تمرین سری 3 درس BSP - رادین خیام - 99101579

سؤال 1-

الف)

برای تخمین گر اول:

$$E[\hat{m}_s^1] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_1[n]\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E\left[Y[n]S[n] + V[n]\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E\left[Y[n]S[n]\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \overset{2}{\cancel{E[Y[n]]}}\,\overset{m_s}{\cancel{E[S[n]]}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{N}} \times \cancel{N} \times 2m_s = 2m_s \longrightarrow B_{\hat{m}_s^1} = 2m_s - m_s = \boxed{m_s}$$

$$E\left[(\hat{m}_s^1)^2\right] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_1[n]\,\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X_1[m]\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} E\left[X_1[n]X_1[m]\right]$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} E\left[Y[n]S[n]Y[m]S[m]\right] + \overset{0}{\cancel{E\left[V[n]\left(Y[n]S[n] + Y[m]S[m]\right)\right]}} + E\left[V[n]V[m]\right]$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} \underbrace{E\left[Y[n]Y[m]\right]}_{R_Y[n-m]}\underbrace{E\left[S[n]S[m]\right]}_{R_S[n-m]} + \underbrace{E\left[V[n]V[m]\right]}_{R_V[n-m]}$$

نویز سفید با میانگین 0 و واریانس 4

$$* \; Y[n] = 2 + N[n] \rightarrow R_Y[m] = E\left[Y[n]Y[n+m]\right] = E\left[(2+N[n])(2+N[n+m])\right] = E\left[4 + 2N[n] + 2N[n+m] + N[n]N[n+m]\right]$$

$$\rightarrow R_Y[m] = 4 + R_N[m] = \boxed{4 + 4\delta[m]}$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} (4 + 4\delta[n-m])R_S[n-m] + \sigma_V^2\delta[n-m] = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} 4R_S[n-m] + \frac{1}{N^2} \times N\left(4R_S[0] + \sigma_V^2\right)$$

$$= \frac{4}{N}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(1 - \frac{|k|}{M}\right)R_S[k] + \frac{1}{N}\left(8(\sigma_s^2 + m_s^2) + \sigma_V^2\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma_{\hat{m}_s^1}^2 = \frac{4}{N}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(1 - \frac{|k|}{M}\right)R_S[k] + \frac{1}{N}\left(8(\sigma_s^2 + m_s^2) + \sigma_V^2\right) - 4m_s^2}$$

برای تخمین گر دوم :

$$E[\hat{m}_s^2] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_2[n]\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E\left[a s[n] + U[n]\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E[a]\,E[s[n]] + E[\cancel{U[n]}]^{0}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 2m_s = 2m_s \longrightarrow B_{\hat{m}_s^2} = 2m_s - m_s = \boxed{m_s}$$

$$E\left[(\hat{m}_s^2)^2\right] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_2[n]\,\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X_2[m]\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} E\left[X_2[n]X_2[m]\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\left(a s[n] + U[n]\right)\left(a s[m] + U[m]\right)$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} \overset{5+4}{\cancel{E[a^2]}}\,\underbrace{E[s[n]s[m]]}_{R_s[n-m]} + \underbrace{E[U[n]U[m]]}_{R_U[n-m]} + E\left[a\left(s[n]U[m] + s[m]U[n]\right)\right]$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} 9R_s[n-m] + \sigma_u^2\,\delta[n-m] + E[a]\left(E[s[n]]\,E[\cancel{U[m]}]^{0} + E[s[m]]\,E[\cancel{U[n]}]^{0}\right)$$

$$= \frac{\sigma_u^2}{N} + \frac{9}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} R_s[n-m] = \frac{\sigma_u^2}{N} + \frac{9}{N}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)R_s[k]$$

$$\longrightarrow \sigma^2_{\hat{m}_s^2} = \boxed{\frac{\sigma_u^2}{N} + \frac{9}{N}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)R_s[k] - 4m_s^2}$$

ب)

بایاس هر دو تخمین گر یکسان می باشد و باید واریانس آن ها را باهم مقایسه کنیم:

$$\sigma^2_{\hat{m}_s^1} = \frac{4}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} R_s[n-m] + \frac{1}{N}\left(8(\sigma_s^2 + m_s^2) + \sigma_v^2\right) - 4m_s^2$$

$$\sigma^2_{\hat{m}_s^2} = \frac{9}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} R_s[n-m] + \frac{\sigma_u^2}{N} - 4m_s^2$$

$$\frac{9}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} R_s(n-m) > \frac{9}{N}R_s[0] > \frac{8}{N}R_s[0]$$

هم نمی شود به طور دقیق گفت کدام یک کوچکتر است.

