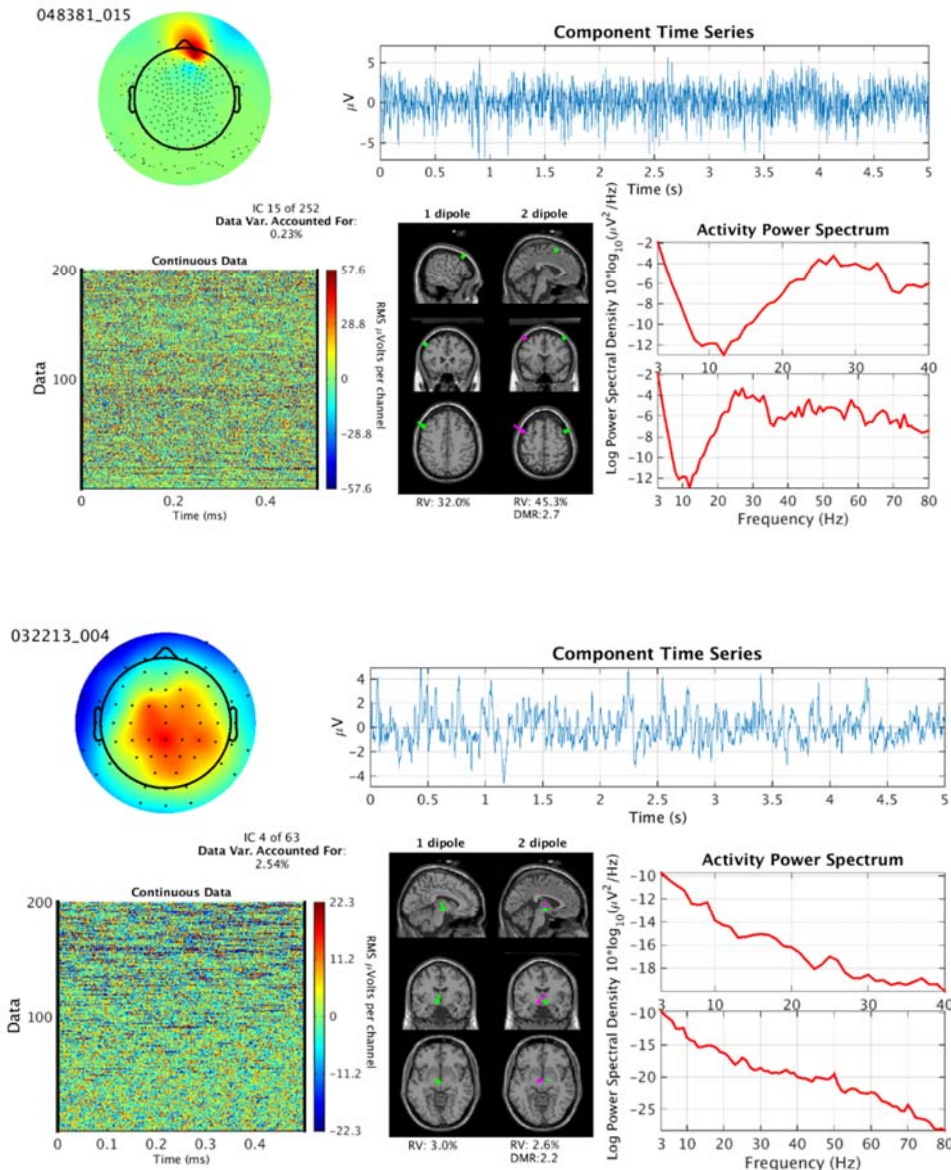
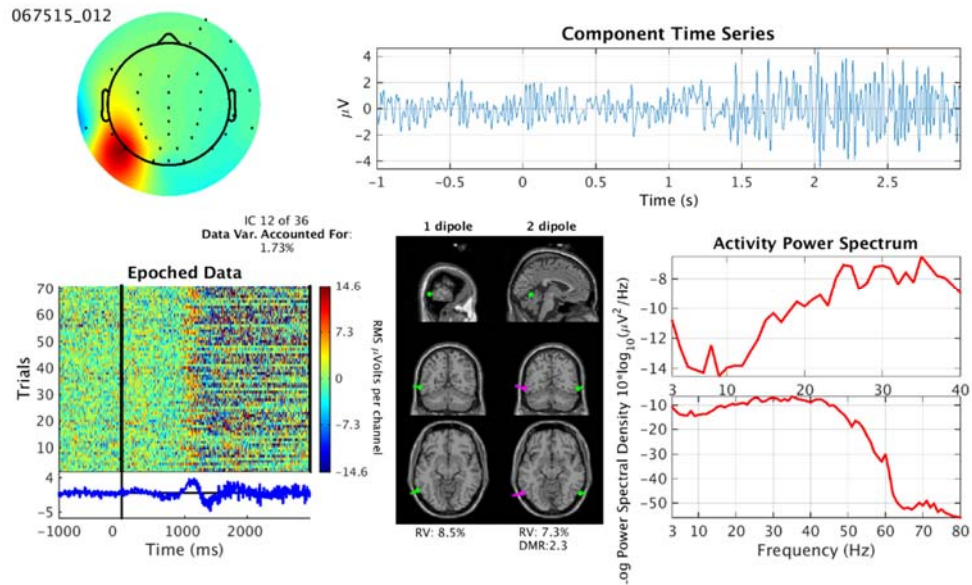


