GRANICE NIEWŁAŚCIWE CIĄGU

- Ciąg liczbowy $\{a_n\}$ jest **rozbieżny** do $-\infty$ (piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{M<0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n>\delta} a_n < M$$

- Ciąg liczbowy $\{a_n\}$ jest **rozbieżny** do $+\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n>\delta} a_n > M$$

O ciągach **rozbieżnych** do $+\infty(-\infty)$ mówimy, że mają **granice niewłaściwe** $+\infty$ (lub $-\infty$).

Przykład:

1. Ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = n^2$ jest rozbieżny do $+\infty$:
   $$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$$
2. Ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = n - \frac{1}{2}n^2$ jest rozbieżny do $-\infty$: $\lim_{n\to\infty}\left(n - \frac{1}{2}n^2\right) = -\infty$
3. Ciąg $\left\{(-1)^n\right\}$ jest rozbieżny, ale nie jest rozbieżny ani do $+\infty$, ani do $-\infty$.

Twierdzenie:

1. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, to

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} +\infty & \text{dla} \quad a > 0 \\ -\infty & \text{dla} \quad a < 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{dla} \quad a > 0 \\ -\infty & \text{dla} \quad a < 0 \end{cases}$

2 Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, to

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$

Przykład:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+1}{n^3+n^2+4} \overset{\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(5+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^3}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{5+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^3}} =$$

$$= 0\cdot\frac{5+0}{1+0+0} = 0$$

GRANICA FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

- **Sąsiedztwem** punktu x_0 o promieniu δ $(\delta > 0)$ nazywamy sumę przedziałów

$$S(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

- Symbolem S oznaczamy dowolne sąsiedztwo punktu x_0.

- Niech $y = f(x)$ będzie funkcją określoną w pewnym sąsiedztwie S punktu x_0 (w punkcie x_0 może być nieokreślona). Oznaczmy przez $\{x_n\}$ taki ciąg liczbowy (o wyrazach z tego sąsiedztwa), że

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \, .$$

Definicja Heinego

Liczbę g nazywamy granicą funkcji y = f(x) w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{x_n\}$ elementów z S zbieżnego do x_0, ciąg wartości funkcji $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny do liczby g:

$$\bigwedge_{\{x_n\}: x_n \in S} \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Symbolicznie: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$, $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} g.$

Definicja Cauchy'ego

Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla każdego x z sąsiedztwa $S(x_0, \delta)$ spełniona jest nierówność: $|f(x) - g| < \varepsilon$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S(x_0, \delta)} |f(x) - g| < \varepsilon$$

Twierdzenie: Funkcja f(x) ma w punkcie $x = x_0$ granicę **g** w sensie **definicji Heinego** wtedy i tylko wtedy, gdy ma w tym punkcie granicę **g** w sensie **definicji Cauchy'ego**.

Dowód: Niech S będzie sąsiedztwem punktu x_0. Należy wykazać, że warunki

1. $$\bigwedge_{\{x_n\}\in S}\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

2. $$\bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{\delta>0}\ \bigwedge_{x\in S(x_0,\delta)} |f(x)-g| < \varepsilon$$

są równoważne.

- Wykażemy, że z warunku 1 wynika warunek 2.

Przypuśćmy, że nie jest spełniony warunek 2, tj. istnieje takie $\varepsilon > 0$, że dla każdego $\delta > 0$ istnieje takie $x \in S(x_0, \delta)$, że $|f(x) - g| \ge \varepsilon$.

W szczególności dla $\delta = \frac{1}{n}$, n = 1, 2, 3, ... istniałby ciąg $\{x_n\}$ o wyrazach x_n spełniających warunki: $0 < |x_n - x| < \frac{1}{n}$ $|f(x_n) - g| \ge \varepsilon$.

Wynikałoby stąd, że dla ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do x_0 ciąg $\{f(x_n)\}$ nie jest zbieżny do g, co jest sprzeczne z przyjętym warunkiem 1.

Warunek 2 jest zatem spełniony!

- <u>Wykażemy, że z warunku 2 wynika warunek 1.</u>

Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem o wyrazach z sąsiedztwa S zbieżnym do x_0 oraz takim, że

$$\bigwedge_{n>\delta} x_n \in S(x_0, \delta).$$

Z warunku 2 wynika, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla każdej liczby naturalnej $n > \delta$ spełniona jest nierówność

$$\left|f\left(x_n\right) - g\right| < \varepsilon,$$

co oznacza, że ciąg $\left\{f\left(x_n\right)\right\}$ jest zbieżny go g, czyli spełniony jest warunek 1.

