# ANALIZA MATEMATYCZNA

# UWAGI ORGANIZACYJNE

- Wymiar godzin dydaktycznych:
  - 20 godzin wykładów
  - 20 godzin ćwiczeń
- zaliczenie, egzamin

# Plan wykładów

## ANALIZA MATEMATYCZNA

**I. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej**

1. Definicja pochodnej i jej interpretacja geometryczna
2. Różniczka funkcji, reguły różniczkowania
3. Twierdzenie Rolle'a i Lagrange'a
4. Pochodna i różniczka n-tego rzędu; wzór Taylora i Maclaurina
5. Reguła de l'Hospitala
6. Ekstrema i monotoniczność funkcji
7. Punkty przegięcia i wypukłość funkcji
8. Zastosowania ekonomiczne pochodnej: elastyczność funkcji, koszty krańcowe

## II. Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej

1. Całka nieoznaczona.

   Metody całkowania:

   - całkowanie przez podstawianie,
   - przez części,
   - przez rozkład funkcji podcałkowej na ułamki proste

2. Całka oznaczona i jej własności
3. Całki niewłaściwe
4. Zastosowanie całek do obliczania pól powierzchni; przykłady zastosowania całek w ekonomii.

## III. Funkcje wielu zmiennych

1. Definicja, granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych
2. Pochodne cząstkowe I-go i wyższych rzędów
3. Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych
4. Ekstrema warunkowe funkcji dwóch zmiennych – metoda mnożników Lagrange'a
5. Zastosowanie funkcji wielu zmiennych w ekonomii

# L I T E R A T U R A


1. Badach A., Kryński H. „**Matematyka – podręcznik dla wydziałów ekonomicznych**”, Tom I i II, PWN Warszawa 1979
2. Krysicki W., Włodarski L. **„Analiza matematyczna w zadaniach”**, część I, PWN Warszawa 1993
3. Mika J. **„Wykłady z matematyki dla studentów ekonomii i zarządzania”**, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 2001
4. Piszczała J. **„Matematyka i jej zastosowania w naukach ekonomicznych”**, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 1998

# ELEMENTY
# LOGIKI MATEMATYCZNEJ

| **symbol logiczny** | **spójnik** | **nazwa zdania złożonego** |
|---|---|---|
| $\vee$ | lub | alternatywa |
| $\wedge$ | i | koniunkcja |
| $\neg$, ~ | nieprawda, że... | negacja (zaprzeczenie) |
| $\Rightarrow$ | jeżeli..., to... | implikacja |
| $\Leftrightarrow$ | wtedy i tylko wtedy, gdy... | równoważność |

**Logika matematyczna** zajmuje się zdaniami logicznymi.

**Zdanie logiczne**, to zdanie gramatyczne orzekające, któremu można przypisać jedną z dwóch ocen (wartość)

Prawda (TRUE, 1);

Fałsz (FALSE,0 )

(czyli zdania logiczne podlegają wartościowaniu).

Nie są zdaniami logicznymi zdania pytające i rozkazujące.

**Kwantyfikatory:**

$\forall$- dla każdego

$\exists$ - istnieje

| p | q | p ∧ q | p ∨ q | p ⇒ q | p ⇔ q |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

**Metoda zero jedynkowa** jest podstawową metodą dowodzenia zdań logicznych. Najczęściej wykorzystuje się ją do sprawdzania, czy zdanie logiczne jest tautologią.

