تمرین سری 2 درس مقدمه‌ای بر ML - رادین خیام - 99101579

مسئله 1-

$$P(x|w_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{0.5}} e^{\frac{-x^2}{2\times 0.5}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

$$P(x|w_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{0.25}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\times 0.25}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{-\frac{(x-1)^2}{0.5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-2(x-1)^2}$$

$$\frac{P(x|w_1)}{P(x|w_2)} \underset{w_2}{\overset{w_1}{\gtrless}} \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{12}} \frac{P(w_2)}{P(w_1)} \xrightarrow[\text{مرز}]{\text{برای پیدا کردن}} \lambda_{12} P(x|w_1) P(w_1) = \lambda_{21} P(x|w_2) P(w_2)$$

الف)

$$P(x|w_1) = P(x|w_2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-2(x-1)^2} \rightarrow 2(x-1)^2 - x^2 = \ln(\sqrt{2})$$

$$\rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{2+\ln\sqrt{2}} \ , \ x_2 = 2 + \sqrt{2+\ln\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x \in R_1, & \text{خارج آن بازه} \\ x \in R_2, & 2-\sqrt{2+\ln\sqrt{2}} < x < 2+\sqrt{2+\ln\sqrt{2}} \end{cases}$$

ب)

$$\frac{1}{2} P(x|w_1) = P(x|w_2) \rightarrow 2(x-1)^2 - x^2 = \ln(2\sqrt{2})$$

$$\rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{2+\ln 2\sqrt{2}} \ , \ x_2 = 2 + \sqrt{2+\ln 2\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x \in R_1, & \text{خارج آن بازه} \\ x \in R_2, & 2-\sqrt{2+\ln 2\sqrt{2}} < x < 2+\sqrt{2+\ln 2\sqrt{2}} \end{cases}$$

پ)

$$P(x|w_1) = \frac{1}{2} P(x|w_2) \rightarrow 2(x-1)^2 - x^2 = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\ln\sqrt{2}$$

$$\rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{2-\ln\sqrt{2}} \ , \ x_2 = 2 + \sqrt{2-\ln\sqrt{2}} \rightarrow \begin{cases} x \in R_1, & \text{خارج آن بازه} \\ x \in R_2, & x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

ث)

$$P(x|\omega_1) = 4P(x|\omega_2) \rightarrow 2(x-1)^2 - x^2 = \ln(4\sqrt{2})$$

$$\rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{2 + \ln 4\sqrt{2}} \;,\; x_2 = 2 + \sqrt{2 + \ln 4\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x \in R_1 , & \text{خارج آن بازه} \\ x \in R_2 , & x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

سئوال 2 -

الف)

$$g_i(\underline{x}) = -\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu}_i)^T \Sigma_i^{-1} (\underline{x}-\underline{\mu}_i) + \ln P(\omega_i) - \frac{1}{2}\ln(\det \Sigma_i)$$

$$\rightarrow g_1(\underline{x}) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \ln P(\omega_1) - \frac{1}{2}\cancel{\ln(1)}^{\,0} = -\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right) + \ln P(\omega_1)$$

$$\cancel{g_2(\underline{x}) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \ln(P(\omega_2)) - \frac{1}{2}\ln(4)}$$

$$\cancel{= -\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right) + \ln P(\omega_2) - \frac{1}{2}\ln 4}$$

$$g_2(\underline{x}) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1-4 & x_2-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-4 \\ x_2-4 \end{bmatrix} + \ln P(\omega_2) - \frac{1}{2}\ln(4)$$

