تمرین سری 4 درس EEG - رادین خیام - 99101579

سؤال 1 -

الف)

$$m_K = \frac{1}{1000}\sum_{n=1}^{1000} x_K[n]$$

ب)

$$\sigma_K^2 = \frac{1}{1000}\sum_{n=1}^{1000} (x_K[n] - m_K)^2$$

پ)

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{1000}\sum_{n=1}^{1000} (x_i[n] - m_i)(x_j[n] - m_j)$$

$$\rho_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j}$$

ت)

$$m_K^{(3)} = \frac{1}{1000}\sum_{n=1}^{1000} (x_K[n])^3$$

ث)

$$C_K^{(4)} = m_K^{(4)} - 4 m_K^{(3)} m_K^{(1)} - 3(m_K^{(2)})^2 + 12\, m_K^{(2)} (m_K^{(1)})^2 - 6 (m_K^{(1)})^4$$

$$m_K^{(j)} = \frac{1}{1000}\sum_{n=1}^{1000} (x_K[n])^j$$

ج)

$$N_K = \sum_{n=1}^{1000} \mathrm{abs}\left(\mathrm{sgn}(x_K[n+1]) - \mathrm{sgn}(x_K[n])\right)$$

ج)

می‌شد ۱۰۰۰ تا ای هم گرفت ولی برای بار محاسباتی کمتر از توان 2 استفاده می‌کنیم.

در ابتدا DFT 1024 نقطه ای می‌گیریم از سیگنال:

$$X_K[l] = \sum_{n=1}^{1024} x_K[n]\, e^{-j\frac{2 l \pi}{1024}(n-1)}$$

فرض می‌کنیم فرکانس نمونه برداری f_s بوده است:

δ : 0.5Hz − 4

θ : 4 Hz − 8 Hz

α : 8 Hz − 13 Hz

β : 13 Hz − 30 Hz

معادل نمونه DFT $\longleftrightarrow$

$$l_1^{\delta} = 0.5 \times \frac{1024}{f_s} \;,\; l_2^{\delta} = 4 \times \frac{1024}{f_s}$$

$$l_1^{\theta} = 4 \times \frac{1024}{f_s} \;,\; l_2^{\theta} = 8 \times \frac{1024}{f_s}$$

$$l_1^{\alpha} = 8 \times \frac{1024}{f_s} \;,\; l_2^{\alpha} = 13 \times \frac{1024}{f_s}$$

$$l_1^{\beta} = 13 \times \frac{1024}{f_s} \;,\; l_2^{\beta} = 30 \times \frac{1024}{f_s}$$

$$f_K = \frac{K}{N} f_s$$

$$E_{total} = \sum_{l=0}^{1024} |X_K[l]|^2$$

$$E_K^{\delta} = \frac{1}{E_{total}} \times \sum_{l_1^{\delta}}^{l_2^{\delta}} |X_K[l]|^2$$

$$E_K^{\theta} = \frac{1}{E_{total}} \times \sum_{l_1^{\theta}}^{l_2^{\theta}} |X_K[l]|^2$$

$$E_K^{\alpha} = \frac{1}{E_{total}} \times \sum_{l_1^{\alpha}}^{l_2^{\alpha}} |X_K[l]|^2$$

$$E_K^{\beta} = \frac{1}{E_{total}} \times \sum_{l_1^{\beta}}^{l_2^{\beta}} |X_K[l]|^2$$

ح) دو باره همان DFT 1024 نقطه‌ای را می‌گیریم سپس :

$$f_{mean,k} = \frac{1}{1024} \times \sum_{l=0}^{1024} |X_k[l]|^2 \times \underbrace{\frac{l}{1024} \times f_s}_{f_l}$$

کاری کردیم این هست که توان سیگنال در هر فرکانس را در آن فرکانس ضرب کردیم و سپس میانگین گرفتیم انگار داریم میانگین وزن دار از فرکانس‌ها می‌گیریم و وزن ها میزان توان در آن فرکانس هست.