**Tautologia** to zdanie zawsze prawdziwe niezależnie od wartości logicznych zadań budujących całą tautologię.

# PRAWA LOGIKI

**Przemienność alternatywy:**

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

**Łączność alternatywy:**

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

**Przemienność koniunkcji:**

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

**Łączność koniunkcji:**

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

**Rozdzielność koniunkcji względem alternatywy:**

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

**Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji:**

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

**Pierwsze prawo De Morgana:**

$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ - zaprzeczeniem alternatywy jest koniunkcja zaprzeczeń

**Drugie prawo De Morgana:**

$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ - zaprzeczeniem koniunkcji jest alternatywa zaprzeczeń

**Zaprzeczenie implikacji:** $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

**Zastąpienie równoważności implikacją:**

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

**Prawo kontrapozycji:** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

**Prawo przechodniości:** $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

**Prawo wyłączonego środka:**

$p \vee \sim p$ - prawo to mówi, że zawsze prawdziwe jest albo zdanie logiczne, albo jego zaprzeczenie.

## POJĘCIE FUNKCJI

Niech symbole X, Y oznaczają dwa niepuste zbiory.

Mówimy, że w zbiorze X określona jest pewna **funkcja f** (funkcja jednej zmiennej), jeżeli każdej liczbie x ze zbioru X jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba y ze zbioru Y.

Przyporządkowanie to zapisujemy w postaci: $y = f(x)$

x - **argument funkcji** (zmienna niezależna).

y – **wartość funkcji** (zmienna zależna).

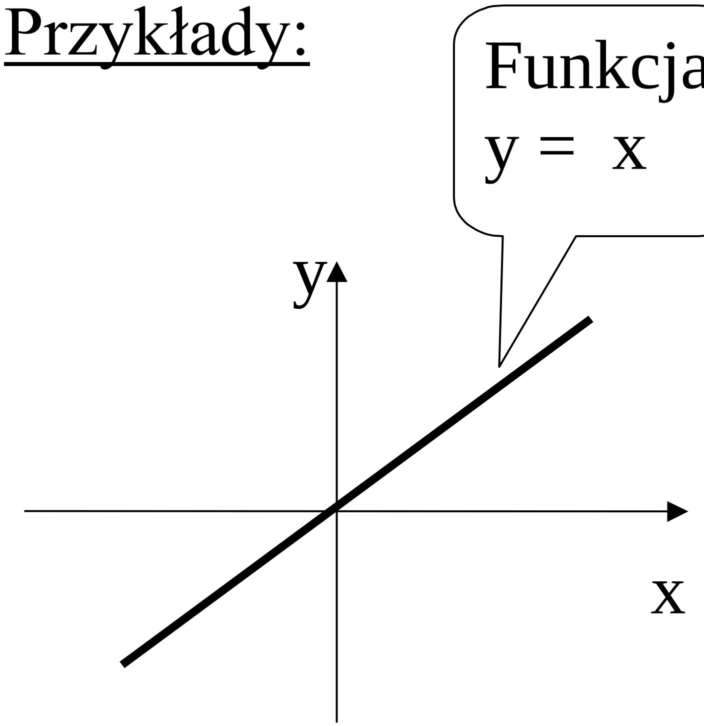
## Interpretacja geometryczna funkcji

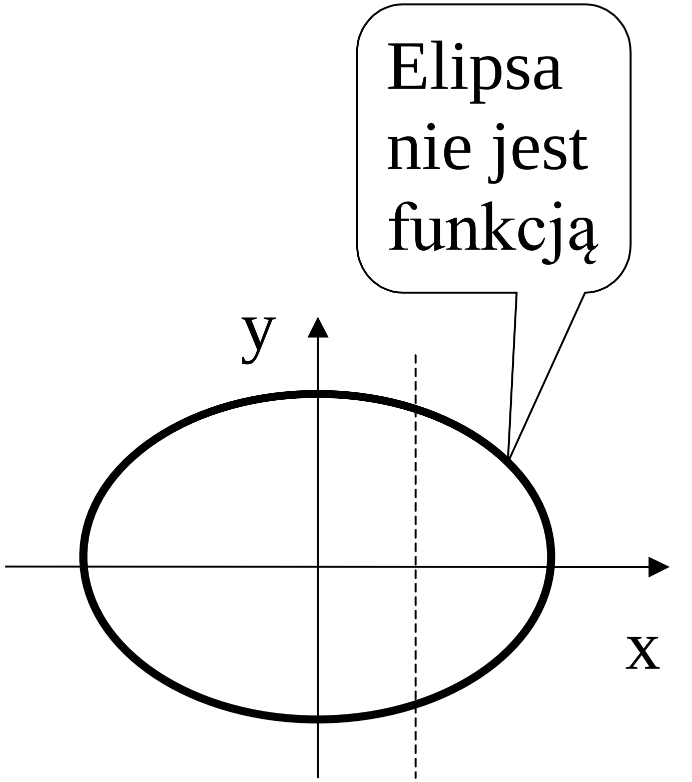
**Wykresem funkcji** nazywamy zbiór tych punktów płaszczyzny, których odciętymi są punkty należące do zbioru X (pierwsze elementy par) zaś rzędnymi są przyporządkowane im wartości funkcji (drugie elementy par).

