1 Výroková logika

Příklad 1.1: Pro následující formule (i) sestavte *pravdivostní tabulku* a (ii) určete, zda jsou a) platné (tj. *tautologie*), b) neplatné, ale splnitelné, nebo c) nesplnitelné (tj. *kontradikce*).

a) $((X \wedge Y) \to Z) \ \to \ (X \vee Y)$
b) $(X \wedge \neg\neg Y) \vee (Z \to W)$
c) $(X \leftrightarrow Z) \to \big((Y \leftrightarrow Z) \to (X \leftrightarrow Y)\big)$
d) $(X \leftrightarrow Y) \to \big((X \wedge Z) \leftrightarrow (Z \wedge Y)\big)$
e) $(X \leftrightarrow Y) \to (\neg X \leftrightarrow \neg Y)$
f) $(X \vee Y) \leftrightarrow \neg(\neg X \vee \neg Y)$
g) $(X \to Y) \leftrightarrow (\neg X \vee Y)$
h) $(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow \big((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y)\big)$
i) $((X \wedge Y) \wedge Z) \leftrightarrow (X \wedge (Y \wedge Z))$
j) $X \leftrightarrow \neg(\neg X)$
k) $((X \wedge \neg X) \wedge Y) \leftrightarrow (X \wedge \neg X)$
l) $((X \wedge \neg X) \vee Y) \leftrightarrow X$
m) $(X \wedge (Y \wedge Z)) \leftrightarrow ((X \wedge Y) \vee (X \wedge Z))$
n) $((\neg X \wedge Y) \vee Z) \vee (X \vee (\neg Y \to \neg Z)) \vee (\neg X \vee (\neg Y \wedge Z))$
o) $(X \vee Y) \wedge (X \to \neg(Y \wedge Z))$
p) $(X \leftrightarrow Y) \vee (X \to Z)$
q) $(X \wedge Y) \to \neg(\neg X \vee Z)$
r) $(Z \vee (X \wedge Y)) \to \neg Y$
s) $X \leftrightarrow \neg(X \wedge Y)$
t) $X \leftrightarrow \neg(X \vee Y)$
u) $X \leftrightarrow \neg(X \to Y)$
v) $X \leftrightarrow \neg(Y \to X)$
w) $\neg(\neg(X \wedge Y) \to Z)$
x) $\neg(X \wedge (Y \leftrightarrow Z))$
y) $(\neg X \wedge \neg Y) \to \neg(X \vee Y)$
z) $(\neg X \vee \neg(X \to Y)) \to Z$

Příklad 1.2: Pomocí algebraických úprav (tedy ne pravdivostní tabulky či obdobné metody enumerující ohodnocení proměnných) převeďte formule z Příkladu 1.1 do *negační normální formy (NNF)*.

Příklad 1.3: Pomocí algebraických úprav dokažte, že následující dvojice formulí jsou logicky ekvivalentní.

a) $(X \wedge \neg Y) \vee \neg Y$ a $\neg Y$
b) $(\neg A \vee B) \wedge B$ a $\neg B \to 0$
c) $X \leftrightarrow Y$ a $(\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y)$
d) $(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$ a $A \vee \neg B$
e) $X \leftrightarrow \neg(X \wedge Y)$ a $\neg(X \to Y)$
f) $(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$
a
$(A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$

Příklad 1.4: Přepište formule z Příkladu 1.1 do tvaru používajícího jen následující množiny spojek:
a) $\{\wedge, \neg\}$ b) $\{\vee, \neg\}$ c) $\{\to, \neg\}$ d) $\{\uparrow\}$ (nand) e) $\{\downarrow\}$ (nor)

Příklad 1.5: Formalizujte následující věty v jazyce výrokové logiky:

a) Tráva je mokrá pokud prší.

b) Když prší, rozvodní se Jizera.

c) Pokud neprší, pak tráva není mokrá nebo se nerozvodní Jizera.

d) Buď je zima, nebo je horko, ale nikdy ne obě dohromady.

Příklad 1.6: Děti chtějí, abyste je rozdělili pro hru do dvou týmů: červeného a modrého. Jde o pět dětí, jejichž jména jsou následující: Béďa, Martin, Alice, Petr a Hanka. Děti navíc mají následující požadavky:

a) Alice chce být v týmu s Béďou.

b) Žádný z týmů nesmí být prázdný.

c) Béďa chce být v týmu, kde není Martin nebo Alice.

d) Pokud bude Hanka v modrém týmu, pak Alice chce být v týmu s Martinem.

e) Petr chce být v týmu s nějakou holkou.

f) Hanka nechce být v týmu s Martinem pokud Petr bude v modrém týmu.

Formalizujte požadavky v jazyce výrokové logiky a zjistěte, zda lze děti rozdělit do týmů tak, aby byly všechny jejich požadavky splněny.

Příklad 1.7: Formalizujte ve výrokové logice následující množinu tvrzení.

a) Pokud je víkend nebo státní svátek, fakulta je zavřená.

b) Pokud je fakulta zavřená, studenti mají radost.

c) Studenti nemají radost.

Z daných tvrzení odvoďte co nejsilnější důsledek.

Příklad 1.8: Maminka poslala Pepíčka nakupovat s následujícími instrukcemi:

a) „Pokud koupíš pivo, pak kup brambůrky; pokud pivo nekoupíš, pak brambůrky taky nekupuj.“

b) „Nekupuj chleba, jestliže koupíš pivo.“

c) „Suchý chleba nejím, musím si ho namazat máslem nebo si na něj dát aspoň salám.“

d) „Pivo nikdy nekombinuji s máslem, je v něm moc tuku.“

e) „Salám je potřeba dát si na chleba.“

f) „Kup prosímtě aspoň to pivo nebo chleba.“

g) „Když koupíš máslo, tak kup salám nebo chleba.“

h) „S prázdnou se domů nevracej, ale ne, že zase koupíš úplně všechno!“

Formalizujte požadavky v jazyce výrokové logiky a zjistěte, zda se má Pepíček vůbec vracet domů.

Příklad 1.9: Student si chce zapsat dohromady $P \in \mathbb{N}$ předmětů $1, \ldots, P$ během $S \in \mathbb{N}$ semestrů $1, \ldots, S$ s následujícími podmínkami:

a) Každý předmět je zapsán právě v jednom semestru.

b) Zápis předmětů je podmíněn prerekvizitami z množiny $Pre = \{(p_1, q_1), \ldots, (p_n, q_n)\}$, kde (p_i, q_i) znamená, že před zapsáním předmětu q_i je potřeba mít zapsán předmět p_i

Úkol:

1. Napište obecný předpis pro formuli ve výrokové logice, která formalizuje tento problém.
2. Napište program, který instanci daného problému transformuje do CNF pro vstup SAT solveru.

Příklad 1.10: Doplňte kód do `assertu` v následujícím fragmentu kódu tak, aby ve funkci nemohlo dojít k chybě dělení nulou (uvažujte standardní syntaxi a sémantiku jazyka C).

```
int f(int a, int b) {
  assert(??);
  int c = a / b;
  if (c > 3) {
    return b / (a-10);
  } else {
    return 42 / (a+3);
  }
}
```

Příklad 1.11: Pomocí algebraických úprav převeďte formule z Příkladu 1.1 do *disjunktivní normální formy (DNF)*.

Příklad 1.12: Pomocí algebraických úprav převeďte formule z Příkladu 1.1 do *konjunktivní normální formy (CNF)*.

Příklad 1.13: Pomocí pravdivostní tabulky převeďte formule z Příkladu 1.1 do *disjunktivní normální formy (DNF)*.

Příklad 1.14: Pomocí pravdivostní tabulky převeďte formule z Příkladu 1.1 do *konjunktivní normální formy (CNF)*.

Příklad 1.15: Napište formuli výrokové logiky φ, jejíž pravdivostní tabulka vypadá následovně:

a)

X	Y	φ
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

b)

X	Y	φ
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

c)

X	Y	φ
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

d)

X	Y	Z	φ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

e)

X	Y	Z	φ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Příklad 1.16: Dokažte, že následující systémy logických spojek jsou úplné:

a) $\{\wedge, \neg\}$ b) $\{\rightarrow, \neg\}$ c) $\{\rightarrow, \oplus\}$ (xor) d) $\{\rightarrow, 0\}$ e) $\{\uparrow\}$ (nand) f) $\{\downarrow\}$ (nor)

(Předpokládejte, že systém spojek $\{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ je úplný.)

Příklad 1.17: Dokažte či vyvraťte, zda následující logické spojky jsou asociativní:

a) $\wedge$ b) $\vee$ c) $\rightarrow$ d) $\leftrightarrow$ e) $\uparrow$ (nand) f) $\downarrow$ (nor)

Která ze spojek výše není komutativní?

