تمرین سری 3 درس EEG Signal Processing – رادین خیام – 99101579

سؤال 1 -

الف) در روش CCA ما دو بردار تصادفی داریم به عنوان مثال :

$$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T \,,\quad Y=(y_1,y_2,\dots,y_m)^T$$

در این صورت ماتریس کوواریانس این دو بردار C_{XY} می باشد که درایه های آن $cov(x_i,y_j)$ هستند. حال هدف در این جا این هست که بردارهای $a_k\,(a_k\in R^n)$ ، $b_k\,(b_k\in R^m)$ ای پیدا کنیم که به ازای آن ها در متغیر تصادفی a_k^TX و b_k^TY بیشترین میزان همبستگی را داشته باشند. به متغیرهای تصادفی $U=a_k^TX$ و $V=b_k^TY$ جفت متغیر کانونی اول می گویند. در هر مرحله ما سعی می کنیم که ماکزیمم کنیم میزان هم بستگی رو با در نظر گرفتن این قید که جفت متغیر کانونی جدید نسبت جفت متغیر قبلی ناهمبسته باشند. تعداد مراحل این فرآیند می تواند تا $\min\{m,n\}$ ادامه پیدا کند. به صورت ریاضی می توانیم بنویسیم :

$$(a_k,b_k)=\underset{a,b}{\arg\max}\left(corr(a^TX,b^TY)\right)$$

$$\text{subject to}\quad cov(a^TX,a_j^TX)=cov(b^TY,b_j^TY)=0 \quad \text{for } j=1,\dots,k-1$$

در قسمت بعدی فرآیند بدست آوردن a و b را توضیح دادم.

کاربرد این روش زمانی هست که ما دو مجموعه از متغیر های تصادفی داریم و می‌خواهیم رابطه میان این دو مجموعه را بدست آوریم.

ب)

زمانی که می‌خواهیم از CCA به منظور BSS استفاده کنیم. به جای X، $X(t)$ را قرار می‌دهیم که همان دیتا های مشاهده شده ما توسط EEG هستند و به جای Y، شیفت یافته این دیتاها یعنی $Y(t) = X(t-1)$ را قرار می‌دهیم. سپس همان الگوریتم CCA که در الف توضیح دادیم را بر روی این دو بردار تصادفی انجام می‌دهیم.

$$u = w_{x_1} x_1 + \dots + w_{x_K} x_K = w_X^T X$$

$$v = w_{y_1} Y_1 + \dots + w_{y_K} y_K = w_Y^T Y$$

$$\max_{w_x, w_y} \rho(u, v) = \frac{w_x^T C_{XY} w_y}{\sqrt{(w_x^T C_{XX} w_x)(w_y^T C_{YY} w_y)}}$$

بدست آوردن این w_x و w_y هم یک مسئله بهینه‌سازی هست که به این صورت عمل می‌کنیم که مشتق همبستگی را نسبت به این ضرایب برابر صفر می‌گذاریم و نتایج به این صورت می‌شود:

Made with Goodnotes

$$C_{XX}^{-1} C_{XY} C_{YY}^{-1} C_{YX} \hat{w}_x = \rho^2 \hat{w}_x$$

$$C_{YY}^{-1} C_{YX} C_{XX}^{-1} C_{XY} \hat{w}_y = \rho^2 \hat{w}_y$$

در این فرم $\hat{w}_x$ و $\hat{w}_y$ بردار ویژه هستند و ρ برابر با رادیکال مقدار ویژه می باشد. دقت شود که چون $Y = X(t-1)$ می باشد و ماتریس های X و Y خیلی شبیه هم هستند بنابراین انتظار می رود که w_y و w_x هم تقریباً یکی باشند.

$$u_1(t) = w_x^T X(t) \quad , \quad v_1(t) = w_y^T Y(t)$$

$$w_x^T \simeq w_y^T \quad \longrightarrow \quad v_1(t) = w_x^T X(t-1) = u_1(t-1)$$

به همین ترتیب می توانیم $\tilde{w}_x$ و $\tilde{w}_y$ را پیدا کنیم که بردار ویژه متناظر با دومین مقدار ویژه هستند و این یعنی بعد از w_x و w_y اولیه بیشترین همبستگی را درست می کنند و همچنین با w_x و w_y اولیه ناهمبسته هستند.

