

## سوالات ستاره‌دار (\*) امتیازی هستند.

۱- از یک قطعه سیگنال EEG که با فرکانس ۲۵۶ هرتز نمونه‌برداری شده است، یک قطعه ۵۱۲ نقطه‌ای جدا کرده و DFT ۵۱۲ نقطه‌ای گرفتیم  $(X[k])$ .

الف) معیاری برای بررسی وجود و عدم وجود یا میزان نویز برق شهر موجود در سیگنال ارائه دهید.

ب) اگر دامنه DFT  $(|X[k]|)$  به دست آمده را بر حسب  $k$  (برای  $k < 256$ ) به صورت  $16 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$  تخمین بزنیم. نسبت انرژی باند آلفا به انرژی باند دلتا را محاسبه کنید.

ج) اگر به جای DFT ۵۱۲ نقطه‌ای، DFT ۱۰۲۴ نقطه‌ای سیگنال را محاسبه کنیم، نتیجه قسمت (ب) چه تغییری خواهد کرد؟ (به محاسبه نیاز نیست، به صورت کیفی توضیح دهید)

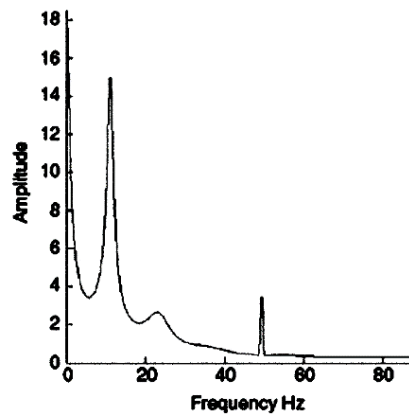
۲- فرض کنید  $x(t)$  یک سیگنال پیوسته با پهنای باند ۱ کیلوهرتز می‌باشد. می‌خواهیم با استفاده از DFT، طیف توان آن را طوری محاسبه کنیم که رزولوشن فرکانسی آن کمتر یا مساوی ۱۰۰ هرتز باشد. برای این کار حداقل فرکانس نمونه‌برداری، حداقل نمونه‌های زمانی مورد نیاز و حداقل طول سیگنال (به زمان) را مشخص کنید.

۳- سیگنال پلک زدن و حرکات افقی چشم را می‌توان به صورت یک پالس مثلثی با رابطه‌ی رو به رو تصور کرد:

$$EOG(t) = \begin{cases} 1 - |5t| & |t| < 0.2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

با در نظر گرفتن پهنای باند این سیگنال از صفر تا اولین فرکانسی که دامنه‌ی تبدیل فوریه صفر می‌شود، چه باندهایی از سیگنال EEG در هنگام ثبت ممکن است با سیگنال EOG آلوده شوند؟

۴- شکل زیر مربوط به چگالی طیف توان یک قطعه سیگنال EEG است.



یک قطعه از سیگنال EEG از یک فیلتر پایین‌گذر عبور کرده و سپس با دوره تناوب  $T_{s1}$  نمونه‌برداری شده و سیگنال  $x_1[n] = x(nT_{s1})$  ساخته می‌شود. یک قطعه  $N_1$  نقطه‌ای از سیگنال  $x_1[n]$  را انتخاب کرده و DFT  $N_1$ -نقطه‌ای آن را  $X_1[k]$  می‌نامیم.

الف) پیک در فرکانس‌های حدود صفر، ۱۰، ۲۲ و ۵۰ هرتز در طیف سیگنال EEG را چگونه می‌توان توجیه نمود؟

ب) چه فرکانس نمونه‌برداری برای این سیگنال پیشنهاد می‌کنید؟

پ) فرض کنید:  $N_1 = 2000, f_{s1} = 700\text{Hz}$ . اگر  $X_1[1500] = 2 + 3j$  مقدار  $X_1[k]$  در چه اندیس دیگری معلوم است؟ مؤلفه‌های سیگنال  $x_1[n]$  در چه فرکانس‌هایی (برحسب هرتز) معلوم است؟

ت) فرض کنید:  $N_1 = 1200, f_{s1} = 500\text{Hz}$ . مقادیر  $k$  در  $X_1[k]$  متناظر با فرکانس‌های ۱۲ تا ۲۲ هرتز چقدر است؟

۵- تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی پیوسته  $X$  و  $Y$  به صورت زیر است:

$$f_{xy}(x, y) = \begin{cases} \alpha xy; & 1 < x < 5, 0 < y < 3 \\ 0; & \text{O.W} \end{cases}$$

الف) تابع توزیع توام  $X$  و  $Y$  را محاسبه کنید.

ب) تابع چگالی متغیر تصادفی  $Z = X + 2Y$  را محاسبه کنید.

۶- فرآیند با توصیف تحلیلی  $X(t) = A \cos(\omega t + \theta)$  را در نظر بگیرید که در آن  $\omega$  پارامتر یقینی،  $A$  پارامتر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه  $(0, B)$  و  $\theta$  پارامتر تصادفی مستقل از  $A$  و با توزیع یکنواخت در بازه  $(0, 2\pi)$  است.

(الف) آیا این فرآیند WSS است؟ چرا؟

(ب) آیا این فرآیند در متوسط ارگادیک است؟ چرا؟

(ج) آیا فرآیند در تابع همبستگی ارگادیک است؟ چرا؟

\* ۷- الف) اگر  $X$  یک متغیر تصادفی باشد و  $c$  یک عدد ثابت باشد و متغیر تصادفی  $Y = X + c$  باشد،  $Cum(Y)$  را بر حسب  $Cum(X)$  محاسبه کنید.