چون میانگین $2m_s$ هست باید آن را تقسیم بر 2 کنیم که بایاس صفر شود.

پ)

تخمین‌گر اول:

$$E\left[\hat{R}_S^1[m]\right] = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} E\left[X_1[n]\,X_1[n+m]\right] = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1}\left(Y[n]S[n]+V[n]\right)\left(Y[n+m]S[n+m]+V[n+m]\right)$$

$$= \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} E\left[Y[n]Y[n+m]\right]E\left[S[n]S[n+m]\right] + \overset{0}{E\left[V[n]\cancel{Y[n+m]}S[n+m]\right]} + \overset{0}{E\left[\cancel{V[n+m]}Y[n]S[n]\right]} + E\left[V[n]V[n+m]\right]$$

$$= \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} R_Y[m]R_S[m] + R_V[m] = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1}\left(4+4\delta[m]\right)R_S[m] + \sigma_V^2\,\delta[m]$$

$$\longrightarrow E\left[\hat{R}_S^1[m]\right] = \begin{cases} 8(\sigma_S^2+m_S^2)+\sigma_V^2, & m=0 \\ 4R_S[m] & m\neq 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \boxed{B_{\hat{R}_S^1} = \begin{cases} 7R_S[0]+\sigma_V^2, & m=0 \\ 3R_S[m] & m\neq 0 \end{cases}}$$

تخمین‌گر دوم:

$$E\left[\hat{R}_S^2[m]\right] = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} E\left[X_2[n]\,X_2[n+m]\right]$$

$$= \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} E[a^2]\,E\left[S[n]S[n+m]\right] + E\left[U[n]U[n+m]\right] = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} 9R_S[m] + R_U[m]$$

$$= \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} 9R_S[m] + \sigma_U^2\,\delta[m] = 9R_S[m] + \sigma_U^2\,\delta[m] \longrightarrow \boxed{B_{\hat{R}_S^2} = \begin{cases} 8R_S[m]+\sigma_U^2 & m=0 \\ 8R_S[m] & m\neq 0 \end{cases}}$$

تخمین‌گر سوم:

$$E\left[\hat{R}_S^3[m]\right] = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} E\left[X_1[n]\,X_2[n+m]\right] = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} E\left[\left(Y[n]S[n]+V[n]\right)\left(aS[n+m]+U[n+m]\right)\right]$$

$$\frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} E[a]\,E\left[Y[n]\right]R_S[m] = 4R_S[m] \longrightarrow \boxed{B_{\hat{R}_S^3} = 3R_S[m]}$$

هر سه بایاس دارند برای تمام مقادیر m، سومی را می‌توانیم با اعمال ضریب $\frac{1}{4}$ بدون بایاس کنیم. دومی را هم به ازای $m\neq 0$ می‌توانیم ضریب $\frac{1}{9}$ و در اول و حالت $m\neq 0$ با اعمال ضریب $\frac{1}{4}$ بایاس را حذف کنیم.

ت)

$$\boxed{\hat{\sigma}_s^2 = \frac{1}{4N}\sum_{n=0}^{N-1} X_1[n]\,X_2[n] - m_s^2}$$

$$\to E[\hat{\sigma}_s^2] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E[X_1[n]X_2[n]] - m_s^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E[a]E[Y]E[s[n]^2] - m_s^2$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}N}\sum_{n=0}^{N-1}\cancel{4}(\sigma_s^2+m_s^2) - m_s^2 = \sigma_s^2 + m_s^2 - m_s^2 = \sigma_s^2 \to \boxed{B_{\hat{\sigma}_s^2} = 0}$$

سوال 2 -

الف)

$$E[\hat{R}_1[m]] = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} E[X[n]X[n+m]] = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} E[s_1[n]s_1[n+m]] + E[v[n]v[n+m]]$$

$$= \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} R_1[m] + R_v[m] = R_1[m] + \sigma_v^2\,\delta[m] \to \boxed{B_{\hat{R}_1} = \sigma_v^2\,\delta[m]}$$ → فقط به ازای $m=0$ بایاس دارد

