۱- در یک مسئله طبقه‌بندی دو کلاسی با یک ویژگی، با فرض توزیع گوسی برای این ویژگی در دو کلاس با متوسط‌های صفر و یک و واریانس‌های 0.5 و 0.25، با روش مینیمم کردن ریسک، مرز تصمیم‌گیری را در هریک از حالات زیر بدست آورید:

الف) $P(\omega_1)=P(\omega_2), \quad \lambda=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ب) $P(\omega_1)=P(\omega_2), \quad \lambda=\begin{pmatrix}0 & 0.25\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

پ) $P(\omega_1)=0.75P(\omega_2), \quad \lambda=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ت) $P(\omega_1)=3P(\omega_2), \quad \lambda=\begin{pmatrix}0 & 0.25\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

۲- یک مسئله طبقه‌بندی سه کلاس هم‌احتمال دو بعدی با بردارهای ویژگی با توزیع گوسی با متوسط‌ها و کوواریانس زیر را داریم:

$$\underline{\mu}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \underline{\mu}_2=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}, \underline{\mu}_3=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}, \Sigma=\begin{pmatrix}2 & b\\ b & 2\end{pmatrix}$$

الف) فرض کنید $b=1$. معادله مرزهای تصمیم‌گیری بیز را بدست آورید و در صفحه مختصات به‌طور دقیق رسم کرده و برچسب هر ناحیه را تعیین کنید.

ب) فرض کنید $b=0$. بدون هیچ‌گونه محاسبه‌ای و با استدلال معادله مرزهای تصمیم‌گیری بیز را نوشته و در صفحه مختصات به‌طور دقیق رسم کرده و برچسب هر ناحیه را تعیین کنید.

۳- یک مسئله طبقه‌بندی دو کلاسی دو بعدی، احتمال وقوع کلاس اول، ۳ برابر احتمال وقوع کلاس دوم است. بردارهای ویژگی با توزیع گوسی با متوسط‌ها و کوواریانس زیر را داریم: $\underline{\mu}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \underline{\mu}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \Sigma=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

الف) معادله مرز تصمیم‌گیری بیز را بدست آورید.

ب) بر اساس معیار مینیمم کردن آنتروپی، بعد فضا را به ۱ کاهش داده و مرز تصمیم‌گیری را بدست آورید. آیا تفکیک‌پذیری حفظ می‌شود؟

پ) بر اساس معیار PCA، بعد فضا را به ۱ کاهش داده و مرز تصمیم‌گیری را بدست آورید. آیا تفکیک‌پذیری حفظ می‌شود؟

ت) قسمت ب را با استفاده از تابع تفکیک خطی فیشر تکرار کنید. آیا تفکیک‌پذیری حفظ می‌شود؟

ث) با معیار FDR کدامیک از دو ویژگی بهتر است؟

ج) مشاهدات $\underline{\beta}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ را با هر یک از حالت‌های الف و ب و پ و ت جداگانه طبقه‌بندی کنید. کدام جواب منطقی به‌نظر می‌رسد؟

۴- در یک مسئله طبقه‌بندی دو کلاسی:

الف) اگر $Sens$ ۱۰۰٪ باشد، حدکثر و حداقل مقدار صحت چقدر است؟ ب) اگر $Spec$ ۱۰۰٪ باشد، حدکثر و حداقل مقدار صحت چقدر است؟ پ) اگر PP ۱۰۰٪ با شد، حدکثر و حداقل مقدار صحت چقدر ا ست؟ ت) آیا دو پارامتر از سه پارمتر فوق اگر ۱۰۰٪ با شد، مقدار صحت حتما ۱۰۰٪ است؟

۵- یک مسئله طبقه‌بندی دو کلاسی دو بعدی با احتمال وقوع یکسان دو کلاس با بردارهای ویژگی با توزیع گوسی با متوسط‌های $\underline{\mu}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \underline{\mu}_2=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ را داریم. در هریک از حالت‌های زیر معادله مرز تصمیم‌گیری بیز را بدست آورید و رسم کنید.

$$a)\Sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \Sigma_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \quad b)\Sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \Sigma_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad c)\Sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \Sigma_2=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad d)\Sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \Sigma_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

۶- یک مسئله طبقه‌بندی دو کلاسی یک بعدی با احتمال وقوع یکسان، یک کلاس با توزیع گوسی با متوسط صفر و ورایانس واحد می‌باشد. کلاس دوم دارای توزیع یکنواخت بین ۵- تا ۲۰ می‌باشد. مرز تصمیم‌گیری بیز را بدست آورید.