۱. الف) الگوریتم Canonical Correlation Analysis (CCA) چیست؟ چه کاربردی دارد؟ چگونه محاسبه می‌شود؟

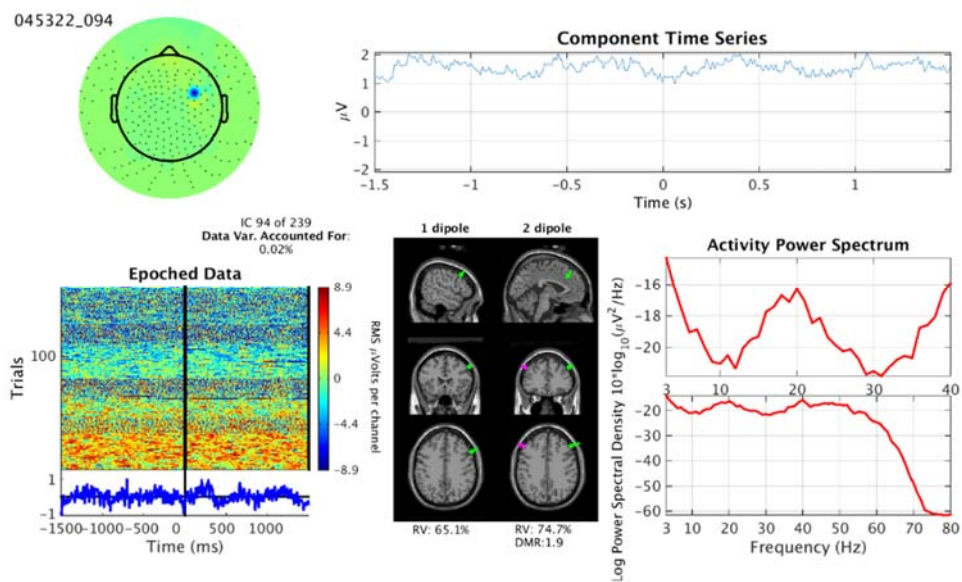
ب) الگوریتم جداسازی منابع با استفاده از CCA (BSS-CCA) چگونه کار می‌کند؟ مقاله ضمیمه را مطالعه نمایید.

۲. با توجه به اطلاعات ارائه شده در مورد هر یک از مؤلفه‌های مستقل حاصل از روش ICA، ماهیت (منبع مغزی، آرتیفکت، نویز کانال، نویز شهر و ...) هر یک از آن‌ها را با ارائه دلیل تعیین کنید.

