تمرین سری 5 درس SSP - رادین خیام - 99101579

سوال 1 -

الف)

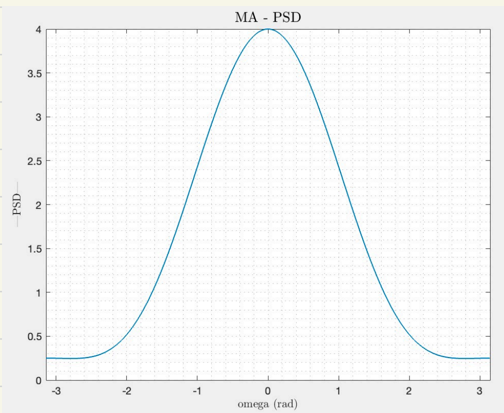
$$s[n] = u[n] + 0.75\,u[n-1] + 0.25\,u[n-2] \quad , \; \sigma_u^2 = 1$$

$$\rightarrow H(e^{j\omega}) = 1 + 0.75\,e^{-j\omega} + 0.25\,e^{-2j\omega}$$

$$\rightarrow |H(e^{j\omega})|^2 = 1.625 + 1.875\cos(\omega) + 0.5\cos(2\omega)$$

$$S_s(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 = 1.625 + 1.875\cos(\omega) + 0.5\cos(2\omega)$$

```
omega = -pi:0.01:pi;
S_s = 1.625+1.875*cos(omega) + 0.5*cos(2*omega);
plot(omega, S_s,'LineWidth',1);
title('MA - PSD','Interpreter','latex','FontSize',14);
xlabel('omega (rad)','Interpreter','latex');
ylabel('|PSD|','Interpreter','latex');
xlim([-pi pi]);
grid minor;
```



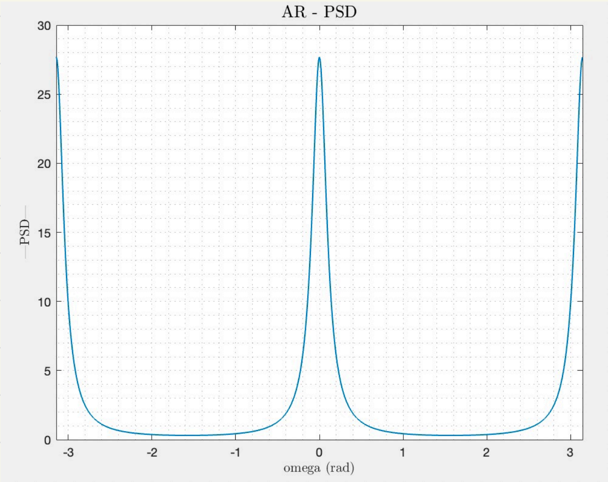
$$s(n) = u(n) + 0.81\, s[n-2] \quad , \quad \sigma_u^2 = 1$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.81 e^{-2j\omega}}$$

$$\rightarrow |H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1.6561 - 1.62\cos(2\omega)}$$

$$S_s(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1.6561 - 1.62\cos(2\omega)}$$

```
omega = -pi:0.01:pi;
S_s = 1./(1.6561-1.62*cos(2*omega));
plot(omega, S_s,'LineWidth',1);
title('AR - PSD','Interpreter','latex','FontSize',14);
xlabel('omega (rad)','Interpreter','latex');
ylabel('|PSD|','Interpreter','latex');
xlim([-pi pi]);
grid minor;
```



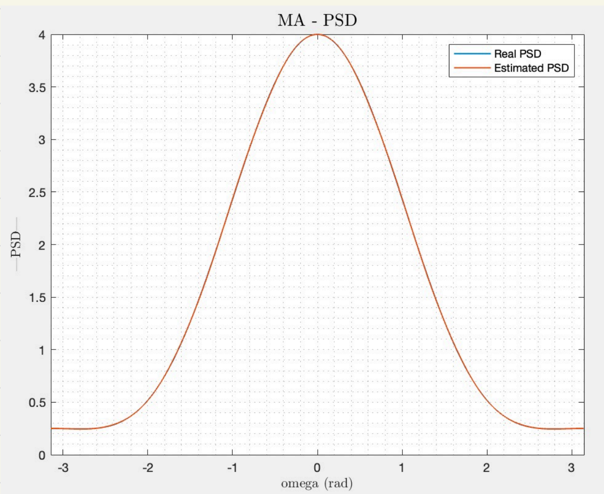
ب)