در واقع الان $u_i(t)$ ها سورس های ما هستند که به ترتیب دارای بیشترین خودهمبستگی هستند و همچنین با دیگر u_i ها ناهمبسته می باشند، بنابراین توانستیم منابعی پیدا کنیم که بیشترین خودهمبستگی را دارند و نسبت به هم ناهمبسته هستند.

سوال 2 -

الف) با توجه به اینکه محتوای فرکانس بالا خیلی زیادی دارد که به صورت یکنواخت از 20 تا 80 هرتز هست و اینکه به صورت یک ضلع نقطه ای هست و همچنین شکل زمانی سیگنال، می توان گفت که نویز EMG هست.

ب) محتوای فرکانس پایین خوبی دارد، شکل زمانی هم اسپایکی هست همچنین فعالیت بخش گسترده ای را روی مغز نشان می دهد، بنابراین این مؤلفه EEG هست.

ج) منبع نسبتاً نقطه ای هست و محتویات فرکانس بالای زیادی هم داریم و شکل زمانی هم شبیه EMG هست، اما از روی میانگین شکل زمانی می بینیم که یک حمله تقریباً سنکرون با تحریک داریم همچنین روی 8 هرتز هم یک پیک داریم بنابراین احتمالاً این مؤلفه هم EEG دارد هم EMG و نباید آن را حذف کنیم.

د) شکل زمانی سیگنال شبیه EEG ای هست که یک DC روش افتاده همچنین نسبت به تحریک می شود گفت که یک قله و دره مشکوک داریم، ولی روی شکل سر انگار یک نقطه خیلی مقدار کمی دارد و بقیه نقطه ها هم تقریباً برابرند همچنین محتویات فرکانس بالا خیلی زیادی داریم. محتمل است نویز مربوط به یک الکترود هم باشد مثلاً یک الکترود خراب شده باشد.
بعد انگار تو ترایال های اول خیلی سیگنال قوی بوده بعد یهو ضعیف شده.
نمیدونم این مورد خیلی مشکوک هست، احتمالاً نویز هست ولی من حذفش نکردم.

ه) این مورد هم از روی سری زمانی مشخص هست هم در قسمت جلوسر بوده هم اینکه خیلی فرکانس پایین بوده. بنابراین نویز ناشی از پلک زدن هست.

ی) یک قله تقریباً مشکوک با تحریک داریم. به صورت مشخص نویز برق شهر هم داریم. فعالیت نسبتاً گسترده ای در مغز هست. به نظر می رسد که EEG ای بوده که نویز برق شهر روش افتاده.

سؤال 3 -

$$RRMSE = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(x_{org_n}[m]-x_{den_n}[m]\right)^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(x_{org}[m]\right)^2}}$$

$$x_{in}[m] = x_{org}[m] + N_1[m] + N_2[m]$$

$$x_{den}[m] = x_{in}[m] - \underbrace{N_1[m]}_{} = x_{org}[m] + N_2[m]$$

کم نویزی که تونستیم حذف کنیم.

$$x_{org}[m] - x_{den}[m] = -N_2[m] \to RRMSE = \frac{\sqrt{P_{N_2}}}{\sqrt{P_{org}}}$$

$$\to (RRMSE)^2 = \frac{P_{N_2}}{P_{org}} \to 10\log_{10}\left(\frac{1}{RRMSE}\right)^2 = SNR_{out}$$

$$\to -20\log_{10}(RRMSE) = SNR_{out} \to RRMSE = 10^{\left(\frac{SNR_{out}}{-20}\right)}$$

برای اینکه RRMSE کوچک شود باید که SNR_{out} بزرگ باشد.

