4-1 在活动安排问题中，还可以有其他的贪心选择方案，但并不能保证产生最优解。给出一个例子，说明若选择具有最短时段的相容活动作为贪心选择，得不到最优解；若选择覆盖未选择活动最少的相容活动作为贪心选择，也得不到最优解。

4-2 证明背包问题具有贪心选择性质。

4-3 若在 0-1 背包问题中，各物品依重量递增排列时，其价值恰好依递减序排列。对这个特殊的 0-1 背包问题，设计一个有效算法找出最优解，并说明算法的正确性。

4-4 假定要把长为 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 的 n 个程序放在磁带 T_1 和 T_2 上，并且希望按照使最大检索时间取最小值的方式存放，即如果存放在 T_1 和 T_2 上的程序集合分别是 A 和 B，则希望所选择的 A 和 B 使得 $\max\left\{\sum_{i\in A} l_i, \sum_{i\in B} l_i\right\}$ 取最小值。贪心算法：开始将 A 和 B 都初始化为空，然后一次考虑一个程序，如果 $\sum_{i\in A} l_i = \min\left\{\sum_{i\in A} l_i, \sum_{i\in B} l_i\right\}$，则将当前正在考虑的那个程序分配给 A；否则，分配给 B。证明无论是按 $l_1 \leqslant l_2 \leqslant \cdots \leqslant l_n$ 或是按 $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_n$ 的次序来考虑程序，这种方法都不能产生最优解。应当采用什么策略？写出一个完整的算法并证明其正确性。

4-5 将最优装载问题的贪心算法推广到 2 艘船的情形，贪心算法仍能产生最优解吗？

4-6 字符 a～h 出现的频率恰好是前 8 个 Fibonacci 数，它们的哈夫曼编码是什么？将结果推广到 n 个字符的频率恰好是前 n 个 Fibonacci 数的情形。

4-7 设 $C=\{0,1,\cdots,n-1\}$ 是 n 个字符的集合。证明关于 C 的任何最优前缀码可以表示长

度为 $2n-1+n\lceil \log n \rceil$ 位的编码序列(提示：用 $2n-1$ 位描述树结构)。

4-8 说明如何用引理 4.6 的性质(2),在 $O(|A|)$ 时间里确定给定的任务集 A 是否独立。

4-9 给定 $n\times n$ 实值矩阵 T,证明 (S,I) 是拟阵。其中,S 是 T 的列向量的集合,$A\in I$ 当且仅当 A 中的列是线性独立的。

4-10 说明如何变换带权拟阵的权函数,使最小权最大独立子集问题变换为等价的标准带权拟阵问题,并证明变换的正确性。

4-11 假设具有 n 个顶点的连通带权图中所有边的权值均为从 1 到 n 之间的整数,能对 Kruskal 算法做何改进?时间复杂性能改进到何程度?若对某常量 N,所有边的权值均为从 1 到 N 之间的整数,在这种情况下又如何?在上述两种情况下,对 Prim 算法能做何改进?

4-12 试设计一个构造图 G 生成树的算法,使得构造出的生成树的边的最大权值达到最小。

4-13 试举例说明如果允许带权有向图中某些边的权为负实数,则 Dijkstra 算法不能正确求得从源到所有其他顶点的最短路径长度。

4-14 设 G 是具有 n 个顶点和 e 条边的带权有向图,各边的权值为 $0\sim N-1$ 之间的整数,N 为一非负整数。修改 Dijkstra 算法使其能在 $O(Nn+e)$ 时间内计算出从源到所有其他顶点之间的最短路径长度。

习题 4-3　特殊的 0-1 背包问题

若在 0-1 背包问题中，各物品依重量递增排列时，其价值恰好依递减序排列。对这个特殊的 0-1 背包问题，设计一个有效算法找出最优解，并说明算法的正确性。

分析与解答：

设所给的输入为 $W>0$，$w_i>0$，$v_i>0$，$1\leqslant i\leqslant n$。不妨设 $0<w_1\leqslant w_2\leqslant\cdots\leqslant w_n$。由题意知 $v_1\geqslant v_2\geqslant\cdots\geqslant v_n>0$。由此可知 $\dfrac{v_i}{w_i}\geqslant\dfrac{v_{i+1}}{w_{i+1}}$，$1\leqslant i\leqslant n-1$。

贪心选择性质：

当 $w_1>W$ 时问题无解。

当 $w_1\leqslant W$ 时，存在 0-1 背包问题的一个最优解 $S\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $1\in S$。

事实上，设 $S\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$ 是 0-1 背包问题的一个最优解，且 $1\notin S$。对任意 $i\in S$，取 $S_i=S\cup\{1\}-\{i\}$，则 S_i 满足贪心选择性质的最优解。

习题 4-12　最大权最小生成树

试设计一个构造图 G 生成树的算法，使得构造出的生成树的边的最大权值达到最小。

分析与解答：

对于这个问题，关键的一点是注意到任何一棵最小生成树都使边的最大权值达到最小。事实上，设 T 是 G 的一棵最小生成树，T' 是 G 的一棵使最大权值达到最小的生成树。e 是 T 中的最大权边，e' 是 T' 中的最大权边，且 $w(e')<w(e)$。将 e 从 T 中删去后，T 将分为两个连通分支。此时，一定有 T' 中的边 e'' 连接这两个连通分支，否则 T' 将是不连通的。将 e'' 加入 T 的这两个连通分支将得到一棵新的生成树 $T''=T-e+e''$。由于 e' 是 T' 的最大权边，故 $w(e'')\leqslant w(e')<w(e)$，从而有 $w(T'')=w(T)-w(e)+w(e'')<w(T)$。这与 T 是最小生成树相矛盾。

通过以上的讨论可知，用 Prim 算法或 Kruskal 算法均可构造出 G 的最大权值达到最小的生成树。

习题 4-13　最短路径的负边权

试举例说明如果允许带权有向图中某些边的权为负实数，则 Dijkstra 算法不能正确求

得从源到所有其他顶点的最短路径长度。

分析与解答:

对于图 4-4 所示的有向图 G,用 Dijkstra 算法找顶点 1 到顶点 3 的最短路径为 1,3,其长度为 1,而实际上最短路径应为 1,2,3,其长度为 0。可见,当有向图 G 中含有负权边时,Dijkstra 算法不能正确工作。

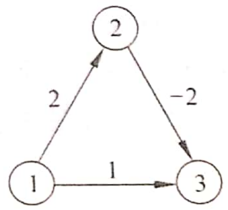

图 4-4　负边权有向图

习题 4-14　整数边权 Dijkstra 算法

设 G 是具有 n 个顶点和 e 条边的带权有向图,各边的权值为 $0 \sim N-1$ 的整数,N 为非负整数。修改 Dijkstra 算法使其能在 $O(Nn+e)$ 时间内计算出从源到所有其他顶点之间的最短路径长度。