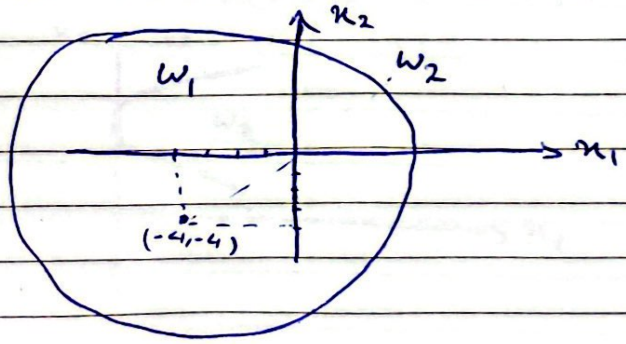
$$= -\frac{1}{4}\left((x_1-4)^2 + (x_2-4)^2\right) + \ln P(\omega_2) - \frac{1}{2}\ln(4)$$

$$g_1(\underline{x}) = g_2(\underline{x}) \rightarrow -\frac{1}{4}\left((x_1-4)^2+(x_2-4)^2\right) + \cancel{\ln P(\omega_2)} - \frac{1}{2}\ln(4) = -\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2) + \cancel{\ln P(\omega_1)}$$

$$\rightarrow (x_1-4)^2 + (x_2-4)^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + \underset{4\ln(2)}{2\ln(4)} = 0$$

$$\rightarrow -x_1^2 + 16 - 8x_1 - x_2^2 + 16 - 8x_2 + 4\ln(2) = 0 \rightarrow \underbrace{-(x_1+4)^2 - (x_2+4)^2 + 64 + 4\ln(2) = 0}$$

یک دایره به شعاع $\sqrt{64+4\ln 2}$ و به مرکز $\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ می باشد



ب)

$$g_1(\underline{x}) = -\frac{1}{2}[x_1 \;\; x_2]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \ln P(\omega_1) - \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{2}\right) + \ln P(\omega_1) - \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$g_2(\underline{x}) = -\frac{1}{2}[x_1-4 \;\; x_2-4]\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-4\\ x_2-4\end{bmatrix} + \ln P(\omega_2) - \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-4)^2}{2} + (x_2-4)^2\right) + \ln P(\omega_2) - \frac{1}{2}\ln(2)$$

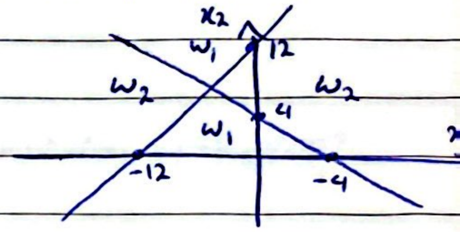
$$g_1(\underline{x}) = g_2(\underline{x}) \rightarrow -\cancel{\frac{1}{2}}\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{2}\right) = -\cancel{\frac{1}{2}}\left(\frac{(x_1-4)^2}{2} + (x_2-4)^2\right)$$

$$\rightarrow x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} = 8 + 4x_1 = x_2^2 - 16 + 8x_2 = \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + 4x_1 + 8x_2 - 24 = 0$$

$$\rightarrow x_1^2 + 8x_1 + 16 - x_2^2 + 16x_2 - 64 = 0 \rightarrow (x_1+4)^2 - (x_2-8)^2 = 0$$

$$\rightarrow x_1 + 4 = x_2 - 8 \rightarrow x_2 - x_1 = 12$$

$$\rightarrow x_1 + 4 = -x_2 + 8 \rightarrow x_2 + x_1 = 4$$



ج)

$$g_1(\underline{x}) = -\frac{1}{2}[x_1 \;\; x_2]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \ln P(\omega_1) - \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{2}\right) + \ln P(\omega_1) - \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$g_2(\underline{x}) = -\frac{1}{2}[x_1-4 \;\; x_2-4]\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-4\\ x_2-4\end{bmatrix} + \ln P(\omega_2) - \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(2(x_1-4)^2 + (x_2-4)^2\right) + \ln P(\omega_2) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$g_1(\underline{x}) = g_2(\underline{x}) \rightarrow -\frac{1}{2}\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(2) = -\frac{1}{2}\left(2(x_1-4)^2 + (x_2-4)^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