حال ماکسیمم SNR_{out} برای EEG و ECG را از روی نمودار پیدا کنیم.

$$SNR_{out} = SNR_{in} + SNR_{imp}$$

$$\max\left(SNR_{out,EEG}\right) \simeq 30\,dB \xrightarrow{SNR_{in}=20\,dB} RRMSE \simeq 3.16\,\%$$

$$\max\left(SNR_{out,ECG}\right) \simeq 32\,dB \to RRMSE \simeq 2.51\,\%$$

$$\to SNR_{in} = 20\,dB$$

Made with Goodnotes

سؤال ۴-

الف) مقدار کورتوسیس مرتبه ۴ برای یک متغیر گاوسی 3 می باشد.

کوسولان مرتبه ۴ میزان گاوسی بودن هر منبع را به ما نشان می دهد، در واقع اگر Kurtosis بزرگتر از 3 باشد توزیع ما قله خیلی تیزی دارد و اگر کوچکتر از 3 باشد قله خیلی نرم می شود. برای استفاده از kurtosis در ICA کاری که می کنند این است که مثلاً Kurtosis-3 را به عنوان تابع هدف می گیرند و اندازه این تابع هدف را برای هر منبع ماکزیمم می کنند تا میزان غیرگاوسی بودن منابع را ماکزیمم کنند. مثلاً در الگوریتم JADE کاری شبیه این انجام می شود.

ب) یک عدم قطعیت در ترتیب منابع بدست آمده داریم، یک عدم قطعیت هم در انرژی/ اسکیل منابع بدست آمده.

سیگنال 32 کانال

ج)

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{32}(t) \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow C_X = U \Lambda U^T = [u_1, \dots\dots, u_{32}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_{32}^T \end{bmatrix}$$

$D = \Lambda^{-\frac{1}{2}} U^T \longrightarrow$ فقط سطرهای ۱ تا 15 که متناظر هست با 15 مقدار ویژه بزرگتر را نگه می داریم. در واقع ما اطلاعات را در 15 بعدی که بیشترین واریانس را دارند نگه می داریم.

$$y(t) = D x(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{15}(t) \end{bmatrix}$$

* تا اینجا مرحله کاهش بعد را انجام دادیم،

حال برای قسمت ICA :

$$B y(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_{15}(t) \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{با نویز EOG می گیریم}]{s_1 \text{ تا } s_5 \text{ را متناظر}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_6(t) \\ \vdots \\ s_{15}(t) \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow y_{den}(t) = B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_6(t) \\ \vdots \\ s_{15}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{y}_{15}(t) \end{bmatrix} \longrightarrow$$ دی نویز شده مشاهدات

برای ارزیابی عملکرد می توانیم از معیار RRMSE استفاده کنیم، هر چه قدر RRMSE کوچکتر باشد سیگنال بهتر دی نویز شده است. البته این برای حالتی هست که سیگنال بدون نویز رو داشته باشیم. اگر نداشته باشیم می توانیم روی سیگنال دی نویز شده دو بار ICA رو پیاده کنیم و ببینیم منابع استخراج شده بازهم شبیه به EOG هستند یا خیر.

سوال 5 -

الف)

$$x(t) = A s(t)$$

$$C = BA \longrightarrow C s(t) = BA s(t) \longrightarrow C s(t) = B x(t)$$

اگر B کارخودش را خیلی خوب انجام داده باشد C باید همانی بشود که یعنی به همان سورس های اصلی رسیده ایم.

در این حالت معیار f داده شده برابر می شود با:

$$f = 1 - \frac{N}{N} = 0$$

هر چه قدر f بزرگتر باشد نشان می دهد که عناصر روی قطر کوچکتر از بقیه عناصر هستند. یا به عبارتی سورس های بدست آمده کمتر شبیه به سورس های اصلی هستند.

