تمرین سری اول RSP - رادین خیام - 9910579

سؤال 1 -

الف)

روش اول:

$$x(t) = 3u(t+1) - 3u(t-5)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^{5} 3e^{-j\omega t} dt = 3 \times \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-1}^{5}$$

$$= \frac{-3}{j\omega}\left(e^{-j5\omega} - e^{+j\omega}\right) = \frac{3\left(e^{j\omega} - e^{-j5\omega}\right)}{j\omega}$$

$$= \frac{3e^{-2j\omega}\left(e^{3j\omega} - e^{-j3\omega}\right)}{j\omega} = \frac{3e^{-2j\omega} \times 2\cancel{j}\sin(3\omega)}{\cancel{j}\omega}$$

$$= \frac{6\sin(3\omega)}{\omega} e^{-2j\omega}$$

$$\rightarrow S_x(\omega) = \left| \frac{6\sin(3\omega)}{\omega} e^{-2j\omega} \right|^2 = \frac{36\sin^2(3\omega)}{\omega^2} \overset{9\times 36}{=} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{3\omega}{\pi}\right)$$

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{3\omega}{\pi}\right) = \frac{\sin(3\omega)}{3\omega}$$

روش دوم:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t-\tau) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(3u(t+1) - 3u(t-5)\right) \times \left(3u(t+1-\tau) - 3u(t-5-\tau)\right) dt$$

$$= 9\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\underbrace{u(t+1)}_{t=-1} - \underbrace{u(t-5)}_{t=5}\right) \times \left(\underbrace{u(t+1-\tau)}_{t=\tau-1} - \underbrace{u(t-5-\tau)}_{t=\tau+5}\right) dt$$

$6 > \tau > 0$ $\quad -1 < \tau-1 < 5 < \tau+5$

$\tau > 6$ $\quad -1 < 5 < \tau-1 < \tau+5$

$-6 < \tau < 0$ $\quad \tau-1 < -1 < \tau+5 < 5$

$\tau < -6$ $\quad \tau-1 < \tau+5 < -1 < 5$

① $\tau < -6$:

$$9\left(\int_{\tau-1}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{5} 0\,dt + \int_{5}^{\tau+5} 0\,dt\right) = 0$$

② $-6 < \tau < 0$:

$$9\left(\int_{\tau-1}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{\tau+5} 1\,dt + \int_{\tau+5}^{5} 0\,dt = 54 + 9\tau\right.$$

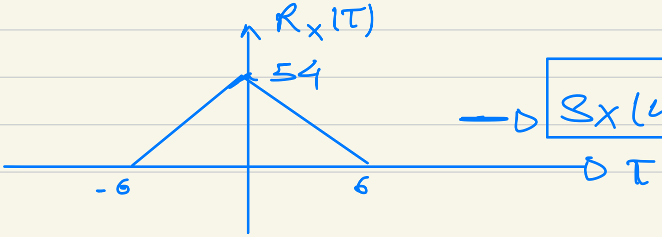
③ $0 < \tau < 6$:

$$9\left(\int_{-1}^{\tau-1} 0\,dt + \int_{\tau-1}^{5} 1\,dt + \int_{5}^{\tau+5} 0\,dt\right) = 54 - 9\tau$$

④ $\tau > 6$:

$$9\left(\int_{-1}^{5} 0\,dt + \int_{5}^{\tau-1} 0\,dt + \int_{\tau-1}^{\tau+5} 0\,dt\right) = 0$$

$\rightarrow$



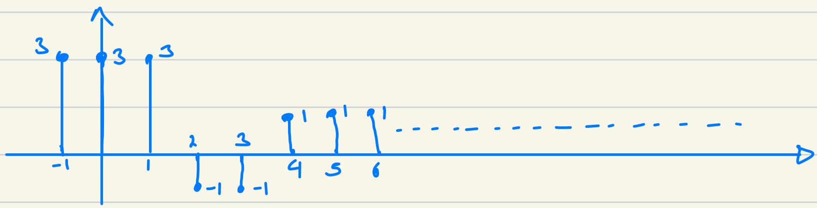
$\rightarrow$ $$\boxed{S_X(\omega) = \underbrace{54\times 6}_{9\times 36}\times \mathrm{sinc}^2\left(\frac{3\omega}{\pi}\right)}$$

