


تمرین سری 6 درس BSP - رادین آفام - 101579

سؤال 1-

الف 1)

$$Y_1[n] = S_1[n] + u_2[n]$$

$$R_{Y_1}[n] = R_{S_1}[n] + R_{u_2}[n] + R_{S_1 u_2}^0[n] + R_{u_2 S_1}^0[n]$$

$$R_{S_1}[n] = \frac{\sigma_1^2}{1 - (\frac{3}{4})^2} (\frac{3}{4})^{|n|} = \frac{70}{1 - (\frac{3}{4})^2} (\frac{3}{4})^{|n|}$$

$$R_{u_2}[n] = \sigma_2^2 \delta[n] = 224 \delta[n]$$

$$\rightarrow R_{Y_1}[n] = \frac{70}{1 - (\frac{3}{4})^2} (\frac{3}{4})^{|n|} + 224 \delta[n]$$

$$S_{Y_1}(z) = \frac{70}{(1 - \frac{3}{4} z^{-1})(1 - \frac{3}{4} z)} + 224 = \frac{336(1 - 0.5 z^{-1})(1 - 0.5 z)}{(1 - \frac{3}{4} z^{-1})(1 - \frac{3}{4} z)}$$

$$R_{S_1 Y_1}[m] = E[S_1[n] S_1[n+m]] + E[S_1[n] u_2[n+m]] = R_{S_1}[m]$$

$$\rightarrow S_{S_1 Y_1}(z) = S_{S_1}(z) = H(z) H(z^{-1}) S_{u_1}(z) = \frac{70}{(1 - \frac{3}{4} z^{-1})(1 - \frac{3}{4} z)}$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{S_{S_1 Y_1}(z)}{S_{Y_1}(z)} = \frac{70}{336(1 - 0.5 z^{-1})(1 - 0.5 z)} = \frac{0.21}{(1 - 0.5 z^{-1})(1 - 0.5 z)}$$

$$a^{1n} \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - a z^{-1}} + \frac{a z}{1 - a z} = \frac{1 - a^2}{(1 - a z^{-1})(1 - a z)}$$

$$\rightarrow h[n] = \frac{0.21}{0.75} \times (0.5)^{|n|} = 0.28 \times (0.5)^{|n|}$$

$$\hat{S}_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k] Y_1[k]$$

الف 2)

باید $R_{Y_1} = R_{Y_2}$ باشد در نتیجه $a=224$ و b هم هر چیزی می تواند باشد چون در هیچ جایی محاسبات به $E[u_2(n)u_3(n)]$ بر نمی خوریم.

ب 1)

$$M=1 \rightarrow R_{S_{Y_1}}[P] = \sum_{l=0}^1 h[l] R_{Y_1}[P-l] = h[p] * R_{Y_1}[p], \text{ و } R_{Y_1}[p]$$

$$\begin{bmatrix} R_{Y_1}[0] & R_{Y_1}[-1] \\ R_{Y_1}[1] & R_{Y_1}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{S_{Y_1}}[0] \\ R_{S_{Y_1}}[1] \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 384 & 120 \\ 120 & 384 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ 120 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3535 \\ 0.2020 \end{bmatrix}$$

ب 2)

در یاره باید $R_{Y_1} = R_{Y_2}$ بشود پس $a=224$ و b هم هر چیزی می تواند باشد.

پ 1)

$$S_{Y_1}(z) = \frac{336(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})(1-\frac{3}{4}z)} = L(z) L(z^{-1}) \rightarrow L(z) = \sqrt{336} \frac{1-0.5z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}$$

$$\begin{aligned} H_c(z) &= \frac{1}{L(z)} \left\{ L(z) \frac{S_{Y_1}(z)}{S_{Y_1}(z)} \right\}_+ = \frac{1}{L(z)} \left\{ \frac{S_{Y_1}(z)}{L(z^{-1})} \right\}_+ = \frac{1}{L(z)} \left\{ \frac{\frac{70}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})(1-\frac{3}{4}z)}}{\sqrt{336} \frac{1-0.5z}{1-\frac{3}{4}z}} \right\}_+ \\ &= \frac{1}{L(z)} \left\{ \frac{3.818 (-2z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})(1-2z^{-1})} \right\}_+ \end{aligned}$$