Příklad 1.18: Dokažte tzv. *absorpční zákony*:

a) $(X \wedge Y) \vee X \Leftrightarrow X$

b) $(X \vee Y) \wedge X \Leftrightarrow X$

Příklad 1.19: Dokažte pro libovolné formule φ a ψ výrokové logiky následující:

a) pokud $\models \varphi$ a $\models \varphi \rightarrow \psi$, pak $\models \psi$ (tzv. pravidlo *modus ponens*),

b) pokud $\models \neg\psi$ a $\models \varphi \rightarrow \psi$, pak $\models \neg\varphi$ (tzv. pravidlo *modus tollens*).

Příklad 1.20: Nechť Φ_{VL} je množina všech formulí výrokové logiky. Určete, zda jsou relace $\Rightarrow$ (logický důsledek) a $\Leftrightarrow$ (logická ekvivalence) relacemi uspořádání nebo ekvivalence na Φ_{VL}.

Příklad 1.21: Uvažujte formuli φ: $(p \to \neg q) \vee \neg r$ a množinu T tří formulí

$$T = \{(\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee (q \to \neg r)), (\neg p \to q) \vee \neg r \vee (\neg(p \to q) \wedge \neg r), \neg p \vee (q \wedge \neg p) \vee \neg r\}.$$

Zjistěte a zdůvodněte následující:

a) Je množina T splnitelná?

b) Je formule φ tautologie?

c) Je formule φ kontradikce?

d) Je formule φ logickým důsledkem množiny T?

Řešení

Příklad 1.5 (řešení): P: prší, TM: tráva je mokrá, RJ: rozvodní se Jizera, Z: je zima, H: je horko

a) $P \to TM$

b) $P \to RJ$

c) $\neg P \to (\neg TM \vee \neg RJ)$

d) $Z \leftrightarrow \neg H$

2 Predikátová logika

Neformální jazyk

Příklad 2.1: Uvažujte následující formule v *neformálním* jazyce predikátové logiky. Přepište formule do obyčejného jazyka.

a) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \colon x < y$
b) $\forall x \in A \exists y \in B \colon f(x) = y$
c) $\forall y \in B \exists x \in A \colon f(x) = y$
d) $\forall x, y, z \in A \colon (xRy \land yRz) \to xRz$
e) $\forall x_1, x_2 \in A \colon (\exists y \in B \colon f(x_1) = y \land f(x_2) = y) \to x_1 = x_2$
f) $(\forall x \in A \colon x \sqsubseteq s) \land (\forall y \in B \colon (\forall x \in A \colon x \sqsubseteq y) \to s \sqsubseteq y)$
g) $\forall x, y \in \mathbb{Q} \colon x < y \to \exists z \in \mathbb{Q} \colon x < z \land z < y$
h) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x - p| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$

Příklad 2.2: Přepište následující tvrzení do *neformálního* jazyka predikátové logiky:

a) Binární relace R na množině A je symetrická.
b) Binární relace R na množině A je relací částečného uspořádání.
c) Na množině reálných čísel je násobení distributivní nad sčítáním.
d) Rovnice $x^2 + x + 1 = 0$ nemá řešení v oboru reálných čísel.
e) Rovnice $x^2 = 0$ má v oboru reálných čísel řešení.
f) Rovnice $x^2 = 0$ má v oboru reálných čísel právě jedno řešení.
g) Rovnice $x^2 = 1$ má v oboru reálných čísel alespoň dvě řešení.
h) Polynom $x^3 - x^2 + x - 1$ má alespoň jeden reálný kořen.
i) Každé přirozené číslo větší než 1 lze zapsat jako součin prvočísla a jiného přirozeného čísla.
j) Sčítání na množině celých čísel tvoří grupu.

Formální jazyk

Příklad 2.3: Uvažujte *formální* jazyk predikátové logiky s funkčními symboly $\{f_{/2}, g_{/1}, h_{/0}\}$ a predikátovými symboly $\{p_{/1}\}$ (uvažujte i $=_{/2}$ jako „vestavěný predikátový symbol“). Dále uvažujte množinu proměnných $\{x, y, z, \ldots\}$ Určete zda následující zápisy jsou formulemi daného jazyka. Dále určete, které ze zápisů jsou termy.

a) $f(x, y)$
b) $f(x) = f(h)$
c) $f(x, y) = f(y, z)$
d) $g(x, y) = g(y, z)$
e) $p(f(x, g(g(g(g(g(g(h))))))))$
f) $g(x) \land p(x = f(x, y))$
g) $\forall x(p(g(x)))$
h) $\exists f(x)$
i) $\exists x \in \mathbb{N}\ (p(x))$
j) $\forall x(p(f(x, y)) \land ((g(x) = f(x, h) \to \neg(x = h))))$

Příklad 2.4: Najděte volné proměnné $\{x, y, \ldots\}$ v následujících formulích:

a) $p(x) \land \neg r(y, a)$
b) $\exists x\big(\ p(x) \to \exists y(\neg q(f(x), y, f(y)))\ \big)$
c) $\exists x(p(x)) \to \exists y(\neg q(f(x), y, f(z)))$
d) $\exists x(p(y)) \to \exists y(\neg q(f(x), y, f(y)))$
e) $\forall x\big(\ p(x) \to \exists y(\neg q(f(x), y, f(y)))\ \big)$

Formalizace

Příklad 2.5: Vyjádřete pomocí formulí predikátové logiky s predikátovým symbolem $\in_{/2}$ (a „vestavěným" predikátovým symbolem $=_{/2}$) následující tvrzení:

a) x je podmnožinou y,
b) x a y mají neprázdný průnik,
c) x a y jsou disjunktní množiny,
d) sjednocení x a y pokrývá univerzum,
e) symetrický rozdíl x a y je neprázdný,
f) x je potenční množinou y,
g) x je prázdná množina.

Lze použít *jen* symboly $\in$ a $=$, logické spojky a kvantifikátory (tedy nelze použít např. $\cap, \cup, \subseteq, \emptyset, \ldots$).

Příklad 2.6: Vyjádřete pomocí formulí predikátové logiky se symbolem $\cdot_{/2}$ (značící binární operaci v grupě) následující tvrzení z teorie grup (lze použít i „vestavěný" predikátový symbol $=_{/2}$):

a) x je neutrální prvek.
b) Existuje neutrální prvek.
c) Existuje maximálně jeden neutrální prvek.
d) Pokud existuje levý neutrální prvek a pravý neutrální prvek, pak se rovnají.
e) Operace $\cdot$ není asociativní.
f) Ke každému prvku existuje právě jeden inverzní prvek.
g) Pokud je $\cdot$ asociativní, pak se levé a pravé inverzní prvky rovnají.
h) Nechť $p_{/1}$ a $r_{/1}$ jsou unární predikátové symboly označující, že jejich argument patří do množiny M_p, resp. M_r. Formalizujte tvrzení:
   (i) $(M_p, \cdot)$ je podgrupoid $(M_r, \cdot)$.
   (ii) $(M_p, \cdot)$ je Abelova grupa.

Příklad 2.7: Vyjádřete pomocí formulí predikátové logiky se symboly $0_{/0}$, $S_{/1}$ (unární funkce následníka), $+_{/2}$, $\cdot_{/2}$ (můžete použít i „vestavěný" predikátový symbol $=_{/2}$ následující tvrzení z elementární aritmetiky přirozených čísel (a u výroků zkuste říct, zda platí pro přirozená čísla).

a) $x \leq y$: x je menší rovno y
b) $x < y$: x je ostře menší než y
c) $x|y$: x dělí y beze zbytku
d) $prime(x)$: x je prvočíslo
e) (Goldbachova domněnka) každé sudé číslo větší než dva lze napsat jako součet dvou prvočísel
f) každé liché číslo je druhá mocnina nějakého jiného čísla právě když nula nemá žádného dělitele
g) odmocnina dvou není definována
h) každý násobek čtyřky je sudé číslo
i) x je mocnina 3
j) x je mocnina 10
k) prvočísla neexistují
l) neexistují čísla větší než milion
m) každé číslo jde zapsat jako součin dvou nenulových čísel
n) pokud je x větší rovno y, potom existuje rozdíl x a y

Příklad 2.8: Zvolte vhodný jazyk predikátové logiky prvního řádu a formalizujete v něm následující sekvenci výroků:

a) Česká republika je stát.
b) Hlavní město každého státu je velké a špinavé město.
c) Česká republika má hlavní město.

d) V každém velkém městě je zločin.

e) Každé velké město je město.

f) Existuje nějaké město, které je špinavé a je v něm zločin.