* برای تعیین AR یک فرآیند MA

```
function PSD = AR_PSD(order)
    omega = -pi:0.01:pi;

    a = zeros(order+1,1);
    a(1) = 1;
    a(2) = -0.75;
    for i=3:order+1
        a(i) = -0.75*a(i-1)-0.25*a(i-2);
    end

    p = zeros(order+1,1);
    for k=1:order+1
        tmp=0;
        for l=1:order+2-k
            tmp = tmp + a(l) * a(l+(k-1));
        end
        p(k) = tmp;
    end

    den = p(1).*cos(0*omega);
    for i=1:order
        den = den + 2*p(i+1)*cos(i*omega);
    end
    PSD = 1./denum;
end
```

```
clc;clear;
omega = -pi:0.01:pi;
H = 1.625+1.875*cos(omega) + 0.5*cos(2*omega);
PSD = AR_PSD(7);

figure;
plot(omega,H,'LineWidth',1);
hold on;
plot(omega,PSD,'LineWidth',1);
grid minor;
xlim([-pi pi])
title('MA - PSD','Interpreter','latex','FontSize',14);
xlabel('omega (rad)','Interpreter','latex');
ylabel('|PSD|','Interpreter','latex');
legend('Real PSD','Estimated PSD')
```

* تقریباً در اردر 7 بر روی هم منطبق شدند.

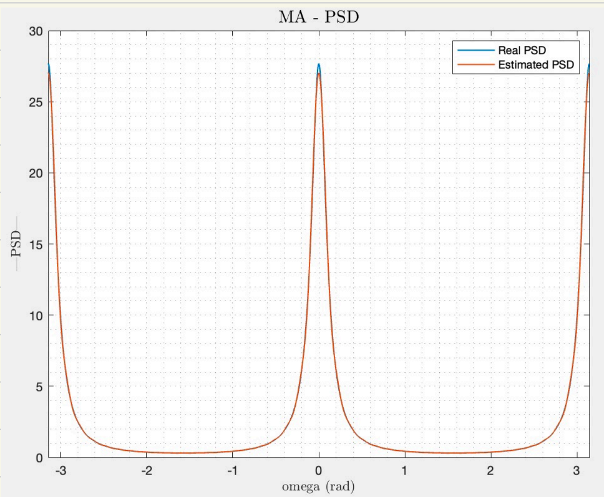


* برای تخمین MA یک فرآیند AR :

```matlab
function PSD = MA_PSD(order)
    omega = -pi:0.01:pi;

    b = zeros(order+1,1);
    last_even = floor(order/2) * 2;
    for i=0:2:last_even
        b(i+1) = 0.81^(i/2);
    end

    p = zeros(order+1,1);
    for k=1:order+1
        tmp=0;
        for l=1:order+2-k
            tmp = tmp + b(l) * b(l+(k-1));
        end
        p(k) = tmp;
    end

    PSD = p(1).*cos(0*omega);
    for i = 1:order
        PSD = PSD + 2*p(i+1)*cos(i*omega);
    end

end
```

```matlab
omega = -pi:0.01:pi;
H = 1./(1.6561-1.62*cos(2*omega));
PSD = MA_PSD(40);
figure;
plot(omega,H,'LineWidth',1);
hold on;
plot(omega,PSD,'LineWidth',1);
grid minor;
xlim([-pi pi])
title('MA - PSD','Interpreter','latex','FontSize',14);
xlabel('omega (rad)','Interpreter','latex');
ylabel('|PSD|','Interpreter','latex');
legend('Real PSD','Estimated PSD')
```

* تقریباً در اردر 40 یکی شدند.