$$\text{Graph } f = \{(x, y) : x \in X, \quad f(x) = y\}$$

*Każda prosta równoległa do osi rzędnych ma* *<u>co najwyżej jeden</u>* *punkt wspólny z wykresem funkcji.*

Przykłady:



# PODSTAWOWE FUNKCJE

1. **Liniowa** $y = ax + b \quad a, b \in R, \quad x \in R$
2. **Kwadratowa** $y = ax^2 + bx + c \quad a, b, c, x \in R, \ a \neq 0$

- $y = a(x - p)^2 + q \qquad p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{\Delta}{4a}$

  postać kanoniczna,

  wykresem jest parabola o wierzchołku (p,q)
- $y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad$ gdy $\quad \Delta > 0$

  postać iloczynowa
- $y = a(x - x_0)^2 \qquad$ gdy $\quad \Delta = 0$

3.**Wielomian** stopnia

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$a_n, \ldots, a_0 \in R \quad a_n \neq 0 \quad x \in R$$

4.**Wymierna** $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q - wielomiany

$$D = \{x : Q(x) \neq 0, x \in R\}$$

5.**Homograficzna** $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $D = R - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

$$c \neq 0, ad - bc \neq 0$$

6. **Potęgowa** $y = ax^m \quad a \in R, \quad m \in R$

(dziedzina funkcji zależy od parametru m)

7. **Wykładnicza** $y = a^x \quad a \in R^+, \quad x \in R$

8. **Logarytmiczna** $y = \log_a x$

$x \in R^+, a \in (0,1) \cup (1, \infty)$

## 9. **Trygonometryczne**

| | | |
|---|---|---|
| ▪ sinus | $y = \sin x$ | $x \in R$ |
| ▪ cosinus | $y = \cos x$ | $x \in R$ |
| ▪ tangens | $y = \mathrm{tg}\, x$ | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in C$ |
| ▪ cotangens | $y = \mathrm{ctg}\, x$ | $x \neq k\pi, k \in C$ |

10. **Cyklometryczne**

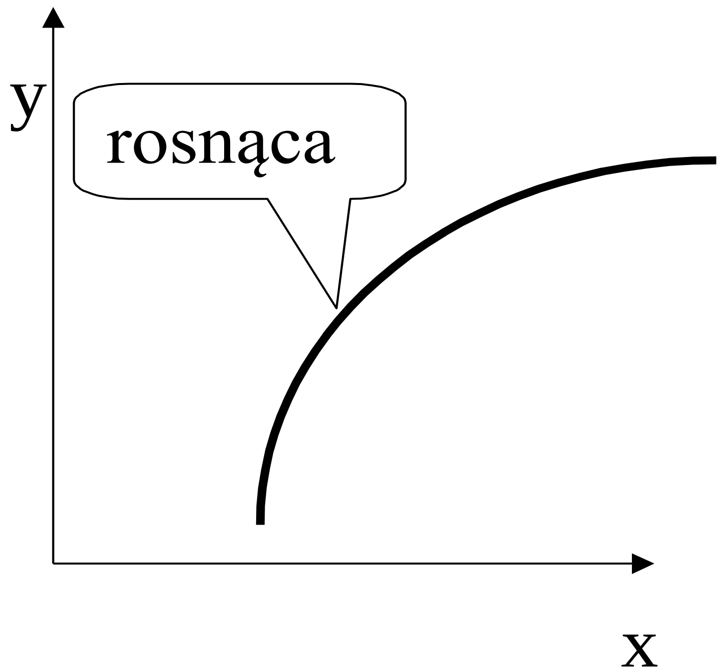
- arcus sinus $y = \text{arc sin } x$ $x \in [-1,1]$
- arcus cosinus $y = \text{arc cos } x$ $x \in [-1,1]$
- arcus tangens $y = \text{arc tg } x$ $x \in R$
- arcus cotangens $y = \text{arc ctg } x$ $x \in R$

