

有必要对算法3的程序进行一些说明。递归过程调用的一般形式是传递输入的数组以及左边界和右边界,它们界定了数组要被处理的部分。单行驱动程序通过传递数组以及边界0和 $N-1$ 而将该过程启动。

第8行至第12行处理基准情况。如果 $\text{left} == \text{right}$,那么只有一个元素,并且当该元素非负时它就是最大子序列。 $\text{left} > \text{right}$ 的情况是不可能出现的,除非 N 是负数(不过,程序中小扰动有可能致使这种混乱产生)。第15行和第16行执行两个递归调用。我们可以看到,递归调用总是对小于原问题的问题进行,不过程序中的小扰动有可能破坏这个特性。第18行至第24行以及第26行至第32行计算达到中间分界处的两个最大和的和数。这两个值的和为扩展到左右两部分的最大和。例程`max3`(未给出)返回这三个可能的最大和中的最大者。

显然,算法3需要比前面两种算法更多的编程努力。然而,程序短并不总意味着程序好。正如我们在前面显示算法运行时间的表中已经看到的,除最小的输入量外,该算法比前两个算法明显要快。

对运行时间的分析方法与在分析计算斐波那契数程序时的方法类似。令 $T(N)$ 是求解大小为 N 的最大子序列和问题所花费的时间。如果 $N=1$,则算法3执行程序第8行到第12行花费某个常数时间量,我们称之为一个时间单位。于是, $T(1)=1$ 。否则,程序必须运行两个递归调用,即在第19行和第32行之间的两个for循环,以及某个小的簿记量,如第14行和第18行。这两个for循环总共接触到从 A_0 到 A_{N-1} 的每一个元素,而在循环内部的工作量是常量,因此,在第19到32行花费的时间为 $O(N)$ 。在第8行到第14行,第18、26和34行上的程序的工作量都是常量,从而与 $O(N)$ 相比可以忽略。其余就是第15、16行上运行的工作。这两行求解大小为 $N/2$ 的子序列问题(假设 N 是偶数)。因此,这两行每行花费 $T(N/2)$ 个时间单元,共花费 $2T(N/2)$ 个时间单元。算法3花费的总的时间为 $2T(N/2) + O(N)$ 。我们得到方程组

$$T(1) = 1$$

$$T(N) = 2T(N/2) + O(N)$$

为了简化计算,我们可以用 N 代替上面方程中的 $O(N)$ 项;由于 $T(N)$ 最终还是要用大 O 来表示,因此这么做并不影响答案。在第7章,我们将会看到如何严格地求解这个方程。至于现在,如果 $T(N) = 2T(N/2) + N$,且 $T(1) = 1$,那么 $T(2) = 4 = 2 * 2$, $T(4) = 12 = 4 * 3$, $T(8) = 32 = 8 * 4$,以及 $T(16) = 80 = 16 * 5$ 。其形式是显然的并且可以得到,即若 $N = 2^k$,则 $T(N) = N * (k + 1) = N \log N + N = O(N \log N)$ 。

这个分析假设 N 是偶数,否则 $N/2$ 就不确定了。通过该分析的递归性质可知,实际上只有当 N 是2的幂时结果才是合理的,否则我们最终要得到大小不是偶数的子问题,方程就是无效的了。当 N 不是2的幂时,我们多少需要更加复杂一些的分析,但是大 O 的结果是不变的。

在后面的章节中,我们将看到递归的几个漂亮的应用。这里,我们还是介绍求解最大子序列和的第4种方法,该算法实现起来要比递归算法简单而且更为有效。它在图2-8中给出。

不难理解为什么时间的界是正确的,但是要明白为什么算法是正确可行的却需要多加思考。为了分析原因,注意,像算法1和算法2一样, j 代表当前序列的终点,而 i 代表当前序列的起点。碰巧的是,如果我们不需要知道具体最佳的子序列在哪里,那么 i 的使用可以从程序上被优化,因此在设计算法的时候假设 i 是需要的,而且我们想要改进算法2。一个结论是,如果 $a[i]$ 是负的,那么它不可能代表最优序列的起点,因为任何包含 $a[i]$ 的作为起点的子序列都可以通过用 $a[i+1]$ 作起点而得到改进。类似地,任何负的子序列不可能是最优子序列的前缀(原理相同)。如果在内循环中检测到从 $a[i]$ 到 $a[j]$ 的子序列是负的,那么可以推进 i 。关键的结论是,我们不仅能够把 i 推进到 $i+1$,而且实际上还可以把它一直推进到 $j+1$ 。为了看清楚这一点,