به نظر می رسد که این معیار خیلی خوبی نیست چون مثلاً اگر دو منبع باهم جاشون عوض شده باشد، جمع عناصر کل ماتریس تغییر نمی کند اما دوتا از عناصر روی قطر صفر می شوند که در این صورت کسر کوچک و مخرج ثابت است و f بزرگ می شود، ولی ما می دانیم که عوض شدن منابع یا اسکیل شدن نباید روی معیار ما تاثیر بگذارد.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

ب)

شاید یک ایده خوب این باشد که سطر ها را جا به جا کنیم تا درایه بزرگتر هر سطر روی قطر اصلی قرار بگیرد سپس این معیار را محاسبه کنیم، اینجوری اون اثر جابه‌جایی منابع رو حذف می کنیم. یعنی مثلاً ماکسیمم trace جایگشت های سطری ماتریس C رو توی صورت بذاریم.

بیشترین مقدار f و 1 و کمترین مقدار آن 0 هست.

سؤال 6-

در ابتدا از روش GEVD استفاده می‌کنیم.

الف)

$$y(t) = w^T x(t) \quad , \quad x(t) \in R^8 \; , \; y(t) \in R^8 \qquad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_8(t) \end{bmatrix}$$

$$f(w) = \frac{E_t\{y(t)\, y^T(t+\tau)\}}{E_t\{y^2(t)\}} = \frac{E_t\{w^T x(t)\, x^T(t+\tau)\, w\}}{E_t\{w^T x(t)\, x^T(t)\, w\}}$$

$$= \frac{w^T E_t\{x(t)\, x^T(t+\tau)\}\, w}{w^T E_t\{x(t)\, x^T(t)\}\, w} = \frac{w^T P_x w}{w^T C_x w} = \frac{w^T \tilde{P}_x w}{w^T C_x w}$$

$$\tilde{P}_x = \frac{1}{2}\left(P_x + P_x^T\right) \quad , \quad \tau = 400$$

$$\underset{8\times 8}{\underbrace{C_x}} = \frac{1}{10^4} \sum_{t=1}^{10^4} x(t)\, x^T(t) \quad , \quad \underset{8\times 8}{\underbrace{P_x}} = \frac{1}{10^4 - 400} \sum_{t=1}^{10^4 - 400} x(t)\, x^T(t+400)$$

$$\longrightarrow \tilde{P}_x = \frac{1}{2}\left(P_x + P_x^T\right)$$

پس از محاسبه $\tilde{P}_x$ و C_x طبق روابط بالا از روش GEVD استفاده می‌کنیم و مقادیر ویژه تعمیم یافته این دو ماتریس را محاسبه می‌کنیم.

$$C_x V = \tilde{P}_x V \Lambda \quad , \quad \overset{\text{مقادیر ویژه}}{\Lambda} \quad , \quad V \longrightarrow \text{بردارهای ویژه}$$

$$GEVD(C_x, \tilde{P}_x) \longrightarrow \underbrace{w_1, \ldots, w_8}_{\text{بردارهای ویژه}} \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_8$$

$$W^T = \begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_8^T \end{bmatrix}, \quad W^T \in R^{8\times 8}$$

$$y(t) = W^T x(t) = \begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_8^T \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_8(t) \end{bmatrix}$$

$y_1(t)$ همون $S_1(t)$ ماست.

$$\hat{S}_1(t) = y_1(t) = w_1^T x(t)$$

برای دیدن تأثیر این منبع در خروجی بقیه $y_1(t)$ ها را صفر می‌کنیم و فقط اول را نگه می‌داریم سپس با ماتریس دی میکسینگ به فضای سنسور می‌بریم.

$$y_{new} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{x}_1(t) = W^{-T} y_{new}(t) = W^{-T} \begin{bmatrix} w_1^T x(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب) بیشتر مراحل مانند قسمت قبل هست.