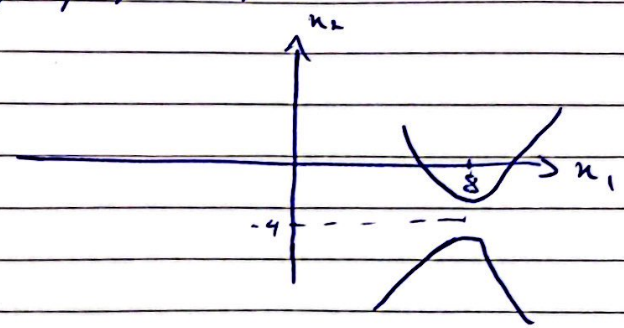
$$\rightarrow \frac{x_1^2}{2} - 8x_1 + 16 - \frac{x_2^2}{2} - 4x_2 + 8 - \frac{1}{2}\ln(4) = 0 \rightarrow x_1^2 - 16x_1 - x_2^2 - 8x_2 + 48 - \ln(4) = 0$$

$$\rightarrow (x_1-8)^2 - (x_2+4)^2 = \ln(4)$$

PAPCO STATIONERY

این شکل هذلولی است.

ادامه بخش ج)



د)

$$g_1(\underline{x}) = -\frac{1}{2}\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{2}\right) + \ln P(\omega_1) - \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$g_2(\underline{x}) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1-4 & x_2-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-4 \\ x_2-4 \end{bmatrix} + \ln P(\omega_2) - \frac{1}{2}\cancel{\ln(1)}^{\,0}$$

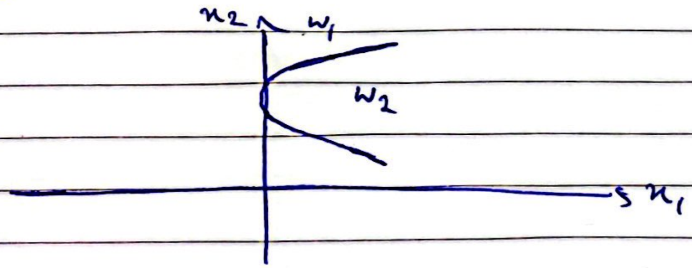
$$= -\frac{1}{2}\left((x_1-4)^2 + (x_2-4)^2\right) + \ln P(\omega_2)$$

$$g_1(\underline{x}) = g_2(\underline{x}) \rightarrow -\frac{1}{2}\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(2) = -\frac{1}{2}\left((x_1-4)^2 + (x_2-4)^2\right)$$

$$\rightarrow -\cancel{x_1^2} - \frac{x_2^2}{2} - \ln(2) + \cancel{x_1^2} + 16 - 8x_1 + x_2^2 + 16 - 8x_2 = 0$$

$$\rightarrow x_2^2 - 16x_2 + 64 - 16x_1 - 2\ln(2) = 0 \rightarrow (x_2-8)^2 - 16x_1 = 2\ln 2$$

که شکل سهمی است



سؤال 3 -

چون که ماتریس کوواریانس برای همه کلاس ها یکسان هست بنابراین تابع تفکیک به این صورت

تعریف می شود:

$$g_i(\underline{x}) = (\Sigma^{-1}\underline{\mu_i})^T \underline{x} + \ln P(\omega_i) - \frac{1}{2}\underline{\mu_i}^T \Sigma^{-1} \underline{\mu_i}$$

الف)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \rightarrow g_1(\underline{x}) = \ln P(\omega_1) = \ln(\tfrac{1}{3})$$

$$g_2(\underline{x}) = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \ln(P(\omega_2)) - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \ln(\tfrac{1}{3}) - \frac{1}{2} \times 32 = 8x_1 - 4x_2 - 16 - \ln(3)$$

$$g_3(\underline{x}) = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \ln P(\omega_3) - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= -4x_1 + 8x_2 + \ln(\tfrac{1}{3}) - \frac{1}{2} \times 32 = -4x_1 + 8x_2 - 16 - \ln(3)$$