ب)

$$\hat{m}_2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} Y[n] - X[n]$$

$$\to E[\hat{m}_2] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E[s_2[n]] + \overset{0}{\cancel{E[w[n]]}} - \overset{0}{\cancel{E[v[n]]}} = m_2 \to B_{\hat{m}_2} = 0$$

$$E[\hat{m}_2^2] = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} E[s_2[n]s_2[m]] + E[w[n]w[m]] + E[v[n]v[m]]$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} R_2[n-m] + \sigma_w^2\,\delta[n-m] + \sigma_v^2\,\delta[n-m] = \frac{2\sigma_v^2}{N} + \frac{1}{N}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|k|}{N}\right)R_2[k]$$

$$\to \boxed{\sigma_{\hat{m}_2}^2 = \frac{2\sigma_v^2}{N} + \frac{1}{N}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|k|}{N}\right)R_2[k] - m_2^2}$$

پ)

$$R_2[m] = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1}\left(Y[n]-X[n]\right)\left(Y[n+m]-X[n+m]\right)$$

$$E[R_2[m]] = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1}E\Big(\left(s_2[n]+w[n]-v[n]\right)\left(s_2[n+m]+w[n+m]-v[n+m]\right)\Big)$$

$$= \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1}E[s_2[n]s_2[n+m]]+E[w[n]w[n+m]]+E[v[n]v[n+m]] = R_2[m]+2\sigma_v^2\delta[m]$$

$$\rightarrow B_{R_2} = 2\sigma_v^2\delta[m] \longrightarrow$$ فقط تو صفر بایاس دارد

برای R_1 هم همان تخمین گر قسمت الف تنها در مبدأ بایاس داشت.

سؤال ۳ -

الف)

$$\hat{m}_s^1 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_1[n]$$

$$\longrightarrow E[\hat{m}_s^1] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E[S[n]+V[n]] = m_s \longrightarrow B_{\hat{m}_s^1} = 0$$

$$\hat{m}_s^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_2[n] \longrightarrow E[\hat{m}_s^2] = m_s \longrightarrow B_{\hat{m}_s^2} = 0$$

بایاس ها برابر است حال به سراغ واریانس ها می رویم:

$$E[(\hat{m}_s^1)^2] = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} E[X_1[n]X_1[m]] = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} E[S[n]S[m]] + E[V[n]V[m]]$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} R_s[n-m] + R_v[n-m] = \frac{\sigma_v^2}{N} + \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} R_s[n-m]$$

$$\longrightarrow \sigma^2_{\hat{m}_s^1} = \frac{\sigma_v^2}{N} + \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} R_s[n-m] - m_s^2$$

به همین ترتیب برای تخمین گر دوم هم خواهیم داشت:

$$\sigma^2_{\hat{m}_s^2} = \frac{\sigma_u^2}{N} + \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} R_s[n-m] - m_s \longrightarrow$$

هر آن تخمین گری بهتر است که واریانس نویزش کمتر باشد.

ب)

$$\hat{\sigma}_s^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} (X_1[n])^2 - \hat{m}_s^{1\,2} \longrightarrow E[\sigma_s^2] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E[X_1[n]^2] - E[(\hat{m}_s^1)^2]$$

$$= \sigma_v^2 + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(\sigma_s^2 + m_s^2) - \frac{\sigma_v^2}{N} - \frac{1}{N}\sum_{K=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|K|}{N}\right)R_s[K]$$

$$= \sigma_v^2 + \sigma_s^2 + m_s^2 - \frac{\sigma_v^2}{N} - \frac{1}{N}\sum_{K=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|K|}{N}\right)R_s[K]$$

$$\longrightarrow B_{\hat{\sigma}_s^2} = m_s^2 + \frac{N-1}{N}\sigma_v^2 - \frac{1}{N}\sum_{K=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|K|}{N}\right)R_s[K]$$