خ)

$f_{med,k}$:

$$l_{med,k} = \frac{1024 \times f_{med,k}}{f_s}$$

$$\sum_{l=0}^{l_{med,k}} |x_k[l]|^2 \geq \frac{1}{2} E_{total}$$

در واقع باید از نمونه اول شروع کنیم و انرژی را محاسبه کنیم و کم کم جلو بریم تا زمانی که بزرگتر مساوی نصف انرژی کل سیگنال بشود سپس ببینیم که این نمونه معادل چه فرکانسی هست، آن فرکانس، فرکانس میانه می‌شود.

سؤال 2 -

برای قسمت زمانی : 30 انحراف معیار

30 skewness

برای قسمت فرکانسی : 29 پنجره هم پوشان داریم هر پنجره 100 بین.

29×100

$\longrightarrow 2900 + 60 = \boxed{2960}$

سؤال 3 -

$TP + FN = 100$ بیمار

$FP + TN = 120$ سالم

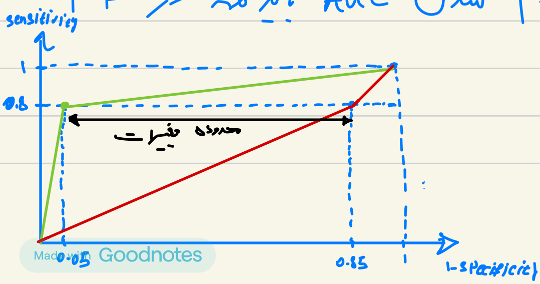
برای نقطه میانی داریم:

$$\text{sensitivity} = \frac{TP}{TP+FN} = \frac{TP}{100} = \frac{8}{10} \longrightarrow TP = 80$$

$$\text{specificity} = \frac{TN}{FP+TN} = \frac{TN}{120} = \frac{75}{100} \longrightarrow TN = 90$$

بعد از افزایش تعداد افراد سالم $\longleftarrow$ $FP + TN = 5 \times 120 = 600$

sensitivity که همان 0.8 می ماند، برای ماکسیمم شدن AUC باید کل 480 نفر اضافه شده در دسته TN باشند و برای مینیمم شدن AUC باید همه در FP باشند:



$$1 - \text{specificity} = 1 - \frac{570}{600} = 0.05$$

$$1 - \text{specificity} = 1 - \frac{90}{600} = 0.85$$

$$AUC_{max} = 0.02 + 0.855 = \boxed{0.857}$$

$$AUC_{min} = 0.34 + 0.135 = \boxed{0.475}$$

سؤال ۴-

فرکانس های مدنظر 6، 12 و 20 هرتز هست و بازه مورد بررسی 5 تا 30 هرتز بردارهای Y_1، Y_2 و Y_3 را به این صورت تشکیل می دهیم:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} \cos(2\pi \times 6t) \\ \sin(2\pi \times 6t) \\ \cos(2\pi \times 18t) \\ \sin(2\pi \times 18t) \\ \cos(2\pi \times 30t) \\ \sin(2\pi \times 30t) \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} \cos(2\pi \times 12t) \\ \sin(2\pi \times 12t) \\ \cos(2\pi \times 24t) \\ \sin(2\pi \times 24t) \end{bmatrix}, \quad Y_3 = \begin{bmatrix} \cos(2\pi \times 20t) \\ \sin(2\pi \times 20t) \end{bmatrix}$$

در Y_1 هارمونیک های زوج 6 هرتز را نذاشتیم چون با 12 هرتز قاطی می شود.

$$\rho_1 = CCA(X, Y_1)$$

که مشاهدات

$$\rho_2 = CCA(X, Y_2) - CCA(X, Y_1)$$

$$\rho_3 = CCA(X, Y_3)$$

برای اینکه به اشتباه 12 هرتز جای 6 هرتز تشخیص داده نشود.

بعد اینکه این مرحله انجام شد بررسی می کنیم که کدام یک از ρ ها بزرگتر بوده، فرکانس تشخیص داده شده مربوط به آن می شود.