ادامہ قسمت پ 1

$$H_c(z) = \frac{1}{L(z)} \left\{ \frac{-7.6376 z^{-1}}{\underbrace{\left(1 - \frac{3}{4} z^{-1}\right) \left(1 - 2 z^{-1}\right)}} \right\} +$$

$$\frac{A}{1 - \frac{3}{4} z^{-1}} + \frac{B}{1 - 2 z^{-1}}$$

$$A + B = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow B &= -6.11 \\ A &= 6.11 \end{aligned}$$

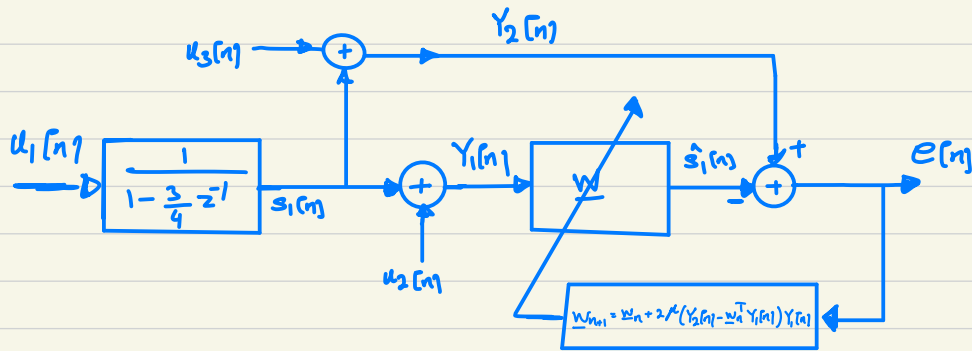
$$+2A + \frac{3}{4}B = 7.64$$

$$\rightarrow H_c(z) = \frac{1}{L(z)} \left\{ \frac{6.11}{1 - \frac{3}{4} z^{-1}} - \frac{6.11}{1 - 2 z^{-1}} \right\} + = \frac{1}{L(z)} \times \frac{6.11}{1 - \frac{3}{4} z^{-1}}$$

$$\rightarrow H_c(z) = \frac{\cancel{1 - \frac{3}{4} z^{-1}}}{\sqrt{336} (1 - 0.5 z^{-1})} \times \frac{6.11}{\cancel{1 - \frac{3}{4} z^{-1}}} = \frac{0.33}{1 - 0.5 z^{-1}} \quad , |z| > 0.5$$

بج 2 در بارہ باید 224 د و ہر چیز کی توانہ باشد .

سؤال 2 -
الف (1)



$$\hat{s}_1[n] = \underline{w}^T \underline{y}_1$$

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

$$e[n] = y_2[n] - \hat{s}_1[n] = y_2[n] - \underline{w}^T \underline{y}_1$$

$$\underline{y}_1 = \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_1[n-1] \end{bmatrix}$$

الف (2)

$$E\{e[n]^2\} = E\{(y_2[n] - \underline{w}^T \underline{y}_1)^2\} = E\{(y_2[n] - \underline{w}^T \underline{y}_1)(y_2[n] - \underline{y}_1^T \underline{w})\}$$

$$= E\{y_2[n] y_2[n]\} - \underbrace{E\{y_2[n] \underline{y}_1^T\}}_{\underline{P}^T} \underline{w} - \underbrace{\underline{w}^T E\{y_2[n] \underline{y}_1\}}_{\underline{P}} + \underbrace{\underline{w}^T E\{\underline{y}_1 \underline{y}_1^T\}}_{\underline{R}} \underline{w}$$

$$= R_{y_2}[0] - 2 \underline{P}^T \underline{w} + \underline{w}^T \underline{R} \underline{w} = \cancel{R_{y_1}[0]} + a - 2 \underline{P}^T \underline{w} + \underline{w}^T \underline{R} \underline{w}$$

$$\underline{R} = E\{\underline{y}_1 \underline{y}_1^T\} = \begin{bmatrix} E[y_1[n] y_1[n]] & E[y_1[n] y_1[n-1]] \\ E[y_1[n-1] y_1[n]] & E[y_1[n-1] y_1[n-1]] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{y_1}[0] & R_{y_1}[1] \\ R_{y_1}[-1] & R_{y_1}[0] \end{bmatrix}$$