$$y(t) = w^T x(t)$$

$$f(w) = \frac{E_\theta\{y^2(\theta)\}}{E_t\{y^2(t)\}} = \frac{w^T E_\theta\{x(\theta)\,x^T(\theta)\}\,w}{w^T E_t\{x(t)\,x^T(t)\}\,w} = \frac{w^T \tilde{C}_x w}{w^T C_x w}$$

$$\tilde{C}_x = \frac{1}{\mathrm{sum}(T_{on})} \sum_{t\in T_{on}} x(t)\,x^T(t)$$

بقیه مراحل هم کاملاً مشابه با قسمت الف هست برای همین نمی‌نویسیم.

ادامه سؤال 6)

شبه کد برای روش GEVD :

1ـ بدست آوردن C_x و $\tilde{P}_x$ (در بخش ب $\tilde{C}_x$)

2ـ بدست آوردن بردارهای ویژه و مقادیر ویژه این دو ماتریس

3ـ انتخاب بردار ویژه اول (متناظر با بزرگترین مقدار ویژه) و ضرب کردن آن در ماتریس مشاهدات ⟵ $\hat{s}_1(t)$ را می دهد به ما

4ـ صفر کردن بقیه سورس ها و استفاده از معکوس ماتریس بردار های ویژه برای رفتن به فضای سنسور ⟵ اثر آن سورس را در خروجی می دهد

حال می خواهیم از روش DSS استفاده کنیم.

الف)

1ـ در ابتدا نیاز هست که به کمک PCA سفید سازی انجام دهیم، و اگر خواستیم کاهش بعد:

$$Z(t) = B\,x(t) \quad , \quad B \in R^{P\times 8} \longrightarrow Z(t) \in R^{P}$$

2ـ در مرحله بعد الگوریتم DSS را پیاده سازی می کنیم و m منبع مطلوب را بدست می آوریم. نکته مهم در این قسمت نحوه تعریف تابع حذف نویز هست.

طبق مقاله نام برده شده در اسلاید ها، یکی از کارهایی که می شود کرد این هست که یک پریود L انتخاب می کنیم و سپس سیگنال رو به تیکه ها L تایی تقسیم می کنیم و همه را جمع می زنیم و میانگین می گیریم. در این قسمت چون که تناوب داریم ۸ رو همون 400 در نظر می گیریم و کل سیگنال به 25 تیکه 400 تایی تقسیم می شود.

ادامه سؤال ۶)

حال مراحل الگوریتم را می نویسیم: ($w_p^{(0)}$ رندوم انتخاب می شود)

$$r_p^{(i)}(t) = w_p^{(i)T} z(t)$$

$$r_p^{(i)+}(t) = f\left(r_p^{(i)}(t)\right) = \underbrace{\left[\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} r_p^{(i)}[1+(i-1)400:400i], \dots, \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} r_p^{(i)}[1+(i-1)400:400i]\right]}_{25 \text{ بار}}$$

$$w_p^{(i)+} = E_t\left\{z(t)\, r_p^{(i)+}(t)\right\}$$

$$w_p^{(i+1)} = \frac{w_p^{(i)+}}{\|w_p^{(i)+}\|}$$

اینقدر این مراحل را تکرار می کنیم تا همگرا شود و w_1 را پیدا کنیم.

$r_1(t)$ های $\hat{s}_1(t)$ ما می شود برای بدست آوردن $\hat{x}_1(t)$ هم باید که:

$$\hat{x}_1(t) = B^{\dagger} w_1 \hat{s}_1(t)$$

ب) تمام مراحل یکسان هست به جز اینکه در قسمت حذف نویز الگوریتم f را باید به این صورت تعریف کنیم:

$$r_p^{(i)+}(t) = r_p^{(i)}(t) \cdot T_{on}$$

سؤال 7 -

الف)

$$y(t) = w^T x(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^{32}, \quad w^T \in \mathbb{R}^{1\times 32}$$