سؤال 5 -

می توانیم دستورات را مثلاً به سه دسته تقسیم کنیم و به هر دسته یک شکل و رنگ مشخص اختصاص دهیم. مثلاً دسته اول مثلث قرمز، دسته دوم مربع آبی و دسته سوم دایره سیاه. سپس این شکل ها به صورت متوالی به عنوان مثال با فاصله 130 میلی ثانیه ای روی وسط صفحه نمایش ظاهر می شوند و وقتی فرد دسته موردنظر را روی صفحه دید ما P300 را تشخیص می دهیم سپس به صورت سریال این بار با استفاده از تحریک شنوایی با 4 صدای متفاوت تشخیص می دهیم که کدام یک از 4 دستور داخل دسته مدنظر فرد بوده است، دوباره از روی P300.

سؤال 6 -

$9600 \times \frac{2}{100} = 192$ Positive $\longrightarrow TP + FN = 192$

$9600 - 192 = 9408$ negative $\longrightarrow TN + FP = 9408$

$TP = 178 \longrightarrow FN = 14$

$FP = 110 \longrightarrow TN = 9298$

	P	N
$\hat{P}$	178	110
$\hat{N}$	14	9298

$$\text{Accuracy} = \frac{TP+TN}{TP+TN+FP+FN} = \frac{178+9298}{178+9298+110+14} \simeq \boxed{98.7\ \%}$$

$$\text{Precision} = \frac{TP}{TP+FP} = \frac{178}{178+110} \simeq \boxed{61.8\ \%}$$

$$\text{Sensitivity} = \frac{TP}{TP+FN} = \frac{178}{178+14} \simeq \boxed{92.7\ \%}$$

$$\text{Specificity} = \frac{TN}{TN+FP} = \frac{9298}{9298+110} \simeq \boxed{98.8\ \%}$$

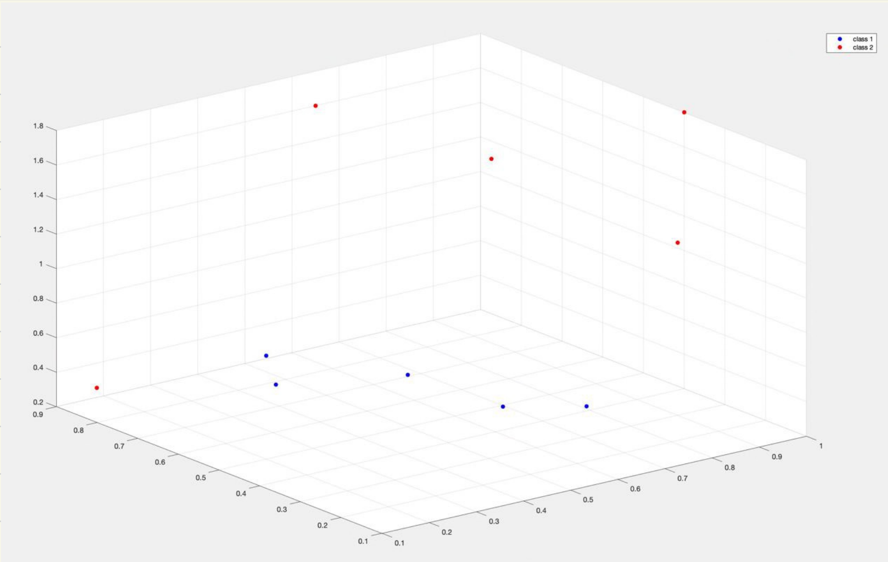
$$\text{F1-Score} = \frac{TP}{TP+\frac{1}{2}(FP+FN)} = \frac{178}{178+\frac{14+110}{2}} \simeq \boxed{74.2\%}$$

$$\text{Balanced accuracy} = \frac{1}{2}(\text{sensitivity}+\text{specificity}) = \boxed{95.8\ \%}$$