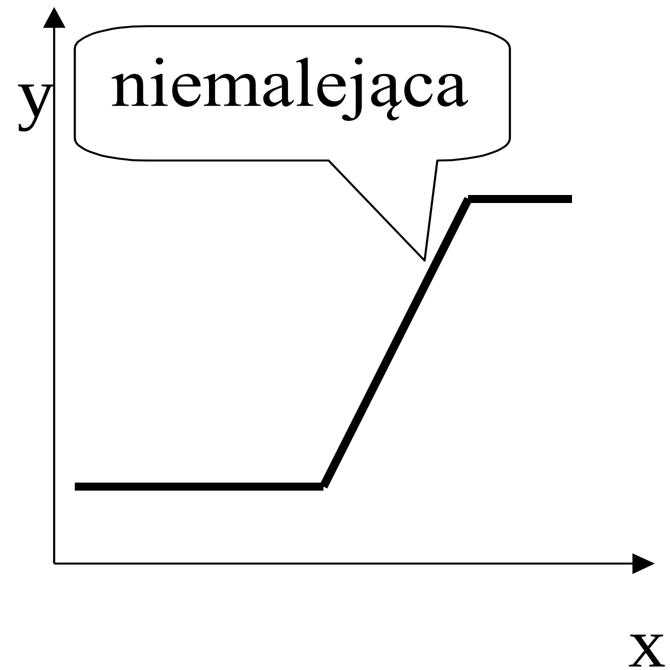
## **WŁASNOŚCI FUNKCJI**

Niech $f : X \to Y$ oraz $A \subset X$

- Funkcję $f$ nazywamy **rosnącą** (niemalejącą) w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy
-

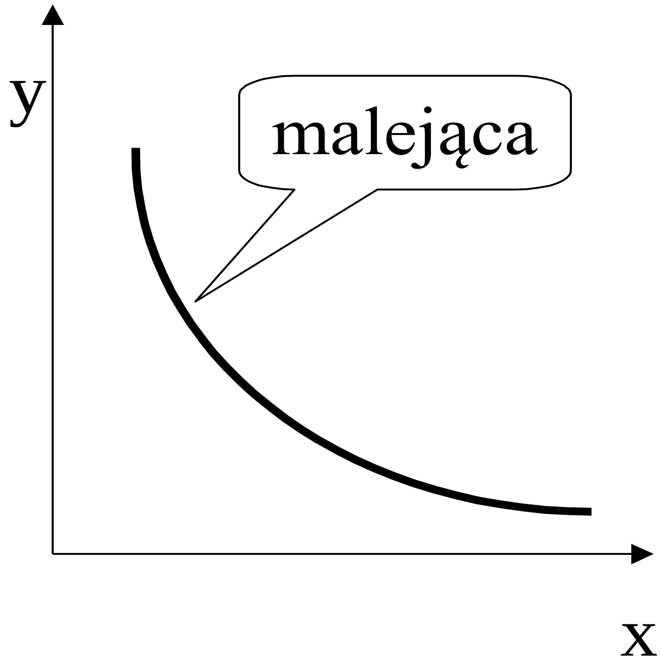
$$\bigwedge_{a,b \in A} a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \qquad (a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$$