ب)

$$x[n] = 3u[n+1] - 4u[n-2] + 2u[n-4]$$

چون سیگنال توان است:

$$R_x[m] = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]\, x^*[n-m]$$



چون تا بینهایت همینجوری 1 داریم می‌توانیم به صورت حدی از چند نمونه اول صرف نظر کنیم و حاصل سیگما را برابر N در نظر بگیریم در نتیجه:

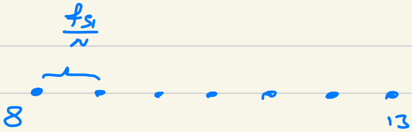
$$R_x[m] = \lim_{N \to \infty} \frac{N}{2N+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\underset{(-\infty < n < \infty)}{1} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, \delta(\omega + 2\pi k)$$

$$\longrightarrow \boxed{S_x(\omega) = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + 2\pi k)}$$

سوال 2 -

الف)



$$\rightarrow 6 \times \frac{f_{s_1}}{N} = 5$$

$$\rightarrow N = \frac{6}{5} f_{s_1} \rightarrow \boxed{N \geqslant \frac{6}{5} f_{s_1}}$$

ب)

$$X_1[1146] = X_1^*[54] = \sqrt{2} + j$$

$$X_1[54] \longleftrightarrow f_k = \frac{54}{1200} \times 400 = 18$$

$$\rightarrow X_1[54] = \frac{1}{T_{s_1}} X(j18) \rightarrow X(j18) = \frac{1}{400} \times (\sqrt{2} - j)$$

$$18 = \frac{K}{N_2} f_{s_2} \rightarrow 18 = \frac{K}{1000} \times 600 \rightarrow K = 30$$

$$\rightarrow X_2[30] = \frac{1}{T_{s_2}} X(j18) = \frac{600}{400} (\sqrt{2} - j) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - j\frac{3}{2}$$

$$\rightarrow X_2[970] = \frac{3\sqrt{2}}{2} + j\frac{3}{2}$$

در نهایت برای جمع بندی:

$$X_1[1146] = \sqrt{2} + j \quad , \quad X_1[54] = \sqrt{2} - j$$

$$X_2[30] = \frac{3\sqrt{2}}{2} - j\frac{3}{2} \quad , \quad X_2[970] = \frac{3\sqrt{2}}{2} + j\frac{3}{2}$$

$X_1[400] = a\angle\theta \to w = 400\times\frac{2\pi}{N_1} \to \Omega = w f_{s1} = 400\times\frac{2\pi}{N_1} f_{s1}$

$400\times\frac{2\pi}{N_1}$

چرا

$X_1[1050] = \sqrt{2} - j \longrightarrow X_1[150] = \sqrt{2} + j$

$f_K = \frac{50}{N_1} f_{s1} = \frac{150\times 400}{1200} = \frac{150}{3} = 50 \to$ ۵۰ هرتز مولفه داریم $\Leftarrow$
و ۵۰- هرتز

$\longrightarrow X_1(j50) = T_{s1} X_1[50] = \frac{1}{400}(\sqrt{2}+j)$

$X_1(-j50) = T_{s1} X_1[1050] = \frac{1}{400}(\sqrt{2}-j)$

ت)

$0.25 \leqslant \frac{K}{N_1} f_{s1} \leqslant 4 \longrightarrow \frac{N_1}{4 f_{s1}} \leqslant K \leqslant \frac{4\times N_1}{f_{s1}}$

می‌خواهیم حتماً 0.25 هرتز را داشته باشیم.

$\longrightarrow \frac{3}{4} \leqslant K \leqslant 12 \longrightarrow \boxed{0 \leqslant K \leqslant 12}$

$0.25 \leqslant \frac{l}{N_2} f_{s2} \leqslant 4 \longrightarrow \frac{N_2}{4 f_{s2}} \leqslant l \leqslant \frac{4\times N_2}{f_{s2}}$

$\longrightarrow \frac{10}{24} \leqslant l \leqslant \frac{40}{6} \longrightarrow \boxed{0 \leqslant l \leqslant 7}$

ث)

$\angle X_1[400] = -\angle X_2[500] \longrightarrow f_{400,1} = -f_{300,2}$

f_K

$$f_K = \begin{cases} \frac{K}{N} f_s , & 0 \leqslant K \leqslant \left[\frac{N-1}{2}\right] \\ -\frac{N-K}{N} f_s , & \left[\frac{N-1}{2}\right] \leqslant K \leqslant N-1 \end{cases}$$