سؤال 1 $\rightarrow \underline{R} = \begin{bmatrix} 384 & 120 \\ 120 & 384 \end{bmatrix}$

$$\underline{P} = E[y_2[n] \underline{y}_1] = \begin{bmatrix} E[y_2[n] y_1[n]] \\ E[y_2[n] y_1[n-1]] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[(s_1[n] + u_3[n])(s_1[n] + u_2[n])] \\ E[(s_1[n] + u_3[n])(s_1[n-1] + u_2[n-1])] \end{bmatrix} \xrightarrow{b=0} \begin{bmatrix} R_{s_1}[0] \\ R_{s_1}[1] \end{bmatrix}$$

سؤال 1 $\rightarrow \underline{P} = \begin{bmatrix} 160 \\ 120 \end{bmatrix}$

اداره بخش الف (2)

$$\mathcal{E}(\underline{w}) = 160 + a - 2\underline{P}^T \underline{w} + \underline{w}^T R \underline{w} \quad \leftarrow \text{از راه مشتق گیری}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\underline{w}} = 0 \rightarrow -2\underline{P} + 2R\underline{w} = 0 \rightarrow \underline{w}_{opt} = R^{-1}\underline{P}$$

$$\rightarrow \underline{w}_{opt} = \begin{bmatrix} 384 & 120 \\ 120 & 384 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 160 \\ 120 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} w_{opt}[0] \\ w_{opt}[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3535 \\ 0.2020 \end{bmatrix}$$

الف (3)

$$\underline{w}_{i+1} = \underline{w}_i + 2\mu (\underline{P} - R\underline{w}_i)$$

که \underline{P} و R را در سمت قبل محاسبه کردیم.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} w_{i+1}[0] \\ w_{i+1}[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i[0] \\ w_i[1] \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} 160 - 384w_i[0] - 120w_i[1] \\ 120 - 120w_i[0] - 384w_i[1] \end{bmatrix}$$

الف (4)

$$R = \begin{bmatrix} 384 & 120 \\ 120 & 384 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{eig}} \begin{matrix} \lambda_1 = 264 \\ \lambda_2 = 504 \end{matrix}$$

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}} \rightarrow \boxed{0 < \mu < 0.002}$$

(با نویزهای مستقل)

ب)

به مثالی ندارد. ما در مشاهده نویزی از $S_1[n]$ داریم. توانیم هر کدام را به عنوان primary و دیگری را به عنوان reference در نظر بگیریم.

در این حالت جدید خواص داشت:

$$R = \begin{bmatrix} R_{Y_2[0]} & R_{Y_2[1]} \\ R_{Y_2[1]} & R_{Y_2[0]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160+a & 120 \\ 120 & 160+a \end{bmatrix}$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} R_{S_1[0]} \\ R_{S_1[1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ 120 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{W}_{opt} = \begin{bmatrix} 160+a & 120 \\ 120 & 160+a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 160 \\ 120 \end{bmatrix}$$

برای اینکه جواب ها کلی شود باید $a=224$ بشود که ماتریس R تغییر نکند.

پ)

خیر، در این صورت ما دیگر در مشاهده نویزی مستقل از سیگنال $S_1[n]$ نداریم و Y_1 و Y_2 بهم وابسته می شوند. بنابراین اطلاعات مشترک Y_1 و Y_2 دیگر فقط شامل $S_1[n]$ نمی شود و نویز هم دارد.

نت

جواب = قسمت الف و ب (با فرض $Q=224$) با جواب قسمت ب سؤال 1
کسای می باشد. چون در واقع ما فیلتر واقعی را از روی فیلتر وینر
FIR سببی و برای حذف کردن مشکل ادل که استفاده از اطلاعات کماری
بود درست کردیم، دل خوب اینجا از اطلاعات کماری استفاده کردیم (در $E[y_n]$)
نیابردن جواب با حالت فیلتر وینر FIR سببی کپی شد.