سوال 2 -

الف)

$X[0]=4\,,\ X[1]=-2\,,\ X[2]=8,\ X[3]=-4$

$$\hat{R}_x[m] = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{4-m-1} x[n]\,x[n+m]$$

$$\hat{R}_x[m] = \hat{R}_x[-m]$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \hat{R}_x[0] = 25 \\ \hat{R}_x[1] = \hat{R}_x[-1] = -14 \\ \hat{R}_x[2] = \hat{R}_x[-2] = 10 \\ \hat{R}_x[3] = \hat{R}_x[-3] = -4 \end{cases}$$

ب)

BT :

$$\hat{S}_x(\omega) = \mathcal{F}\{\hat{R}_x[m]\} \longrightarrow S_x(\omega) = 25 - 14(e^{j\omega}+e^{-j\omega}) + 10(e^{2j\omega}+e^{-2j\omega}) - 4(e^{3j\omega}+e^{-3j\omega})$$

$$\longrightarrow \boxed{\hat{S}_x(\omega) = 25 - 28\cos(\omega) + 20\cos(2\omega) - 8\cos(3\omega)}$$

periodogram :

$$\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{4}|X_w(e^{j\omega})|^2$$

* با فرض پنجره مستطیلی $X_w[n]=X[n]$

$$\longrightarrow X_w(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{3} X[n]\,e^{-j\omega n} = 4 - 2e^{-j\omega} + 8e^{-j2\omega} - 4e^{-j3\omega}$$

$$\longrightarrow \boxed{\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{4}\left|4 - 2e^{-j\omega} + 8e^{-j2\omega} - 4e^{-j3\omega}\right|}$$

* AR(1)

$$\hat{R}_X[1] + a_1 \hat{R}_X[0] = 0 \longrightarrow a_1 = \frac{-\hat{R}_X[1]}{\hat{R}_X[0]} = \frac{14}{25} = 0.56$$

$$\sigma_u^2 = R_X[0] + a_1 R_X[1] = 25 - 0.56 \times 14 = 17.16$$

$$\hat{S}_X(\omega) = |\hat{H}(e^{j\omega})|^2 \sigma_u^2 = \frac{17.16}{|1+0.56e^{-j\omega}|} = \boxed{\frac{17.16}{1.31 + 1.12\cos(\omega)}}$$

* AR(2)

$$\begin{bmatrix} 25 & -14 \\ -14 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \end{bmatrix} \longrightarrow a_1 = 0.49 \ , \ a_2 = -0.13$$

$$\sigma_u^2 = R_X[0] + a_1 R_X[1] + a_2 R_X[2] = 25 + 0.49 \times -14 - 0.13 \times 10 = 16.84$$

$$\longrightarrow \hat{S}_X(\omega) = |\hat{H}(e^{j\omega})|^2 \sigma_u^2 = \frac{\sigma_u^2}{1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1(1+a_2)\cos(\omega) + 2a_2\cos(2\omega)}$$

$$= \frac{16.84}{1.26 + 0.85\cos(\omega) - 0.26\cos(2\omega)}$$

* AR(3)

$$\begin{bmatrix} 25 & -14 & 10 \\ -14 & 25 & -14 \\ 10 & -14 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ 9 \end{bmatrix} \longrightarrow a_1 = 0.51 \ , \ a_2 = -0.2 \ , \ a_3 = -0.16$$

$$\sigma_u^2 = 25 - 0.51 \times 14 - 0.2 \times 10 + 0.16 \times 4 = 16.5$$

$$\hat{S}_X(\omega) = \frac{\sigma_u^2}{\rho_0 + 2\sum_{k=1}^{3} \rho_k \cos(\omega k)} \longrightarrow \boxed{\hat{S}_X(\omega) = \frac{16.5}{1.33 + 0.88\cos(\omega) - 0.24\cos(2\omega) - 0.32\cos(3\omega)}}$$

$$\rho_0 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1.33$$

$$\rho_1 = a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3 = 0.44$$

$$\rho_2 = a_0 a_2 + a_1 a_3 = -0.12$$

$$\rho_3 = a_0 a_3 = -0.16$$

* MA(1)