Příklad 2.9: Uvažujte jazyk L predikátové logiky 1. řádu se signaturou $\langle\{1_{/0}, \cdot_{/2}\}, \{<_{/2}, even_{/1}, odd_{/1}\}\rangle$ (plus predikátový symbol rovnosti $=_{/2}$ značící identitu) a jeho interpretaci nad množinou přirozených čísel $\mathbb{N}$ (včetně 0), kde

- funkční symbol „$1_{/0}$“ značí konstantu 1,
- funkční symbol „$\cdot_{/2}$“ je interpretován jako „násobení“,
- predikátový symbol „$<_{/2}$“ je interpretován jako relace „ostře menší“,
- predikátový symbol „$even_{/1}$“ je interpretován jako „množina sudých čísel“ a
- predikátový symbol „$odd_{/1}$“ je interpretován jako „množina lichých čísel“.

Formalizujte v jazyce L následující tvrzení o přirozených číslech (bez ohledu na jejich platnost):

a) Mezi každými dvěmi různými sudými čísly najdeme liché číslo.

b) Existuje číslo, které není dělitelné žádným jiným číslem.

c) Číslo n je prvočíslo.

Příklad 2.10: Uvažujte jazyk L predikátové logiky 1. řádu se signaturou $\langle\{+_{/2}, \cdot_{/2}, 2_{/0}\}, \{>_{/2}, prime_{/1}\}\rangle$ (plus predikátový symbol rovnosti $=_{/2}$ značící identitu) a jeho interpretaci nad množinou přirozených čísel $\mathbb{N}$ (včetně 0), kde

- funkční symbol „$+_{/2}$“ je interpretován jako „sčítání“,
- funkční symbol „$\cdot_{/2}$“ je interpretován jako „násobení“,
- konstantní funkční symbol „$2_{/0}$“ je interpretován jako přirozené číslo 2,
- predikátový symbol „$>_{/2}$“ je interpretován jako relace „ostře větší než“ a
- predikátový symbol „$prime_{/1}$“ je interpretován jako množina prvočísel.

Formalizujte v jazyce L následující tvrzení o přirozených číslech (bez ohledu na jejich platnost):

a) Všechna přirozená čísla větší než dva lze rozložit na součet dvou prvočísel.

b) Mezi každými dvěmi různými prvočísly se nachází sudé číslo.

c) Číslo x je největším společným dělitelem čísel y a z.

Příklad 2.11: Uvažujte jazyk L predikátové logiky 1. řádu se signaturou $\langle\{parent_{/1}\}, \{process_{/1}, resource_{/1}, owns_{/2}\}\rangle$ (plus predikátový symbol rovnosti $=_{/2}$ značící identitu) a jeho interpretaci nad množinou obsahující procesy a zdroje, kde

- funkční symbol „$parent_{/1}$“ je interpretován jako „rodič daného procesu“ (uvažujte, že kořenový proces je rodič sám sebe),
- predikátový symbol „$process_{/1}$“ je interpretován jako „množina procesů“,
- predikátový symbol „$resource_{/1}$“ je interpretován jako „množina zdrojů“ a
- predikátový symbol „$owns_{/2}$“ je interpretován tak, že $owns(x, y)$ značí, že prvek y „je vlastněn“ prvkem x.

Formalizujte v jazyce L následující vlastnosti systému:

a) V systému je alepoň jeden proces, který nemá žádný proces potomka.

b) Každý proces má maximálně jeden proces potomka.

c) Proces p nevlastní stejný zdroj jako proces q.

d) V systému je alepoň jeden kořenový proces.

e) Prvek r je zdroj vlastněný alespoň jedním procesem.

f) Žádný zdroj není vlastněn více než jedním procesem.

Příklad 2.12: Uvažujte jazyk L predikátové logiky 1. řádu se signaturou $\langle\{root_{/0}, parentdir_{/1}\}, \{dir_{/1}\}\rangle$ (plus predikátový symbol rovnosti $=_{/2}$ značící identitu) a jeho interpretaci nad množinou obsahující adresáře a obyčejné soubory v souborovém systému, kde

- funkční symbol „$root_{/0}$“ je interpretován jako „kořenový adresář“,

- funkční symbol „$parentdir_{/1}$“ je interpretován jako „rodičovský adresář“ (uvažujte, že kořenový adresář je rodič sám sebe) a
- predikátový symbol „$dir_{/1}$“ je interpretován jako „množina všech adresářů“.

Formalizujte v jazyce L následující vlastnosti souborového systému:

a) x a y jsou obyčejné soubory ve stejném adresáři.

b) V kořenovém adresáři je alespoň jeden adresář.

c) Každý adresář obsahuje alespoň dva obyčejné soubory.

Příklad 2.13: Uvažujte jazyk L predikátové logiky 1. řádu se signaturou $\langle\{hodnost_{/1}\}, \{agent_{/1}, přednost\_před_{/2}, <_{/2}\}\rangle$ (plus predikátový symbol rovnosti $=_{/2}$ značící identitu) a jeho interpretaci nad množinou přirozených čísel, které hrají jednak roli identifikátorů agentů (např. robotů, nákladních aut, ...) a druhak roli jejich „hodností“.

- Ne všechna čísla jsou identifikátory agentů. Predikát $agent_{/1}$ označuje čísla, která *jsou* identifikátory agentů. Identifikátory agentů jsou unikátní (dva agenti nesdílejí identifikátor).
- Funkce „$hodnost_{/1}$“ vrací hodnost agenta (hodnost agenta může být jakékoliv číslo).
- Predikát „$přednost\_před_{/2}$“ značí právo přednostního přístupu ke zdrojům, tedy, $přednost\_před(x, y)$ znamená, že agent x má přednost před agentem y.
- Predikátový symbol „$<_{/2}$“ je interpretován jako klasické „ostře menší“ na přirozených číslech.

Formalizujte v jazyce L následující vlastnosti systému agentů:

a) Žádní dva agenti nemají stejnou hodnost.

b) Žádný agent nemá přednost před agentem s vyšší hodností.

c) Agentů je konečně mnoho.

Příklad 2.14: Uvažujte jazyk L predikátové logiky 1. řádu se signaturou $\langle\{1_{/0}, 2_{/0}, \cdot_{/2}, +_{/2}\}, \{<_{/2}\}\rangle$ (plus predikátový symbol rovnosti $=_{/2}$ značící identitu) a interpretaci nad množinou přirozených čísel $\mathbb{N}$ (včetně 0), kde

- funkční symbol „$1_{/0}$“ značí konstantu 1,
- funkční symbol „$2_{/0}$“ značí konstantu 2,
- funkční symbol „$\cdot_{/2}$“ je interpretován jako „násobení“,
- funkční symbol „$+_{/2}$“ je interpretován jako „sčítání“ a
- predikátový symbol „$<_{/2}$“ je interpretován jako relace „ostře menší“.

Formalizujte v jazyce L následující tvrzení o přirozených číslech (bez ohledu na jejich platnost):

a) x je liché číslo.

b) Některá sudá čísla nejde odmocnit.

c) Je-li číslo odmocnitelné, pak jeho odmocnina (resp. všechny jeho odmocniny) je ostře menší.

Příklad 2.15: Uvažujte jazyk predikátové logiky 1. řádu s jediným predikátovým symbolem $E_{/2}$ teorie grafů ($E(x, y)$ vyjadřuje, že existuje hrana z x do y). Formalizujte následující výroky.

a) existuje cesta s délkou 4 hrany z x do y (pro účely tohoto příkladu se v cestě mohou opakovat uzly i hrany),

b) x a y tvoří spolu s dalším uzlem cyklus (tj. uzavřenou cestu) s délkou 3 hran,

c) x, y a z tvoří kliku velikosti 3.

Příklad 2.16: Zvolte vhodný jazyk predikátové logiky prvního řádu a formalizujete v něm následující:

a) Pepa si koupil DVD.

b) Pepa si něco koupil.

c) Klára si koupila všechno, co si koupil Pepa.

d) Pokud si Pepa koupil všechno, tak to samé Klára.

e) Každý si něco koupil.
f) Někdo si koupil všechno.

Příklad 2.17: Která z následujících formulí je formalizací věty „Nějaký počítač není používán žádným studentem“?

a) $\exists x\big(\mathit{Computer}(x) \land \forall y(\neg \mathit{Student}(y) \land \neg \mathit{Uses}(y,x))\big)$
b) $\exists x\big(\mathit{Computer}(x) \rightarrow \forall y(\mathit{Student}(y) \rightarrow \neg \mathit{Uses}(y,x))\big)$
c) $\exists x\big(\mathit{Computer}(x) \land \forall y(\mathit{Student}(y) \rightarrow \neg \mathit{Uses}(y,x))\big)$

Příklad 2.18: Zvolte vhodný jazyk predikátové logiky prvního řádu a formalizujete v něm následující sekvenci výroků:

a) Pokud někdo ovládá Sílu, alespoň jeden z jeho rodičů ovládá Sílu.
b) Pokud něčí nejstarší sourozenec ovládá Sílu, potom i daný člověk ovládá Sílu.
c) (Jediní) rodiče Luka jsou Anakin a Padmé.
d) Nejstarší sourozenec Luka je Leia.
e) Leia ovládá Sílu, ale Padmé ne.
f) Tudíž Anakin ovládá Sílu.