Z powyższego twierdzenia wynika, że ***definicje granicy*** *funkcji f(x) w punkcie x_0 w* ***sensie Heinego i Cauchy'ego*** ***<u>są równoważne</u>****.*

GRANICE JEDNOSTRONNE FUNKCJI

- Przedziały

$$S^{-}(x_0,\delta)=(x_0-\delta, x_0) \text{ i } S^{+}(x_0,\delta)=(x_0, x_0+\delta)$$

nazywamy odpowiednio **sąsiedztwem lewostronnym i prawostronnym punktu x_0** o promieniu δ $(\delta > 0)$.

- Sąsiedztwa o dowolnym promieniu oznaczmy symbolami S^{-} i S^{+}.

- Niech funkcja f(x) będzie określona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie S^- punktu x_0, a $\{x_n\}$ niech będzie ciągiem liczbowym którego wszystkie wyrazy $x_n \in S^-$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. W punkcie x_0 funkcja może nie być określona.

Definicja granicy lewostronnej funkcji

Liczba L jest granicą lewostronną funkcji f(x) w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\{x_n\}: x_n \in S^-} \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

- Niech funkcja f(x) będzie określona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie S^+ punktu x_0, a $\{x_n\}$ niech będzie ciągiem liczbowym którego wszystkie wyrazy $x_n \in S^+$ oraz $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. W punkcie x_0 funkcja może nie być określona.

Definicja granicy prawostronnej funkcji:

Liczba P jest granicą prawostronną funkcji f(x) w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\{x_n\}: x_n \in S^+} \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = P.$$

Symbolicznie: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L, \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = P.$

Powyższe granice nazywamy **granicami jednostronnymi** (definicje wg Heinego).

Przykład: $$f(x) = x^2 + \frac{|x|}{x}$$

Funkcja jest określona w dowolnym lewostronnym sąsiedztwie S^- punktu x = 0. Tworzymy ciąg $\{x_n\}$ taki, że

$\bigwedge_n x_n \in S^-$ oraz $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Wtedy $$f(x_n) = x_n^2 + \frac{|x_n|}{x_n} = x_n^2 - 1.$$

Ciąg wartości funkcji $\left\{x_n^2 - 1\right\}$ jest zbieżny do -1 przy $x_n \to 0$, czyli

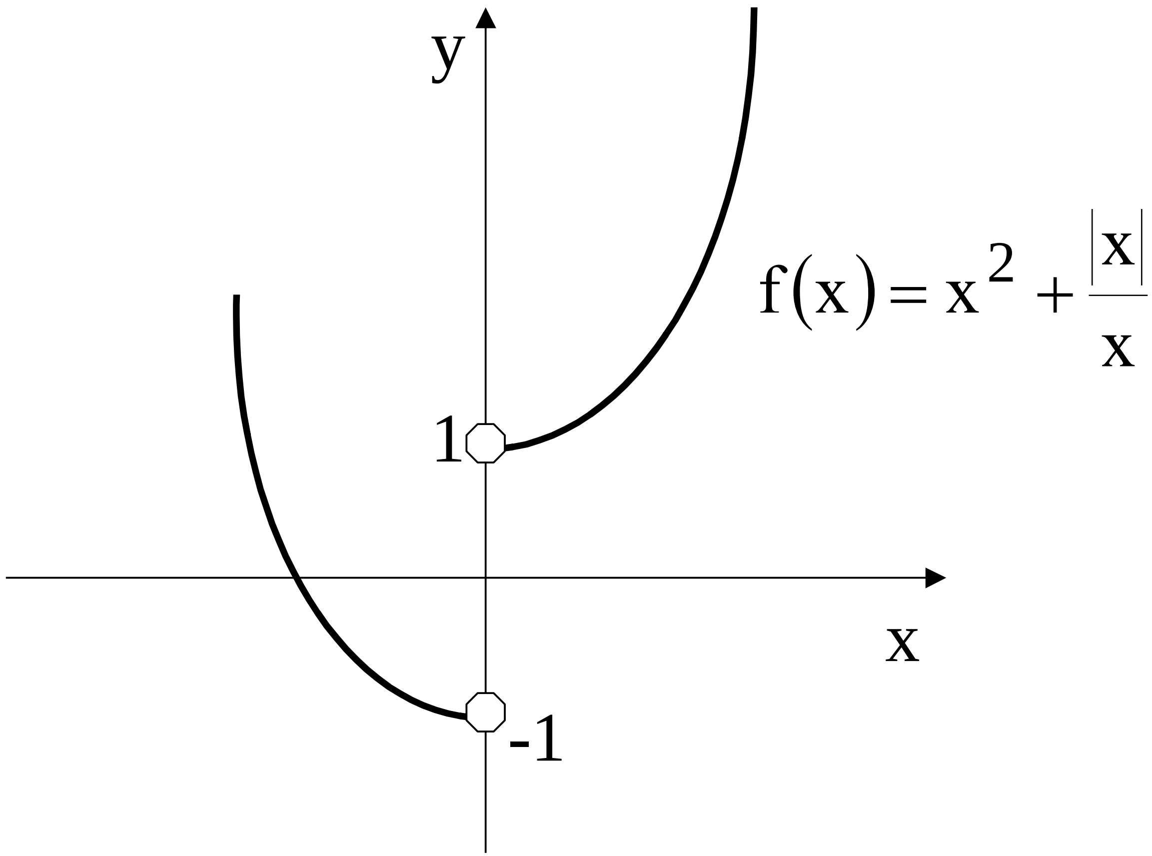
$$\lim_{x \to 0^-}\left(x^2 + \frac{|x|}{x}\right) = -1.$$