$R_s[0] = \sigma_u^2(1+b_1^2) = 25$

$R_s[1] = \sigma_u^2 b_1 = -14$ $\longrightarrow$ $\boxed{b_1 = -0.89 + j0.45}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\sigma_u^2 = \frac{14}{0.89 - j0.45}}$

$\longrightarrow \boxed{\hat{S}_x(\omega) = \sigma_u^2(1 + b_1^2 + 2b_1\cos(\omega))}$

* ARMA (1,1)

$\hat{S}_x(\omega) = \frac{b_0^2 + b_1^2 + 2b_0 b_1 \cos(\omega)}{1 + a_1^2 + 2a_1\cos(\omega)}$, $a_1 = \frac{-R_x[2]}{R_x[1]} = \frac{10}{14} = 0.71$

$R_v[m] = (1+a_1^2)R_x[m] + a_1(R_x[m-1] + R_x[m+1]) \longrightarrow R_v[0] = (1+a_1^2)R_x[0] + 2a_1R_x[1] = 17.76$

$R_v[1] = (1+a_1^2)R_x[1] + a_1(R_x[0] + R_x[2]) = 3.86$

$\left.\begin{array}{l} R_v[0] = b_0^2 + b_1^2 = 17.76 \\ R_v[1] = b_0 b_1 = 3.86 \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{\hat{S}_x(\omega) = \frac{17.76 + 7.72\cos\omega}{1.5 + 1.42\cos\omega}}$

* PHD (P=1)

$R_x[m] = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_1 m) + \sigma_n^2\delta[m] \nearrow \left.\begin{array}{l} R_x[0] = \frac{A^2}{2} + \sigma_n^2 = 25 \\ R_x[1] = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_1) = -14 \\ R_x[2] = \frac{A^2}{2}\cos(2\omega_1) = -10 \end{array}\right\} \longrightarrow \frac{\cos\omega_1}{2\cos^2(\omega_1) - 1} = \frac{-14}{10}$

$\longrightarrow \begin{array}{l} \cos(\omega_1) = -0.91 \\ \cos(\omega_1) = 0.55 \end{array} \xrightarrow{R_x[1] < 0} \cos(\omega_1) = -0.91 \longrightarrow \boxed{\omega_1 = 2.7 \text{ rad}} \longrightarrow \boxed{A^2 = 30.76} \longrightarrow \boxed{\sigma_n^2 = 9.62}$

$\longrightarrow \boxed{\hat{S}_x(\omega) = 15.38\pi(\delta(\omega - 2.7) + \delta(\omega + 2.7)) + 9.62}$

سؤال 3 -

الف)

$$\hat{S}_{xy}(w) = T_s \sum_{m=-M}^{M} g_2[m]\, \hat{R}_{xy}[m] e^{-jwm}$$

$$\to E\{\hat{S}_{xy}(w)\} = T_s \sum_{m=-M}^{M} E\{\hat{R}_{xy}[m]\} g_2[m]\, e^{-jwm}$$

$$= T_s \sum_{m=-M}^{M} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} \underbrace{E\{X[n]Y[n+m]\}}_{R_{xy}[m]} g_1[n] g_1[n+m] \right) e^{-jwm} g_2[m]$$

$$= T_s \sum_{m=-M}^{M} R_{xy}[m]\, g_2[m] e^{-jwm} \times \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} g_1[n]\, g_1[n+m]}_{\hat{R}_{g_1}[m]}$$

$$= T_s \sum_{m=-M}^{M} R_{xy}[m]\, g_2[m] e^{-jwm}\, \hat{R}_{g_1}[m]$$

$$= \boxed{T_s \left(S_{xy}(w) * G_2(w) * S_{g_1}(w) \right)}$$

ب)