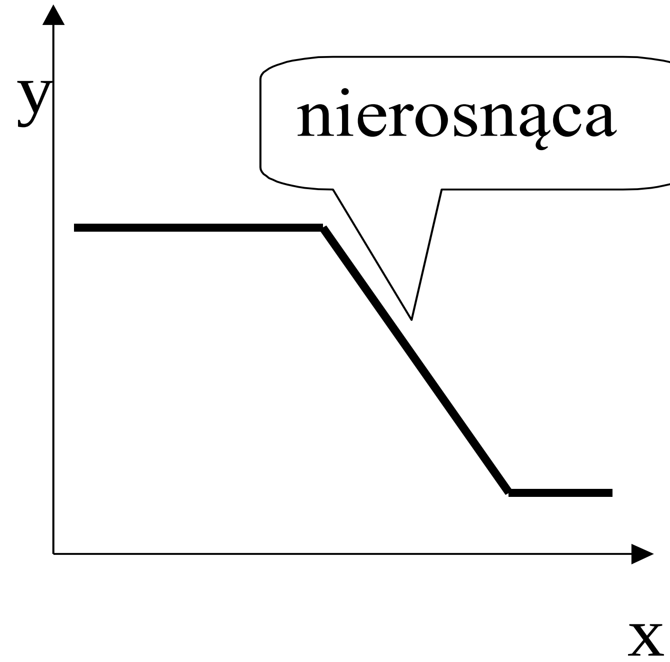

y
rosnąca
x


y
niemalejąca
x

- Funkcję f nazywamy **malejącą** (nierosnącą) w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{a,b\in A} a<b \Rightarrow f(a)>f(b) \qquad \left(a<b \Rightarrow f(a)\geq f(b)\right)$$



Niech $-x \in X$

- Funkcję f nazywamy **parzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigwedge_{x \in X} f(x) = f(-x)$

  *Wykres funkcji jest symetryczny względem osi OY*

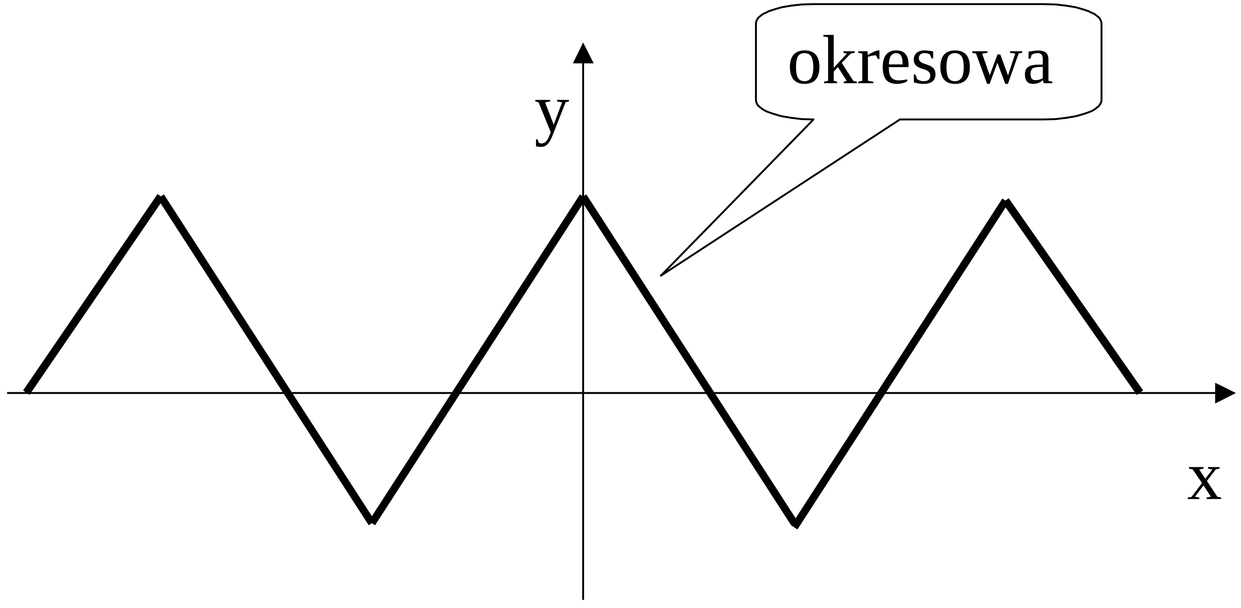
- Funkcję f nazywamy **nieparzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigwedge_{x \in X} (-f(x) = f(-x))$