(ب) برای  $Y$  تعریف شده در قسمت (الف)،  $Cum\{Y^n\}, n \geq 2$  را بر حسب آمارگان‌های متغیر تصادفی  $X$  بنویسید.

(ج) اگر مجموعه متغیرهای تصادفی  $\{X_1, \dots, X_m\}$  از مجموعه متغیرهای تصادفی  $\{Y_1, \dots, Y_m\}$  مستقل باشند، ثابت کنید:

$$Cum\{X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \dots, X_m + Y_m\} = Cum\{X_1, \dots, X_m\} + Cum\{Y_1, \dots, Y_m\}$$

\* ۸- همان‌طور که می‌دانیم سیگنال EEG یک سیگنال غیرایستا است که برای تحلیل آن باید به پنجره‌های زمانی ایستا تبدیل شود. اگر  $d(m)$  معیاری برای تفاوت دو پنجره  $m - 1$  و  $m$  باشد که نشان‌دهنده وقوع الگو یا رویدادهای متمایز در این دو پنجره است؛

(الف) با استفاده از معیار kurtosis،  $d(m)$  را پیشنهاد داده و آن را توضیح دهید.

(ب) چنانچه رویداد تشنج در پنجره  $m$  رخ دهد؛  $d(m)$  چگونه تغییر می‌کند؟

(ج) اگر تابع autocorrelation برای پنجره  $m$  ام به طول  $N$  با فاصله زمانی  $n, n + 1, \dots, n + (N - 1)$  به صورت زیر تعریف شود:

$$\hat{r}_x(k, m) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1-k} x(l+m+k)x(l+m), & k = 0, \dots, N-1 \\ 0, & k = N, N+1, \dots \end{cases}$$

مشخصه spectrogram را با استفاده از آن تشکیل داده و  $d(m)$  دیگری با توجه به این مشخصه پیشنهاد دهید.

۹- یکی از کاربردهای قطری کردن ماتریس محاسبه ساده‌تر توانی از آن است. ماتریس  $A$  با مقادیر ویژه ۱ و ۲ و بردارهای ویژه  $[1 \ 1]^T$  و  $[1 \ 2]^T$  را در نظر بگیرید.

الف) ماتریس  $A$  را بیابید.

ب) ماتریس  $A^3$  را محاسبه کنید.

ج) ماتریس  $B = \Phi \Lambda^3 \Phi^{-1}$  را که در آن  $\Lambda$  ماتریس مقادیر ویژه و  $\Phi$  ماتریس بردارهای ویژه  $A$  هستند را بیابید و با ماتریس حاصل در قسمت B مقایسه کنید.

د) ثابت کنید  $A^n = \Phi \Lambda^n \Phi^{-1}$

۱۰- بردار تصادفی  $\mathbf{X}$  را در نظر بگیرید که از سه متغیر تصادفی گوسی مستقل از هم تشکیل شده است  $(\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix})$ .

متغیرهای تصادفی  $X_1$ ،  $X_2$  و  $X_3$  دارای میانگین و واریانس‌های زیر هستند:

$$X_1 \sim N(16,1) \quad , \quad X_2 \sim N(16,2) \quad , \quad X_3 \sim N(16,3)$$

ماتریس‌های همبستگی ( $R_X$ ) و کواریانس ( $C_X$ ) را برای بردار تصادفی  $\mathbf{X}$  بدست آورید.

\* ۱۱- فرض کنید  $W$  یک فرآیند تصادفی است که توزیع آن در هر لحظه  $t$ ، گوسی با میانگین ۰ و واریانس  $t$  می‌باشد. فرآیند  $X$  نیز با فرم زیر مفروض است:

$$X(t) = e^{W(t)}$$

الف)  $E\{X(t)\}$  را برای هر لحظه  $t \geq 0$  بدست آورید.

ب)  $Var\{X(t)\}$  را برای هر لحظه  $t \geq 0$  بدست آورید.

۱۲- فرض کنید  $X_1$  و  $X_2$  دو متغیر تصادفی وابسته با میانگین صفر باشند. هرگونه انتقال متعامد (orthogonal transformation) از  $X_1$  و  $X_2$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Y_1 = \cos(\alpha) X_1 + \sin(\alpha) X_2$$

$$Y_2 = -\sin(\alpha) X_1 + \cos(\alpha) X_2$$

به طوری که  $\alpha$  زاویه چرخش است. اگر  $E\{X_1^2\} = \sigma_1^2$ ،  $E\{X_2^2\} = \sigma_2^2$  و  $E\{X_1 X_2\} = \rho \sigma_1 \sigma_2$ ، زاویه  $\alpha$  را طوری تعیین کنید که  $Y_1$  و  $Y_2$  ناهم‌بسته شوند.

۱۳- با فرض اینکه  $X(t)$  فرایند تصادفی WSS بوده و  $Y(t) = X(at + b) + X(at - b)$  باشد، عبارت  $R_{yy}(\tau)$  را برحسب  $R_{xx}(\tau)$  به دست آورید.

\* ۱۴- فرض کنید  $X(t)$  و  $Y(t)$  دو فرایند تصادفی متقابلاً WSS باشند و فرایند تصادفی  $Z(t)$  به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

ثابت کنید فرایند  $Z(t)$  هم WSS است.