$$\hat{S}_{xy}(w) = \frac{1}{M} X_w(e^{jw}) Y_w^*(e^{jw})$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_w[n]\, X_w[k] e^{-jw(n-k)}$$

$$\to E[\hat{S}_{xy}(w)] = \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E[X_w[n] Y_w[k]] e^{-jw(n-k)}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{xy}[n-k]\, w[n]\, w[k] e^{-jw(n-k)}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{xy}[m] \times \frac{1}{M} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w[k]\, w[k+m]\, e^{-jwm}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{xy}[m] \times R_w[m]\, e^{-jwm} = S_x(w) * S_y(w)$$

$$\to \text{Bias} = S_x(w) * S_y(w) - S_{xy}(w)$$

سؤال 4-

الف)

$$R_x[m] = E[x[n]x[n+m]] = E[s[n]s[n+m]] + E[\cancel{s[n]v[n+m]}]^{0} + E[\cancel{s[n+m]v[n]}]^{0}$$
$$+ E[v[n]v[n+m]]$$

$$E[s[n]s[n+m]] = A^2 E[\cos(w_0 n+\varphi)\cos(w_0(n+m)+\varphi)] = \frac{A^2}{2}\cos(w_0 m)$$

$$\rightarrow R_x[m] = \frac{A^2}{2}\cos(w_0 m) + \sigma_v^2\delta[m] \rightarrow \boxed{S_x(w) = \frac{A^2}{2}\pi(\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)) + \sigma_v^2}$$

ب)

$$\begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[1] & R_x[2] \\ R_x[-1] & R_x[0] & R_x[1] \\ R_x[-2] & R_x[-1] & R_x[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0.8 & 0.64 \\ 0.8 & 2 & 0.8 \\ 0.64 & 0.8 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{ویژه}]{\text{مقادیر}} \begin{matrix} \lambda_1 = 1.144 \rightarrow a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.87 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = 1.36 \\ \lambda_3 = 3.496 \end{matrix}$$

$$1 + \sum_{m=1}^{2} a_m z^{-m} = 0 \rightarrow 1 - 1.87z^{-1} + z^{-2} = 0 \rightarrow z = e^{\pm j0.36}$$

$$\rightarrow \boxed{w_0 = 0.36}, \quad R_x[1] = \frac{A_1^2}{2}\cos(0.36) = 0.8 \rightarrow \boxed{A_1^2 = 1.7}$$

$$\rightarrow \boxed{S_x(w) = 0.85\pi(\delta(w-0.36) + \delta(w+0.36)) + 1.14}$$

$\rightarrow$

پ)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{A^2}{2}+\sigma_v^2=2\\&\frac{A^2}{2}\cos(w_0)=0.8\\&\frac{A^2}{2}\cos(2w_0)=0.64\end{aligned}\right\}\to\frac{0.8}{\cos w_0}=\frac{0.64}{2\cos^2(w_0)-1}\to 2\cos^2 w_0-1=0.8\cos w_0\to\cos w_0=\begin{matrix}0.935\ \checkmark\ |w|<\pi\\-0.535\ \times\end{matrix}$$

$$\to w_0=0.36\to A_1^2=1.71\to\sigma_v^2=1.14$$

$$\to R_x[m]=1.144\,\delta[m]+0.856\cos(0.36\,n)$$

$$\to S_x(w)=0.856\,\pi\big(\delta(w-0.36)+\delta(w+0.36)\big)+1.144$$

ت)

$$R_x=\begin{bmatrix}2&0.8&0.64\\0.8&2&0.8\\0.64&0.8&2\end{bmatrix}\qquad w_p=2\pi\times\frac{22.5}{400}=\frac{9\pi}{80}=0.353$$

$$\to e_p=\begin{bmatrix}1\\e^{jw_p}\\e^{j2w_p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\e^{j0.353}\\e^{j0.706}\end{bmatrix}$$