Sémantika

Příklad 2.19: Uvažujte formální jazyk predikátové logiky L s funkčními symboly $\{a_{/0}, b_{/0}, c_{/0}, d_{/0}\}$ a predikátovými symboly $\{E_{/1}, M_{/2}, S_{/2}\}$. Dále uvažujte realizaci I jazyka L s doménou $D_I = \{1, 3, 5, 15\}$, kde predikátový symbol E je interpretován jako „*je sudé*“, symbol M jako „*je násobkem*“ a S jako „*je ostře menší než.*“ Dále platí $I(a) = 1$, $I(b) = 3$, $I(c) = 5$ a $I(d) = 15$. Určete, zda následující výroky platí v I:

a) $\exists y(E(y))$
b) $\forall x(\neg E(x))$
c) $\forall x(M(x,a))$
d) $\forall x(M(x,b))$
e) $\exists x(M(x,d))$
f) $\exists x(S(x,a))$
g) $\forall x(E(x) \rightarrow M(x,a))$
h) $\forall x \exists y(S(x,y))$
i) $\forall x \exists y(M(x,y))$
j) $\forall x(M(x,b) \rightarrow S(x,c))$
k) $\forall x \forall y(S(x,y) \rightarrow \neg S(y,x))$
l) $\forall x(M(x,c) \lor S(x,c))$

Příklad 2.20: Najděte modely následujících formulí (nad jazykem daným implicitně dle výskytu symbolů ve formulích) a pro každou formuli najděte i realizaci, která není model (pokud taková existuje). Pokuste se najít modely a ne-modely o velikostech 1, 2, 3 a nekonečno.

a) $\forall x \forall y\big(\ p(x,x) \land (p(x,y) \leftrightarrow p(y,x))\ \big)$
b) $\exists x(p(x, f(y)))$
c) $\forall x \forall y((f(x) = f(y)) \rightarrow p(x,y))$
d) $\exists x(p(x) \land \forall y(f(x,y) = f(y,x)))$
e) $\exists x(p(x) \land \exists y(\neg(f(x,y) = f(y,x))))$
f) $\forall x(p(x) \land \forall y(f(x,y) = f(y,x)))$
g) $\forall x \exists y((p(x) \leftrightarrow p(y)) \land \neg(f(x,y) = f(y,x)))$
h) $\forall x \exists y((p(x) \leftrightarrow \neg p(y)) \land \neg(f(x,y) = f(y,x)))$

i) $\forall x \exists y (p(x,y) \wedge (f(x) = f(y) \rightarrow x = y))$
j) $\exists x \forall y (\neg p(x,y) \wedge \exists z (p(z,y) \wedge f(z) = c))$
k) $\exists x \forall y (\neg p(x,y) \wedge \exists z (p(z,y) \rightarrow \neg (f(z) = f(z))))$
l) $\forall x (p(x,x) \wedge \forall y (\neg (x = y) \rightarrow \neg (f(x) = f(y))))$
m) $\forall x (p(x,x) \wedge \exists y (\neg p(x,y) \wedge \neg (f(x) = f(y))))$
n) $\forall x \forall y (p(x,y) \wedge f(x,y) = f(y,x))$
o) $\exists x \exists y (p(x,y) \wedge \forall z (\neg p(x,z) \rightarrow \neg (f(x) = f(z))))$
p) $\forall x ((p(x) \rightarrow r(x)) \wedge \exists y (p(y) \wedge f(x,y) = c))$
q) $\forall x ((\neg p(x) \rightarrow \neg r(x)) \wedge \exists y (p(y) \wedge f(x,y) = c))$
r) $p(c) \wedge \forall x \forall y ((r(x,c) \rightarrow r(y,c)) \wedge f(x) = f(c))$
s) $\exists x \forall y (p(x,y) \wedge \exists z (\neg p(z,y) \wedge p(f(z),y)))$
t) $\forall x \exists y (p(x,y) \wedge \exists z (\neg p(z,y) \wedge p(f(z),y)))$
u) $\forall x \exists y (p(x,y) \rightarrow \forall z (p(x,z) \wedge f(y) = f(z)))$
v) $\forall x \exists y (p(x,y) \vee (f(x) = f(y) \wedge \neg (x = y)))$
w) $\forall x \exists y (\neg p(x,y) \vee \exists z (p(z,y) \rightarrow \neg (f(z) = f(x))))$

Příklad 2.21: Najděte modely následujících formulí (nad jazykem daným implicitně dle výskytu symbolů ve formulích) a pro každou formuli najděte i realizaci, která není model (pokud taková existuje).

a) konjunkce následujících formulí:
   (i) $\forall x \forall y \forall z \big(\ (p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z) \ \big)$
   (ii) $\forall x \forall y \big((p(x,y) \wedge p(y,x)) \rightarrow x = y \big)$
   (iii) $\forall x \exists y \big((p(x,y) \wedge \neg (x = y) \big)$
b) $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y) \quad \wedge \quad \exists x (\forall y (\neg (S(y) = x)))$

Algrebraické manipulace s formulemi

Příklad 2.22: Proveďte následující přejmenování proměnných:

a) $\Big(\neg \exists x \big(p(x) \rightarrow r(x,z) \big) \Big) [x/z]$
b) $\Big(\neg \exists x \big(p(x) \rightarrow r(x,z) \big) \Big) [z/w]$
c) $\Big(\neg \exists x \big(p(x,z) \rightarrow \exists z (r(x,z)) \big) \Big) [z/w]$

Příklad 2.23: Nechť φ a ψ jsou formule predikátové logiky prvního řádu takové, že proměnná x se nevyskytuje v ψ. Dokažte následující logickou ekvivalenci:

$$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\exists x \varphi) \rightarrow \psi$$

Příklad 2.24: Přepište následující formule do tvaru, kde jsou kvantifikátory co nejhlouběji (a sémantika formulí je zachována):

a) $\neg \forall x \exists y (\neg (p(x) \vee r(x)) \rightarrow r(y))$

Příklad 2.25: Převeďte pomocí známých ekvivalencí následující formuli do formy, ve které se nevyskytují logické symboly $\rightarrow, \leftrightarrow$ a $\exists$.

a) $\neg \exists x \big(p(x) \rightarrow r(x,z) \big)$
b) $\forall x \big((\exists y (p(x,y))) \leftrightarrow r(x) \big)$

Příklad 2.26: Převeďte následující formule do PNF (prenexní normální formy).

a) $\forall x \Big(\big(x \in L_1 \wedge \exists y (y \in L_2) \big) \rightarrow \neg \exists y (y \in L_1 \circ L_2) \Big)$

b) $\forall x \forall w \Big(\exists y \big(R(x,y) \land \exists z(\neg S(x,z)) \big) \to \neg \forall y (R(x,y)) \Big)$

c) $\Big(\forall y \forall x \big(p(x,y) \big) \Big) \to \forall x \Big(\neg \big(\exists z (p(z)) \land s(x,y) \big) \Big)$

d) $\Big(\exists y \big((\forall x (q(x,y))) \leftrightarrow \forall x (p(x)) \big) \Big) \to \Big((\exists z \exists y (p(y))) \to \forall y \forall x (q(y,x)) \Big)$

Řešení

Příklad 2.1 (řešení): a) Neexistuje největší přirozené číslo

b) f je funkce taková, že všechny prvky z A zobrazuje do B

c) f je funkce surjektivní z A na B

d) R je relace tranzitivní na množině A

e) f je funkce injektivní z A do B

f) s je supremum množiny A v uspořádání $\sqsubseteq$ na B

g) Množina racionálních čísel je *hustá* (tj. mezi každými dvěmi prvky se nachází další prvek)

h) L je limita funkce f pro x jdoucí k p ($\lim_{x \to p} f(x) = L$)