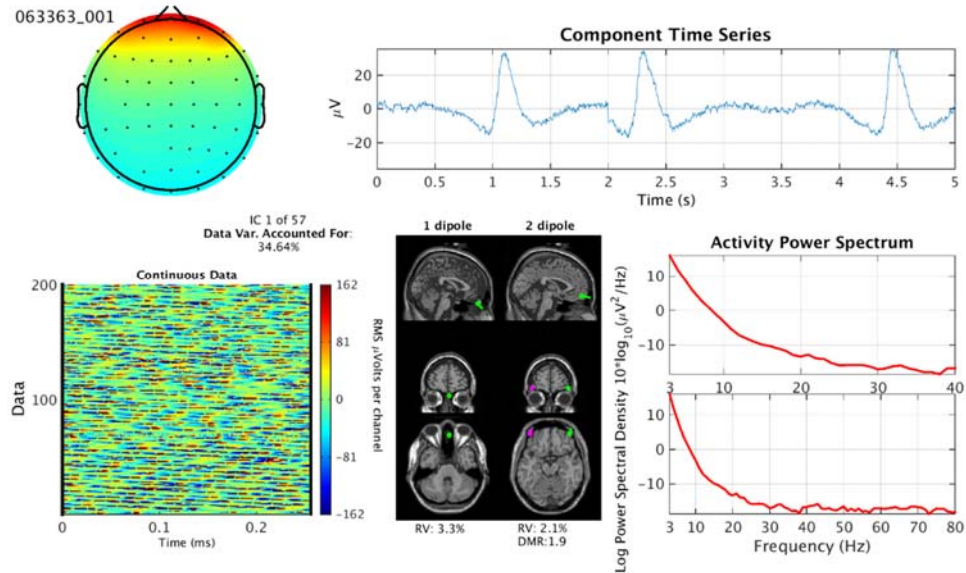




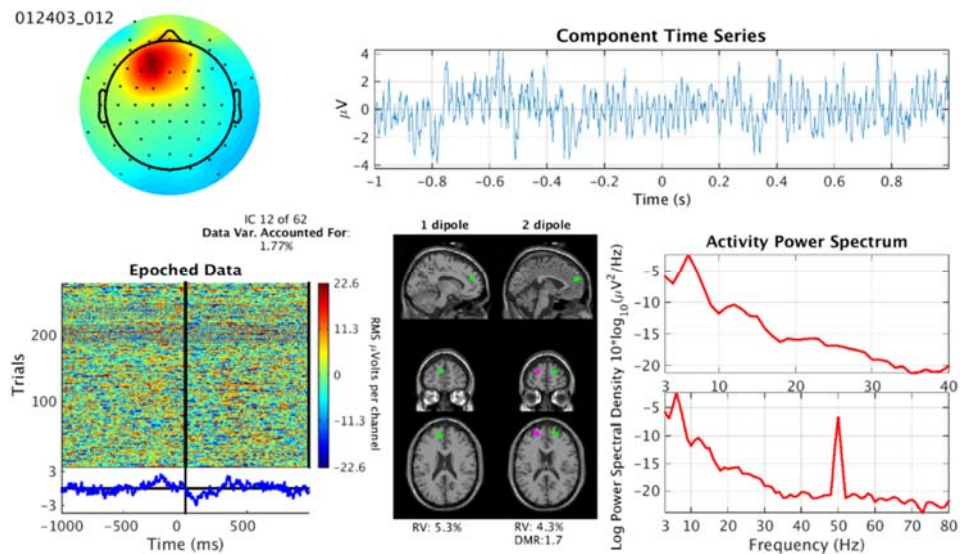
(ج)



(د)

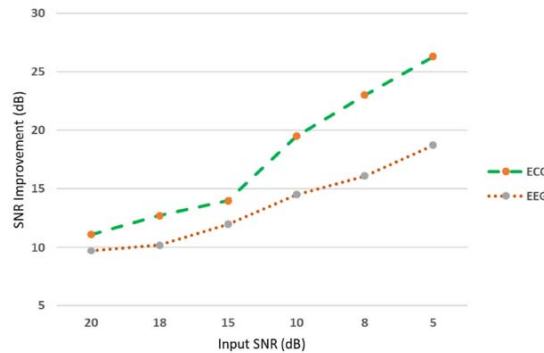


(ه)



(ی)

۳. در زمان ثبت سیگنال‌های EEG و ECG، سیگنال نویزی با SNRهای مختلف به این سیگنال‌های حیاتی اضافه شده است. نمودار زیر مقدار SNR improvement (بهبود SNR خروجی نسبت به SNR ورودی) را نشان می‌دهد. با استفاده از نمودار زیر مشخص کنید برای هر یک از دو سیگنال EEG و ECG کمترین خطای RRMSE به ازای چه SNR ورودی رخ می‌دهد؟ مقدار خطای RRMSE کمینه را نیز محاسبه کنید.