$$h_{opt}=\frac{R_x^{-1}e_p}{e_p^H R_x^{-1}e_p}\to S_y(w_p)=\frac{1}{\underbrace{e_p^H R_x^{-1}e_p}}=\boxed{1.0356}$$

$$\begin{bmatrix}1&e^{-j0.353}&e^{-j0.706}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.62&-0.2&0.12\\-0.2&0.66&-0.2\\-0.12&-0.2&0.62\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\e^{j0.353}\\e^{j0.706}\end{bmatrix}$$

$$=0.9656$$

سؤال ۵-

الف) استفاده از روش PMD برای تشخیص پیک‌ها مناسب است.
همچنین می‌توانیم از مدل AR هم استفاده کنیم (چون قطب‌های نزدیک دایره واحد قله تیز درست می‌کنند.

ب)

خط چین آبی اگر روش‌های غیر پارامتریک باشد ← periodogram
اگر روش پارامتریک باشد ← AR
چون قله تیز دارد

خط چین مشکی ← احتمالاً welch است چون خیلی نرم شده

Made with Goodnotes

سؤال 6 -

الف)

$$x[n] = s_1[n] + s_2[n] + s_3[n] + z[n]$$

$$s_1[n] = A_1\cos(w_1 n + \varphi_1) + A_2\cos(w_2 n + \varphi_2)$$

$$s_2[n] + a s_2[n-1] = u[n]$$

$$s_3[n] = v[n] - a v[n-1]$$

مستقل هستند

$$\longrightarrow R_x[n] = R_{s_1}[n] + R_{s_2}[n] + R_{s_3}[n] + R_z[n]$$

$$* \; R_{s_1}(n) = \frac{A_1^2}{2}\cos(w_1 n) + \frac{A_2^2}{2}\cos(w_2 n)$$

$$* \; R_{s_2} \longrightarrow S_2(z) + a z^{-1} S_2(z) = U(z) \longrightarrow H(z) = \frac{1}{1 + a z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{AR(1)} R_{s_2}[n] = \frac{\sigma_u^2}{1-a^2}(-a)^{|n|}$$

$$* \; R_{s_3}[n] = R_v[n] + a^2 R_v[n] - a R_v[m-1] - a R_v[m+1]$$

$$= (1+a^2)\delta[n] - a\left(\delta[n-1] + \delta[n+1]\right)$$

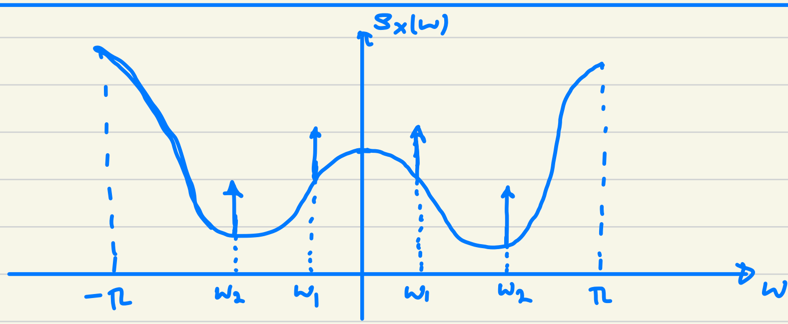
$$* \; R_z[n] = \sigma_z^2 \delta[n]$$

$$\longrightarrow \boxed{R_x[n] = \frac{A_1^2}{2}\cos(w_1 n) + \frac{A_2^2}{2}\cos(w_2 n) + \frac{\sigma_u^2}{1-a^2}(-a)^{|n|} + \sigma_v^2(1+a^2)\delta[n] - \sigma_v^2 a\left(\delta[n-1] + \delta[n+1]\right) + \sigma_z^2\delta[n]}$$

ب)

$$S_X(\omega) = \mathcal{F}\{R_X[n]\}$$

$$\boxed{S_X(\omega) = \frac{A_1^2}{2}\pi\left(\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)\right) + \frac{A_2^2}{2}\pi\left(\delta(\omega-\omega_2)+\delta(\omega+\omega_2)\right) + \frac{\sigma_u^2}{1+a^2-2a\cos\omega} + \sigma_v^2(1+a^2) - 2a\sigma_v^2\cos\omega + \sigma_z^2}$$



پ)

8 متغیر مجهول داریم یعنی $A_1, A_2, \omega_1, \omega_2, a, \sigma_u^2, \sigma_v^2, \sigma_z^2$ در نتیجه نیاز به 8 مقدار R_X داریم.

