

۱- الف) چگالی طیف توان دو فرآیند معرفی شده در تمرین دوم سری چهارم را با Matlab رسم کنید.

ب) در قسمت الف تمرین دوم سری چهارم، هر یک از این دو فرآیند با یک مدل تقریب زده است. چگالی طیف توان تقریب زده شده برای مرتبه‌های مختلف را رسم کرده و با چگالی طیف توان اصلی مقایسه کنید. حداقل مرتبه برای شباهت طیف فرآیند اصلی و طیف فرآیند مدل شده را تعیین کنید.

۲- مقادیر یک تابع نمونه در ۴ لحظه داده شده است. $X[0] = 4, X[1] = -2, X[2] = 8, X[3] = -4$

الف) مقادیر ممکن همبستگی را به روش بایاس دار تخمین بزنید.

ب) چگالی طیف توان را به روش‌های زیر تخمین زده و فرمول ریاضی آن را بدست آورده و با Matlab رسم کنید.

$BT, Periodogram, AR(1), AR(2), AR(3), MA(1), ARMA(1,1), PHD(p=1)$

۳- چگالی طیف توان متقابل دو فرآیند $X[n]$ و $Y[n]$ به صورت تبدیل فوریه تابع همبستگی متقابل آن‌ها $(R_{xy}[m])$ تعریف می‌شود. فرض کنید دو تابع نمونه‌ی N نقطه‌ای از هریک از این دو فرآیند داشته باشیم.

الف) تخمین طیف به روش BT که از روی یک تابع نمونه با N نقطه تعریف می‌شود را در نظر بگیرید. حال فرض کنید که قبل از تخمین مقادیر همبستگی، تابع نمونه هریک از دو فرآیند فوق در یک پنجره $g_1[n] = 0, n < 0, n \geq N$ ضرب می‌شود و سپس پس از تخمین مقادیر

$$\hat{R}_{xy}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} X_{g_1}[n] Y_{g_1}[n+m]$$

تخمین طیف جدید را به صورت $\hat{S}_{xy}(\omega) = T_s \sum_{m=-M}^M g_2[m] \hat{R}_{xy}[m] e^{-j\omega m}$

تعریف می‌کنیم که در آن پنجره جدیدی با مشخصات $g_2[m] = 0, |m| > M, M \leq N-1$ استفاده شده است. بایاس این تخمین گر را بدست آورید.

ب) فرمولی برای تخمین چگالی طیف توان متقابل این دو فرآیند به روش پرودوگرام بنویسید و بایاس آن را حساب کنید.

۴- برای فرآیند حقیقی و ایستای $X[n]$ داریم: $X[n] = S[n] + V[n]$ که در آن $S[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ و φ یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در فاصله $[0, 2\pi]$ و $V[n]$ یک فرآیند نویز سفید با متوسط صفر و واریانس σ_v^2 و مستقل از φ است.

الف) عبارت تحلیلی چگالی طیف توان فرآیند $X[n]$ را بر حسب A و ω_0 و σ_v^2 بنویسید.

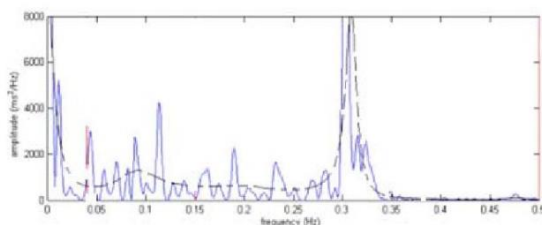
ب) اگر $\hat{R}_x[0] = 2$ و $\hat{R}_x[1] = 0.8$ و $\hat{R}_x[2] = 0.64$ ، با استفاده از روش PHD ، چگالی طیف توان فرآیند $X[n]$ را تخمین بزنید.

پ) با استفاده از رابطه $R_x[m]$ بر حسب پارامترهای مجهول، یک دستگاه برای محاسبه A و ω_0 بدست آورید و سپس چگالی طیف توان فرآیند $X[n]$ را تخمین بزنید.

ت) اگر این تابع نمونه با نرخ $f_s = 400 \text{ Hz}$ نمونه‌برداری شده باشد و با بررسی پرودوگرام این سیگنال یک پیک قابل ملاحظه در فرکانس 22.5 Hz دیده شده باشد، دامنه طیف فرآیند در این فرکانس را با روش Capon تخمین بزنید.