۴. یک سیگنال EEG ۳۲ کاناله با فرکانس نمونه برداری ۱۲۸ هرتز به مدت ۴ ثانیه ثبت شده است. این سیگنال حاوی نویز EOG می‌باشد. هدف حذف نویز EOG به کمک الگوریتم ICA است.

الف) می‌دانیم طبق قضیه حد مرکزی توزیع مجموع تعدادی متغیر تصادفی مستقل به توزیع گوسی متمایل می‌شود. از این سو جداسازی منابع به روش ICA برای پیدا کردن منابع مستقل به دنبال ماتریس جدا کننده‌ای می‌گردد که میزان غیرگوسی بودن هر منبع را ماکزیمم کند. نشان دهید چگونه با کمک کومولان مرتبه ۴ (kurtosis) می‌توان به پیدا کردن منابع غیرگوسی دست یافت؟

• Kurtosis:

$$k_4 = \frac{E[(x - \mu)^4]}{\sigma^4}$$

ب) دو عدم قطعیتی که در این روش برای منابع وجود دارد را نام ببرید.

ج) ابتدا با کمک PCA ابعاد مشاهدات را به ۱۵ کاهش داده و سپس با اعمال یک الگوریتم ICA روی مشاهدات سفیدسازی شده، ۱۵ منبع را استخراج می‌کنیم. اگر از بین منابع بدست آمده ۵ منبع مربوط به نویز EOG باشد، روابط را برای بدست آوردن سیگنال حذف نویز شده را بنویسید و یک روش برای بررسی میزان دقت الگوریتم معرفی کنید.

۵. نمونه‌های زمانی متناظر با بردار تصادفی  $x(t)$  به صورت ترکیب خطی بردار منابع مستقل  $s(t)$  با ماتریس ترکیب (معلوم)  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  تولید شده‌اند. یک الگوریتم ICA بر مشاهدات  $x(t)$  اعمال کرده‌ایم که خروجی آن ماتریس جداساز (demixing)  $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$  بوده است. برای ارزیابی الگوریتم ICA، معیار زیر ارائه شده است:

$$f = 1 - \frac{\text{trace}(C)}{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_{nm}}, \quad C = BA$$

الف) معیار  $f$  چه مقداری را محاسبه می‌کند؟ آیا معیار مناسبی برای ارزیابی الگوریتم ICA است؟ چرا؟

ب) معیار  $f$  را به گونه‌ای تغییر دهید که برای ارزیابی عملکرد الگوریتم ICA مناسب باشد. مینیمم و ماکزیمم آن چه قدر است؟

۶. برای حل مسئله زیر، یک بار از روش GEVD و یک بار از روش DSS استفاده کنید. برای هر روش یک شبه‌کد بنویسید.

سیگنال مشاهدات شامل ۸ کانال به طول ۱۰۰ ثانیه داده شده است. فرکانس نمونه‌برداری ۱۰۰ هرتز بوده و داده‌ها ترکیب خطی تعدادی منبع به اضافه نویز مشاهدات هستند. دو منبع از منابع ترکیب شده، منابع خاص بوده و دارای ویژگی‌های زیر هستند:

(۱) منبع  $s_1(t)$  یک سیگنال مثلثی متناوب است.

(۲) منبع  $s_2(t)$  یک سیگنال غیرایستا است که در بازه‌های خاصی on بوده و در بقیه بازه‌ها تقریباً off است.

داده مشاهده شده را می‌توانیم به صورت زیر مدل کنیم:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{x}_3(t)$$

که در آن  $\mathbf{x}(t)$ ،  $\mathbf{x}_1(t)$ ،  $\mathbf{x}_2(t)$  و  $\mathbf{x}_3(t)$  به ترتیب سیگنال مشاهدات، اثر منبع  $s_1$  در سیگنال مشاهدات، اثر منبع  $s_2$  در سیگنال مشاهدات و اثر بقیه منابع و نویز را در سیگنال مشاهدات نشان می‌دهند.