Příklad 2.2 (řešení): a) $\forall x, y \in A \colon xRy \to yRx$

b) $\forall x, y, z \in A \colon \underbrace{xRx}_{\text{refl.}} \land \underbrace{((xRy \land yRx) \to x = y)}_{\text{antisymetrie}} \land \underbrace{((xRy \land yRz) \to xRz)}_{\text{tranzitivita}}$

c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \colon x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

d) $\neg \exists x \in \mathbb{R} \colon x^2 + x + 1 = 0$

e) $\exists x \in \mathbb{R} \colon x^2 = 0$

f) $\exists x \in \mathbb{R} \colon x^2 = 0 \land (\forall y \in \mathbb{R} \colon y^2 = 0 \to y = x)$

g) $\exists x, y \in \mathbb{R} \colon x^2 = 1 \land y^2 = 1 \land x \neq y$

h) $\exists x \in \mathbb{R} \colon x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

i) $\forall x \in \mathbb{N} \colon x > 1 \to (\exists y, z \in \mathbb{N} \colon x = y \cdot z \land \mathit{prime}(y))$ kde
$\mathit{prime}(u) \overset{\text{def}}{\iff} \forall i \in \mathbb{N} \colon (1 < i \land i < u) \to (\neg \exists v \in \mathbb{N} \colon u = i \cdot v)$

j) $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} \colon \underbrace{(x + (y + z) = (x + y) + z)}_{\text{asociativita}} \land \underbrace{(x + 0 = x \land 0 + x = x)}_{\text{neutrální prvek}} \land \underbrace{(\exists x' \in \mathbb{Z} \colon x + x' = 0 \land x' + x = 0)}_{\text{inverzní prvky}}$

Příklad 2.3 (řešení): a) Term

b) Nic — f je binární symbol

c) Formule

d) Nic — g je unární symbol

e) Formule

f) Nic — v pred. symbolu p se nachází formule $x = f(x,y)$; navíc $g(x)$ není formule, a tudíž nemůže být na levé straně logické spojky $\land$

g) Formule

h) Nic — za kvantifikátorem chybí proměnná

i) Nic — symboly $\mathbb{N}, \in$ nejsou v jazyce

j) Formule

Příklad 2.4 (řešení): a) $\{x, y\}$

b) $\emptyset$
c) $\{x, z\}$
d) $\{x, y\}$
e) $\emptyset$

Příklad 2.5 (řešení): a) $x \subseteq y \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall z(z \in x \to z \in y)$
b) $\exists z(z \in x \land z \in y)$
c) $\neg\exists z(z \in x \land z \in y)$
d) $\forall z(z \in x \lor z \in y)$
e) $\exists z((z \in x \land \neg(z \in y)) \lor (z \in y \land \neg(z \in x)))$
f) $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \subseteq y) \iff \forall z(z \in x \leftrightarrow \forall u(u \in z \to u \in y))$
g) $\forall y(\neg(y \in x))$

Příklad 2.6 (řešení): a) $NP(x) \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall y(y \cdot x = y \land x \cdot y = y)$
b) $\exists z(NP(z))$
c) $\neg\exists z\exists u(NP(z) \land NP(u) \land \neg(z = u))$
d) $\forall x\forall y((\forall z(x \cdot z = z \land z \cdot y = z)) \to x = y)$
e) $\exists x\exists y\exists z(\neg(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z))$
f) Nechť $IP(x, x', e) \stackrel{\text{def}}{\iff} x \cdot x' = e \land x' \cdot x = e$; pak je řešením formule $\exists e(NP(e) \land \forall x\exists x'(IP(x, x', e) \land \forall y(IP(x, y, e) \to x' = y)))$
g) $\forall x\forall y\forall z(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z) \to (\exists e(NP(e) \land \forall x\forall y\forall z((x \cdot y = e \land z \cdot x = e) \to y = z)))$
h) (i) $\forall x(p(x) \to r(x)) \land \forall x\forall y((p(x) \land p(y)) \to p(x \cdot y))$
(ii) ?

Příklad 2.7 (řešení): a) $\exists z(y = x + z)$
b) $x \leq y \land \neg(x = y)$
c) $\exists z(x \cdot z = y)$
d) $1 < x \land \forall z((1 < z \land z < x) \to \neg(z|x))$ kde $1 \stackrel{\text{def}}{=} S(0)$
e) $\forall x(2 < x \to \exists y\exists z(prime(y) \land prime(z) \land x = y + z))$ kde $2 \stackrel{\text{def}}{=} S(S(0))$
f) $\forall x(\neg(2|x) \to \exists z(x = z \cdot z)) \leftrightarrow \neg\exists w(w|0)$
g) $\neg\exists x(x \cdot x = 2)$
h) $\forall x((4|x) \to (2|x))$ kde $4 \stackrel{\text{def}}{=} 2 + 2$
i) ?
j) ?
k) $\neg\exists x(prime(x))$
l) $\neg\exists x(1000000 < x)$ kde $1000000 \stackrel{\text{def}}{=} 100 \cdot 100 \cdot 100$, $100 \stackrel{\text{def}}{=} 10 \cdot 10$ a $10 \stackrel{\text{def}}{=} 4 + 4 + 2$
m) $\forall x(\exists y\exists z(\neg(y = 0) \land \neg(z = 0) \land x = y \cdot z))$
n) $y \leq x \to \exists z(z = x - y)$

Příklad 2.9 (řešení): a) $\forall x\forall y((even(x) \land even(y) \land x < y) \to \exists z(odd(z) \land x < z \land z < y))$
b) $\exists x\forall y(\neg(x = y) \to \neg\exists z(x = y \cdot z))$
c) $1 < n \land \forall y((1 < y \land y < n) \to \neg\exists z(n = y \cdot z))$

Příklad 2.10 (řešení): a) $\forall x(x > 2 \to \exists y\exists z(prime(y) \land prime(z) \land x = y + z)$

b) $\forall x \forall y((prime(x) \land prime(y) \land x > y) \rightarrow \exists z(x > z \land z > y \land \exists u(z = 2 \cdot u))$

c) $u \mid v \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists w(u \cdot w = v)$
$x \mid y \land x \mid z \land \forall r((r \mid y \land r \mid z) \rightarrow (x > r \lor x = r))$

Příklad 2.11 (řešení): a) $\exists x(process(x) \land \forall y(process(y) \rightarrow \neg(parent(y) = x)))$

b) $\forall x(process(x) \rightarrow \forall y \forall z((process(y) \land process(z) \land parent(y) = x \land parent(z) = x)) \rightarrow y = z)$

c) $\forall r(resource(x) \rightarrow (owns(q, r) \rightarrow \neg owns(p, r)))$

d) $\exists x(process(x) \land parent(x) = x)$

e) $resource(r) \land \exists p(process(p) \land owns(p, r))$

f) $\forall x(resource(x) \rightarrow \forall u \forall v((process(u) \land process(v) \land owns(u, x) \land owns(v, x)) \rightarrow u = v))$

Příklad 2.12 (řešení): a) $parentdir(x) = parentdir(y) \land \neg dir(x) \land \neg dir(y)$

b) $\exists x(dir(x) \land parentdir(x) = root)$

c) $\forall x(dir(x) \rightarrow \exists y \exists z(\neg dir(y) \land \neg dir(z) \land parentdir(y) = x \land parentdir(z) = x \land \neg(y = z)))$

Příklad 2.13 (řešení): a) $\forall x \forall y(agent(x) \land agent(y) \land hodnost(x) = hodnost(y)) \rightarrow x = y)$

b) $\forall x \forall y((agent(x) \land agent(y)) \rightarrow (hodnost(x) < hodnost(y) \rightarrow \neg p\check{r}ednost\_p\check{r}ed(x, y)))$

c) $\exists x \forall y(agent(y) \rightarrow (x < y))$

Příklad 2.14 (řešení): a) $\exists y(x = 2 \cdot y + 1)$

b) $\exists x(\exists z(x = 2 \cdot z) \land \forall y(\neg(x = y \cdot y)))$

c) $\forall x \forall y((x = y \cdot y) \rightarrow y < x)$

Příklad 2.19 (řešení): a) neplatí

b) platí

c) platí

d) neplatí

e) platí

f) neplatí

g) platí

h) neplatí

i) platí

j) neplatí

k) platí

l) platí

3 Formální dokazování

Hilbertovské důkazy

Pro připomenutí, schémata axiomů VL jsou tady, nemusíte si pamatovat:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(A1)} & A \to (B \to A) \\
\text{(A2)} & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
\text{(A3)} & (\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)
\end{array}
$$

Příklad 3.1: Je následující sekvence formulí důkazem? (Pokud ne, proč? Pokud ano, vysvětlete kroky důkazu.)

a) Důkaz $((\neg D) \to C)$ z předpokladů $(A \to B)$, $(B \to C)$, A?

1. A
2. $A \to B$
3. B
4. $B \to C$
5. C
6. $C \to ((\neg D) \to C)$
7. $(\neg D) \to C$

b) Důkaz A z předpokladů $(A \to B)$, $(B \to A)$?

1. $A \to B$
2. $B \to A$
3. B
4. A

c) Důkaz A z předpokladů $\neg\neg A$, $(\neg A \to \neg A)$?