(پ

$$E\left[\hat{R}_s^1[m]\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} E\left[x_2[n]\,x_2[n+m]\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} E\left[\left(s[n]+v[n]\right)\left(s[n+m]+v[n+m]\right)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} E\left[s[n]\,s[n+m]\right] + E\left[v[n]\,v[n+m]\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} R_s[m] + R_v[m] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} R_s[m] + \sigma_v^2\,\delta[m]$$

$$= \frac{N-m}{N} R_s[m] + \frac{N-m}{N}\sigma_v^2\,\delta[m] \rightarrow B_{\hat{R}_s^1} = \frac{N-m}{N}\sigma_v^2\,\delta[m] - \frac{m}{N} R_s[m]$$

$$E\left[\hat{R}_s^2[m]\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} E\left[x_1[n]\,x_2[n+m]\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} E\left[\left(s[n]+v[n]\right)\left(s[n+m]+v[n+m]\right)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} E\left[s[n]\,s[n+m]\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} R_s[m] = \frac{N-m}{N} R_s[m] \rightarrow B_{\hat{R}_s^2} = \frac{-m}{N} R_s[m]$$

برای بدون بایاس کردن تخمین گرها :

$$\boxed{\hat{R}_s^{2\prime} = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} x_1[n]\,x_2[n+m]}$$

برای اولی هم اگر واریانس نویز را داشته باشیم می توانیم بنویسیم :

$$\hat{R}_s^{1\prime} = \frac{1}{N-m}\left(\left(\sum_{n=0}^{N-m-1} x_2[n]\,x_2[n+m]\right) - \sigma_v^2\,\delta[m]\right)$$

ت)

بایاس و واریانس دو تخمین گر اول را در قسمت الف محاسبه کردیم که به این صورت شد:

$$B_{\hat{m}_s^1} = 0, \quad B_{\hat{m}_s^2} = 0, \quad \sigma^2_{\hat{m}_s^1} = \frac{\sigma_v^2}{N} + \frac{1}{N}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|k|}{N}\right)R_s[k] - m_s^2$$

$$\sigma^2_{\hat{m}_s^2} = \frac{\sigma_u^2}{N} + \frac{1}{N}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|k|}{N}\right)R_s[k] \qquad m_s^2$$

برای تخمین گر سوم هم خواهیم داشت:

$$E[\hat{m}_s^3] = \frac{1}{3}(m_s + 2m_s) = m_s \longrightarrow B_{\hat{m}_s^2} = 0$$

$$\sigma^2_{\hat{m}_s^3} = E[(\hat{m}_s^3)^2] - E[m_s^3]^2 = \frac{1}{9}\left(\sigma^2_{\hat{m}_s^1} + 4\sigma^2_{\hat{m}_s^2} + \frac{4}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}R_s[n-m]\right) - m_s^2$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{4\sigma_u^2}{N} + \frac{\sigma_v^2}{N} + \frac{9}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}R_s[n-m]\right) = \frac{4}{9N}\sigma_u^2 + \frac{1}{9N}\sigma_v^2 + \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}R_s[n-m] - m_s^2$$

اگر فرض کنیم که $\sigma_u^2 > \sigma_v^2$ تخمین گر اول از تخمین گر دوم بهتر است ، اما درباره تخمین گر سوم نمی توان نظر قطعی ای داد.

سئوال 4-

$$\hat{m}_s = \frac{1}{6}(1+3+1-2-1+1) = \boxed{0.5}$$

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{6}(1+9+1+4+1+1) - 0.5^2 = \frac{17}{6} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{31}{12}}$$

$$R_s[m] = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5-m} s[n]\,s[n+m]$$

$$\rightarrow R_s[0] = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}(s[n])^2 = \frac{17}{6}$$

$$R_s[1] = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{4}(s[n]\,s[n+1]) = \frac{1}{6}(3+3-2+2-1) = \frac{5}{6}$$

$$R_s[2] = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{3}(s[n]\,s[n+2]) = \frac{1}{6}(1-6-1-2) = -\frac{8}{6}$$

$$R_s[3] = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{2}(s[n]\,s[n+3]) = \frac{1}{6}(-2-3+1) = \frac{-4}{6}$$

$$R_s[4] = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{1}(s[n]\,s[n+4]) = \frac{1}{6}(-1+3) = \frac{2}{6}$$

$$R_s[5] = \frac{1}{6}(1\times1) = \frac{1}{6}$$

سوال ۵ -

الف)

$$E[\hat{R}'_{12}[m]] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} E[(S_1[n]+U[n])(S_2[n+m]+V[n+m])]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} E[S_1[n]S_2[n+m]] = \frac{N-m}{N} R_{12}[m] \longrightarrow B_{\hat{R}'_{12}} = \frac{-m}{N} R_{12}[m]$$

ب)

