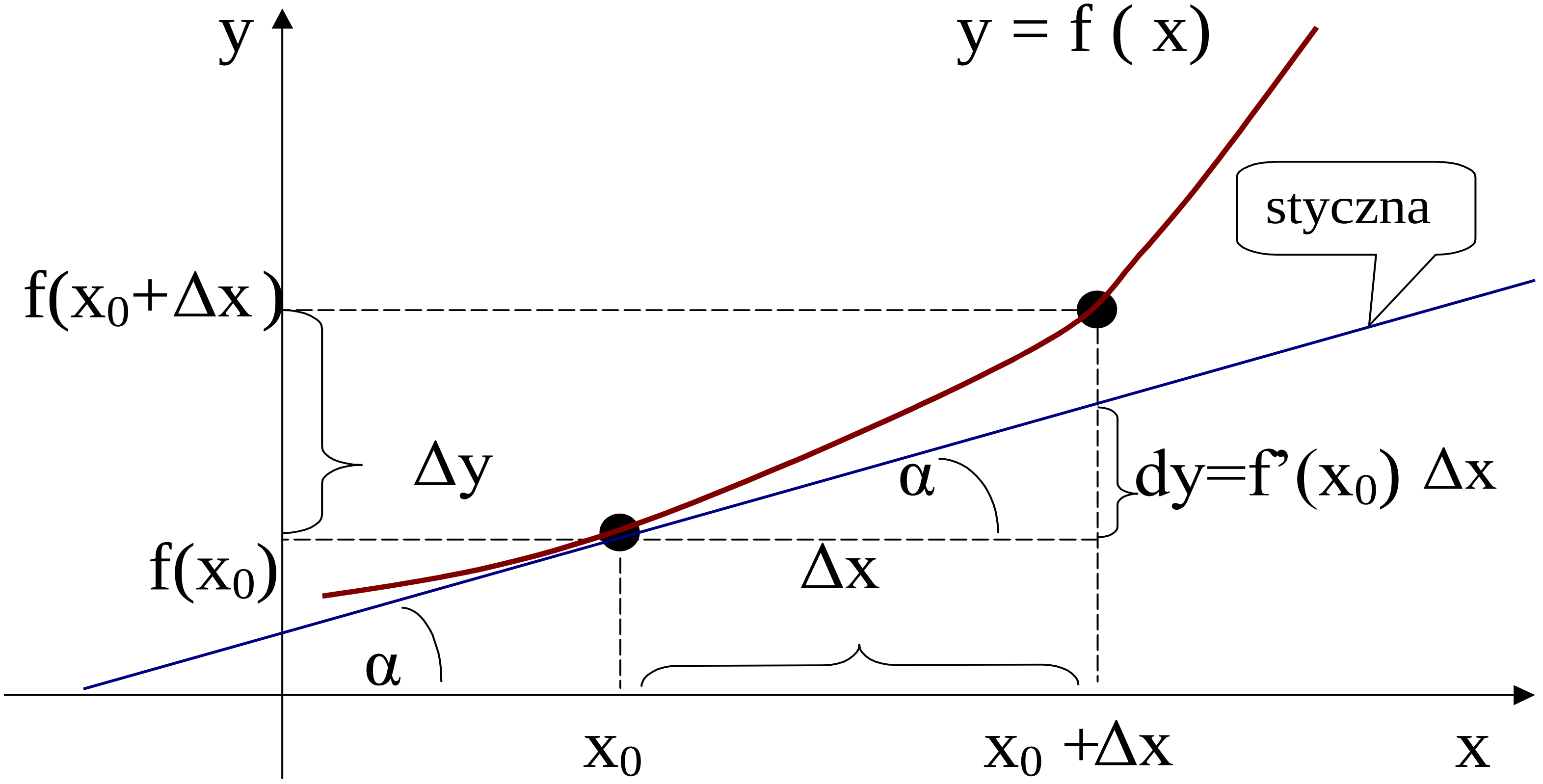
Różniczka zmiennej niezależnej jest równa przyrostowi tej zmiennej. Przyrost Δx zmiennej niezależnej nazywamy różniczką zmiennej niezależnej x i oznaczamy symbolem dx.

Mamy zatem

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$$

skąd
$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Interpretacja geometryczna różniczki



Z wykresu wynika, że $\dfrac{dy}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$

oraz $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, zatem $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Przykład: Obliczyć w przybliżeniu $\sqrt{10}$.

