Definujte pojem *realizace jazyka predikátové logiky* se signaturou $\langle \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ nad množinou proměnných $\mathbb{X}$.
Je to dvojice (D, α) kde D je neprázdná množina a

- pro každý f. symbol $f_{/n} \in \mathcal{F}$ je $\alpha(f) \colon D^n \to D$ funkce
- pro každý p. symbol $p_{/m} \in \mathcal{P}$ je $\alpha(p) \subseteq D^m$ relace
- pro každou proměnnou $x \in \mathbb{X}$ je $\alpha(x) \in D$.

Definujte, co to jsou *term* a *formule predikátové logiky* v jazyce se signaturou $\langle \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ a množinou proměnných $\mathbb{X}$.

- term $t ::= x \mid f(t_1, \ldots, t_n)$ pro $x \in \mathbb{X}$, $f_{/n} \in \mathcal{F}$ a termy $t_1, \ldots, t_n$
- $\varphi_{atom} ::= t_1 = t_2 \mid p(t_1, \ldots, t_m)$ pro $p_{/m} \in \mathcal{P}$ a termy $t_1, \ldots, t_m$
- formule $\varphi ::= \varphi_{atom} \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \ldots \mid \exists x\varphi \mid \forall x\varphi$ pro $x \in \mathbb{X}$

Definujte pojem *term* predikátové logiky 1. řádu.
Řešení: Třeba: Proměnná je term, a pokud je t term arity n a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, potom je $t(t_1, \ldots, t_n)$ term. Nic jiného není term.

Formulujte první Gödelovu větu o neúplnosti. Řešení: Žádná efektivní a bezesporná teorie zahrnující Peanovu aritmetiku nemůže být úplná.

Formulujte první Gödelovu větu o neúplnosti.
Žádná efektivní bezesporná teorie PL zahrnující Peanovu aritm. nemůže být úplná.

Formulujte Gödelovu větu o úplnosti predikátové logiky.
Pro libovolnou formuli pred. logiky platí, že $\models \varphi \iff \vdash \varphi$.
nebo
Pro libovolnou teorii T a formuli pred. logiky platí, že $T \models \varphi \iff T \vdash \varphi$.

Definujte *důkaz* formule φ ve výrokové logice (Hilbertovský).
Řešení: Sekvence formulí končící φ, kde každá formule je buď axiom nebo je z předchozích odvozena odvozovacím pravidlem.

Definujte pojmy *korektnost* a *úplnost* (sémantická) logického systému.
Řešení: Systém je korektní, pokud vše dokazatelné je platné, tedy, pro všechny formule φ platí, že $\vdash \varphi \implies \models \varphi$.
Systém je úplný, pokud vše platné je dokazatelné, tedy, pro všechny formule φ platí, že $\models \varphi \implies \vdash \varphi$.

Definujte, co to je *důkaz formule φ z množiny předpokladů P* v Hilbertovském důkazovém systému.
Je to posloupnost formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ taková, že $\varphi = \varphi_n$ a pro každou formuli φ_i platí jedno z následujících:

- je axiomem (přesněji: získána instanciací některého schématu axiomů),
- je předpoklad (tj. $\varphi_i \in P$) nebo
- je získána z formulí φ_k a φ_ℓ, pro $k, \ell < i$, pomocí pravidla *modus ponens*.

Definujte pojem interpretace jazyka predikátové logiky 1. řádu.
Řešení: Je to dvojice (D, α), kde D je množina, zvaná doména, a α je zobrazení, která každé proměnné přiřazuje hodnotu z domény, každému predikátovému symbolu ze signatury jazyka přiřazuje n-arní relaci na D a každému funkčnímu symbolu ze signatury jazyka přiřazuje funkci z D^n do D, kde n je arita symbolu definovaná signaturou.