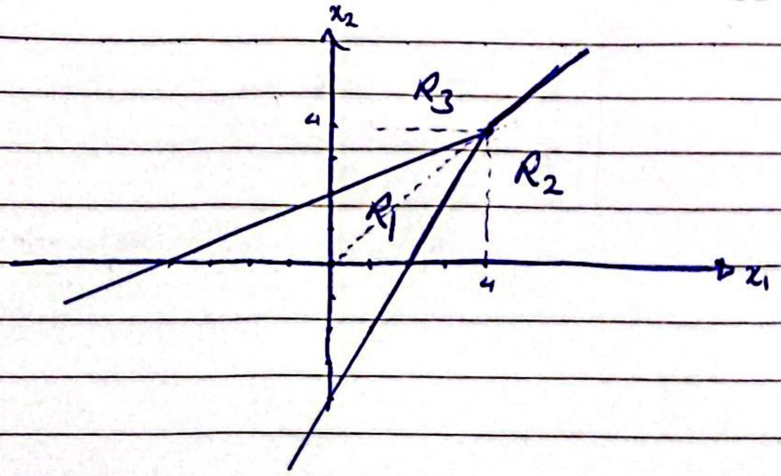
برای پیدا کردن مرزها:

$$g_1 - g_2 = 0 \rightarrow -8x_1 + 4x_2 + 16 = 0 \rightarrow -2x_1 + x_2 + 4 = 0 \rightarrow x_2 = 2x_1 - 4$$

$$g_1 - g_3 = 0 \rightarrow 4x_1 - 8x_2 + 16 = 0 \rightarrow x_1 - 2x_2 + 4 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 2$$

$$g_2 - g_3 = 0 \rightarrow 12x_1 - 12x_2 = 0 \rightarrow x_1 - x_2 = 0 \rightarrow x_2 = x_1$$

ادامه بخش الف)



ب)

حال چنانچه $b=0$ باشد ماتریس کواریانس قطری و با درایه‌های برابر می‌شود بنابراین می‌توانیم تابع تفکیک را بدین شکل تعیین کنیم:

$$g_i(\underline{x}) = \left(\frac{1}{\sigma^2}\underline{\mu}_i\right)^T \underline{x} + \ln P(\omega_i) - \frac{1}{2\sigma^2}\underline{\mu}_i^T \underline{\mu}_i$$

$$\rightarrow g_1(\underline{x}) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$g_2(\underline{x}) = \frac{3}{2}[4\ 0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{3}{4}[4\ 0]\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} = 6x_1 - \ln(3) - 12$$

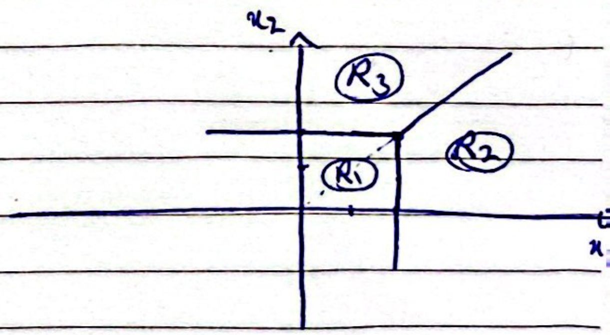
$$g_3(\underline{x}) = \frac{3}{2}[0\ 4]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{3}{4}[0\ 4]\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} = 6x_2 - \ln(3) - 12$$

برای پیدا کردن مرزها:

$$g_1 - g_2 = 0 \rightarrow -6x_1 + 12 = 0 \rightarrow x_1 = 2$$

$$g_1 - g_3 = 0 \rightarrow -6x_2 + 12 = 0 \rightarrow x_2 = 2$$

$$g_2 - g_3 = 0 \rightarrow 6x_1 - 6x_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2$$



سؤال ۴-

$$g_i(\underline{x}) = -\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu}_i)^T \Sigma_i^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu}_i) + \ln P(w_i) - \frac{1}{2}\ln(\det \Sigma_i) - \ln(2\pi)$$