  *Początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii wykresu funkcji.*

- Funkcję f nazywamy **okresową** wtedy i tylko wtedy,

gdy $\bigvee_{s \neq 0} \bigwedge_{x \in X} x+s \in X \wedge f(x+s)=f(x)$

*Liczbę s nazywamy okresem funkcji f.*



- Funkcję f nazywamy **ograniczoną z góry** wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigvee_{M} \bigwedge_{x \in X} f(x) \leq M$

- Funkcję f nazywamy **ograniczoną z dołu** wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigvee_{m} \bigwedge_{x \in X} f(x) \geq m$

- Funkcję nazywamy **ograniczoną** gdy jest ograniczona z góry i z dołu $\bigvee_{M} \bigwedge_{x \in X} |f(x)| \leq M$

- Mówimy, że odwzorowanie $f : X \to Y$ jest **różnowartościowe** (<u>injekcja</u>) jeżeli prawdziwa jest implikacja $$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

- Mówimy, że odwzorowanie $f : X \xrightarrow{\text{na}} Y$ jest odwzorowaniem zbioru X **na** zbiór Y (<u>surjekcja</u>) jeżeli prawdziwe jest zdanie $$\bigwedge_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} y = f(x)$$

- Mówimy, że odwzorowanie $f: X \xrightarrow{\text{na}} Y$ jest odwzorowaniem **wzajemnie jednoznacznym** (bijekcja) jeżeli każdy element $y \in Y$ jest obrazem dokładnie jednego elementu $x \in X$.

## FUNKCJA ODWROTNA

Niech $f$ będzie bijekcją.

- Dla każdej wartości $y \in Y$ istnieje dokładnie jedna argument $x \in X$, taka, że $f(x) = y$.
- Istnieje odwzorowanie g, przekształcające wzajemnie jednoznacznie zbiór Y na zbiór X.
- Dla każdego argumentu $x \in X$ istnieje również dokładnie jedna wartość $y \in Y$, taka, że $g(y) = x$.

Odwzorowania f i g nazywamy **wzajemnie odwrotnymi**: $g = f^{-1}, \quad x = f^{-1}(y)$

*Wykresy funkcji wzajemnie odwrotnych są symetryczne względem prostej* $y = x$.