الف) اگر بدانیم دوره تناوب موج مثلثی ۴ ثانیه (۴۰۰ نمونه) است، تخمین منبع  $\hat{s}_1(t)$  و اثر آن را در مشاهدات  $\hat{\mathbf{x}}_1(t)$  به دست آورید.

ب) اگر زمان‌های on و off منبع  $s_2(t)$  داده شده باشد (مثلاً در یک بردار  $T_{on}$  داده شده، ۱ معادل on بودن و صفر معادل off بودن است)، تخمین منبع  $\hat{s}_2(t)$  و اثر آن را در مشاهدات  $\hat{\mathbf{x}}_2(t)$  به دست آورید.

۷. سیگنال EEG ثبت شده از ۳۲ کانال به طول ۲۰۰ ثانیه داده شده است ( $x_i(t), i = 1:32$ ). فرکانس نمونه‌برداری ۱۰۰ هرتز بوده و داده‌ها ترکیب خطی تعدادی منبع به اضافه نویز مشاهدات هستند. منبع  $s_1(t)$  از منابع ترکیب شده، منبع صرعی بوده و به صورت اسپایکی است، یعنی یک سیگنال غیر ایستا است که در بازه‌های خاصی on بوده و در بقیه بازه‌ها تقریباً off است. با الگوریتمی توانسته‌ایم زمان on و off بودن منبع صرعی را تخمین بزنیم و در یک بردار  $T_{on}$  ذخیره کنیم (۱ معادل on بودن و صفر معادل off بودن است). همچنین می‌دانیم که روی برخی از کانال‌ها، نویزی وجود دارد که با منبع صرعی همبستگی زیادی دارد. شماره کانال‌هایی که احتمال می‌دهیم (یعنی کاملاً مطمئن نیستیم!) نامطلوب هستند را در بردار  $Ch_{noise}$  ذخیره کرده‌ایم. می‌خواهیم منبع صرعی  $s_1(t)$  را به صورت ترکیب ۳۲ کانال مشاهدات تخمین بزنیم.

الف) اگر نخواهیم از اطلاعاتی که در مورد کانال‌های نویزی داریم استفاده کنیم، یک تابع هدف مناسب برای تخمین  $S_1(t)$  ارائه کنید که بیشینه کردن آن متناظر با پاسخ بهینه برای  $S_1(t)$  باشد. تابع هدف را به صورت دقیق بر حسب معلومات مسئله بنویسید.

ب) در صورتی که بخواهیم از اطلاعات منابع نامطلوب در تخمین منبع  $S_1(t)$  استفاده کنیم، یعنی بخواهیم منبعی را به دست آوریم که در تولید آن کمتر از کانال‌های نویزی استفاده شده باشد (یعنی ضرایب بردار ترکیب متناظر با کانال‌های نامطلوب کوچک شود)، تابع هدف قسمت (الف) را تغییر دهید. این اطلاعات را به صورت یک ترم رگولاریزه با ضریب  $\lambda$  به صورت یا مخرج تابع هدف قسمت (الف) اضافه کنید.

ج) تابع هدف قسمت (ب) را به گونه‌ای ساده کنید که به فرم نسبت راییلی تبدیل شود.

د) با استفاده از تابع هدف قسمت (ج)، روش استخراج منبع مطلوب  $S_1(t)$  را با حل یک مسئله GEVD توضیح دهید.