الف)

$$g_1\left(\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix} + \ln(0.3) - \frac{1}{2}\cancel{\ln(1)}^{0} \overset{-\ln(2\pi)}{\vee} = -\frac{1}{8} + \ln(0.3) \overset{-\ln(2\pi)}{\vee} = -3.17$$

$$\rightarrow \ln(P(w_1|\underline{x})) = -3.17 \rightarrow P(w_1|\underline{x}) = 0.04$$

$$g_2\left(\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8/15 & -2/15\\-2/15 & 8/15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix} + \ln(0.3) - \frac{1}{2}\ln(3.75) - \ln(2\pi)$$

$$= -\frac{1}{10} + \ln(0.3) - 0.66 - 1.8 = -3.76 \rightarrow P(w_2|\underline{x}) = e^{-3.76} = 0.02$$

$$g_3\left(\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-0.5 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5/9 & -4/9\\-4/9 & 5/9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.5\\-0.5\end{bmatrix} + \ln(0.4) - \frac{1}{2}\ln(9) - \ln(2\pi)$$

$$= \frac{-1}{36} + \underbrace{\cancel{\ln(0.4)}}_{-0.92} - 1.099 - 1.8 = -3.85 \rightarrow P(w_3|\underline{x}) = e^{-3.85} = 0.02$$

بنابراین داده را به کلاس $\underline{w_1}$ نسبت می‌دهیم

ب)

$$g_2 = -\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8/15 & -2/15\\-2/15 & 8/15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) + \ln(0.6) - \frac{1}{2}\ln(3.75)$$

$$= -\frac{4}{15}x_1^2 - \frac{4}{15}x_2^2 + \frac{2}{15}x_1x_2 + \overset{-0.5}{\cancel{\ln(0.6)}} - \frac{1}{2}\overset{0.66}{\cancel{\ln(3.75)}}$$

$$g_3 = -\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}x_1-1 & x_2-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5/9 & -4/9\\-4/9 & 5/9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-1\\x_2-1\end{bmatrix}\right) + \overset{-0.92}{\cancel{\ln(0.4)}} - \frac{1}{2}\overset{+1.099}{\cancel{\ln(9)}}$$

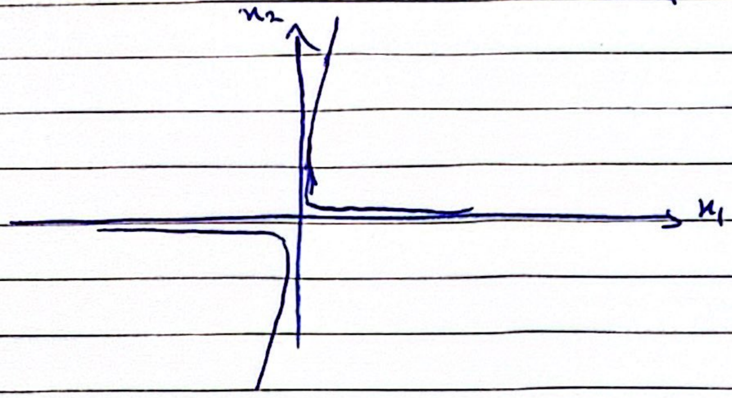
$$= -\frac{5}{18}(x_1-1)^2 - \frac{5}{18}(x_2-1)^2 + \frac{8}{18}(x_1-1)(x_2-1) + \ln(0.4) - \frac{1}{2}\ln(9)$$

$$= -\frac{5}{18}x_1^2 + \frac{2}{18}x_1 - \frac{5}{18}x_2^2 + \frac{2}{18}x_2 - \frac{2}{18} + \frac{8}{18}x_1x_2 + \ln(0.4) - \frac{1}{2}\ln(9)$$

$$g_2 - g_3 = \frac{1}{90}x_1^2 + \frac{1}{90}x_2^2 - \frac{28}{90}x_1x_2 - \frac{10}{90}x_1 - \frac{10}{90}x_2 + \frac{10}{90} + 0.86 = 0$$

ادامه سؤال 4)

$$\rightarrow \boxed{x_1^2 + x_2^2 - 28x_1x_2 - 10x_1 - 10x_2 + 187.4 = 0}$$



سؤال 5)

$$\max(P_e) \sim \min\left(\underset{\omega_i}{\operatorname{argmax}}\, P(\omega_i|x)\right)$$