1. $\neg A \to \neg A$
2. $(\neg A \to \neg A) \to ((\neg A \to \neg\neg A) \to A)$
3. $\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg A)$
4. $\neg\neg A$
5. $\neg A \to \neg\neg A$
6. $(\neg A \to \neg\neg A) \to A$
7. A

Příklad 3.2: Doplňte tak, aby vznikl důkaz (pokud bude podobný příklad v písemce, axiomy VL budou součástí zadání, nemusíte si je pamatovat). Zdůvodněte všechny kroky důkazu.

a) Důkaz B z předpokladů $\neg A$ a $\neg B \to A$.

1. $\neg A$
2. $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$
3. $\ldots$
4. $\neg B \to \neg A$
5. $(\neg B \to A) \to B$
6. $\neg B \to A$
7. B

b) Důkaz C z předpokladů D a $\neg C \to \neg D$.

1. $\neg C \to \neg D$
2. $D \to (\neg C \to D)$
3. D
4. $\ldots$
5. $(\neg C \to \neg D) \to ((\neg C \to D) \to C)$
6. $(\neg C \to D) \to C$
7. C

c) Důkaz $(A \to C)$ z předpokladů $(A \to B)$ a $(B \to C)$.

1. $\ldots$
2. $B \to C$
3. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$
4. $A \to (B \to C)$
5. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
6. $\ldots$
7. $(A \to C)$

Příklad 3.3: Jak důkaz $A \to A$ z přednášky transformovat na důkaz $\neg A \to \neg A$?

1.	$A \to ((A \to A) \to A)$	A1
2.	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	A2
3.	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	MP(1,2)
4.	$A \to (A \to A)$	A1
5.	$A \to A$	MP(3,4)

Rezoluce ve výrokové logice

Příklad 3.4: Je některá z následující formulí splnitelná? Pokud ano, najděte pomocí rezoluce splňující přiřazení.

a) $(C \vee ((B \rightarrow A) \wedge B \wedge \neg A)) \wedge (C \rightarrow B) \wedge \neg B$

b) $(C \vee ((B \rightarrow A) \wedge B \wedge \neg A)) \wedge (C \rightarrow B)$

Příklad 3.5: Pomocí rezoluce dokažte platnost formule.

$$((q \vee r) \rightarrow (q \wedge r)) \vee (\neg s \wedge \neg t) \vee (s \wedge t) \vee (s \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge \neg t) \vee (\neg s \wedge t)$$

Příklad 3.6: Je některá z následující formulí splnitelná? Pokud ano, najděte splňující přiřazení.

a) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$

b) $\neg A \wedge (A \vee \neg B) \wedge B$

Příklad 3.7: Dokažte rezolucí platnost formulí.

a) $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

b) $(\neg r \vee (p \wedge q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow q))$

Příklad 3.8: Dokažte rezolucí, že z následujících předpokladů

1. Když plaveš, jsi mokrý.
2. Pokud prší a jsi venku, jsi mokrý.
3. Když je teplo a neprší, je pěkně.
4. Nejsi mokrý.
5. Jsi venku.
6. Je teplo.

plyne, že

1. Neplaveš.
2. Neprší.
3. Je pěkně.

Rezoluce v predikátové logice

Uvažujte proměnné z konce abecedy $\ldots, s, t, u, v, w, x, y, z$ a konstanty ze začátku, $a, b, c, \ldots$.

Příklad 3.9: Najděte mgu pro množinu výrazů

a) $\{P(f(y), y, z), P(u, g(z), w), P(u, g(w), h(a))\}$.

b) $\{P(f(y, g(x), h(b))), P(f(h(w), g(a)), u), P(f(h(b)), g(z), y)\}$.

Příklad 3.10: Najděte mgu, nebo ukažte, že neexistuje.

a) $\{P(g(x), y), P(y, y), P(y, f(u))\}$

b) $\{P(x, g(x)), P(y, y), P(y, f(u))\}$

c) $\{P(x, g(x)), P(y, z), P(y, g(y))\}$

d) $\{P(a, y, f(y)), P(z, z, u)\}$

e) $\{P(x, g(x), y), P(z, u, g(a)), P(a, g(a), v)\}$

f) $\{P(x, y), P(y, f(z))\}$

Příklad 3.11: Najděte mgu, nebo ukažte, že neexistuje.

a) $\{P(h(y), a, z), P(h(f(w)), a, w), P(h(f(a)), a, u)\}$

b) $\{P(h(y), a, z), P(h(f(w)), a, w), P(h(f(a)), a, b)\}$

Pozor, následující dva příklady se dotýkají otázek života a smrti, a mohou Vás rozrušit.

Příklad 3.12: Dokažte, že z předpokladů

- Fido je pes.
- Psi jsou zvířata.
- Všechna zvířata umřou.

plyne, že Fido umře.

Příklad 3.13: Rezolucí z následujících předpokladů dokažte, že Honza má rád arašídy:

- Honza má rád všechny druhy jídla.
- Jablko je jídlo.
- Kuře je jídlo.
- Cokoliv, co někdo snědl a přežil, je jídlo.
- Petr snědl arašídy a je stále naživu.
- Zuzka jí všechno co jí Petr.

Příklad 3.14: Dokažte, že z předpokladů
$\forall x \forall y \forall z((potomek(x, y) \land potomek(y, z)) \to potomek(x, z))$
a
$\forall x(potomek(x, matka(x))$
plyne
$\forall x(potomek(x, matka(matka(x))))$.

Příklad 3.15: Každý holič holí všechny, kdo se neholí sami. Žádný holič neholí nikoho, kdo se holí sám. Dokažte rezolucí, že holiči neexistují.

Příklad 3.16: Igor má rád všechny, kdo se nemají rádi. Argumentujte, že není pravda, že Igor nemá rád nikoho, kdo se má rád.

Příklad 3.17: Existuje drak, který buď spí v jeskyni nebo loví v lese,
když má hlad, tak nemůže spát,
a když je unavený, tak nemůže lovit.

Co dělá drak, když má hlad?
Co dělá drak, když je unavený?

Příklad 3.18: Všichni obdivují hrdiny.
Padavkové obdivují každého.
Kdo není hrdina, je padavka.

Pomocí rezoluce dokažte, že existují X a Y, kteří obdivují jeden druhého.

Příklad 3.19: Vyvraťte rezolucí splnitelnost formule

$$\begin{array}{cc} \exists s \forall u \exists t \Big[& \\ \forall x \Big(\big((P(x,u,f(t)) \vee Q(h(s),b)) \wedge \neg Q(h(s),u) \big) \vee H(u,a) \Big) & \wedge \\ \neg \exists w \exists x \exists y \big(P(a,w,f(t)) \wedge \neg H(x,y) \big) & \wedge \\ \forall v \, \neg H(v,a) \Big] & \end{array}$$

Řešení

Příklad 3.1 (řešení):

a) Áno, kroky dôkazu: předpoklad, předpoklad, MP(1,2), předpoklad, MP(3,4), A1, MP(5,6)

b) Nie, 3 nie je ani predpoklad ani axiom/aplikácia MP. Důkaz kruhem.

c) Nie, 2 nie je ani predpoklad ani axiom/aplikácia MP.

Příklad 3.2 (řešení):

a) Př, A1, A3: $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$, MP(1,2), MP(3,4), Př, MP(5,6)

b) Př, A1, Př, MP(2,3): $\neg C \to D$, A3, MP(5,1), MP(4,6)

c) Př: $A \to B$, Př, A1, MP(2,3), A2, MP(4,5): $(A \to B) \to (A \to C)$, MP(6,1)

Příklad 3.3 (řešení): V důkazu $(A \to A)$ z přednášky je možné A nahradit za $\neg A$, vznikne důkaz $\neg A \to \neg A$.

4 Teorie

Příklad 4.1: Formalizujte teorii ekvivalencí $\sim$. Uveďte příklad formule, která a) je b) není důsledkem této teorie.

Příklad 4.2: Navrhněte teorii homomorfismů h z algeber s binární operací $+$ a unární operací f do algeber s operacemi $\bar{+}$ a $\bar{f}$. Uveďte příklad formule, která a) je b) není důsledkem této teorie.

Příklad 4.3: Navrhněte teorii, která definuje binární predikát f jako totální funkci. Uveďte příklad formule, která a) je b) není důsledkem této teorie.

Příklad 4.4: Rozšiřte teorií ekvivalencí z příkladu 4.1 tak, aby

a) měla každá třída alespoň dva prvky.
b) každá třída měla nanejvýš dva prvky.
c) ekvivalence měla maximálně dvě třídy rozkladu.
d) ekvivalence měla jednu třídu rozkladu.

Příklad 4.5: Navrhněte efektivní teorii s rovností, s prázdnou signaturou (můžeme mluvit pouze o rovnosti), jejíž modely mají pouze nekonečné domény.