ادامه مثال

فرض کنیم $N_1 > N_2$:

$$\rightarrow \frac{400}{N_1} f_{s1} = -\left(-\frac{N_2-500}{N_2} f_{s2}\right), \quad 0 \leq 400 \leq \left[\frac{N_1-1}{2}\right]$$
$$\left[\frac{N_2-1}{2}\right] < 500 \leq N_2 - 1$$

$$\rightarrow \frac{400}{N_1} \times 4\cancel{00} = \frac{N_2-500}{N_2} \times 6\cancel{00}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{800}{3N_1} = \frac{N_2-500}{N_2}, \quad N_1 > N_2, \quad N_1 \geq 801, \quad 501 \leq N_2 \leq 1000}$$

مثال : $\boxed{\begin{matrix} N_2 = 600 \\ N_1 = 1600 \end{matrix}}$

$$\frac{8N_2}{3N_1} = N_2 - 500$$

$$500 + \frac{8N_2}{3N_1} = N_2 \rightarrow \frac{1500N_1 + 8N_2}{3N_1} = N_2$$

فرض کنیم $N_2 > N_1$:

$$\rightarrow \frac{500}{N_2} f_{s2} = -\left(-\frac{N_1-400}{N_1} f_{s1}\right), \quad \left[\frac{N_1-1}{2}\right] < 400 \leq N_1 - 1$$
$$0 \leq 500 \leq \left[\frac{N_2-1}{2}\right]$$

$$\rightarrow \frac{500}{N_2} \times 6\cancel{00} = \frac{N_1-400}{N_1} \times 4\cancel{00}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1500}{2N_2} = \frac{N_1-400}{N_1}, \quad N_2 > N_1, \quad 401 \leq N_1 \leq 800, \quad N_2 \geq 1001}$$

مثال : $\boxed{\begin{matrix} N_2 = 1500 \\ N_1 = 800 \end{matrix}}$

$$\frac{500 \times 16\cancel{00} \times 6\cancel{00}}{16\cancel{00} \times 6\cancel{00} - 4\cancel{00} \times 4\cancel{00}}$$

$$\frac{500 \times \cancel{16} \times 6}{5\cancel{80}}$$

سوال 3 -

الف)

وقتی پنجره مستطیلی در جمع دو سینوسی ضرب می کنیم تبدیل فوریه سیگنال حاصل جمع چهار سینک شیفت یافته می شود. بنابراین $Y(e^{j\omega})$ جمع 4 سینک است حال برای اینکه DFT این سیگنال که نمونه برداری شده $Y(e^{j\omega})$ است فقط شامل 4 پیک اصلی این سینک ها باشد باید که $N=L$ و ضریبی از ک.م.م دوره تناوب سینوسی ها باشد. این موضوع در تمام گزینه ها رعایت شده است.

حال به سراغ حذف گزینه ها با استفاده از اطلاعات دیگر می رویم.

نمونه برداری ها در $\frac{2k\pi}{N}$ بوده است ← باید پیک های در این مقادیر داشته باشیم:

$$\frac{2\times 4\times \pi}{30} = \frac{4\pi}{15}$$

$$\frac{2\times 12\times \pi}{30} = \frac{12\pi}{15}$$

و همچنین پیک در $\frac{12\pi}{15}$ سه برابر پیک در $\frac{4\pi}{15}$ باشد.

با استفاده از این دو شرط تنها سیگنال های $x_1[n]$ و $x_4[n]$ باقی می ماند.

ب)

دوره تناوب سینوسی ها $\frac{1}{50}$ و $\frac{1}{f_1}$ هست برای همین چون 1 ضریبی از ک.م.م این دو عدد است، در DFT فقط از قله‌های اصلی این 4 سیگنال نمونه برداری می شود. بنابراین DFT در 4 نقطه مقدار دارد: K_1 , K_2 , K_3 , K_4

اگر به گونه‌ای دو تا از این نقاط باهم در یکجا باشند، DFT حاصل تنها شامل 2 ضربه می شود.

$$f_1 = \frac{K_1}{N} f_s \longrightarrow K_1 = \frac{N f_1}{f_s} \quad , \quad K_3 = N - K_1$$

$$50 = \frac{K_2}{N} f_s \longrightarrow K_2 = \frac{N \times 50}{f_s} \quad , \quad K_4 = N - K_2$$

$$K_1 = K_2 \longrightarrow f_1 = 50\,\text{Hz} \times \quad f_1 > 50$$

$$K_1 = K_4 \longrightarrow \frac{N f_1}{f_s} = N - \frac{N \times 50}{f_s} \longrightarrow \frac{f_1}{f_s} = \frac{f_s - 50}{f_s}$$

$$\longrightarrow f_1 = f_s - 50 = \boxed{100\,\text{Hz}} \checkmark$$

سوال 4 -

الف)

$$\omega_1 = \frac{2 \times \pi \times 3}{30} = \frac{6\pi}{30}$$

$$\omega_2 = \frac{2 \times \pi \times 11}{30} = \frac{22\pi}{30}$$

$$\rightarrow x[n] = a\cos\left(\frac{6\pi}{30}n\right) + b\cos\left(\frac{22\pi}{30}n\right)$$