Made with Goodnotes

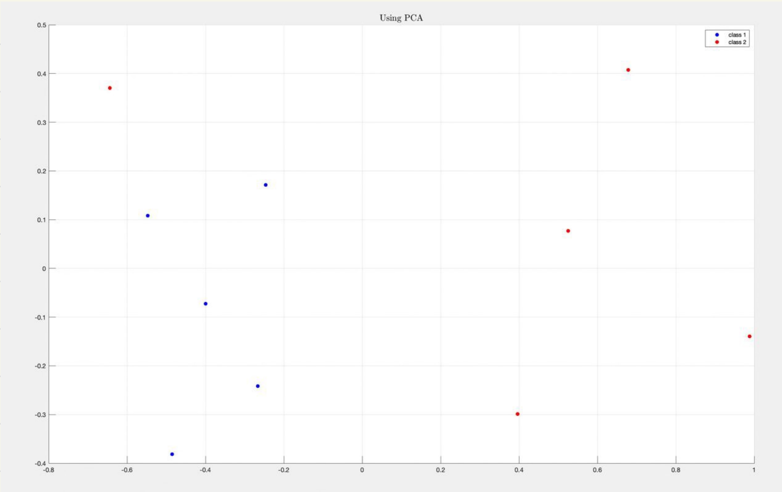
سوال 7 -

الف)



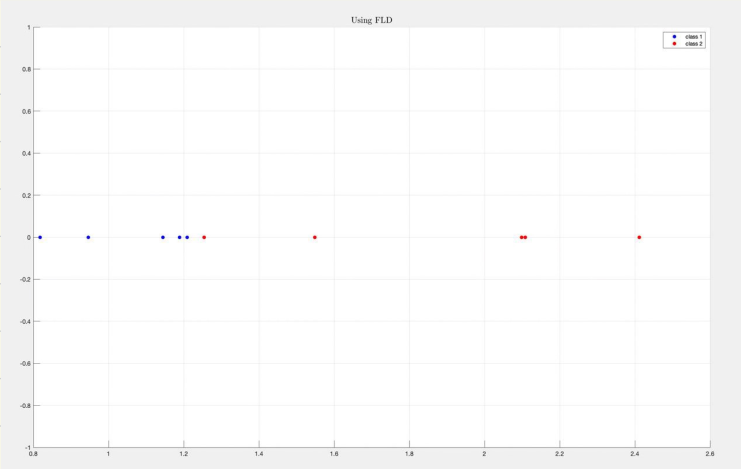
همانطور که دیده می‌شود داده ها جدایی پذیر نیستند.

ب)



با کاهش بعد به 2 به روش PCA هم می‌بینیم که هنوز داده‌ها جدایی پذیر نیستند .

پ)



می‌بینیم که با استفاده از روش FLD و کاهش بعد به 1 داده ها جدایی پذیر شده اند

همه کد ها در فایل Q7.mat قرار داده شده است .

سوال 8 -

$$\mu_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mu_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

$$S_B = (\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_1)^T = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} [\overbrace{x_2 - x_1}^{\Delta x}, \overbrace{y_2 - y_1}^{\Delta y}, \overbrace{z_2 - z_1}^{\Delta z}]$$

$$\longrightarrow S_B = \begin{bmatrix} \Delta x^2 & \Delta x \Delta y & \Delta x \Delta z \\ \Delta y \Delta x & \Delta y^2 & \Delta y \Delta z \\ \Delta z \Delta x & \Delta z \Delta y & \Delta z^2 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \sum_{x \in C_1} (x - \mu_1)(x - \mu_1)^T = I_{3\times3}$$

$\longrightarrow$ به دلیل توزیع یکنواخت داده ها داخل کره و تقارن کروی موجود.

$$S_2 = \sum_{x \in C_2} (x - \mu_2)(x - \mu_2)^T = I_{3\times3}$$

$$\longrightarrow S_W = S_1 + S_2 = 2I_{3\times3}$$

برای LDA :

$$\max_{v: \|v\|=1} \frac{v^T S_B v}{v^T S_W v} = \frac{v^T S_B v}{v^T (2I) v} = \frac{1}{2} \frac{v^T S_B v}{v^T v}$$

جواب بهینه را با استفاده از مقادیر ویژه تعمیم یافته پیدا می کنیم و بردار ویژه ای که متناظر با بزرگترین مقدار ویژه باشد بهترین جواب است.