۸. سیگنال EEG از یک بیمار صرعی در یک بازه غیرتشنجی ثبت شده است. این سیگنال شامل اسپایک‌های صرعی، سیگنال EEG زمینه و آرتیفکت‌های ماهیچه‌ای است. می‌خواهیم زیرفضای مطلوب سیگنال (بخش صرعی) را استخراج کنیم. با استفاده از یک الگوریتم تشخیص اسپایک، زمان رخداد اسپایک‌ها (نمونه‌های شروع و پایان اسپایک‌ها) را تعیین کرده و در یک بردار ذخیره کرده‌ایم. اطلاع دیگری که در مورد منبع صرعی داریم، هموار بودن فضایی آن است؛ یعنی اثر منبع صرعی بر روی الکترودهای ثبت تا حد ممکن هموار بوده و بر روی الکترودهای نزدیک به هم از نظر کمی ضریب مشابهی ایجاد می‌کند. سیگنال EEG ثبت‌شده از ۳۲ کانال به طول ۳۰ ثانیه داده شده است  $x_i(t)$ ,  $i = 1:32$ . فرکانس نمونه‌برداری ۱۲۸ هرتز بوده و می‌توانیم مدل داده‌ها را به صورت ترکیب خطی تعدادی منبع به اضافه نویز مشاهدات در نظر بگیریم. می‌خواهیم با استفاده از یک الگوریتم مبتنی بر GEVD زیرفضای مطلوب سیگنال (بخش صرعی) را استخراج کنیم (فرض کنید فقط یک منبع صرعی داریم).

الف) اگر نخواهیم از اطلاعاتی که در مورد هموار بودن فضایی منبع صرعی داریم استفاده کنیم، یک تابع هدف مناسب برای تخمین  $S_1(t)$  (منبع صرعی) ارائه کنید که بیشینه کردن آن متناظر با پاسخ بهینه برای  $S_1(t)$  باشد. تابع هدف را به صورت دقیق بر حسب معلومات مسئله بنویسید.

ب) با توجه به مکان سه‌بعدی قرارگیری الکترودها  $(\ell_i, i = 1:32)$ ، ماتریس  $A$  را به صورت زیر می‌سازیم:

$$A \in \mathbb{R}^{32 \times 32}, A_{i,j} = A_{j,i} = e^{-\|\ell_i - \ell_j\|_2^2}, \ell_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, i, j = 1:32$$

توضیح دهید که چگونه بهینه‌سازی تابع  $f(r)$  بیانگر هموار بودن فضایی بردار  $r \in \mathbb{R}^{32}$  بر روی الکترودهاست. مشخص کنید تابع  $f(r)$  بایستی مینیموم شود یا ماکزیمم.

$$f(r) = \sum_{i,j=1:32} A_{i,j} (r_i - r_j)^2$$

ج) نشان دهید که  $f(r)$  را می‌توان به صورت ضرب بردار در ماتریس در بردار زیر نشان داد:

$$f(r) = r^T B r, \quad B_{i,j} = \begin{cases} -A_{i,j} & i \neq j \\ \left( \sum_{j=1:32} A_{i,j} \right) - A_{i,j} & i = j \end{cases}$$

د) قید هموار بودن فضایی منبع  $s_1(t)$  را به صورت یک مسئله بهینه‌سازی (مینیموم یا ماکزیمم کردن یک عبارت بر حسب معلومات مسئله) بنویسید.

راهنمایی: فرض کنید که بردار ترکیب متناظر با منبع صرعی همان بردار تجزیه در مدل GEVD است.

ه) قید ارائه‌شده در قسمت (د) را به مسئله قسمت (الف) به گونه‌ای اضافه کنید که مسئله به صورت ماکزیمم کردن یک کسر تبدیل شود. این کسر را به فرم نسبت رابلی ساده کنید.

و) با استفاده از تابع هدف قسمت (ه)، روش استخراج منبع مطلوب  $s_1(t)$  را با حل یک مسئله GEVD توضیح دهید.

ز) با استفاده از نتیجه قسمت (و)، نحوه استخراج سیگنال مطلوب را توضیح دهید.

سوال امتیازی:

۹. اثبات کنید الگوریتم‌های GEVD و DSS برای استخراج منبع اول با دانش داشتن حداقل یک منبع با بیشینه غیرایستایی (منابع با زمان‌های on و off مانند منابع اسپایک صرعی) به یک جواب همگرا می‌شوند. در مورد استخراج بقیه منابع چه می‌توان گفت؟

راهنمایی: نشان دهید الگوریتم DSS هم به مسئله قطری‌سازی همزمان دو ماتریس کوواریانس مشابه الگوریتم GEVD قابل تبدیل است.