ب)

خیر، لزومی ندارد که فقط ۴ مقدار غیر صفر داشته باشیم. دلیل این موضوع این هست که زمانی که پنجره را در $x[n]$ ضرب می کنیم در واقع تبدیل فوریه پنجره را با ۴ ضربه کانوالو می کنیم و این یعنی که تبدیل فوریه نهایی جمع ۴ تبدیل فوریه شیفت یافته می باشد، حال برای بدست آوردن DFT هر $\frac{2\pi}{30}$ از این تبدیل فوریه نمونه برداری می کنیم. در حالتی که پنجره مستطیل است به جز ۴ مقدار که پیک های لوب اصلی می باشند، بقیه مقادیر صفر می باشند. به عنوان مثال در پنجره همینگ پهنای لوب اصلی پهن می باشد و این باعث می شود که نمونه های غیر صفری در اطراف لوب اصلی داشته باشیم.

پ)

$$x[n] = x_c(nT_s) \quad , f_s = 180 \rightarrow T_s = \frac{1}{180}$$

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(a\cos\left(\frac{6\pi}{30}n\right) + b\cos\left(\frac{22\pi}{30}n\right)\right) \operatorname{sinc}(180t - n)$$

سؤال 5 -

الف)

$$x(t) = e^{j(\frac{3\pi}{8})10^4 t} \xrightarrow{T=10^{-4}} x[n] = x(nT) = e^{j\frac{3\pi}{8}n}$$

$$\rightarrow \frac{2\pi k}{N} = \frac{3\pi}{8} \rightarrow N = \frac{16k}{3} \rightarrow \boxed{N=16}$$

ب)

شکل بالای مربوط به $w_1[n]$ هست و شکل پایینی مربوط به $w_2[n]$ است.
چون با افزایش طول پنجره پهنای لوب اصلی کاهش پیدا می‌کند و چون
زمان نمونه برداری ها تغییر نکرده است (چون N ثابت بوده) می‌شود گفت
که پهنای لوب اصلی در شکل بالای کمتر از شکل پایینی هست.

پ)

$$\hat{w}_0 = \frac{2\pi \times 6}{32} \rightarrow \hat{\Omega}_0 = \frac{\hat{w}_0}{T} = \frac{12\pi}{32\times 10^{-4}} = 5892$$

$$\Omega_{error,\,max} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{NT} = \frac{\pi}{32\times 10^{-4}} = 982$$

سؤال 6 -

الف)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kxy & 0 < x \leq y,\ 0 < y < 2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1 \to \int_0^2\int_0^y kxy\,dx\,dy = 1$$

$$\to \int_0^2 ky\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^y dy = 1 \to \frac{k}{2}\int_0^2 y^3\,dy = 1 \to \frac{k}{8}\,y^4\Big|_0^2 = 1$$

$$\to \frac{16k}{8} = 1 \to \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

ب)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_x^2 \frac{1}{2}xy\,dy = \frac{1}{2}x \times \frac{y^2}{2}\Big|_x^2 = \frac{1}{4}x(4-x^2)$$

$$\to \boxed{f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}(4-x^2), & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & o.w \end{cases}}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^y \frac{1}{2}xy\,dx = \frac{1}{2}y\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^y = \frac{y^3}{4}$$

$$\to \boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y^3}{4}, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & o.w \end{cases}}$$

ب)

$$\overline{x} = \int_0^2\int_0^y \frac{1}{2}x^2 y\,dx\,dy = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{y^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{\cancel{32}^{\,16}}{\cancel{2}\times3\times5} = \boxed{\frac{16}{15}}$$

$$\overline{x^2} = \int_0^2\int_0^y \frac{1}{2}x^3 y\,dx\,dy = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{y^6}{6}\Big|_0^2 = \frac{64}{2\times4\times6} = \frac{4}{3}$$

$$\overline{x^3} = \int_0^2\int_0^y \frac{1}{2}x^4 y\,dx\,dy = \frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{y^7}{7}\Big|_0^2 = \frac{64}{35}$$

$$\overline{x^4} = \int_0^2\int_0^y \frac{1}{2}x^5 y\,dx\,dy = \frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{y^8}{8}\Big|_0^2 = \frac{2^8}{2^4\times6} = \frac{8}{3}$$