برای زدن یک مثال عددی چون گفته شده که بر اساس معیار فیشر بهترین ویژگی ها f_2 , f_1 و f_3 بوده به ترتیب، پس فاصله میانگین ها در راستای f_2 , f_1 و f_3 به ترتیب از بزرگ به کوچک بوده، همچنین گفته شده که محدوده همه ویژگی ها بین 0 تا 10 هست با براین می توان نوشت:

$$0 < \Delta z < \Delta x < \Delta y < 10$$

Made with Goodnotes

ما این اعداد را فرض می‌کنیم:

$$\Delta z = 2$$
$$\Delta x = 4$$
$$\Delta y = 6$$

حال ماتریس پخشی میان کلاسی را تشکیل می‌دهیم:

$$S_B = \begin{bmatrix} 16 & 24 & 8 \\ 24 & 36 & 12 \\ 8 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

حال مقادیر تعمیم یافته را برای S_B و S_W حساب می‌کنیم:

$$\mathrm{eig}(S_B, 2I)$$

بزرگترین مقدار ویژه 28 است و بردار ویژه متناظر آن:

$$V = \begin{bmatrix} 0.378 \\ 0.567 \\ 0.189 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \boxed{f = 0.378 f_1 + 0.567 f_2 + 0.189 f_3}$$

سؤال ۶-

الف)

$$y_k^{(i)} = w^T x_k^{(i)} \xrightarrow{\text{کسر مد نظر}} \frac{w^T \overbrace{\left(\sum_{i=1}^{50} x_1^{(i)} x_1^{(i)T}\right)}^{C_1} w}{w^T \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{50} x_2^{(i)} x_2^{(i)T}\right)}_{C_2} w}$$

$$\rightarrow \max_{w} \frac{w^T C_1 w}{w^T C_2 w}$$

این کسر باید ماکزیمم شود، w های ادلی که در میاریم انگار واریانس را برای کلاس 1 ماکزیمم و برای کلاس 2 مینیمم می کنند، w های آخری که بدست میاد انگار واریانس را برای کلاس 2 ماکزیمم و برای کلاس 1 مینیمم می کند.

ب)

$$y_k^{(i)} = w^T x_k^{(i)}, \qquad w \in R^{10\times 1}, \ k \in \{1,2\}, \ i \in \{1,\dots,50\}$$

$$y_k'^{(i)} = \left(y_k^{(i)}(2:end) - y_k^{(i)}(1:end-1)\right) \times f_s$$

$$= w^T \left(x_k^{(i)}(2:end) - x_k^{(i)}(1:end-1)\right) \times f_s = w^T x_k'^{(i)}$$

بنابراین قید نرم بودن را می توانیم به این صورت بنویسیم:

$$\min \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{50} y_k'^{(i)} y_k'^{(i)T} = \min \left(w^T \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{50} x_k'^{(i)} x_k'^{(i)T} w\right)$$

Made with Goodnotes

ج)

چون می‌خواهیم که نرم بودن ماکزیمم شود یا در واقع عبارتی که صفحه پیش نوشتیم مینیمم شود، پس باید آن را به مخرج کسری که می‌خواهیم ماکزیممش کنیم اضافه شود تا مینیمم شدن آن متناظر با ماکزیمم شدن کسر شود.

$$C' = \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{50} X_k'^{(i)} X_k'^{(i)T}$$

$$\longrightarrow \max_{w} \frac{w^T C_1 w}{w^T C_2 w + \lambda w^T C' w}$$

د)