$$f(w) \triangleq \frac{E_\theta\{y(\theta)^2\}}{E_t\{y(t)^2\}} = \frac{w^T \tilde{C}_x w}{w^T C_x w}$$

$$C_x = E_t\{x(t)x^T(t)\} = \frac{1}{2\times 10^4} \sum_{t=1}^{2\times 10^4} x(t)x^T(t)$$

$$\tilde{C}_x = E_\theta\{x(\theta)x^T(\theta)\} = \frac{1}{\mathrm{sum}(T_{on})} \sum_{t\in T_{on}} x(t)x^T(t)$$

حال اگر $f(w)$ را بخواهیم بیشینه کنیم، 32 تا بردار ویژه بدست میاید که ماتریس W را میسازند. $S_1(t) = W_1^T x(t)$

اولی که متناظر بزرگترین مقدار ویژه هست.

ب) فرض می‌کنیم که $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{32} \end{bmatrix}$، حال در مخرج این عبارت را اضافه می‌کنیم.

$$f(w) = \frac{w^T \tilde{C}_x w}{w^T C_x w + \lambda \sum_{i\in Ch_{noise}} w_i^2} \longrightarrow$$

حال اگر اندازه w_i که متناظر با چنل های نامطلوب باشد زیاد بشود مقدار $f(w)$ کاهش پیدا می کند.

بنابراین در فرآیند ماکزیمم کردن این تابع w_i های مربوط به چنل های نامطلوب کوچک خواهند شد.

ج)

$$\lambda \sum_{i \in ch} w_i^2 = \lambda w^T \Lambda w$$

که این یک ماتریس قطری هست که فقط درایه‌های متناظر با چنل‌های نامطلوب توش ۱ هست.

$$\longrightarrow f(w) = \frac{w^T \tilde{C}_x w}{w^T C_x w + \lambda w^T \Lambda w} = \frac{w^T \tilde{C}_x w}{w^T \underbrace{(C_x + \lambda \Lambda)}_{C'_x} w}$$

د)

روش کار مشابه با آن چیزی هست که در سوال ۵ توضیح دادم.

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تعمیم یافته را برای دو ماتریس $\tilde{C}_x$ و C'_x محاسبه می‌کنیم. بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه ترکیب خطی‌ای از 32 کانال را به ما می‌دهد که منبع مطلوب $S_1(t)$ را تشکیل می‌دهد.

$$\longrightarrow S_1(t) = w_1^T x(t)$$

سؤال 8 -

الف) مانند سؤال قبل:

$$y(t) = w^T x(t), \quad x(t) \in R^{32}, \quad w^T \in R^{1\times 32}$$

$$f(w) \triangleq \frac{E_\theta\{y(\theta)^2\}}{E_t\{y(t)^2\}} = \frac{w^T \tilde{C}_x w}{w^T C_x w}$$

$$C_x = E_t\{x(t)x^T(t)\} = \frac{1}{2\times 10^4}\sum_{t=1}^{30\times 128} x(t)x^T(t)$$

$$\tilde{C}_x = E_\theta\{x(\theta)x^T(\theta)\} = \frac{1}{sum(T_{on})}\sum_{t\in T_{on}} x(t)x^T(t)$$

حال مقادیر ویژه و بردار ویژه تعمیم یافته دو ماتریس $C_x, \tilde{C}_x$ را پیدا می‌کنیم و بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه می‌شود w_1 ← $s_1(t) = w_1^T x(t)$

ب) $f(r)$ در واقع دارد یک وزن متغیری را ضرب در اختلاف مؤلفه های اول ام بردار r می‌کند. این وزن متغیر به این صورت هست که اگر الکترود های اول از نظر فضایی بهم نزدیک باشند مقدار بیشتری می‌گیرد. بنابراین مجموع این ها که $f(r)$ را تشکیل می‌دهد به اختلاف بین مؤلفه های اول که الکترود های متناظرشون از نظر فضایی بهم نزدیک تر هستند بستگی دارد پس می‌توانیم با مینیمم کردن $f(r)$ تضمین کنیم که اختلاف مؤلفه های از بردار که از نظر فضایی بهم نزدیک هستند رو کم کردیم. و این همان هموار بودن هست.

