

۱- در یک مدل مارکوف مرتبه اول با ماتریس  $A$  و بردار  $\pi$  و  $N = 4, T = 10$ :  
الف) مقدار  $P(q_2 = S_3)$  را حساب کنید.

ب) آیا بدلیل مارکوف مرتبه اول بودن، مقدار  $P(q_t = S_3 | q_{t-2} = S_4)$  برابر  $P(q_t = S_3)$  است؟ اگر جواب مثبت است دلیل بیاورید و اگر جواب منفی است مقدار آن را حساب کنید.

۲- در یک مدل مارکوف مرتبه اول داریم:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

الف) زمان متوسط باقی ماندن در هر یک از دو حالت را حساب کنید. ب) مقدار  $P(q_t = S_2 | q_{t-3} = S_2)$  را حساب کنید.

۳- در یک  $HMM$  ارگادیک با مقادیر  $N = M = 2, T = 3, O = \{0, 1\}$ ، نشان دهید اگر:

$$P(o_1 o_2 o_3 = 011) = P(o_1 o_2 o_3 = 110), \quad P(o_1 o_2 o_3 = 001) = P(o_1 o_2 o_3 = 100)$$

آنگاه  $P(o_1 o_2 o_3 = 111)$  و  $P(o_1 o_2 o_3 = 000)$  نمی‌توانند هر دو صفر باشند.

۴- الف) نشان دهید اگر برای هر  $i$  داشته باشیم:  $a_{ij} = 0 \quad j \neq i$ ، آنگاه نیازی به مرحله Backtracking در الگوریتم ویتربی نیست.

ب) نشان دهید اگر برای هر  $i$  داشته باشیم  $a_{ij} = Cte \quad \forall j$ ، آنگاه نیازی به مرحله Backtracking در الگوریتم ویتربی نیست.

۵- در یک  $HMM$  برای سه حالت متناظر با فشار جوی متوسط، زیاد و کم داریم:

$$S = \{S_1, S_2, S_3\} = \{M, H, L\}, \quad A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

مشاهدات شرایط آب و هوا در هر روز بوده و به صورت دو وضعیت آفتابی و بارانی در نظر گرفته می‌شود:

$$O = \{v_1, v_2\} = \{S, R\}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

الف) اولاً اگر حالت به صورت  $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\} = \{M, H, L, L, L\}$  داده شده باشد، احتمال اینکه آب و هوا در پنج روز متوالی به صورت  $O = \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5\} = \{S, R, R, S, R\}$  باشد چقدر است؟ ثانیاً اگر آب و هوا در پنج روز متوالی به صورت  $O = \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5\} = \{S, R, R, S, R\}$  باشد، احتمال اینکه در این پنج روز دنباله حالت سیستم به صورت  $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\} = \{M, H, L, L, L\}$  باشد چقدر است؟

ب) می‌خواهیم احتمال اینکه آب و هوا در پنج روز متوالی به صورت  $O = \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5\} = \{S, R, R, S, R\}$  باشد را حساب کنیم. اولاً با استفاده از Matlab این احتمال را با در نظر گرفتن همه دنباله‌های ممکن از حالت حساب کنید. از بین ۲۴۳ حالت ممکن، حالتی که بیشترین احتمال را دارد گزارش کنید.

ثانیاً این احتمال را با روش پیشرو حساب کنید.

ثالثاً این احتمال را با روش پسرو حساب کنید.

رابعاً این احتمال را با روش پیشرو-پسرو برای  $t = 2$  حساب کنید.

پ) فرض کنید آب و هوا در پنج روز متوالی به صورت  $O = \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5\} = \{S, R, R, S, R\}$  گزارش شده است. با استفاده از الگوریتم ویتربی محتملترین دنباله حالت ممکن که این مشاهدات را می‌دهد بدست آورید و با بخش اولاً قسمت ب مقایسه کنید.

ت) فرض کنید پارامترهای داده شده مدل دقیق نیستند و به عنوان حدس اولیه داده شده‌اند. با استفاده از دنباله مشاهدات

$$O = \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5\} = \{S, R, R, S, R\}$$

پارامترهای مدل را با الگوریتم Baum بعد از یک بار تکرار تخمین بزنید.

ث) فرض کنید:  $\{q_1, q_2\} = \{L, L\}$ ،  $\{o_1, o_2\} = \{S, R\}$ . مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$P(o_1, o_2), \quad P(o_1), \quad P(o_2), \quad P(o_1 | o_2), \quad P(o_2 | o_1), \quad P(o_2 | q_1), \quad P(o_2 | q_1, o_1),$$