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \frac{4}{3} - \left(\frac{16}{15}\right)^2 = \boxed{0.196}$$

$$C_{3,x} = \overline{x^3} - 3\overline{x^2}\,\overline{x} + 2(\overline{x})^3 = \frac{64}{35} - 3\times\frac{4}{3}\times\frac{16}{15} + 2\left(\frac{16}{15}\right)^3 = \boxed{-0.01}$$

$$C_{4,x} = \overline{x^4} - 4\overline{x^3}\,\overline{x} - 3\left(\overline{x^2}\right)^2 + 12\overline{x^2}(\overline{x})^2 - 6(\overline{x})^4$$

$$= \frac{8}{3} - 4\times\frac{64}{35}\times\frac{16}{15} - 3\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 12\times\frac{4}{3}\left(\frac{16}{15}\right)^2 - 6\times\left(\frac{16}{15}\right)^4 = \boxed{-0.031}$$

$$\overline{y} = \int_0^2\int_0^y \frac{1}{2}x y^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{y^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{2^5}{2^2\times5} = \boxed{\frac{8}{5}}$$

$$\overline{y^2} = \int_0^2\int_0^y \frac{1}{2}x y^3\,dx\,dy = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{y^6}{6}\Big|_0^2 = \frac{2^6}{2^3\times3} = \frac{8}{3}$$

$$\overline{y^3} = \int_0^2\int_0^y \frac{1}{2}x y^4\,dx\,dy = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{y^7}{7}\Big|_0^2 = \frac{32}{7}$$

$$\overline{y^4} = \int_0^2\int_0^y \frac{1}{2}x y^5\,dx\,dy = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{y^8}{8}\Big|_0^2 = 8$$

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2 = \frac{8}{3} - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \boxed{0.106}$$

$$C_{3,y} = \overline{y^3} - 3\overline{y^2}\,\overline{y} + 2(\overline{y})^3 = \frac{32}{7} - 3\times\frac{8}{3}\times\frac{8}{5} + 2\left(\frac{8}{5}\right)^3 = \boxed{-0.037}$$

$$C_{4,y} = \overline{y^4} - 4\overline{y^3}\,\overline{y} - 3\left(\overline{y^2}\right)^2 + 12\overline{y^2}(\overline{y})^2 - 6(\overline{y})^4$$

$$= 8 - 4\times\frac{32}{7}\times\frac{8}{5} - 3\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 12\times\frac{8}{3}\left(\frac{8}{5}\right)^2 - 6\left(\frac{8}{5}\right)^4 = \boxed{0.0079}$$

$$\overline{xy} = \int_0^2\int_0^y \frac{1}{2}x^2y^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{y^6}{6}\Big|_0^2 = \frac{2^6}{2^2\times 9} = \boxed{\frac{16}{9}}$$

$$\sigma_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y} = \frac{16}{9} - \frac{16}{15}\times\frac{8}{5} = \boxed{0.071}$$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{0.071}{0.443\times 0.326} = \boxed{0.492}$$

$$f_X(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2}xy}{\frac{y^3}{4}} = \frac{2x}{y^2}$$ درست

$$\rightarrow \boxed{f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{2x}{y^2}, & 0<x<y \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}}$$

$$f_Y(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{x}y}{\frac{\cancel{x}}{4}(4-x^2)} = \frac{2y}{4-x^2}$$

$$\rightarrow \boxed{f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{2y}{4-x^2}, & x<y<2 \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}}$$

$$m_{x|y} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_0^y \frac{2x^2}{y^2}\,dx = \frac{2}{y^2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^y = \boxed{\frac{2y}{3}}$$

$$m_{x^2|y} = \int_0^y x^2 f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_0^y \frac{2x^3}{y^2}\,dx = \frac{2}{y^2}\times\frac{x^4}{4}\Big|_0^y = \frac{y^2}{2}$$

$$\sigma^2_{x|y} = m_{x^2|y} - m^2_{x|y} = \frac{y^2}{2} - \frac{4y^2}{9} = \boxed{\frac{y^2}{18}}$$

$$m_{y|x} = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{Y|X}(y|x)\, dy = \int_x^2 y \frac{2y}{4-x^2}\, dy = \int_x^2 \frac{2y^2}{4-x^2}\, dy$$

