۱- ثبت یک سیگنال حیاتی توسط یک سنسور و یک تقویت کننده همواره با نویز همراه است. از طرفی گین تقویت کننده که انتظار می‌رود ثابت باشد، ممکن است در طول زمان تغییر کند و یا تابعی از پارامترهایی باشد که بتوان بهره را با یک متغیر تصادفی و یا یک فرآیند تصادفی مدل کرد. فرآیند حقیقی $S[n]$ با متوسط m_s، واریانس σ_s^2 و تابع همبستگی $R_s[m]$ را که یک سیگنال حیاتی است در نظر بگیرید. می‌خواهیم پارامترهای این فرآیند را از روی دو تابع نمونه N نقطه‌ای دو فرآیند $X_1[n]=Y[n]S[n]+V[n]$ و $X_2[n]=aS[n]+U[n]$ (که مدل تقویت شده سیگنال $S[n]$ همراه با نویز جمع شونده است) تخمین بزنیم. فرآیندهای $V[n]$ و $U[n]$ نویز سفید با متوسط صفر و واریانس مجهول σ_v^2 و σ_u^2 بوده از هم مستقل بوده و از $S[n]$ هم مستقل است. همچنین فرآیند $Y[n]$ نویز سفید با متوسط دو و واریانس چهار و مستقل از $S[n]$ و $V[n]$ و $U[n]$ است. و a یک متغیر تصادفی با متوسط دو و واریانس پنج و مستقل از $S[n]$ و $V[n]$ و $U[n]$ و $Y[n]$ است.

الف) بایاس و واریانس دو تخمین‌گر $\hat{m}_s^1=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X_1[n],\quad \hat{m}_s^2=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X_2[n]$ برای متوسط m_s را بدست آورید.

ب) در قسمت الف با فرض برابری σ_v^2 و σ_u^2 دو تخمین‌گر را با هم مقایسه کنید. کدام بهتر است؟ در صورت بایاس‌دار بودن، چگونه می‌توان آنها را بدون بایاس کرد؟

پ) بایاس سه تخمین‌گر زیر برای تخمین $R_s[m]$ را بدست آورید و تعیین کنید به ازاء چه مقادیری از m این تخمین‌گرها بایاس دارند. کدامیک را می‌توان بدون بایاس کرد؟

$$\hat{R}_s^1[m]=\frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1}X_1[n]X_1[n+m],\quad \hat{R}_s^2[m]=\frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1}X_2[n]X_2[n+m],\quad \hat{R}_s^3[m]=\frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1}X_1[n]X_2[n+m]$$

ت) فرض کنید m_s معلوم است. با الهام از پ، یک تخمین‌گر برای واریانس σ_s^2 پیشنهاد کنید که بدون بایاس باشد.

۲- فرآیند حقیقی $S_1[n]$ با متوسط m_1، واریانس σ_1^2 و تابع همبستگی $R_1[m]$ و فرآیند حقیقی $S_2[n]$ با متوسط m_2، واریانس σ_2^2 و تابع همبستگی $R_2[m]$ را داریم. دو تابع نمونه N نقطه‌ای به صورت زیر داریم:

$$X[n]=S_1[n]+V[n],\quad Y[n]=S_1[n]+S_2[n]+W[n]$$

فرآیند $V[n]$ نویز سفید با متوسط صفر و واریانس σ_v^2 و فرآیند $W[n]$ نویز سفید با متوسط صفر و واریانس $\sigma_w^2=\sigma_v^2$ بوده و فرآیندهای $S_1[n]$ و $S_2[n]$ و $V[n]$ و $W[n]$ مستقل از هم هستند. برای تخمین $R_1[m]$، از تخمین‌گر $\hat{R}_1[m]=\frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1}X[n]X[n+m]$ استفاده می‌کنیم. فرض کنید واریانس این تخمین‌گر از رابطه معلوم $Var\{\hat{R}_1[m]\}=g[m]$ بدست می‌آید. در قسمت‌های زیر، همه پارامترهای گفته شده مجهول هستند و فقط دو تابع نمونه داده‌شده را در دسترس داریم.

الف) بایاس تخمین‌گر داده‌شده برای $R_1[m]$ را حساب کنید و تعیین کنید به ازاء چه مقادیری از m این تخمین‌گر بایاس دارد.

ب) یک تخمین‌گر برای m_2 پیشنهاد کنید که بدون بایاس باشد و سپس واریانس آن را حساب کنید.

پ) دو تخمین‌گر برای $R_1[m]$ و $R_2[m]$ پیشنهاد کنید که بایاس نداشته باشد.

۳- فرآیند $S[n]$ یک فرآیند حقیقی ارگادیک با متوسط m_s، واریانس σ_s^2 و همبستگی $R_s[m]$ می‌باشد. از هر یک از فرآیندهای زیر یک تابع نمونه در بازه $0\le n<N$ داریم:

$$X_1[n]=S[n]+V[n],\quad X_2[n]=S[n]+U[n]$$

دو فرآیند $V[n]$ و $U[n]$ نویز سفید با متوسط صفر و واریانس‌های σ_v^2 و σ_u^2 بوده و از هم و از $S[n]$ مستقل می‌باشند.