توی سؤال یک نیاز به R_{yy_1} داشتیم که یعنی

همبستگی متقابل بین مشاهدات و سیگنال که می خواهیم تعیین بزنیم که

خوب این خیلی در دسترس نیست به طور معمول، در سؤال 2 با اضافه

کردن یک مشاهده دیگر، توانستیم دیده بدون استفاده از R_{yy_1} و صراحتاً

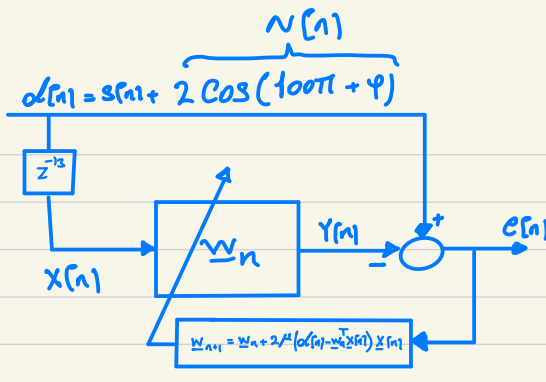
با استفاده از همبستگی میان y_1 و y_2 سیگنال را تعیین بزنیم، دلیل اینکه

در یکی فقط از یک مشاهده و در دیگری از دو مشاهده استفاده کردیم

مین است.

سؤال 3 -

(الف)



$$\underline{w}_n = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

$$s[n] \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\underline{x}[n] = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n-13] \end{bmatrix}$$

φ متغير عشوائي با توزيع غاوسي مستقل از $s[n]$ ، $d[n] = s[n] + 2 \cos(100\pi n + \varphi)$

$$x[n] = s[n-13] + 2 \cos(100\pi(n-13) + \varphi)$$

$y[n]$ تخمین $v[n]$ و $e[n]$ تخمین $s[n]$ می باشد.

(ب)

$$e[n] = d[n] - y[n] = s[n] + 2 \cos(100\pi n + \varphi) - \underline{w}^T \underline{x}$$

$$R = E\{\underline{x} \underline{x}^T\} = \begin{bmatrix} E\{d[n-13]d[n-13]\} & E\{d[n-13]d[n-13]\} \\ E\{d[n-13]d[n-13]\} & E\{d[n-13]d[n-13]\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_d[0] & R_d[0] \\ R_d[0] & R_d[0] \end{bmatrix}$$

$$R_d[n] = R_s[n] + R_v[n]$$

$$R_v[n] = 4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(100\pi m + \varphi) \cos(100\pi(m+n) + \varphi) d\varphi$$

$$= \frac{2}{2\pi} \times 2\pi \times \cos(100\pi n) = 2 \cos(100\pi n)$$

$$\text{و } R = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_s[n] = \delta[n] \text{ — و } R_d[0] = 3, R_d[n] = 2$$

ادامہ قیمت ب)

$$\underline{P} = E\{d(p)|X\} = \begin{bmatrix} R_S[13] + R_N[13] \\ R_S[14] + R_N[14] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{w}_{opt} = R^{-1} \underline{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{w}_{i+1} = \underline{w}_i + 2\mu (\underline{P} - R \underline{w}_i)$$

(نک۱)

کہ \underline{P} و R را در قیمت قبل محاسبه کردیم.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} w_{i+1}[0] \\ w_{i+1}[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i[0] \\ w_i[1] \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} 2 - 3w_i[0] - 2w_i[1] \\ 2 - 2w_i[0] - 3w_i[1] \end{bmatrix}$$

(نک۲)

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}}$$

$$R \xrightarrow{eij} \begin{matrix} \lambda=1 \\ \lambda=5 \end{matrix} \rightarrow \lambda_{\max}=5$$