۵- الف) یک تابع نمونه از یک سیگنال حیاتی داریم و در پرودوگرام آن چند قله تیز می‌بینیم. می‌خواهیم با روش‌های مختلف، تخمین دقیق‌تری از طیف این فرآیند به دست آوریم. از بین روش‌های غیرپارامتری و روش‌های پارامتری کدام مناسب‌تر است؟

ب) شکل زیر طیف بدست آمده از سیگنال تغییرات نرخ ضربان قلب (HRV) را با استفاده از روش‌های غیرپارامتری و پارامتری نشان می‌دهد. با ذکر دلیل بیان کنید هر یک از طیف‌های رسم شده مربوط به کدام روش است؟



۶- فرایند $X[n] = S_1[n] + S_2[n] + S_3[n] + Z[n]$ را در نظر بگیرید که در آن $S_1[n] = A_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 n + \phi_2)$ بوده که ϕ_1 و ϕ_2 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در فاصله $(0, 2\pi)$ بوده و فرایند $S_2[n]$ در معادله $S_2[n] + aS_2[n-1] = U[n]$ صدق می‌کند که در آن $-1 < a < 0$ و فرایند $S_3[n]$ در معادله $S_3[n] = V[n] - aV[n-1]$ صدق می‌کند. $U[n]$ و $V[n]$ و $Z[n]$ سه نویز سفید با متوسط صفر و واریانس‌های σ_u^2 و σ_v^2 و σ_z^2 مستقل از هم و مستقل از ϕ_1 و ϕ_2 است. الف) تابع همبستگی فرایند $X[n]$ را بدست آورید.

ب) چگالی طیف توان فرایند $X[n]$ را بدست آورید و آن را به طور تقریبی رسم کنید. پ) به چند مقدار تابع همبستگی برای محاسبه دقیق چگالی طیف توان فرایند $X[n]$ نیاز داریم؟ روش کار را توضیح دهید. ت) یک تابع نمونه N نقطه‌ای از فرایند $X[n]$ در دسترس است. آیا تخمین چگالی طیف توان فرایند $X[n]$ با استفاده از روش BT تخمین خوبی است؟ چرا؟

ث) یک تابع نمونه N نقطه‌ای از فرایند $X[n]$ در دسترس است. تخمین چگالی طیف توان فرایند $X[n]$ با استفاده از روش پریودوگرام چه تغییر عمده‌ای در شکل چگالی طیف توان می‌دهد؟ دلیل آن را ذکر کنید.

ج) فرض کنید $a = 0$ ، آیا روش $Prony$ برای تخمین چگالی طیف توان فرایند $X[n]$ مناسب‌تر است یا روش PHD ؟ چرا؟ چ) فرض کنید $A_1 = A_2 = 0$ ، آیا روش $Prony$ برای تخمین چگالی طیف توان فرایند $X[n]$ مناسب‌تر است یا روش PHD ؟ چرا؟ ح) فرض کنید $A_1 = A_2 = 0$ ، برای تخمین چگالی طیف توان فرایند $X[n]$ مدل AR مناسب‌تر است یا MA یا $ARMA$ ؟ چرا؟

۷- می‌دانیم: $X[n] = X_1[n] + X_2[n]$ که در آن فرایند $X_1[n]$ از مدل $X_1[n] - 0.1X_1[n-1] = U_1[n]$ و $X_2[n]$ از مدل $X_2[n] = U_2[n] + 0.1U_2[n-1]$ تبعیت می‌کند که $U_1[n], U_2[n]$ نویز سفید با متوسط صفر و واریانس یکسان σ_u^2 و مستقل از هم هستند. همچنین می‌دانیم: $Y[n] = Y_1[n] + Y_2[n]$ که در آن فرایند $Y_1[n]$ از مدل $Y_1[n] - 0.1Y_1[n-1] = U[n]$ و فرایند $Y_2[n]$ از مدل $Y_2[n] = U[n] + 0.1U[n-1]$ تبعیت می‌کند که $U[n]$ نویز سفید با متوسط صفر و واریانس σ_u^2 است. چگالی طیف توان دو فرایند $X[n], Y[n]$ تخمین زده شده است و یکی از آنها به شکل پایین گذر تیزی است. این طیف پایین گذر تیز به کدامیک تعلق دارد؟ چرا؟

۸- چگالی طیف توان دو فرایند به صورت زیر است که در آن ضرایب مخالف صفر هستند:

$$S_x(\omega) = \frac{a + b \cos \omega}{1 + c \cos \omega + d \cos(2\omega)}, \quad S_y(\omega) = e + f \cos \omega + g \cos(2\omega) + h \cos(3\omega)$$

با استفاده از یک تابع نمونه از هر یک از این دو فرایند، می‌خواهیم چگالی طیف توان را تخمین بزنیم. با ذکر دلیل به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) روش BT برای تخمین چگالی طیف فرایند $X[n]$ مناسب‌تر است یا $Y[n]$ ؟

ب) روش $AR(5)$ برای تخمین چگالی طیف فرایند $X[n]$ مناسب‌تر است یا $Y[n]$ ؟

پ) روش $Prony$ برای تخمین طیف چگالی فرایند $Y[n]$ مناسب‌تر است یا PHD ؟

ت) پریودوگرام بهبود یافته با روش $Welch$ دو فرایند فوق را با دو تابع نمونه داده شده بدست آورده‌ایم. در یکی از آنها دو قله تیز دیده می‌شود. طیفی که در آن دو قله تیز دیده می‌شود مربوط به کدامیک از دو فرایند می‌تواند باشد؟