

۱- الف) برای سیگنال پیوسته $x(t) = 3u(t+1) - 3u(t-5)$ ، چگالی طیف انرژی را یکبار با استفاده از تعریف و یکبار با استفاده از تابع خودهمبستگی این سیگنال بدست آورید.

ب) برای سیگنال گسسته $x[n] = 3u[n+1] - 4u[n-2] + 2u[n-4]$ ، چگالی طیف توان را با استفاده از تابع خودهمبستگی این سیگنال بدست آورید.

۲- سیگنال EEG یک بیمار از یک فیلتر پائین گذر عبور کرده و سپس یک بار با پریود T_{s1} نمونه برداری شده و سیگنال $x_1[n] = x(nT_{s1})$ ساخته می شود یک بار دیگر با پریود T_{s2} نمونه برداری شده و سیگنال $x_2[n] = x(nT_{s2})$ ساخته می شود. یک قطعه N_1 نقطه ای از سیگنال $x_1[n]$ را انتخاب کرده و DFT N_1 نقطه ای آن را $X_1[k]$ می نامیم. هم چنین یک قطعه N_2 نقطه ای از سیگنال $x_2[n]$ را انتخاب کرده و DFT N_2 آن را $X_2[l]$ می نامیم.

الف) حداقل مقدار N_1 برحسب f_{s1} چقدر باشد تا باند آلفا (۸ تا ۱۳ هرتز) با حداقل ۷ نمونه در $X_1[k]$ مشخص شده باشد؟
ب) فرض کنید: $N_1 = 1200$, $N_2 = 1000$, $f_{s1} = 400Hz$, $f_{s2} = 600Hz$. اگر $X_1[54] = \sqrt{2} - j$ ، آنگاه مقدار $X_1[k]$ و $X_2[l]$ در چه نقاطی معلوم است و این مقدار چقدر است؟

پ) فرض کنید: $N_1 = 1200$, $N_2 = 1000$, $f_{s1} = 400Hz$, $f_{s2} = 600Hz$. اگر $X_1[1050] = \sqrt{2} - j$ ، مؤلفه های سیگنال EEG در چه فرکانس هایی (بر حسب هرتز) معلوم است؟ مقدار طیف در این فرکانس ها را نیز تعیین کنید.

ت) فرض کنید: $N_1 = 1200$, $N_2 = 1000$, $f_{s1} = 400Hz$, $f_{s2} = 600Hz$. مقادیر k در $X_1[k]$ و مقادیر l در $X_2[l]$ متناظر با باند دلتا (۰.۲۵ تا ۴ هرتز) چقدر است؟

ث) رابطه N_1 و N_2 را چنان تعیین کنید که $\angle X_1[400] = -\angle X_2[500]$.

۳- الف) سیگنال $y[n]$ یک قطعه ۳۰ نقطه ای از سیگنال $x[n]$ است که بوسیله یک پنجره مستطیلی ۳۰ نقطه ای بدست آمده است و داریم:
 $|Y[k]| = a\delta[k-4] + 3a\delta[k-12] + 3a\delta[k-18] + a\delta[k-26]$. قسمت های مختلف این مسئله مستقل از هم هستند. کدامیک از سیگنال های زیر می تواند $x[n]$ باشد؟ چرا؟

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right) + 3\sin\left(\frac{12\pi}{15}n\right), \quad x_2[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{15}n\right) + 3\cos\left(\frac{8\pi}{15}n\right), \quad x_3[n] = 3\cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{15}n\right)$$

$$x_4[n] = 3\cos\left(\frac{2\pi}{15}n\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{15}n\right), \quad x_5[n] = \cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right) + 3\cos\left(\frac{3\pi}{15}n\right), \quad x_6[n] = 3\cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right) + 9\cos\left(\frac{12\pi}{15}n\right)$$

ب) برای سیگنال $x_c(t) = b\cos(2\pi f_1 t + \alpha) + c\sin(100\pi t + \beta)$ مقدار $f_1 > 50Hz$ را طوری تعیین کنید که در DFT N نقطه ای بدست آمده از یک سیگنال N نقطه ای (که با پنجره گذاری روی $f_s = \frac{1}{T_s} = 150Hz$ ، $x[n] = x_c(nT_s)$ بدست آمده است)، فقط یک

سینوسی موجود باشد (برای هر مقدار طول پنجره).

۴- سیگنال $y[n]$ یک قطعه ۳۰ نقطه ای از سیگنال $x[n]$ است که بوسیله یک پنجره مستطیلی ۳۰ نقطه ای بدست آمده است و داریم:
 $|Y[k]| = a\delta[k-3] + b\delta[k-11] + b\delta[k-19] + a\delta[k-27]$.

الف) یک فرمول برای سیگنال $x[n]$ پیشنهاد کنید.

ب) اگر به جای پنجره مستطیلی از پنجره های دیگر استفاده شده بود، آیا باز هم در DFT ۳۰ نقطه ای فقط ۴ مقدار غیر صفر داشتیم؟ چرا؟

پ) اگر $x[n]$ با نمونه برداری از $x_c(t)$ با فرکانس نمونه بردای $f_s = 180Hz$ بدست آمده باشد، یک فرمول برای $x_c(t)$ پیشنهاد کنید.

۵- مسئله ۲۴ از فصل ۱۰ مرجع ۱ (چاپ ۲۰۱۰) را حل کنید.

۶- دو متغیر تصادفی X و Y با تابع چگالی احتمال توأم زیر را داریم.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kyx & 0 \leq x \leq y, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) k را بدست آورید.

ب) توابع چگالی احتمال کناری هر یک را بدست آورید.

پ) متوسط، واریانس، چولگی و پخی هر یک از دو متغیر تصادفی و همبستگی، کوواریانس و ضریب همبستگی بین آنها را بدست آورید.

ت) توابع چگالی احتمال کناری شرطی هر یک را بدست آورید و سپس میانگین و واریانس آنها را حساب کنید.

ث) بهترین تخمین X بدون اطلاع از Y با معیار محتملترین چیست؟

ج) بهترین تخمین X بدون اطلاع از Y با معیار MMSE چیست و متوسط مربع خطای آن چقدر است؟

چ) بهترین تخمین X برحسب Y با معیار محتملترین چیست؟

ح) بهترین تخمین X برحسب Y با معیار MMSE چیست و متوسط مربع خطای آن چقدر است؟

خ) بهترین تخمین خطی X برحسب Y با معیار MMSE چیست و متوسط مربع خطای آن چقدر است؟

د) بهترین تخمین آفین X برحسب Y با معیار MMSE چیست و متوسط مربع خطای آن چقدر است؟

۷- یک ماشین شانس به این صورت طراحی کرده‌ایم که در هر بار بازی یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال $N(0, \sigma^2)$ را تولید می‌کند و متغیرهای تصادفی تولید شده در بازی‌های مکرر را با توزیع یکسان و مستقل از هم فرض می‌کنیم. به ازای بازی شماره i ، اگر متغیر تصادفی تولید شده را X_i بنامیم، آنگاه اگر X_i مثبت باشد فرد به همان اندازه پول دریافت می‌کند و در صورتی که منفی باشد به اندازه $|X_i|$ پرداخت می‌کند.

الف) پس از n بار بازی، انحراف معیار و متوسط خالص دریافتی هر فرد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه پس از n بار بازی فرد بیش از $2\sqrt{n}\sigma$ بدست آورد یا ببازد، چقدر است؟