1.2.3 级数

最容易记忆的公式是

$$\sum_{i=0}^{N} 2^i = 2^{N+1} - 1$$

和

$$\sum_{i=0}^{N} A^i = \frac{A^{N+1} - 1}{A - 1}$$

在第二个公式中，如果 $0<A<1$，则

$$\sum_{i=0}^{N} A^i \leqslant \frac{1}{1-A}$$

当 N 趋于∞时该和趋向于 $1/(1-A)$，这些公式是“几何级数”公式。

我们可以用下面的方法推导关于 $\sum_{i=0}^{\infty} A^i (0<A<1)$ 的公式。令 S 是其和。此时

$$S = 1 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + \cdots$$

于是

$$AS = A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + \cdots$$

如果我们将这两个方程相减(这种运算只允许对收敛级数进行)，等号右边所有的项相消，只留下 1：

$$S - AS = 1$$

即

$$S = \frac{1}{1-A}$$

可以用相同的方法计算 $\sum_{i=1}^{\infty} i/2^i$，它是一个经常出现的和。我们写成

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \cdots$$

用 2 乘之得到

$$2S = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \frac{6}{2^5} + \cdots$$

将这两个方程相减得到

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots$$

因此，$S=2$。

分析中另一种常用类型的级数是算术级数。任何这样的级数都可以从基本公式计算其值。

$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2} \approx \frac{N^2}{2}$$

例如，为求出和 $2+5+8+\cdots+(3k-1)$，将其改写为 $3(1+2+3+\cdots+k)-(1+1+1+\cdots+1)$，显然，它就是 $3k(k+1)/2-k$。另一种记忆的方法则是将第一项与最后一项相加(和为 $3k+1$)，第二项与倒数第二项相加(和也是 $3k+1$)，等等。由于有 $k/2$ 个这样的数对，因此总和就是 $k(3k+1)/2$，这与前面的答案相同。

现在介绍下面两个公式，不过它们就没有那么常见了。

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \approx \frac{N^3}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} i^k \approx \frac{N^{k+1}}{|k+1|} \quad k \neq -1$$