$\sum_{i=1}^{M} P(\omega_i|x) = 1 \rightarrow$ زمان خطا ماکسیمم است که $P(\omega_i|x)$ برای همه کلاس ها برابر $\frac{1}{M}$ باشد وگرنه حتماً یکی از آنها بزرگتر از $\frac{1}{M}$ می باشد.

$$P_e = \sum_{i=1}^{M} P(x \in R_i, \omega \neq \omega_i) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} P(x \in R_i, \omega_j) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} P(\omega_j) P(x \in R_i | \omega_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} P(\omega_j) \int_{R_i} P(x|\omega_j)\, dx = \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} \int_{R_i} P(\omega_j|x) P(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} \int_{R_i} \frac{1}{M} P(x)\, dx = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \int_{R_i} P(x) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} 1 = \boxed{\frac{M-1}{M}}$$

$$\rightarrow P_e \leq \frac{M-1}{M}$$

PAPCO STATIONERY

سؤال 6)

الف)

P(سیاسی | یک مسابقه بسیار نزدیک) = P(سیاسی) P(یک | سیاسی) P(مسابقه | سیاسی) P(بسیار | سیاسی) P(نزدیک | سیاسی) / P(یک مسابقه بسیار نزدیک)

P(غیرسیاسی | یک مسابقه بسیار نزدیک) = P(غیرسیاسی) P(یک | غیرسیاسی) P(مسابقه | غیرسیاسی) P(بسیار | غیرسیاسی) P(نزدیک | غیرسیاسی) / P(یک مسابقه بسیار نزدیک)

با فرض اینکه P(سیاسی) = P(غیرسیاسی) می‌توانیم توابع تفکیک را به صورت زیر ساده کنیم:

g_1 = P(یک | سیاسی) P(مسابقه | سیاسی) P(بسیار | سیاسی) P(نزدیک | سیاسی)

g_2 = P(یک | غیرسیاسی) P(مسابقه | غیرسیاسی) P(بسیار | غیرسیاسی) P(نزدیک | غیرسیاسی)

ب)

tf(یک , سیاسی) = 1 ، tf(یک , غیرسیاسی) = 2 → tfidf(یک , سیاسی) = $\ln\frac{4}{3}$ ، tfidf(یک , غیرسیاسی) = $2\ln$

tf(مسابقه , سیاسی) = 1 ، tf(مسابقه , غیرسیاسی) = 1 → tfidf(مسابقه , سیاسی) = $\ln 2$ ، tfidf(مسابقه , غیرسیاسی) = $\ln 2$

tf(بسیار , سیاسی) = 1 ، tf(بسیار , غیرسیاسی) = 0 → tfidf(بسیار , سیاسی) = $\ln 4$ ، tfidf(بسیار , غیرسیاسی) = 0

tf(نزدیک , سیاسی) = 0 ، tf(نزدیک , غیرسیاسی) = 1 → tfidf(نزدیک , سیاسی) = 0 ، tfidf(نزدیک , غیرسیاسی) = $\ln 4$

→ P(یک | سیاسی) = $\frac{\ln\frac{4}{3}+1}{22}$ ، P(مسابقه | سیاسی) = $\frac{\ln 2+1}{22}$ ، P(بسیار | سیاسی) = $\frac{\ln 4+1}{22}$

P(نزدیک | سیاسی) = $\frac{1}{22}$ ، P(یک | غیرسیاسی) = $\frac{2\ln\frac{4}{3}+1}{26}$ ، P(مسابقه | غیرسیاسی) = $\frac{\ln 2+1}{26}$

P(بسیار | غیرسیاسی) = $\frac{1}{26}$ ، P(نزدیک | غیرسیاسی) = $\frac{\ln 4+1}{26}$

$$g_1 = \frac{(\ln\frac{4}{3}+1)(\ln 2+1)(\ln 4+1)}{22^4}$$

$\Rightarrow g_1 > g_2 \Rightarrow$ P(سیاسی | یک مسابقه بسیار نزدیک) > P(غیرسیاسی | یک مسابقه بسیار نزدیک)

$$g_2 = \frac{(2\ln\frac{4}{3}+1)(\ln 2+1)(\ln 4+1)}{26^4}$$

← یک مسابقه بسیار نزدیک تحت عنوان جام سیاسی لیبل می‌خورد.