روش کار هم به این صورت هست که دونه دونه R_{S_1} , R_{S_2} , R_{S_3} , R_Z را محاسبه می‌کنیم.

R_{S_1} ← 4 نقطه ، R_{S_2} ← 2 نقطه ، R_{S_3} ← 1 نقطه ، R_Z ← 1 نقطه

ت)

خیر زیرا در روش BT در ابتدا این فرض را داشتیم که $X[n]$ محدود است بین 0 تا M و بقیه جاها صفر است ولی در این جا می‌بینیم که $X[n]$ میرا نیست و برای همین این روش مناسب نیست. در واقع کورلیشن محدود نیست به دلیل وجود ترم کسینوسی و فرآیند AR.

ث) باز هم روش خوبی نیست چون اینجا هم فرض $X[n]$ محدود را می خواهیم برای فوریه گرفتن که برقرار نیست، همچنین واریانس هم افزایش پیدا خواهد کرد.

ج) اگر $a=0$ باشد:

$$X[n] = \underbrace{A_1 \cos(\omega_1 n + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 n + \varphi_2)}_{\text{مجموع سینوسی های حقیقی با فاز تصادفی}} + \underbrace{U[n] + V[n] + Z[n]}_{\text{نویز سفید جمع شوند}}$$

روش PHD مناسب تر است.

چ) اگر $A_1 = A_2 = 0$ باشد:

$$X[n] = S_2[n] + S_3[n] + Z[n]$$

چون کلا سینوسی نداریم

به نظر هیچ کدام خیلی بهتر از دیگری نیست ولی خب شاید روش Prony مناسب تر باشد چون در این جا ما یک معادله تفاضلی خطی داریم.

ح) فرق خاصی نمی کند و باید a را داشته باشیم

سوال 7 -

$$X_1[n] - 0.1 X_1[n] = U_1[n] \rightarrow \frac{X_1(z)}{U_1(z)} = \frac{1}{1-0.1z^{-1}}$$

$$X_2[n] = U_2[n] + 0.1\, U_2[n-1] \rightarrow \frac{X_2(z)}{U_2(z)} = 1+0.1z^{-1}$$

$X[n] = X_1[n] + X_2[n] \rightarrow$ این فرآیند جمع یک AR(1) و MA(1) می باشد

$$Y_1[n] - 0.1 Y_1[n-1] = U[n] \rightarrow \frac{Y_1(z)}{U(z)} = \frac{1}{1-0.1z^{-1}}$$

$$Y_2[n] = U[n] + 0.1\, U[n-1] \rightarrow \frac{Y_2(z)}{U(z)} = 1+0.1z^{-1}$$

$$Y[n] = Y_1[n] + Y_2[n] \rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1-0.1z^{-1}} + 1+0.1z^{-1} = \frac{2-0.01z^{-2}}{1-0.1z^{-1}}$$

یک فرآیند ARMA(1,2)

* با بررسی طیف پایین گذر تیز مربوط به $Y[n]$ که یک فرآیند ARMA می باشد هست.

چون در فرآیند ARMA قله ها و دره های تیز به دلیل قطب و صفرهای نزدیک

دایره واحد داریم.

سوال 8 -

الف) برای S_x بهتر است. چون S_y پیچیده تر است و مولفه $\cos 3\omega$ دارد.

ب) برای S_y بهتر است، چون MA است.

پ) روش Prony مناسب تر است زیرا جمع چند سینوسی است.

ت) مربوط به $X[n]$ است زیر فرآیند ARMA است.