Przyjmujemy $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$, $x = 10$. Korzystamy ze wzoru

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx.$$

Mamy: $dx = x - x_0 = 10 - 9 = 1$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \quad f'(9) = \frac{1}{6}, \quad f(9) = 3.$$

Zatem $\sqrt{10} \approx 3 + \frac{1}{6} \cdot 1 = 3,\ 1{,}6(6)$.

Niech $f^{-1}(y)$ będzie funkcją odwrotną do funkcji ściśle monotonicznej (ściśle rosnącej lub malejącej) i ciągłej $f(x)$.

Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej: Jeżeli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w otoczeniu punktu x oraz $f'(x) \neq 0$, to funkcja odwrotna $f^{-1}(y)$ jest różniczkowalna w punkcie $y = f(x)$, przy czym $\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$.

Rozpatrzmy funkcję złożoną $y = f[g(x)]$. Niech $y = f(u)$ oraz $u = g(x)$.

Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej:

Jeżeli funkcja $u = g(x)$ ma pochodną $g'(x)$, zaś funkcja $y = f(u)$ ma pochodną $f'(u)$, to funkcja złożona $y = f[g(x)]$ ma pochodną

$$y' = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Przykład: $$y=\sqrt{x^3+5}$$

$$y=\sqrt{u} \qquad u=x^3+5 \qquad \left(x^3+5\right)'=3x^2$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$$

Przykład: $$y=x^x \qquad \left(\ln f(x)\right)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\ln y=x\ln x \qquad (\ln y)'=\frac{y'}{y}=\ln x+1$$

$$y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

POCHODNE I RÓŻNICZKI WYŻSZYCH RZĘDÓW

Jeżeli funkcja pochodna $f'(x)$ ma pochodną w zbiorze X, to tę pochodną oznaczamy symbolem $f''(x)$ lub $f^{(2)}(x)$ i mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w zbiorze X **pochodną rzędu drugiego**:

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = \left(f'(x)\right)'.$$

Jeżeli funkcja $f''(x)$ ma pochodną w zbiorze X, to tę pochodną oznaczamy symbolem $f'''(x)$ lub $f^{(3)}(x)$ i mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w zbiorze X **pochodną rzędu trzeciego**:

$$f^{(3)}(x) = f'''(x) = \left(f''(x)\right)'.$$

Analogicznie określamy pochodną rzędu czwartego, piątego itd.

Ogólnie **pochodna rzędu n** $(n \in N)$ funkcji $f(x)$ jest dana wzorem

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w pewnym punkcie (zbiorze) pochodną rzędu n, to mówimy że jest w tym punkcie (zbiorze) **n-krotnie różniczkowalna**.

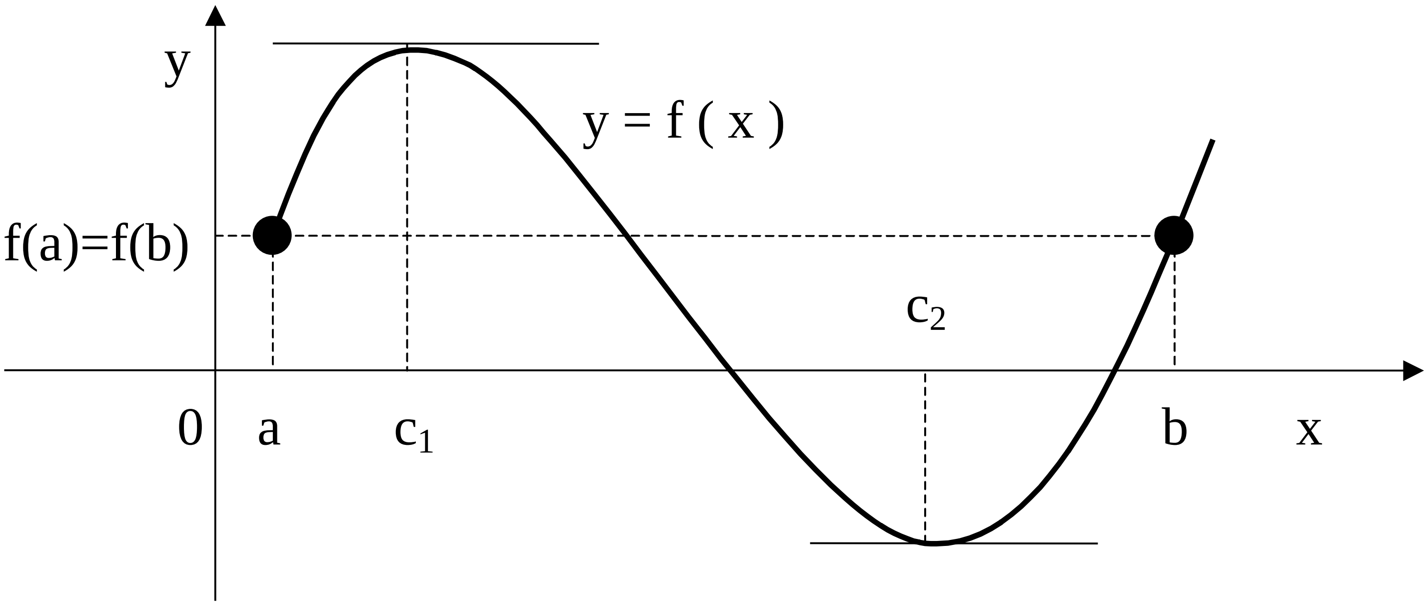
Przykład:

$$y = \cos x \qquad y^{(1)} = -\sin x \qquad y^{(2)} = -\cos x \qquad y^{(3)} = \sin x$$

$$y^{(4)} = \cos x \qquad y^{(5)} = -\sin x \qquad y^{(6)} = -\cos x \qquad y^{(7)} = \sin x$$

Twierdzenie Rolle'a:

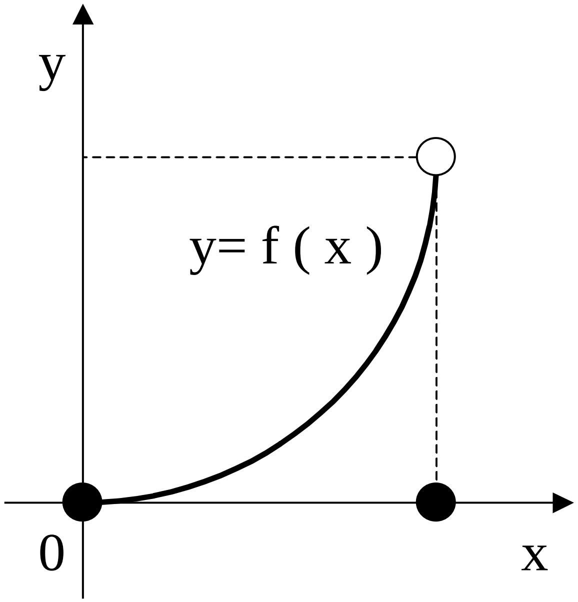
Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$ i różniczkowalna w jego wnętrzu oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = 0$.

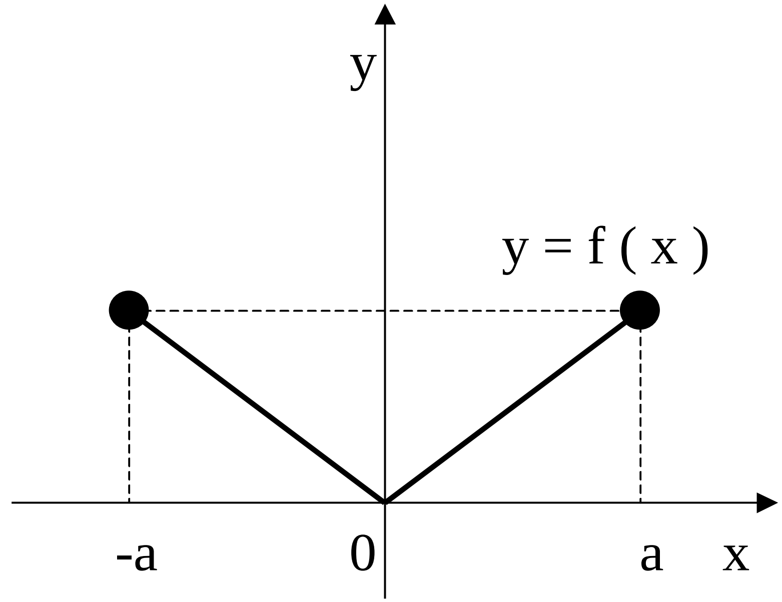


Styczna do wykresu w punktach c_1, c_2 jest równoległa do osi OX:

$$f'(c_1) = 0 \quad f'(c_2) = 0$$

Przykład:



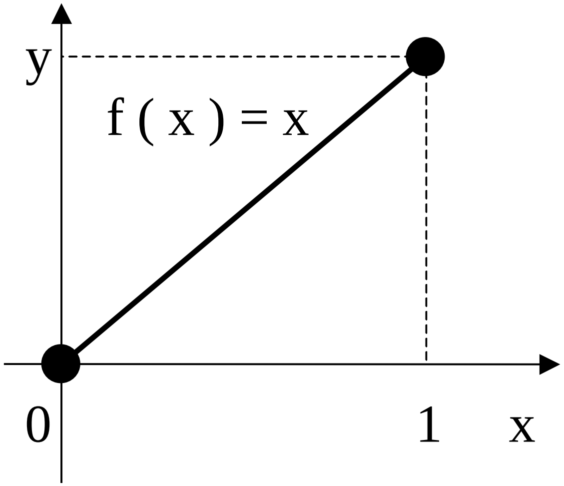


$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x\in[0,1) \\ 0 & \text{dla} \quad x=1 \end{cases}$$

f nie jest ciągła w przedziale [0, 1]

$$f(x)=|x|$$

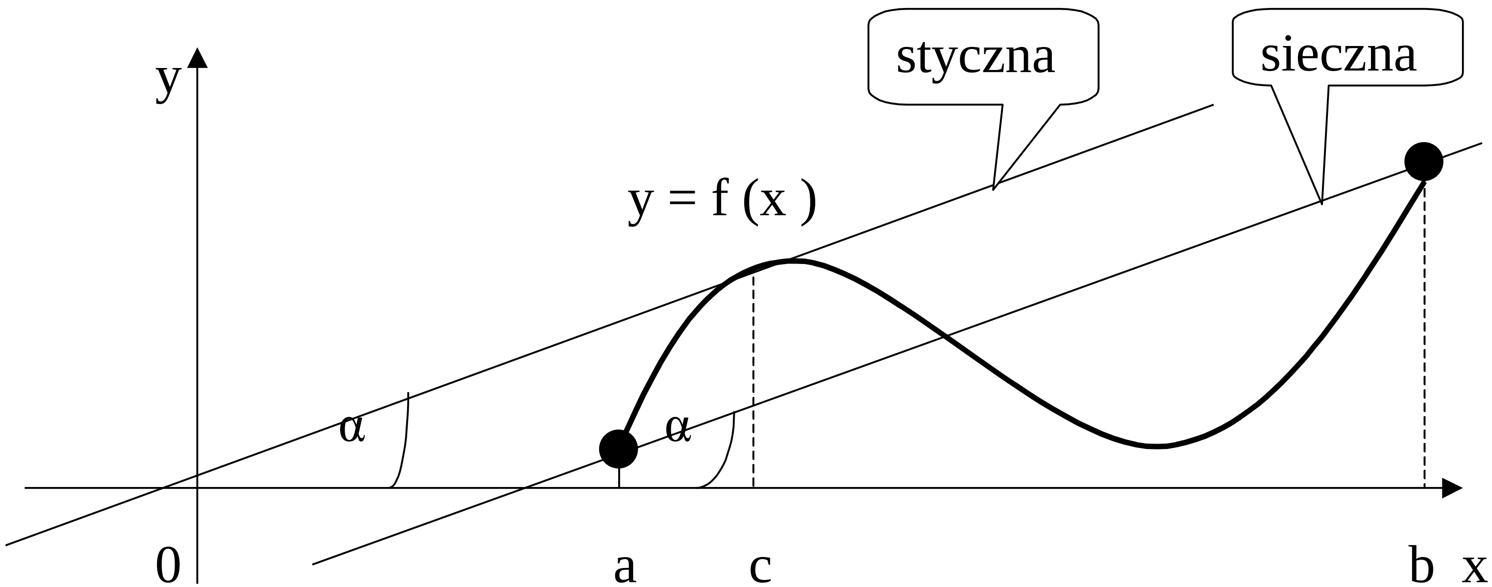
f nie jest różniczkowalna w przedziale (0, 1)



funkcja f (x) = x
nie spełnia warunku
f (0) = f (1)

Twierdzenie Lagrange'a (o przyrostach, o wartości średniej):

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$ oraz ma pierwszą pochodną wewnątrz tego przedziału, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ - współczynnik kierunkowy siecznej (i stycznej!)