Příklad 4.6: Navrhněte konečnou teorii (množina T spec. axiomů je konečná) s jakýmkoliv jazykem, která má jen nekonečné modely.

Příklad 4.7: Předpokládejme, že máme teorii $T_{\mathbb{Q}}$ racionálních čísel, která definuje běžné konstanty pro racionální čísla, $+$, $*$, a $<, \leq, \geq, >$. Jak ji rozšířit, abychom dostali teorie definující matematické struktury níže? Ukažte příklad struktury, která je/není modelem vaší teorie.

a) Binární vektory se sčítáním a násobením vektorů, jejich délku, pravoúhlost a rovnoběžnost. T.j., teorie bude definovat $+$ a $*$ pro sčítání a násobení vektorů, predikáty *orto* a *para* pravoúhlost a rovnoběžnost vektorů. Předpokládejte také, že máte k dispozici funkce l a p, které vracejí pravou respektive levou složku vektoru.
b) Celá čísla (t.j., jak definovat celá čísla na základě racionálních čísel?). T.j., chceme definovat predikát c tak, že $c(x)$ je platná v naší teorii, právě když x je celé číslo.
c) Sčítání n-árních vektorů.

Příklad 4.8: Navrhněte teorii, která specifikuje správnou činnost semaforu na jednokolejce. Signalizuje doprava a doleva červenou nebo zelenou, vlak může jet jen na zelenou, na červenou vlak z dané strany stojí, na zelenou může jet. Vlaky by se neměly srazit, semafor nesmí přestat fungovat, a každý vlak by měl mít eventuálně možnost projet.

Příklad 4.9: Navrhněte teorii, která specifikuje činnost síťové tiskárny. Když v čase t přijde požadavek na tisk souboru f, tedy $P(f,t)$, tisk se v budoucnu provede, tedy $T(f,t')$, pokud dřív nepřijde požadavek na zrušení, tedy $Z(f,t')$, a tisk nemůže začít, pokud mu nepředchází platný požadavek.

Příklad 4.10: Je teorie s následujícími dvěma axiomy a s jazykem s predikátovým symbolem $<$, konstantou 0 a s rovností (a) sporná, (b) úplná? Zdůvodněte.

a)

1. $\forall x(x < 0 \vee 0 < x)$
2. $\exists y(\neg y < 0 \wedge \neg 0 < y)$

b)

1. $\forall x(x < 0 \vee 0 < x)$
2. $\exists y(\neg y < 0 \vee \neg 0 < y)$

Příklad 4.11: Je teorie s následujícími dvěma axiomy a s jazykem s funkčním symbolem f, konstantou 0 a s rovností (a) sporná, (b) úplná? Zdůvodněte.

a)

$$\begin{array}{ll} 1. & \forall x \forall y((f(x) = 0 \land f(y) = 0) \to x = y) \\ 2. & \neg \exists x(f(x) \neq 0) \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} 1. & \forall x \forall y((f(x) = 0 \land f(y) = 0) \to x = y) \\ 2. & \exists x(f(x) \neq 0) \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{ll} 1. & \forall x(f(x) = 0 \to x = 0) \\ 2. & \exists x(f(x) = 0) \\ 3. & f(0) \neq 0 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{ll} 1. & \forall x(f(x) = 0 \to x = 0) \\ 2. & \forall x(f(x) = 0) \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{ll} 1. & \exists x \forall y(x = f(y)) \\ 2. & \forall x(f(x) = 0) \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{ll} 1. & \forall x \exists y(x = f(y)) \\ 2. & \forall x(f(x) = 0) \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{ll} 1. & \exists x \forall y(f(x) = f(y)) \\ 2. & \forall x(f(x) = x) \end{array}$$

h)

$$\begin{array}{ll} 1. & \forall x \exists y(f(x) = f(y)) \\ 2. & \forall x(f(x) = x) \end{array}$$

Příklad 4.12: Jsou následující teorie (a) sporné, (b) úplné? Zdůvodněte. Jaké všechny modely mají tyto teorie?

a) Teorie T s rovností a se signaturou $\langle \{ \mathit{Tom}_{/0}, \mathit{Jerry}_{/0} \}, \{ \mathit{chases}_{/2}, =_{/2} \} \rangle$, se speciálními axiomy

$$\begin{gathered} \forall x(x = \mathit{Jerry} \lor x = \mathit{Tom}) \\ \neg(\mathit{Jerry} = \mathit{Tom}) \\ \forall x \forall y \, (\mathit{chases}(x, y) \leftrightarrow (x = \mathit{Tom} \land y = \mathit{Jerry})) \end{gathered}$$

b) Teorie T s rovností a se signaturou $\langle \{ \mathit{Cat}_{/0}, \mathit{Dog}_{/0}, \mathit{Trex}_{/0} \}, \{ \mathit{eats}_{/2}, =_{/2} \} \rangle$, se speciálními axiomy

$$\begin{gathered} \forall x(x = \mathit{Dog} \lor x = \mathit{Cat} \lor x = \mathit{Trex}) \\ \forall x \forall y(\mathit{eats}(x, y) \to x = \mathit{Trex}) \\ \forall x \forall y(y = \mathit{Trex} \to \neg \mathit{eats}(x, y)) \end{gathered}$$

c) Teorie T s rovností a se signaturou $\langle \{ \mathit{Cat}_{/0}, \mathit{Fish}_{/0}, \mathit{Trex}_{/0} \}, \{ \mathit{eats}_{/2}, =_{/2} \} \rangle$, se speciálními axiomy

$$\begin{gathered} \forall x(x = \mathit{Fish} \lor x = \mathit{Cat} \lor x = \mathit{Trex}) \\ \forall x \forall y(\mathit{eats}(x, y) \leftrightarrow \neg \mathit{eats}(y, x)) \\ \forall x(x = \mathit{Trex} \lor \mathit{eats}(\mathit{Trex}, x)) \end{gathered}$$

Příklad 4.13: Každá bezesporná teorie T, pro kterou existuje algoritmus rozhodující platnost formulí (důsledky teorie), je rozšiřitelná na úplnou bezespornou efektivní teorii. Jak?

Příklad 4.14: Co se stane s mechanickým matematikem, pokud:

1. Log. systém není korektní.
2. Log. systém není sémanticky úplný.
3. Log. systém není efektivní.
4. Teorie není bezesporná.
5. Teorie není syntakticky úplná.
6. Teorie není efektivní.

Příklad 4.15: Navrhněte jednoduchý korektní, úplný, a efektivní logický systém, kterým bude možno mluvit o relaci menší na přirozených číslech kódovaných únárně. V systému musí být vyjádřitelné a dokazatelné, že $a < b$ pro každé dvě přirozená čísla $a, b \in \mathbb{N}$ kde $a < b$. Vytvořte i nekorektní a sémanticky neúplnou variantu.

Příklad 4.16: Navrhněte nějaký neefektivní log. systém, neefektivní teorii PL.

Řešení

Příklad 4.1 (řešení):

$$\forall x\, x \sim x$$
$$\forall x \forall y (x \sim y \to y \sim x)$$
$$\forall x \forall y \forall z (x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z)$$

Například $T \models \forall x \exists y\, x \sim y$ ale $T \not\models \forall x \forall y\, x \sim y$.

Příklad 4.2 (řešení):

$$\forall x \forall y (h(x + y) = h(x) \bar{+} h(y))$$
$$\forall x (h(f(x)) = \bar{f}(h(x)))$$

Příklad 4.3 (řešení):

$$\forall x \forall y (f(x, y) \wedge f(x, z) \to y = z)$$
$$\forall x \exists y (f(x, y))$$

Příklad 4.4 (řešení):

a) Do teorie z příkladu 4.1 přidáme

$$\forall x \exists y (x \sim y \wedge x \neq y)$$

b) Do teorie z příkladu 4.1 přidáme

$$\forall x \forall y \forall z ((x \sim y \wedge x \sim z) \to (x = y \vee x = z \vee y = z))$$

c) Do teorie z příkladu 4.1 přidáme

$$\exists x \exists y \forall z (x \sim z \vee y \sim z)$$

d) Do teorie z prokladu 4.1 přidáme

$$\forall x \forall y (x \sim y)$$

Příklad 4.5 (řešení): Teorie musí být pouze efektivní, nic jiného. Nemusí být konečná. Můžeme mít nekonečno axiomů, každý říká, že existuje n nerovnajících se prvků...

Příklad 4.6 (řešení): Hint: Usporadani na nekonecne domene...