الف) تخمین متوسط m_s از روی $X_1[n]$ بهتر است یا $X_2[n]$؟ چرا؟

ب) یک تخمین‌گر برای واریانس σ_s^2 پیشنهاد کنید.

پ) برای تخمین همبستگی $S[n]$، دو تخمین‌گر پیشنهاد شده است:

$$\hat{R}_s^{(1)}[m]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1}X_2[n]X_2[n+m],\quad \hat{R}_s^{(2)}[m]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1}X_1[n]X_2[n+m],\quad m=0,1,\dots,M-1\quad (N>M+1)$$

بایاس این تخمین‌گرها را محاسبه کنید. در صورت بایاس‌دار بودن، چگونه می‌توان آنها را بدون بایاس کرد؟

ت) برای تخمین متوسط $S[n]$، سه تخمین‌گر پیشنهاد شده است:

$$\hat{m}_s^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_1[n], \quad \hat{m}_s^{(2)} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_2[n], \quad \hat{m}_s^{(3)} \frac{1}{3N}\sum_{n=0}^{N-1}(X_1[n] + 2X_2[n])$$

بایاس و واریانس تخمین‌گر اول را محاسبه کرده و به ساده‌ترین صورت در آورید. سپس واریانس دو تخمین‌گر دیگر را حتی‌الامکان بدون محاسبه نوشته و بگویید کدامیک از این سه تخمین‌گر بهتر است.

۴- مقادیر مقابل از سیگنال EEG یک فرد ثبت شده است: $\{1, 3, 1, -2, -1, 1\}$
با فرض ایستایی و ارگادیک بودن از روی این تابع نمونه شش نقطه‌ای، متوسط، واریانس و تابع همبستگی این سیگنال را در همه نقاط ممکن تخمین بزنید.

۵- فرآیندهای $S_1[n]$ و $S_2[n]$ دو فرآیند حقیقی تواما ارگادیک با متوسط‌های m_1 و m_2، واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2، کواریانس σ_{12}، همبستگی‌های $R_1[m]$ و $R_2[m]$، و همبستگی متقابل $R_{12}[m]$ می‌باشند. از هر یک از فرآیندهای زیر یک تابع نمونه در بازه زمانی $0 \le n < N$ داریم: $X[n] = S_1[n] + U[n], \quad Y[n] = S_2[n] + V[n]$
دو فرآیند $V[n]$ و $U[n]$ نویز سفید با متوسط صفر و واریانس‌های σ_v^2 و σ_u^2 بوده و از هم و از $S_1[n]$ و $S_2[n]$ مستقل می‌باشند.
الف) برای تخمین $R_{12}[m]$، تخمین‌گری به صورت $(M \le N-1) \quad m = 0,1,\ldots,M-1 \quad \hat{R}_{12}^{(1)}[m] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} X[n]Y[n+m]$ پیشنهاد شده است. بایاس این تخمین‌گر را محاسبه کنید.
ب) در قسمت الف، تخمین‌گر را چنان تغییر دهید که بدون بایاس شود.
پ) σ_{12} را برحسب m_1 و m_2 و $R_{12}[m]$ بدست آورید.
ت) برای تخمین σ_{12}، تخمین‌گری به صورت $\hat{\sigma}_{12} = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]Y[n]\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} Y[n]\right)$ پیشنهاد شده است. اولا این فرمول را توجیه کنید و ثانیا بایاس این تخمین‌گر را محاسبه کنید.

۶- در ثبت پتانسیل‌های برانگیخته، M بار تحریک متوالی صورت گرفته و پاسخ به تحریک kام برابر است با:
$X_k(t) = S(t) + N_k(t) \qquad 0 < t < T$
که T زمان یک تحریک است. $S(t)$ پتانسیل برانگیخته است که یقینی ولی مجهول فرض می‌شود و $N_k(t)$ سیگنال EEG زمینه است که یک فرآیند گوسی WSS با متوسط صفرو تابع همبستگی $R_N(\tau) = 10e^{-\tau^2/4}$ است. فرض کنید که دستگاه ثبت، سیگنال خروجی را به صورت زیر تحویل می‌دهد:

$$Y_k(t) = \begin{cases} A & X_k(t) > X_m \\ X_k(t) & |X_k(t)| < X_m \\ -A & X_k(t) < -X_m \end{cases}$$

الف) فرض کنید M پا سخ $X_k(t)$ در د سترس ا ست. یک تخمین‌گر برای تخمین پتان سیل برانگیخته $S(t)$ پی شنهاد کنید و بایاس آن را حساب کنید.
ب) متوسط و تابع همبستگی فرآیند $X_k(t)$ را محاسبه کنید و تابع چگالی احتمال $X_k(t)$ را در هر لحظه t بنویسید. آیا این فرآیند هم WSS است؟ چرا؟
پ) تابع چگالی احتمال $Y_k(t)$ را در هر لحظه t بر حسب پارامترهای موجود در مسئله بنویسید.
ت) فرض کنید M پاسخ $Y_k(t)$ در دسترس است. یک تخمین‌گر برای تخمین پتانسیل برانگیخته $S(t)$ پیشنهاد کنید و سعی کنید بایاس آن را حساب کنید.