## Przykład:

$$f(x) = 2x - 5$$

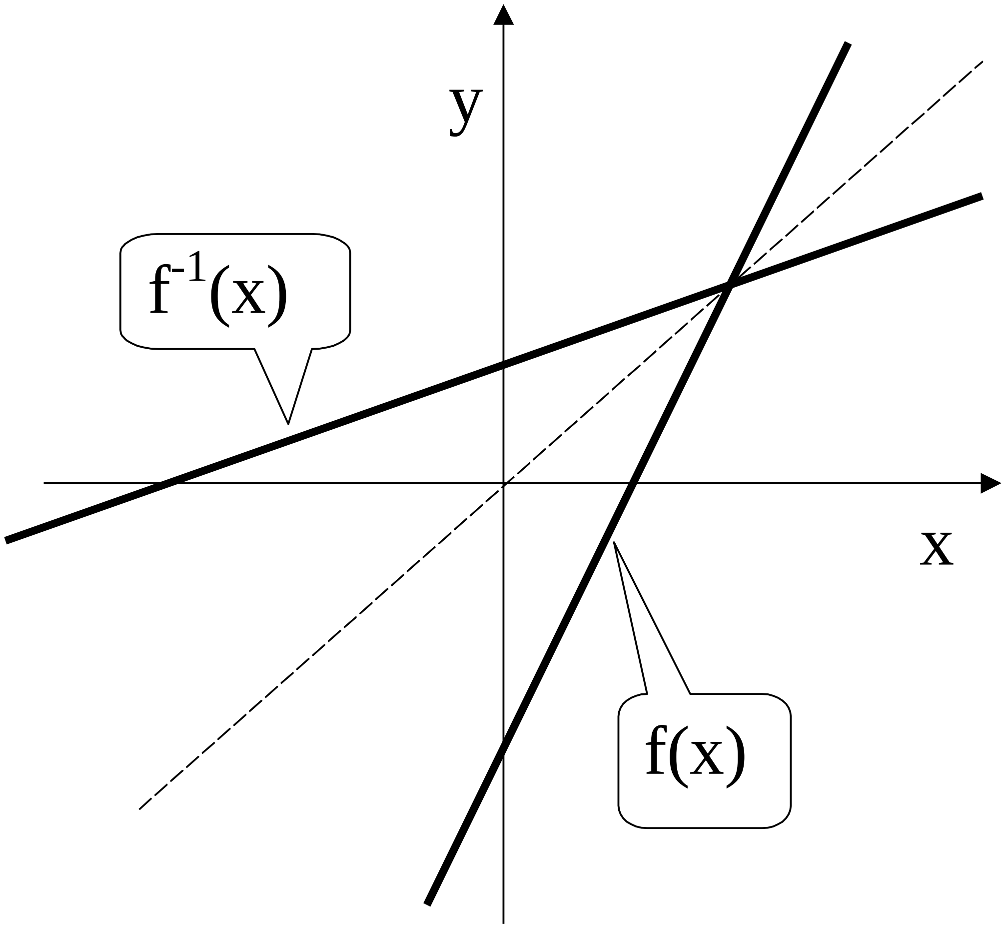
$$y = 2x - 5$$

$$x = 2y - 5$$

$$2y = x + 5$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$



## FUNKCJA ZŁOŻONA

Niech $f: X \to Y$ oraz $g: Y \to Z$.

**Złożeniem** odwzorowań f i g nazywamy odwzorowanie $z = g(f(x))$ i oznaczamy je symbolem $g \circ f$ $(g \circ f : X \to Z)$.

Funkcje f i g nazywamy odpowiednio funkcją wewnętrzna i zewnętrzną.

- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- $f \circ g \neq g \circ f$ (na ogół)
- gdy f i g to bijekcje, to $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

# CIĄGI LICZBOWE

Funkcję $f: N \to R$ odwzorowującą zbiór liczb naturalnych na zbiór liczb rzeczywistych nazywamy **ciągiem liczbowym**. Wartości funkcji $f$ oznacza się zazwyczaj symbolem $f(n) = a_n$.

Przykład:

1. Ciąg harmoniczny $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

2. Ciąg arytmetyczny $\{a + rn\}$ $\quad$ a, a+r, a+2r, a+3r,...

3. Ciąg geometryczny $\left\{ar^{n-1}\right\}$ $\quad$ a, ar, $ar^2$, $ar^3$,...

## **Własności ciągu:**

- Ciąg liczbowy $\{a_n\}$ jest ciągiem **ograniczonym z góry** wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigvee_{M} \bigwedge_{n} a_n \le M$
- Ciąg liczbowy $\{a_n\}$ jest ciągiem **ograniczonym z dołu** wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigvee_{m} \bigwedge_{n} a_n \ge m$
- Ciąg liczbowy $\{a_n\}$ jest ciągiem **ograniczonym** wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigvee_{M} \bigwedge_{n} |a_n| \le M$