$$= \frac{2}{4-x^2}\, \frac{y^3}{3}\Big|_x^2 = \frac{2}{3(4-x^2)}(8-x^3) = \frac{2(8-x^3)}{3(4-x^2)} = \frac{2}{3} \times \frac{\cancel{(2-x)}(4+x^2+2x)}{\cancel{(2-x)}(2+x)}$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}\, \frac{x^2+2x+4}{2+x}}$$

$$m_{y^2|x} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{Y|X}(y|x)\, dy = \int_x^2 y^2 \frac{2y}{4-x^2}\, dy = \frac{2}{4-x^2}\, \frac{y^4}{4}\Big|_x^2 = \frac{1}{2}\, \frac{16-x^4}{4-x^2}$$

$$= \frac{4+x^2}{2}$$

$$\sigma^2_{y|x} = m_{y^2|x} - m^2_{y|x} = \frac{4+x^2}{2} - \frac{4}{9}\, \frac{(x^2+2x+4)^2}{x^2+4x+4}$$

$$= \boxed{\frac{(x-2)^2(x^2+8x+4)}{18(x+2)^2}}$$

ش)

$$\hat{x} = \arg\max_x f_X(x) \quad , \quad \frac{d f_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{4}(4-x^2)\right] = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{4}\right)$$

$$= 1 - \frac{3}{4}x^2 = 0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$\xrightarrow{x>0} \quad \hat{x} = +\sqrt{\frac{4}{3}}$$

ج)

$$\hat{x} = \bar{x} = \boxed{\frac{16}{15}} \quad , \quad \overline{e^2} = \sigma_x^2 = \boxed{0.196}$$

چ)

$0 < x < y$

$$\hat{x} = \arg\max_x f_X(x|y) \quad , \quad \frac{d}{dx} f_X(x|y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{y^2}\right) = \frac{2}{y^2}$$

همواره مثبت

$$\boxed{\hat{x} = y}$$

ح)

$$\hat{x} = m_{x|y} = \boxed{\frac{2y}{3}} \quad , \quad \overline{e_2} = \sigma_{x|y}^2 = \boxed{\frac{y^2}{18}}$$

خ)

$$a = \frac{\overline{xy}}{\overline{y^2}} = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{8}{3}} = \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{\hat{x} = \frac{2}{3} y}$$

$$\overline{e_2} = \frac{\overline{x^2}\,\overline{y^2} - (\overline{xy})^2}{\overline{y^2}} = \frac{\frac{4}{3} \times \frac{8}{3} - (\frac{16}{9})^2}{\frac{8}{3}} = \frac{\frac{32}{9} - \frac{256}{81}}{\frac{8}{3}}$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{32}{27} = \boxed{\frac{4}{27}}$$

د)

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{0.071}{0.106} = 0.67$$

$$b = \bar{x} - a\bar{y} = \frac{16}{15} - 0.67 \times \frac{8}{5} \simeq 1.067 - 1.072 = -0.005$$

$$\rightarrow \hat{x} = \bar{x} + a(y - \bar{y}) \rightarrow \boxed{\hat{x} = 1.067 + 0.67(y - 1.6)}$$

$$\overline{e^2} = \sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_y^2} = 0.196 - \frac{0.071^2}{0.106} = \boxed{0.148}$$

سوال 7 -

الف)

$$X_i \sim N(0,\sigma^2)$$

مقدار پول دریافتی

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

می دانیم که جمع یک سری متغیر تصادفی نرمال خودش یک متغیر تصادفی نرمال با مشخصات زیر می شود:

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i \,,\, \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)$$

برای میانگین بدین گونه اثبات می کنیم:

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n\times 0 = 0 \longrightarrow \boxed{\bar{Y}=0}$$

برای واریانس:

$$\mathrm{Var}(X_1+X_2) = \mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)+2\,\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i \,,\, \sum_{j=1}^{n}X_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\underbrace{\cancel{\mathrm{Cov}(X_i,X_j)}}_{0}$$

$$\longrightarrow \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = n\sigma^2 \longrightarrow \boxed{\sigma_Y = \sqrt{n}\,\sigma}$$

ب)

$$P(|Y| \geq 2\sqrt{n}\,\sigma) = 1 - \int_{-2\sqrt{n}\sigma}^{2\sqrt{n}\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\pi n\sigma^2}} dx$$

$$= 1 - 0.954 = \boxed{0.046}$$