در واقع نیاز هست جای صورت و مخرج را عوض کنیم و دو بار GEVD حل کنیم:

$$① \quad \max_{w} \frac{w^T C_1 w}{w^T (C_2 + \lambda C') w} \xrightarrow{eig(C_1, C_2+\lambda C')} \lambda_1^1 > \lambda_2^1 > \dots > \lambda_{10}^1 \,/\, w_1^1, w_2^1, \dots, w_{10}^1$$

$$② \quad \max_{w} \frac{w^T C_2 w}{w^T (C_1 + \lambda C') w} \xrightarrow{eig(C_2, C_1+\lambda C')} \lambda_1^2 > \lambda_2^2 > \dots > \lambda_{10}^2 \,/\, w_1^2, w_2^2, \dots, w_{10}^2$$

فرض کنیم که مثلاً دو جفت فیلتر انتخاب شده باشد.

$$y_k^{(i)} = \begin{bmatrix} w_1^1 X_k^{(i)} \\ w_2^1 X_k^{(i)} \\ w_2^2 X_k^{(i)} \\ w_1^2 X_k^{(i)} \end{bmatrix}$$

w_i^1 ها واریانس کلاس 1 را زیاد و w_i^2 واریانس کلاس 2 را زیاد می‌کنند.

سوال ۱۰-

$X_k^{(i)} \in \mathbb{R}^{10\times1000}$, $w_i^j \in \mathbb{R}^{10\times1}$

$$C_1 = \sum_{i=1}^{50} X_1^{(i)} X_1^{(i)T} , \quad C_2 = \sum_{i=1}^{50} X_2^{(i)} X_2^{(i)T} , \quad C_3 = \sum_{i=1}^{50} X_3^{(i)} X_3^{(i)T} , \quad C_4 = \sum_{i=1}^{50} X_4^{(i)} X_4^{(i)T}$$

$$\max_w \frac{w^T C_1 w}{w^T (C_2 + C_3 + C_4) w} \xrightarrow{eig(C_1, C_2+C_3+C_4)} \begin{array}{l} \lambda_1^1 > \lambda_2^1 > \cdots > \lambda_{10}^1 \\ w_1^1 , w_2^1 , \ldots , w_{10}^1 \end{array}$$

$$\max_w \frac{w^T C_2 w}{w^T (C_1 + C_3 + C_4) w} \xrightarrow{eig(C_2, C_1+C_3+C_4)} \begin{array}{l} \lambda_1^2 > \lambda_2^2 > \cdots > \lambda_{10}^2 \\ w_1^2 , w_2^2 , \ldots , w_{10}^2 \end{array}$$

$$\max_w \frac{w^T C_3 w}{w^T (C_1 + C_2 + C_4) w} \xrightarrow{eig(C_3, C_1+C_2+C_4)} \begin{array}{l} \lambda_1^3 > \lambda_2^3 > \cdots > \lambda_{10}^3 \\ w_1^3 , w_2^3 , \ldots , w_{10}^3 \end{array}$$

$$\max_w \frac{w^T C_4 w}{w^T (C_1 + C_2 + C_3) w} \xrightarrow{eig(C_4, C_1+C_2+C_3)} \begin{array}{l} \lambda_1^4 > \lambda_2^4 > \cdots > \lambda_{10}^4 \\ w_1^4 , w_2^4 , \ldots , w_{10}^4 \end{array}$$

حال از هر ۱۰ بردار ویژه که برای هر کلاس بدست آوردیم F بردار اول را نگه می داریم که چون 4 کلاس داریم در مجموع می شود 4F فیلتر.

$$W_{CSP} = [\underbrace{w_1^1 , \ldots , w_F^1}_{F} , \underbrace{w_1^2 , \ldots , w_F^2}_{F} , \underbrace{w_1^3 , \ldots , w_F^3}_{F} , \underbrace{w_1^4 , \ldots , w_F^4}_{F}]$$

$$\rightarrow Y_K^{(i)} = W_{CSP}^T X_K^{(i)} \quad , \quad Y_K^{(i)} \in \mathbb{R}^{4F\times1000}$$