当 $k=-1$ 时，后一个公式不成立。此时我们需要下面的公式，这个公式在计算机科学中的使用要远比在数学其他科目中使用得多。数 H_N 叫做调和数，其和叫做调和和。下面近似式中的误差趋向于 $\gamma\approx0.57\,721\,566$，称为**欧拉常数**(Euler's constant)。

$$H_N=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i}\approx\log_e N$$

以下两个公式只不过是一般的代数运算：

$$\sum_{i=1}^{N}f(N)=Nf(N)$$

$$\sum_{i=n_0}^{N}f(i)=\sum_{i=1}^{N}f(i)-\sum_{i=1}^{n_0-1}f(i)$$

1.2.4 模运算

如果 N 整除 $A-B$，那么就说 A 与 B 模 N 同余，记为 $A\equiv B(\mathrm{mod}\ N)$。直观地看，这意味着无论是 A 还是 B 被 N 去除，所得余数都是相同的。于是，$81\equiv61\equiv1(\mathrm{mod}\ 10)$。如同等号的情形一样，若 $A\equiv B(\mathrm{mod}\ N)$，则 $A+C\equiv B+C(\mathrm{mod}\ N)$以及 $AD\equiv BD(\mathrm{mod}\ N)$。

有许多定理适用模运算，其中有些特别需要用到数论来证明。我们将尽量少使用模运算，这样，前面的一些定理也就足够了。

1.2.5 证明的方法

证明数据结构分析中的结论的两种最常用的方法是归纳法证明和反证法证明(偶尔也被迫用到只有教授们才使用的证明)。证明一个定理不成立的最好的方法是举出一个反例。

归纳法证明

由归纳法进行的证明有两个标准的部分。第一步是证明**基准情形**(base case)，就是确定定理对于某个(某些)小的(通常是退化的)值的正确性；这一步几乎总是很简单的。接着，进行**归纳假设**(inductive hypothesis)。一般说来，它指的是假设定理对直到某个有限数 k 的所有的情况都是成立的。然后使用这个假设证明定理对下一个值(通常是 $k+1$)也是成立的。至此定理得证(在 k 是有限的情形下)。

作为一个例子，我们证明斐波那契数，$F_0=1,F_1=1,F_2=2,F_3=3,F_4=5,\cdots,F_i=F_{i-1}+F_{i-2}$，满足对 $i\geqslant1$，有 $F_i<(5/3)^i$(有些定义规定 $F_0=0$，这只不过将该级数做了一次平移)。为了证明这个不等式，我们首先验证定理对简单的情形成立。容易验证 $F_1=1<5/3$ 及 $F_2=2<25/9$，这就证明了基准情形。假设定理对于 $i=1,2,\cdots,k$ 成立，这就是归纳假设。为了证明定理，我们需要证明 $F_{k+1}<(5/3)^{k+1}$。根据定义得到

$$F_{k+1}=F_k+F_{k-1}$$

将归纳假设用于等号右边，得到

$$\begin{aligned}F_{k+1}&<(5/3)^k+(5/3)^{k-1}\\&<(3/5)(5/3)^{k+1}+(3/5)^2(5/3)^{k+1}\\&=(3/5)(5/3)^{k+1}+(9/25)(5/3)^{k+1}\end{aligned}$$

化简后为

$$\begin{aligned}F_{k+1}&<(3/5+9/25)(5/3)^{k+1}\\&=(24/25)(5/3)^{k+1}\\&<(5/3)^{k+1}\end{aligned}$$

这就证明了这个定理。

作为第二个例子，我们建立下面的定理。