定理 1.3

如果 $N \geqslant 1$，则 $\sum_{i=1}^{N} i^2 = \dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

证明：

用数学归纳法证明。对于基准情形，容易看到，当 $N=1$ 时定理成立。对于归纳假设，设定理对 $1 \leqslant k \leqslant N$ 成立。我们将在该假设下证明定理对于 $N+1$ 也是成立的。我们有

$$\sum_{i=1}^{N+1} i^2 = \sum_{i=1}^{N} i^2 + (N+1)^2$$

应用归纳假设得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N+1} i^2 &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 \\ &= (N+1)\left[\frac{N(2N+1)}{6} + (N+1)\right] \\ &= (N+1)\frac{2N^2+7N+6}{6} \\ &= \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{N+1} i^2 = \frac{(N+1)[(N+1)+1][2(N+1)+1]}{6}$$

定理得证。 ■

通过反例证明

公式 $F_k \leqslant k^2$ 不成立。证明这个结论的最容易的方法就是计算 $F_{11} = 144 > 11^2$。

反证法证明

反证法证明是通过假设定理不成立，然后证明该假设导致某个已知的性质不成立，从而原假设是错误的。一个经典的例子是证明存在无穷多个素数。为了证明这个结论，我们假设定理不成立。于是，存在某个最大的素数 P_k。令 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 是依序排列的所有素数并考虑

$$N = P_1 P_2 P_3 \cdots P_k + 1$$

显然，N 是比 P_k 大的数，根据假设 N 不是素数。可是，$P_1, P_2, \cdots, P_k$ 都不能整除 N，因为除得的结果总有余数 1。这就产生一个矛盾，因为每一个整数或者是素数，或者是素数的乘积。因此，P_k 是最大素数的原假设是不成立的，这正意味着定理成立。

1.3 递归简论

我们熟悉的大多数数学函数都是由一个简单公式来描述的。例如，我们可以利用公式

$$C = 5(F-32)/9$$

将华氏温度转换成摄氏温度。有了这个公式，写一个 Java 方法就太简单了。除去程序中的说明和大括号外，这一行的公式正好翻译成一行 Java 程序。

有时候数学函数以不太标准的形式来定义。例如，我们可以在非负整数集上定义一个函数 f，它满足 $f(0)=0$ 且 $f(x)=2f(x-1)+x^2$。从这个定义我们看到 $f(1)=1, f(2)=6, f(3)=21$，以及 $f(4)=58$。当一个函数用它自己来定义时就称为是**递归**(recursive)的。Java 允许函数是递归的。[⊖]

⊖ 对于数值计算使用递归通常不是个好主意。我们在解释基本概念时已经说过。