Wnioski z twierdzenia Lagrange'a:

1. $\bigwedge_{x\in(a,b)} f'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=c, \quad c$ – stała

2. $\bigwedge_{x\in(a,b)} f'(x)>0 \Rightarrow$ funkcja f jest rosnąca w przedziale (a, b)

3. $\bigwedge_{x\in(a,b)} f'(x)<0 \Rightarrow$ funkcja f jest malejąca w przedziale (a, b)

Elastyczność funkcji

Niech $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$.

Iloraz

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{f(x_0)} \div \frac{\Delta x}{x_0}$$

nazywamy **elastycznością przeciętną funkcji f** w przedziale $\langle x_0, x_0+\Delta x\rangle$ i oznaczamy symbolem E.

Stosunek przyrostu względnego wartości funkcji do przyrostu względnego argumentu można także przedstawić w postaci

$$E=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\frac{x_0}{f(x_0)}.$$

Granicę

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)} = f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$$

nazywamy **elastycznością funkcji f w punkcie x_0** i oznaczamy $E(x_0)$.

Twierdzenie: Jeżeli przyrostowi zmiennej niezależnej funkcji f o p% odpowiada przyrost funkcji o q%, to $q \approx p \cdot E(x)$.

Przykład:

Oblicz elastyczność funkcji $f(x)=\dfrac{3x}{2x+5}$ w punkcie x = 1.

Funkcja pochodna $f'(x)=\dfrac{15}{(2x+5)^2}$

Elastyczność

$$E(x)=f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)}=\frac{15}{(2x+5)^2}\cdot\frac{x}{\frac{3x}{2x+5}}=\frac{5}{2x+5}$$

$$E(1)=f'(1)\cdot\frac{1}{f(1)}=\frac{5}{7}$$

Jeżeli wartość x = 1 wzrośnie o 1%, to wartość funkcji f wzrośnie o około 5/7 %.

TWIERDZENIE DE L'HOSPITALA

Reguła de l'Hospitala jest stosowana do obliczania nieoznaczoności następujących typów:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Twierdzenie 1

Założenia:

1. Funkcje $\frac{f(x)}{g(x)}$ i $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ są określone w pewnym sąsiedztwie $S(x_0, \delta)$ punktu x_0
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ lub $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$
3. Istnieje granica $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa)

Teza: Istnieje granica $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, przy czym

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Uwaga: Twierdzenie jest także prawdziwe dla granic jednostronnych x_0^-, x_0^+

Twierdzenie 2

Założenia:

1. Funkcje $\frac{f(x)}{g(x)}$ i $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ są określone w przedziale $(-\infty, a)$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ lub $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \pm\infty$

3. Istnieje granica $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa)

Teza: Istnieje granica $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, przy czym

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Uwaga: Twierdzenie jest także prawdziwe gdy rozpatrujemy funkcje w przedziale $(a, +\infty)$.

REGUŁY DE L'HOSPITALA

1. $\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$ $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. $\infty - \infty$ sprowadzamy do $\frac{0}{0}$ za pomocą tożsamości

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

3. $0 \cdot \infty$ sprowadzamy do $\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$ za pomocą tożsamości

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

4. 0^0, ∞^0, 1^∞ sprowadzamy do $0 \cdot \infty$ stosując tożsamość

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)},$$

przy czym na początku obliczamy granicę:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \ln f(x) = A,$$

wtedy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = e^A$.

Przykład:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3^x\ln 3}{1}=\ln 3$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2}{4x^2+5}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{8x}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

3. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)\overset{[\infty-\infty]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$$

$$\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+(\cos x-x\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

4. $$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{a}{x}\overset{[\infty\cdot 0]}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{a}{x^2}\cos\frac{a}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}a\cos\frac{a}{x}=a$$

5. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}} \overset{[0^0]}{=} e^A = e^0 = 1$

$$A = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x \overset{[0\cdot(-\infty)]}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -2\sqrt{x} = 0$$