- Ciąg liczbowy $\{a_n\}$ nazywamy ciągiem **rosnącym** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{n} a_n < a_{n+1}$$

$$\bigwedge_{n} a_n - a_{n+1} < 0,$$

$$\bigwedge_{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{gdy} \quad a_n > 0$$

- Ciąg liczbowy $\{a_n\}$ nazywamy ciągiem **malejącym** gdy

$$\bigwedge_n a_n > a_{n+1}$$

$$\bigwedge_n a_n - a_{n+1} > 0,$$

$$\bigwedge_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \text{gdy} \quad a_n > 0$$

# GRANICA CIAGU LICZBOWEGO

## Definicja Cauchy'ego

Liczbę **a** nazywamy **granicą ciągu liczbowego** $\{a_n\}$ jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta$, zależna od $\varepsilon$, że dla każdego $n > \delta$ spełniona jest nierówność:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Symbolicznie: $$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n>\delta} |a_n - a| < \varepsilon$$

Ciąg liczbowy, który ma granicę **a** nazywamy **zbieżnym**, a jeśli granicy nie ma - **rozbieżnym**.

Można udowodnić, że istnieją następujące granice:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3. $\bigwedge\limits_{a\in(0,+\infty)} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

4. $\bigwedge\limits_{|q|<1} \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

5. $\bigwedge\limits_{\alpha\in(0,+\infty)} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0$

6. $\bigwedge\limits_{a\in(0,+\infty)} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

**Twierdzenie:**

Każdy ciąg liczbowy zbieżny jest ograniczony, tzn. jeżeli

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a, \text{ to } \bigvee_{M>0} \bigwedge_{n} |a_n| \leq M.$$

**Uwaga**:

- Nie każdy ciąg ograniczony jest zbieżny!
- Ciąg liczbowy, który nie jest ograniczony jest ciągiem rozbieżnym.

***Przykład:*** Ciąg liczbowy $\left\{(-1)^n\right\}$ jest ograniczony, ale nie jest zbieżny.

## Twierdzenie:

Ciąg monotoniczny jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.

### *Przykład:*

Ciąg liczbowy o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n+1}{n}$ jest malejący i ograniczony, ponieważ $\bigwedge_n 1 < \frac{n+1}{n} \le 2$ oraz $\bigwedge_n \left( a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n} = a_n \right)$.

Granicą tego ciągu jest liczba 1, bo jest ona kresem dolnym zbioru liczb $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

## **Twierdzenie (o trzech ciągach)**

Jeżeli istnieje taka liczba $\delta_0$, że trzy ciągi $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ spełniają warunki:

$$\bigwedge_{n>\delta_0} a_n \le b_n \le c_n \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

to także $$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

## <u>Twierdzenia</u> o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów zbieżnych

1. Granica **sumy** dwóch ciągów zbieżnych jest równa sumie granic tych ciągów;

♦ jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$,

to $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$

2 Granica **iloczynu** dwóch ciągów zbieżnych jest równa iloczynowi granic tych ciągów;

- jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,

  to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

3 Jeżeli $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są ciągami zbieżnymi odpowiednio do granic $a$ i $b$ oraz $\bigwedge\limits_{n\in N} b_n \neq 0$ i $b \neq 0$,

to $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b}$.

**Uwaga:**

$$\lim_{n \to \infty} \left( c \cdot a_n \right) = c \cdot a$$

$$\lim_{n \to \infty} \left( a_n - b_n \right) = a - b$$

***Przykład:*** Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym

**A.** $a_n = \dfrac{n}{n+2} + \dfrac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{1+0} + 0 = 1$$

**B**. $a_n = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}} = \frac{1}{1} = 1$$

**C.** $a_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$

**Liczba e:** $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad e \approx 2{,}71828$

$$\bigwedge_{\alpha\neq 0} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3 = e^3$$