

۱- متوسط و تابع همبستگی و چگالی طیف توان فرآیند $X(t) = 3\cos(2t + \varphi_1) - 2\cos(7t + \varphi_2) + 5d(t)$ را بدست آورید که در آن φ_1, φ_2 دو متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $(0, 2\pi)$ و مستقل از هم بوده و $d(t)$ یک نویز سفید با تابع همبستگی $R_d(\tau) = 4\delta(\tau)$ و مستقل از φ_1, φ_2 است.

۲- دو فرآیند حقیقی، ایستا و نرمال و مستقل از هم $X[n]$ و $Y[n]$ با متوسط صفر و تابع همبستگی $R_x[m] = \frac{6}{1+m^2}$ و $R_y[m] = 4(0.5)^{|m|}$ را داریم. همچنین سه متغیر تصادفی حقیقی، نرمال و مستقل از هم a, b, c با متوسط صفر و واریانس واحد و مستقل از دو فرآیند تصادفی $X[n]$ و $Y[n]$ را داریم. فرآیند تصادفی $Z[n] = aX[n] + bY[n] + cn^2 + n$ به صورت

الف) با محاسبه تابع متوسط و تابع همبستگی فرآیند $Z[n]$ ، ایستایی آن را بررسی کنید.

ب) آیا فرآیند $Z[n]$ نرمال است؟ چرا؟

پ) فرض کنید فرآیند $Z[n]$ نیز نرمال است. توابع چگالی احتمال کناری و توام دو نمونه از این فرآیند در لحظات $n_1 = 1$ و $n_2 = 2$ را بدست آورید. سپس تابع چگالی احتمال شرطی فرآیند در لحظه $n_2 = 2$ به شرط داشتن مقدار فرآیند در لحظه $n_1 = 1$ را بدست آورید.

ت) اگر مقدار فرآیند $Y[n]$ در لحظه $n_1 = 1$ برابر ۵۰ باشد، یک بار تخمین خطی با معیار MMSE و یک بار تخمین آفین با معیار

MMSE برای مقدار فرآیند در لحظه $n_2 = 2$ و خطای آن را حساب کنید. آیا تخمین آفین بهترین تخمین است؟

ث) تابع همبستگی متقابل دو فرآیند $X[n]$ و $Z[n]$ (یعنی $R_{xz}[n_1, n_2]$) را بدست آورده و در صورت توام ایستا بودن، آن را رسم کنید.

۳- فرآیند $X[n]$ خروجی سیستمی با تابع تبدیل $H_1(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$ و ورودی $S[n]$ است. فرآیند $S[n]$ خروجی سیستمی با

تابع تبدیل $H_2(z) = 1 + 0.5z^{-1}$ با ورودی نویز سفید با متوسط صفر و واریانس واحد است.

الف) این سیستم را به صورت اتصال cascade دو سیستم که یکی تک قطب و دیگری تک صفر است رسم کنید.

ب) تابع همبستگی فرآیند $S[n]$ را بدست آورید.

پ) واریانس فرآیند $X[n]$ را بدست آورید.

ت) چگالی طیف توان فرآیندهای $S[n]$ و $X[n]$ را به صورت عبارتی حقیقی بدست آورید.

۴- متغیرهای تصادفی U و V مستقل از هم و با میانگین صفر و واریانس واحد هستند. فرآیندهای تصادفی $X[n]$ و $Y[n]$ به

$$\begin{cases} X[n] = U \cos(\omega_0 n) + V \sin(\omega_0 n) \\ Y[n] = V \cos(\omega_0 n) + U \sin(\omega_0 n) \end{cases}$$

صورت مقابل تعریف می شوند:

الف) آیا $X[n]$ و $Y[n]$ هریک ایستا هستند؟

ب) آیا توام ایستا هستند؟

۵- فرآیند $Y[n]$ برابر است با $Y[n] = X[n] + N[n]$ که در آن $X[n] - 0.5X[n-1] = U[n]f(n)$ و $N[n]$ و $U[n]$ نویزهای سفید با متوسط صفر و واریانس ۲ و ۵ و مستقل از هم هستند.

الف) فرض کنید: $f(n) = 1$. موارد زیر را بدست آورید:

توابع همبستگی $R_x[m]$ و $R_y[m]$ و $R_{xy}[m]$ و چگالی طیف توان و متوسط و واریانس فرآیندهای $X[n]$ و $Y[n]$

ب) فرض کنید: $f(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$. موارد زیر را بدست آورید:

تابع همبستگی $R_x[n_1, n_2]$ و متوسط و واریانس فرآیند $X[n]$

۶- فرآیند تصادفی $X[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi)$ را در نظر بگیرید که ω_0 یک عدد ثابت مثبت است و φ یک متغیر تصادفی با تابع

$$f_{\Phi}(\varphi) = 0.25 \left(\delta(\varphi) + \delta\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \delta(\varphi - \pi) + \delta\left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right) \right)$$

چگالی احتمال مقابل است: تابع متوسط و همبستگی این فرآیند را بدست آورید. آیا فرآیند ایستا است؟

۷- فرآیند WSS حقیقی $S[n]$ با چگالی طیف توان $S_s(\omega) = \frac{9}{41 - 40\cos\omega}$ را داریم. فرآیند $X[n]$ به صورت مجموع این

فرآیند و یک نویز سفید $V[n]$ با متوسط صفر و واریانس واحد و متعامد با $S[n]$ است.

الف) تابع همبستگی $X[n]$ را محاسبه کنید و به ساده ترین صورت درآورید.

ب) پاسخ ضربه فیلتر سفید کننده و فیلتر ابداع فرآیند $X[n]$ را بدست آورید.

۸- فرض کنید سکه‌ای را بی نهایت بار و با فواصل زمانی T پرتاب می‌کنیم. یک تابع نمونه از فرآیند $X(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود (فرآیند برابر ۱ است اگر پرتاب n ام شیر باشد و ۰-۱ است اگر پرتاب n ام خط باشد):

$$X(t) = \begin{cases} 1 & (n-1)T \leq t \leq nT \\ -1 & (n-1)T \leq t \leq nT \end{cases}$$

الف) آیا این فرآیند WSS است؟ تابع همبستگی آن را محاسبه کنید.

ب) اگر θ یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در فاصله $[0, T]$ و مستقل از $X(t)$ باشد، آیا فرآیند $Y(t) = X(t - \theta)$ یک فرآیند WSS است؟ تابع همبستگی آن را محاسبه کنید.