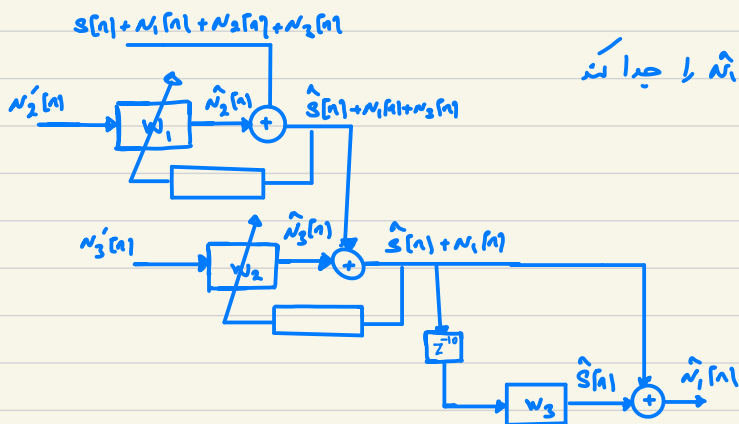
$$\rightarrow 0 < \mu < 0.2$$

سؤال 4-

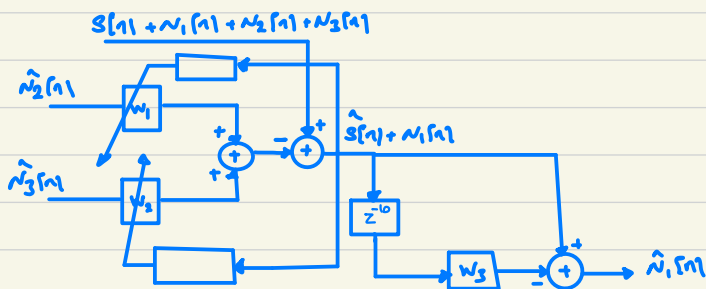
(الف)

خیر با یک فیلتر واقعی نمی توان هر 3 نویز را حذف کرد می توانیم نویز برق شهر را با استفاده از یک ALE حذف کنیم چون متناوب است و مستقل از ECG.

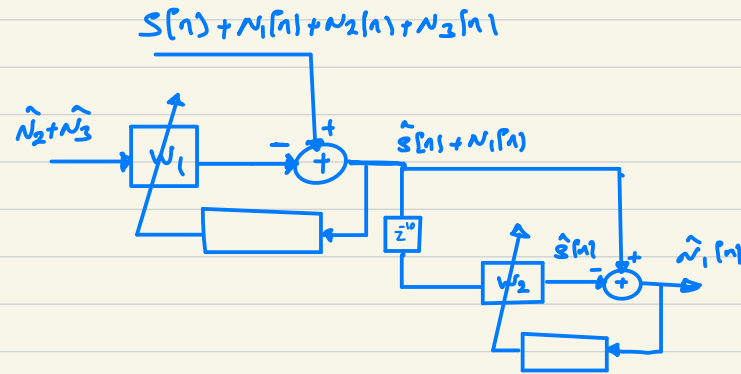
(ب)



و البته نمی تواند به صورت کامل $\hat{n}_1[n]$ را جدا کند چون نویز سفید نیست.



شاید با این روش بشود:



پس می‌توانیم نویز برق شهر را با notch حذف کنیم ولی آن‌ها نویز تبادلی را چون وابسته به ECB هست نمی‌توانیم حذف کنیم. همچنین نویز گادسی باند محدود هم نمی‌توانیم به صورت کامل حذف کنیم.

سؤال 5)

الف)

از همان فیلتر وقتی عناصه $x_1[n]$ سیگنال را به عنوان
Primary در نظریه گیریم و مثبت یا منفی $x_2[n]$ را تحت عنوان
reference در نظریه گیریم، همپورن می میزان ثبیت را افزایش
می دهیم تا زمانی که $e[n]$ می نیم شود (چون $e[n]$ تیله غیر مشترک
را نشان می دهد) آن n ای که به ازای آن $e[n]$ می نیم شده
است میزان تأخیری باشد.

ب)

زمانی که فقط $x_1[n]$ را داریم از یک ALE استفاده می کنیم که دردی آن $x_1[n]$
می باشد، زمانی هم که هر دو سیگنال $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را داریم
از ANC استفاده کنیم بهتر است. ردش فیلتر و وقتی از روش
متوسط گیری نگردون بهتر است.