

۱- متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به صورت $f_X(x) = \begin{cases} 1-x & |x| < 0.5 \\ 0 & |x| > 0.5 \end{cases}$ است. مقدار $\sum_{k=0}^{\infty} E[X^k]$ چقدر است؟

۲- دو متغیر تصادفی X و Y با تابع چگالی احتمال توام $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kxy & 0 < x \leq y, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ داریم. الف) k را بدست آورید.

ب) توابع چگالی احتمال کناری هر یک را بدست آورید.

پ) واریانس هر یک از دو متغیر تصادفی و ضریب همبستگی آنها را بدست آورید.

ت) توابع چگالی احتمال کناری شرطی هر یک را بدست آورید.

ث) بهترین تخمین X بدون اطلاع از Y با معیار محتملترین چیست؟

ج) بهترین تخمین X بدون اطلاع از Y با معیار MMSE چیست و متوسط مربع خطای آن چقدر است؟

چ) بهترین تخمین X برحسب Y با معیار محتملترین چیست؟

ح) بهترین تخمین X برحسب Y با معیار MMSE چیست و متوسط مربع خطای آن چقدر است؟

۳- دو متغیر تصادفی تواماً نرمال X و Y را داریم. ثابت کنید تابع چگالی احتمال شرطی $f_{X|Y}(x|y)$ نیز نرمال است که متوسط و واریانس آن را تعیین خواهید کرد.

۴- در مورد استقلال و ناهمبستگی دو متغیر تصادفی $X \sim \text{Un}(-1,1)$ و $Y = X^2$ با ذکر دلیل اظهار نظر کنید.

۵- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی تواماً نرمال با متوسط‌های صفر و واریانس‌های σ^2 و ضریب همبستگی ρ هستند. الف) ثابت کنید متغیرهای تصادفی $U = X - Y$ و $V = X + Y$ مستقل از هم هستند. ب) مقدار $E[(X^3 - Y^3) | (x - y)]$ را بیابید.

۶- ماتریس همبستگی یک بردار تصادفی با متوسط صفر برابر است با: $\begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 10 & 21 & 11 \\ 4 & 11 & 7 \end{pmatrix}$

ثابت کنید بین ۳ درایه این بردار تصادفی یک رابطه خطی وجود دارد و این ضرایب را پیدا کنید.

۷- ماتریس کواریانس بردار تصادفی \underline{X} با متوسط صفر برابر است با: $\begin{pmatrix} 4.1 & 1.2 \\ 1.2 & 3.4 \end{pmatrix}$. الف) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آن را بدست آورید.

ب) اگر $\underline{Y} = A\underline{X}$ ، ماتریس A را چنان بیابید که بردار \underline{Y} سفید بوده و ماتریس کواریانس آن برابر $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ شود.

۸- تجزیه SVD ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ را بنویسید. مقادیر ویژه روی قطر ماتریس و سطر چه ارتباطی با مقادیر ویژه دو ماتریس $A^T A$ و AA^T دارد؟

۹- در یک مسئله طبقه‌بندی دو کلاسی با یک ویژگی، فرض کنید این ویژگی در کلاس اول از یک توزیع گوسی با متوسط صفر و انحراف معیار ۳ و در کلاس دوم از یک توزیع با متوسط ۴- و انحراف معیار یک تبعیت می‌کند.

الف) با استفاده از دستور `randn` در `Matlab`، ۲۰ نمونه از هر کلاس تولید کنید و آن‌ها را روی یک محور با دو علامت دایره و مثلث و با دو رنگ مختلف رسم کنید.

ب) هیستوگرام داده‌های هر کلاس را رسم کرده و تحقیق کنید آیا تابع چگالی تخمین زده شده از روی ۲۰ نمونه هر کلاس شبیه گوسی است؟

پ) داده‌های $-4, -3.5, -3, -2.5, -2, -1.5, -1$ را با فاصله اقلیدسی و فاصله *Mahalanobis* طبقه‌بندی کنید.