Funkcja ta jest także określona w dowolnym prawostronnym sąsiedztwie S^+ punktu $x = 0$.

Tworzymy teraz ciąg $\{x_n\}$ taki, że $\bigwedge_n x_n \in S^+$ oraz $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Wtedy $$f(x_n) = x_n^2 + \frac{|x_n|}{x_n} = x_n^2 + 1.$$

Ciąg wartości funkcji $\{x_n^2 + 1\}$ jest zbieżny do 1 przy $x_n \to 0$, a zatem $$\lim_{x\to 0^-}\left(x^2 + \frac{|x|}{x}\right) = 1.$$


y
x
1
-1
$f(x) = x^2 + \frac{|x|}{x}$

Twierdzenie:

Funkcja f(x) ma w punkcie x_0 granicę wtedy i tylko wtedy, gdy **istnieją obie granice jednostronne funkcji f(x) w punkcie x_0 i są sobie równe**. Granica ta jest równa wspólnej wartości granic jednostronnych.

GRANICE NIEWŁAŚCIWE FUNKCJI

- Niech funkcja f(x) będzie funkcją określoną w pewnym sąsiedztwie S punktu x_0 oraz niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem liczbowym którego wszystkie wyrazy należą do S i $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Definicja Heinego

Mówimy, że **funkcja f(x) ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą** $-\infty$ (lub $+\infty$), jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ o wyrazach z S zbieżnego do x_0 ciąg liczbowy $\{f(x_n)\}$ jest rozbieżny do $-\infty$ (lub $+\infty$).

Symbolicznie: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Przykład:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty$$

Dla każdego ciągu $\{x_n\}$ o wyrazach z dowolnego sąsiedztwa punktu x = 1 i zbieżnego do 1, ciąg $\{f(x_n)\}$,

czyli ciąg $\left\{\frac{1}{|x_n - 1|}\right\}$ jest rozbieżny do $+\infty$

Granice funkcji w nieskończoności

Niech funkcja f(x) będzie określona w przedziale $(a,+\infty)$ oraz niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem z tego przedziału.

Definicja Heinego

Funkcja f(x) ma w $+\infty$:

1. granicę właściwą g,
2. granicę niewłaściwą $-\infty$,
3. granicę niewłaściwą $+\infty$,

jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ z przedziału, ciągu rozbieżnego do $+\infty$, ciąg $\{f(x_n)\}$ jest odpowiednio:

1. zbieżny do g,
2. rozbieżny do $-\infty$,
3. rozbieżny do $+\infty$.

Symbolicznie: $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Przykład:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \left(2 - 3x^2\right) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Uwaga:

Poniższe granice nie istnieją!

$$\lim_{x \to -\infty} \sin x,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sin x,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \cos x,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \cos x.$$