ج)

$$f(r) = r^T B r =$$

$$[r_1, \dots, r_{32}] \begin{bmatrix} (\sum_{j=1}^{32} A_{1,j}) - A_{1,1}, & -A_{1,2}, & \dots, & -A_{1,32} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ -A_{32,1} & \dots & & (\sum_{j=1}^{32} A_{32,j}) - A_{32,32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \left[r_1 \left(\sum_{j=1}^{32} A_{1,j}\right) - \sum_{i=1}^{32} r_i A_{i,1},\ r_2 \left(\sum_{j=1}^{32} A_{2,j}\right) - \sum_{i=1}^{32} r_i A_{i,2},\ \dots \right] \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{32} \end{bmatrix}$$

$$= r_1^2 \sum_{j=1}^{32} A_{1,j} - r_1 \sum_{i=1}^{32} r_i A_{i,1} + r_2^2 \sum_{j=1}^{32} A_{2,j} - r_2 \sum_{i=1}^{32} r_i A_{i,2} + \dots$$

$$= \sum_{i=1}^{32} \sum_{j=1}^{32} r_i^2 A_{i,j} - \sum_{j=1}^{32} r_j \sum_{i=1}^{32} r_i A_{i,j} = \sum_{i=1}^{32} \sum_{j=1}^{32} r_i^2 A_{i,j} - \sum_{i=1}^{32} \sum_{j=1}^{32} r_i r_j A_{i,j}$$

$$\sum_{i=1}^{32} \sum_{j=1}^{32} r_i^2 A_{i,j} = \sum_{i=1}^{32} \sum_{j=1}^{32} r_j^2 A_{i,j} \longleftarrow$$ چون A یک ماتریس متقارن هست

$$\longrightarrow r^T B r = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{32} \sum_{j=1}^{32} r_i^2 A_{i,j} + \sum_{i=1}^{32} \sum_{j=1}^{32} r_j^2 A_{i,j} - 2 \sum_{i=1}^{32} \sum_{j=1}^{32} r_i r_j A_{i,j} \right)$$

$$= \frac{1}{2} f(r)$$

* یک ضریب $\frac{1}{2}$ تفاوت دارند.

د)

طبق قسمت ب می‌دانیم مینیمم کردن $f(r)$ متناظر با هموار بودن فضای هست.

$$g(w) = w^T B w \quad , \quad \underset{w}{\arg\min}\, g(w)$$

w ای پیدا کنیم که g را مینیمم کند.

ه) یک تابع جدید میسازیم و سعی می‌کنیم آن را ماکزیمم کنیم به فرم زیر:

$$f'(w) = \frac{E_\theta\{y^2(\theta)\}}{E_t\{y^2(t)\} + \lambda g(w)} = \frac{w^T \tilde{C}_x w}{w^T (C_x + \lambda B) w}$$

درجه اهمیت قید جدید

و، ز)

جهت این مراحل در قسمت‌های قبل توضیح داده شده. مقادیر ویژه و بردار های ویژه تعمیم یافته برای دو ماتریس $\tilde{C}_x$ و $C_x + \lambda B$ را بدست می‌آوریم. بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه w_1 هست.

$$s_1(t) = w_1^T x(t)$$

برای استخراج سیگنال مطلوب هم کافیست در $y(t)$ فقط $y_1(t)$ که متناظر با همین $s_1(t)$ هست را نگه داریم و بقیه رو صفر کنیم بعد با معکوس ماتریس W به فضای سنسور برویم.

$$x_{\text{مطلوب}} = W^{-T} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$