سئوال 17

برای K=1 : دایره سبز ← کلاس B

دایره زرد ← کلاس A

برای K=3 : دایره سبز ← کلاس B

دایره زرد ← کلاس B

برای K=5 : دایره سبز ← کلاس A

دایره زرد ← کلاس B

بله نتیجه بهبود پیدا کرده است خواهیم دید که K را اگر بزرگتر هم کنیم نتیجه به همین صورت باقی می ماند و دایره سبز به کلاس A و دایره زرد به کلاس B نسبت داده می شود. مگر اینکه به K=20 برسیم در این حالت چون ۱۵ ، ۱۰ می شود خیلی نتیجه مشخصی نخواهد داشت این الگوریتم.

سؤال 8)

الف) برای تخمین متوسط:

$$P(x;\theta) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right), \ x>0$$

$$L(X;\theta) = \ln \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{\sigma x_k\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x_k-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) = \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{\sigma x_k\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{(\ln x_k-\theta)^2}{2\sigma^2}$$

$$= N\times \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) + \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{x_k}\right) - \frac{(\ln x_k-\theta)^2}{2\sigma^2} \xrightarrow{\nabla_\theta=0} \sum_{k=1}^{N} \cancel{-}\frac{1}{\cancel{2}\sigma^2}\times \cancel{2}(\ln x_k-\theta)\times \cancel{-1}=0$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N} \ln x_k - \theta = 0 \rightarrow N\theta = \sum_{k=1}^{N} \ln x_k$$

$$\rightarrow \boxed{\hat{\theta}_{ML} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \ln(x_k)}$$

برای تخمین واریانس:

$$P(x;\sigma^2) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right), \ x>0$$

$$L(X;\sigma^2) = \ln \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{\sigma x_k\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x_k-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) = \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{\sigma x_k\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{(\ln x_k-\theta)^2}{2\sigma^2}$$

$$= N\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) + \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{x_k}\right) - \frac{(\ln x_k-\theta)^2}{2\sigma^2}$$

$$\xrightarrow{\nabla_{\sigma^2}=0} N\times\sigma\cancel{\sqrt{2\pi}}\times\frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}}\times -\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sigma^3} + \sum_{k=1}^{N} -\frac{(\ln x_k-\theta)^2}{2}\times -\frac{1}{\sigma^4} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sigma^4}\sum_{k=1}^{N} \frac{(\ln(x_k)-\theta)^2}{\cancel{2}} = \frac{N}{\cancel{2}\sigma^2} \rightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(\ln x_k-\theta)^2}$$

PAPCO STATIONERY

ب)

$$Q(\mu) = \sum_{k=1}^{N} \ln(p(x_k;\mu)) + \ln p(\mu)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x_k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right)\right) + \ln\left(\frac{\mu \exp(-\mu^2/2\sigma_\mu^2)}{\sigma_\mu^2}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) - \frac{(x_k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) + \ln\left(\frac{\mu}{\sigma_\mu^2}\right) - \frac{\mu^2}{2\sigma_\mu^2}$$

$$\xrightarrow{\nabla_\mu = 0} \left(\sum_{k=1}^{N} + \frac{(x_k-\mu)}{\sigma^2}\right) + \frac{\cancel{\sigma_\mu^2}}{\mu} \times \frac{1}{\cancel{\sigma_\mu^2}} - \frac{\mu}{\sigma_\mu^2} = 0$$

$$\rightarrow \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{(x_k-\mu)}{\sigma^2}\right) + \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{\sigma_\mu^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{N} x_k\right) - \frac{N}{\sigma^2}\mu + \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{\sigma_\mu^2} = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{\mu}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{N} x_k\right) - \left(\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\mu^2}\right)\mu^2 + 1 = 0$$