برای بدون بایاس کردن تخمین‌گر می‌توانیم اینکار را بکنیم:

$$\hat{R}'_{12} = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} X[n]Y[n+m]$$

پ)

$$\sigma_{12} = E[S_1[n]S_2[n]] - E[S_1[n]]E[S_2[n]] = R_{12}[0] - m_1 m_2$$

ت)

فرمول به این صورت هست که در ترم اول $R_{12}[0]$ را تخمین می‌زند و در ترم دوم هم میانگین $X[n]$ و $Y[n]$ را تخمین می‌زند که برابر همان میانگین $S_1[n]$ و $S_2[n]$ می‌باشند و مطابق با رابطه‌ای که در قسمت پ نوشتیم، این تفاضل σ_{12} را به ما می‌دهد.

$$E[\hat{\sigma}_{12}] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E[X[n]Y[n]] - \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} E[X[n]Y[m]]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E[S_1[n]S_2[n]] - \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} E[S_1[n]S_2[m]] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} R_{12}[0] - \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} R_{12}[n-m]$$

$$= R_{12}[0] - \frac{1}{N}\sum_{K=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|K|}{N}\right)R_{12}[K] \longrightarrow \boxed{B_{\hat{\sigma}_{12}} = m_1 m_2 - \frac{1}{N}\sum_{K=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|K|}{N}\right)R_{12}[K]}$$

سئوال 6 -

الف)

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{m} X_i(t) \quad , \; 0<t<T_s$$

$$\to E[\hat{s}(t)] = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{m} E[X_i(t)] = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{m} E[s(t)+N_i(t)] = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{m} s(t) + \cancel{E[N_i(t)]}^{\,0} = s(t)$$

$$\to B_{\hat{s}(t)} = 0$$

ب)

$$E[X_k(t)] = E[s(t)+N_k(t)] = E[s(t)] = s(t)$$

$$R_{X_k}(t_1,t_2) = E[X_k(t_1)\,X_k(t_2)] = E[(s(t_1)+N_k(t_1))(s(t_2)+N_k(t_2))]$$

$$= E[s(t_1)\,s(t_2)] + E[N_k(t_1)\,N_k(t_2)] = s(t_1)\,s(t_2) + R_N(t_1-t_2)$$

- خیر WSS نمی باشد چون R_{X_k} تنها به اختلاف t_1 و t_2 مربوط نمی شود.

- فرآیند $X_k(t)$ حاصل جمع یک فرآیند گوسی و یک پاسخ ثابت است بنابراین فرآیند $X_k(t)$ هم یک فرآیند گوسی است

$$\sigma_{X_k}^2 = E[X_k(t)^2] - E[X_k(t)]^2 = R_{X_k}(t,t) - s(t)^2 = R_N[0] + \cancel{s(t)^2} - \cancel{s(t)^2}$$

$$= 10 \to \sigma^2 \quad \to f_{X_k(t)}(x_k(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x_k(t)-s(t))}{2\sigma^2}}$$

پ)

در ابتدا بررسی می کنیم که با چه احتمالی $X_k(t) \le X_m$ یا $X_k(t) > X_m$ می باشد:

$$P(X_m,t) = \int_{-X_m}^{X_m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_k(t)-s(t))}{2\sigma^2}} \, dx_k(t)$$

حال برای $Y(K)$ می دانیم که اگر $X_k(t)$ در بازه $[-X_m, X_m]$ باشد تابع احتمال همان تابع احتمال X_K هست و اگر هم $X_k(t)$ خارج بازه باشد $Y_K(t)$ حتماً برابر A است.

$$f_{Y_K(t)}(y_k(t)) = \begin{cases} 1-P(X_m,t) & , y_k(t) = A \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-s(t))}{2\sigma^2}} & , y_k(t) = y \end{cases}$$

ت)

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i(t) \longrightarrow E[\hat{s}(t)] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} E[Y_i(t)] = E[Y_i(t)]$$

$$E[Y_i(t)] = (1-P(X_m,t))A + \int_{-X_m}^{X_m} y \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-s(t))^2}{2\sigma^2}} \, dy$$

$$\longrightarrow \boxed{B_{\hat{s}(t)} = \left(1-\int_{-X_m}^{X_m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_k(t)-s(t))}{2\sigma^2}} \, dx_k(t)\right)A + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-X_m}^{X_m} y \, e^{-\frac{(y-s(t))^2}{2\sigma^2}} \, dy - s(t)}$$