Příklad 4.7 (řešení):

a)

$$\begin{gathered}
x + y = z \leftrightarrow (l(x) + l(y) = l(z) \wedge (p(x) + p(y) = p(z))) \\
|x| = z \leftrightarrow z * z = p(x) * p(x) + p(y) * p(y) \wedge z \geq 0 \\
orto(x, y) \leftrightarrow l(x) * l(y) + p(x) * p(y) = 0 \\
para(x, y) \leftrightarrow \exists z(l(x) = z * l(y) \wedge p(x) = z * p(y))
\end{gathered}$$

b)

$$\begin{gathered}
c(0) \\
\forall x(c(x) \leftrightarrow c(x + 1)) \\
\forall x((c(x) \wedge 0 < d \wedge d < 1) \rightarrow \neg c(x + d))
\end{gathered}$$

c)

$$\forall u \forall v(u + v = w \leftrightarrow \forall i(c(i) \rightarrow s(u, i) + s(v, i) = s(w, i)))$$

Příklad 4.8 (řešení):

$$\begin{gathered}
\forall t(cervenaVpravo(t) \vee zelenaVpravo(t)) \wedge (cervenaVlevo(t) \vee zelenaVpravo(t)) \\
\forall t(jedeZprava(t) \rightarrow zelenaVpravo(t)) \\
\forall t(jedeZleva(t) \rightarrow zelenaVlevo(t)) \\
\forall t(\neg zelenaVlevo(t) \vee zelenaVpravo(t)) \\
\forall t \exists t'(t' > t \wedge zelenaVlevo(t)) \\
\forall t \exists t'(t' > t \wedge zelenaVpravo(t))
\end{gathered}$$

Příklad 4.9 (řešení):

1. $\forall t \forall f \ (P(f, t) \rightarrow (\exists t' \ t' > t \wedge (T(f, t') \vee Z(f, t'))))$
2. $\forall t \forall f \ (T(f, t) \rightarrow (\exists t' \ t' < t \wedge P(f, t') \wedge (\forall t'' \ (t' \leq t'' \leq t) \rightarrow \neg Z(f, t''))))$

Příklad 4.10 (řešení):

a) Je sporná. 1. říká, že každý prvek je v relace s 0 zatím co 2. říká, že nějaký prvek není v relaci s 0, nemá model. Sporná je vždy úplná.

b) Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_{\mathcal{M}} = \{a, b\}$, $\mathcal{M}(0) = \{a\}$ a $\mathcal{M}(<) = \{(a, b), (a, a)\}$. Není úplná, má ještě model $\mathcal{M}'$, kde $D'_{\mathcal{M}} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{M}(0) = \{a\}$ a $\mathcal{M}'(<) = \{(a, b), (a, c), (a, a)\}$, a jsou rozlišitelné formulí $\varphi : \exists x \exists y \exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$, kde $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ a $\mathcal{M}' \models \varphi$.

Příklad 4.11 (řešení):

a) Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_{\mathcal{M}} = \{a\}$, $\mathcal{M}(0) = \{a\}$ a $\mathcal{M}(f) = \{(a, a)\}$. Je úplná, je to její jediný model (1. říká, že na nulu se zobrazí maximálně jeden prvek a 2. říká, že všechny prvky se zobrazí na 0).

b) Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_{\mathcal{M}} = \{a, b\}$, $\mathcal{M}(0) = \{a\}$ a $\mathcal{M}(f) = \{(a, b), (b, b)\}$. Není úplná, má ještě model $\mathcal{M}'$, kde $D'_{\mathcal{M}} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{M}(0) = \{a\}$ a $\mathcal{M}'(f) = \{(a, b), (b, b), (c, c)\}$, a jsou rozlišitelné formulí $\varphi : \exists x \exists y \exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$, kde $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ a $\mathcal{M}' \models \varphi$.

c) Je sporná. 1. a 2. říká, že na 0 se zobrazí právě jen na 0, zatím co 3. říká, že 0 se nezobrazí na 0, nemá model. Sporná je vždy úplná.

d) Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_\mathcal{M} = \{a\}$, $\mathcal{M}(0) = \{a\}$ a $\mathcal{M}(f) = \{(a,a)\}$. Je úplná, je to její jediný model (1. říká, že na nulu se zobrazí jen nula a 2. říká, že všechny prvky se zobrazí na 0).

e) Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_\mathcal{M} = \{a\}$, $\mathcal{M}(0) = \{a\}$ a $\mathcal{M}(f) = \{(a,a)\}$. Není úplná, má ještě model $\mathcal{M}'$, kde $D'_\mathcal{M} = \{a,b\}$, $\mathcal{M}(0) = \{a\}$ a $\mathcal{M}'(f) = \{(a,a),(b,a)\}$, a jsou rozlišitelné formulí $\varphi : \forall x \forall y\, x = y$, kde $\mathcal{M} \models \varphi$ a $\mathcal{M}' \models \neg\varphi$.

f) Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_\mathcal{M} = \{a\}$, $\mathcal{M}(0) = \{a\}$ a $\mathcal{M}(f) = \{(a,a)\}$. Je úplná, je to její jediný model (1. říká, že na každý prvek se něco musí zobrazí a 2. říká, že všechny prvky se zobrazí na 0).

g) Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_\mathcal{M} = \{a\}$, $\mathcal{M}(0) = \{a\}$ a $\mathcal{M}(f) = \{(a,a)\}$. Je úplná, je to její jediný model (1. říká, že všechny se zobrazí na stejný prvek a 2. říká, že všechny prvky se zobrazí na seba).

h) Není sporná, má model $\mathcal{M}$, kde $D_\mathcal{M} = \{a\}$, $\mathcal{M}(0) = \{a\}$ a $\mathcal{M}(f) = \{(a,a)\}$. Není úplná, má ještě model $\mathcal{M}'$, kde $D'_\mathcal{M} = \{a,b\}$, $\mathcal{M}(0) = \{a\}$ a $\mathcal{M}'(f) = \{(a,a),(b,b)\}$, a jsou rozlišitelné formulí $\varphi : \forall x \forall y\, x = y$, kde $\mathcal{M} \models \varphi$ a $\mathcal{M}' \models \neg\varphi$.

Příklad 4.12 (řešení):

a) Bezesporná a úplná. Má jediný model $\mathcal{M}$, kde $D_\mathcal{M} = \{a,b\}$, $\mathcal{M}(\mathit{Tom}) = a, \mathcal{M}(\mathit{Jerry}) = b$ a $\mathcal{M}(\mathit{chases}) = \{(a,b)\}$.

b) Bezesporná a neúplná. Má model $\mathcal{M}$, kde $D_\mathcal{M} = \{a\}$, $\mathcal{M}(\mathit{Cat}) = \mathcal{M}(\mathit{Trex}) = \mathcal{M}(\mathit{Dog}) = a$ a $\mathcal{M}(\mathit{eats}) = \emptyset$. Další model je třeba $\mathcal{M}'$, kde $D'_\mathcal{M} = \{a,b\}$, $\mathcal{M}'(\mathit{Cat}) = \mathcal{M}'(\mathit{Dog})a$, $\mathcal{M}'\,\mathit{Trex} = b$, $\mathcal{M}'(\mathit{eats}) = \{(b,a)\}$. Jsou rozlišitelné formulí $\mathit{eats}(\mathit{Trex}, \mathit{Cat})$.

c) Sporná, druhý axiom, když $x = y$. Sporná je vždy úplná (proč?).
Pokud přídáme před vnitřek druhého axiomu $x \neq y \rightarrow$ ..., pak je bezesporná a neúplná. Má model $\mathcal{M}$, kde $D_\mathcal{M} = \{a\}$, $\mathcal{M}(\mathit{Cat}) = \mathcal{M}(\mathit{Trex}) = \mathcal{M}(\mathit{Fish}) = a$ a $\mathcal{M}(\mathit{eats}) = \emptyset$. Má ještě model $\mathcal{M}'$, kde $D'_\mathcal{M} = \{a,b\}$, $\mathcal{M}'(\mathit{Cat}) = \mathcal{M}'(\mathit{Fish})$, $\mathcal{M}'(\mathit{Trex}) = b$, $\mathcal{M}'(\mathit{eats}) = \{(b,a)\}$. Jsou rozlišitelné formulí $\mathit{eats}(\mathit{Trex}, \mathit{Cat})$.

Příklad 4.13 (řešení): Těžké.

Příklad 4.14 (řešení):

1. Může vrátit špatnou odpověď.
2. Záleží spíše na syntaktické úplnosti teorie. Nemusí se zastavit (pokud neexistuje důkaz ani vyvrácení).
3. Neumíme vyhodnotit, zda je věc důkaz. MM nejde implementovat.
4. Funguje, ale vrací true pro každou větu.
5. Nemusí se zastavit (pokud neexistuje důkaz ani vyvrácení).
6. Neumíme vyhodnotit, zda je věc důkaz. MM nejde implementovat.

Příklad 4.15 (řešení): Hint: v důkazech budeme potřebovat používat tranzitivitu (v dok. pravidle) a axiomy, které definují relaci mezi číslem a následníkem.