چون $\mu > 0$

$$\rightarrow \left(\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\mu^2}\right)\mu^2 - Z\mu - 1 = 0 \xrightarrow[\text{درجه ۲}]{\text{حل معادله}} \mu = \frac{Z}{2R}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R}{Z^2}}\right)$$

سؤال ٥ -

$$P(x|\theta) = \theta^2 x e^{-\theta x} u(x)$$

$$L(X;\theta) = \ln P(X;\theta) = \ln \prod_{k=1}^{N} P(x_k;\theta) = \sum_{k=1}^{N} \ln(P(x_k;\theta))$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\theta^2 x_k e^{-\theta x_k} u(x_k)\right) = \sum_{k=1}^{N} \ln(\theta^2) + \ln(x_k u(x_k)) - \theta x_k$$

$$= N \ln(\theta^2) + \sum_{k=1}^{N} \ln(x_k u(x_k)) - \theta x_k \xrightarrow{\nabla\theta} \frac{N}{\cancel{\theta^2}} \times 2\cancel{\theta} + \sum_{k=1}^{N} -x_k = 0$$

$$\longrightarrow \frac{2N}{\theta} = \sum_{k=1}^{N} x_k \longrightarrow \boxed{\hat{\theta}_{ML} = \frac{2N}{\sum_{k=1}^{N} x_k}}$$

سؤال 10-

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg\max_{\theta} \prod_{k=1}^{10} P(x_k;\theta)$$

$\rightarrow$ 3, 2, 2, 0, 1, 1, 3, 2, 2, 0

$$\frac{3-\theta}{\cancel{6}3} \times \frac{\cancel{2}\theta}{3} \times \frac{\cancel{2}\theta}{3} \times \frac{1-\theta}{\cancel{6}3} \times \frac{1-\theta}{3} \times \frac{1-\theta}{3} \times \frac{3-\theta}{\cancel{6}3} \times \frac{\cancel{2}\theta}{3} \times \frac{\cancel{2}\theta}{3} \times \frac{1-\theta}{\cancel{6}3}$$

$$= (3-\theta)^2 (1-\theta)^4 \theta^4 \times \frac{1}{3^{10}}$$

$$\rightarrow \nabla_\theta P(x_k;\theta) = \nabla_\theta \left((3-\theta)^2 (1-\theta)^4 \theta^4 \times \frac{1}{3^{10}} \right) = 0$$

$$\rightarrow -2(3-\theta)(1-\theta)^4\theta^4 - 4(1-\theta)^3(3-\theta)^2\theta^4 + 4\theta^3(3-\theta)^2(1-\theta)^4 = 0$$

$$\rightarrow 2(3-\theta)(1-\theta)^3\theta^3\left(-(1-\theta)\theta - 2(3-\theta)\theta + 2(3-\theta)(1-\theta)\right) = 0$$

$$\rightarrow 2(3-\theta)(1-\theta)^3\theta^3\left(-\theta+\theta^2-6\theta+2\theta^2+6-8\theta+2\theta^2\right) = 0$$

$$\rightarrow 2(3-\theta)(1-\theta)^3\theta^3\left(5\theta^2-15\theta+6\right) = 0$$

$\rightarrow \theta = 1$ ✓ $\quad \rightarrow \theta \simeq 2.525$ ✗ $\quad \rightarrow \cancel{\hat{\theta}_{ML} = 0.475}$

$\theta = 0$ ✓ $\quad \theta \simeq 0.475$ ✓

این سه عدد در شرط $0 \le \theta \le 1$ صدق می‌کنند اما کاملاً مشخص است که چون $\prod_{k=1}^{10} p(x_k;\theta)$

به ازای $\theta=0$ و $\theta=1$ برابر صفر می‌شود این نقاط ماکزیمم نمی‌باشند بنابراین:

$$\boxed{\hat{\theta}_{ML} = 0.475}$$

PAPCO STATIONERY