۱- الف) برای نرمالیزه‌کردن ویژگی‌ها در داده‌های آموزش، آیا می‌توان داده‌های هر کلاس را جداگانه نرمالیزه کرد؟
ب) داده‌های تست را چگونه باید نرمالیزه کرد؟

۲- برای بردار ویژگی $\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ بردار متوسط و ماتریس کواریانس کلاس iام به صورت زیر داده شده است: $\underline{\mu_i} = \begin{pmatrix} m_i \\ m'_i \end{pmatrix}, \Sigma_i = \begin{pmatrix} s_i & r_i \\ r_i & s'_i \end{pmatrix}$

الف) معیار همگرایی d_{ij} مربوط بر بردار ویژگی $\underline{X}$ را با استفاده از فرمول (۲۲-۵) کتاب برحسب پارامترهای داده شده بنویسید و آن‌را d بنامید.

ب) معیار همگرایی d_{ij} مربوط بر ویژگی x_1 را با استفاده از فرمول (۲۲-۵) کتاب برحسب پارامترهای داده شده بنویسید و آن‌را d_1 بنامید.

پ) معیار همگرایی d_{ij} مربوط بر ویژگی x_2 را با استفاده از فرمول (۲۲-۵) کتاب برحسب پارامترهای داده شده بنویسید و آن‌را d_2 بنامید.

ت) رابطه d و d_1 و d_2 چگونه است؟ در صورتی که دو ویژگی x_1 و x_2 ناهبمسته باشند، این رابطه به چه صورتی در می‌آید؟ در صورتی که دو ویژگی x_1 و x_2 مستقل باشند، این رابطه به چه صورتی در می‌آید؟

۳- مسئله ۱۲ از فصل پنجم کتاب را حل کنید.

۴- در یک مسئله طبقه‌بندی کننده ۳ کلاسی هم‌احتمال، می‌خواهیم یکی از چهار ویژگی زیر را انتخاب کنیم:

$$x_1 : \begin{cases} \mu_1 = 1, \sigma_1^2 = 1 \\ \mu_2 = 2, \sigma_2^2 = 1 \\ \mu_3 = 3, \sigma_3^2 = 2 \end{cases} \quad x_2 : \begin{cases} \mu_1 = 4, \sigma_1^2 = 2 \\ \mu_2 = 2, \sigma_2^2 = 1 \\ \mu_3 = 3, \sigma_3^2 = 2 \end{cases} \quad x_3 : \begin{cases} \mu_1 = 1, \sigma_1^2 = 4 \\ \mu_2 = 5, \sigma_2^2 = 15 \\ \mu_3 = 3, \sigma_3^2 = 2 \end{cases} \quad x_4 : \begin{cases} \mu_1 = 0, \sigma_1^2 = 3 \\ \mu_2 = 2, \sigma_2^2 = 1 \\ \mu_3 = 1, \sigma_3^2 = 1 \end{cases}$$

بهترین ویژگی را با هر یک از معیارهای زیر انتخاب کنید. ابتدا ویژگی‌ها را بر اساس هر معیار مرتب کنید.

الف) معیار واگرایی ب) معیار فاصله باتاچاریا پ) معیار فیشر

۵- یک مسئله طبقه‌بندی دو کلاسی دو بعدی، احتمال وقوع کلاس اول، ۳ برابر احتمال وقوع کلاس دوم است. بردارهای ویژگی با توزیع گوسی با متوسط‌ها و کواریانس زیر را داریم: $\underline{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mu}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

الف) معادله مرز تصمیم‌گیری بیز را بدست آورید.

ب) بر اساس معیار PCA، بعد فضا را به ۱ کاهش داده و مرز تصمیم‌گیری را بدست آورید. آیا تفکیک‌پذیری حفظ می‌شود؟

پ) در قسمت به جای بزرگترین مقدار ویژه، کوچکترین مقدار ویژه را انتخاب کنید. آیا تفکیک‌پذیری حفظ می‌شود؟

ت) قسمت ب را با استفاده از تابع تفکیک خطی فیشر تکرار کنید. آیا تفکیک‌پذیری حفظ می‌شود؟

ث) مشاهدات $\underline{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ را با هر یک از حالت‌های الف و ب و پ و ت جداگانه طبقه‌بندی کنید. کدام جواب منطقی به‌نظر می‌رسد؟

ج) با معیار FDR بهترین ویژگی را انتخاب کنید.

۶- در مثال ۵-۵ کتاب، معیار J_3 تعریف شده در صفحه ۲۸۱ کتاب برای سه حالت شکل صفحه ۲۸۲ کتاب محاسبه شده است. در صفحه ۴۳ فایل مبحث هشتم یک حالت چهارمی هم اضافه شده است. معیار J_3 را برای شکل اضافه شده بدست آورید.

۷- الگوریتم جستجوی شناور صفحه ۲۸۷ کتاب را مختصرا توضیح دهید.

۸- مسئله ۵ از فصل ۶ کتاب را حل کنید.

۹- در یک مسئله طبقه‌بندی دو کلاسی، یک ویژگی داریم که در یک کلاس توزیع گوسی با متوسط ۲ و انحراف معیار ۱ داشته و در کلاس دیگر توزیع گوسی با متوسط ۴ و همان انحراف معیار. حد چرنف و فاصله باتاچاریا را برای این ویژگی محاسبه کنید.

۱۰- در یک مسئله طبقه‌بندی دو کلاسی با دو ویژگی، از هر کلاس دو داده داریم:

$$\omega_1 : \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \omega_2 : \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

الف) با محاسبه بردار میانگین و ماتریس کواریانس، داده‌ها را با استفاده از PCA به فضای یک بعدی برده و تمایزپذیری کلاس‌ها را بررسی کنید. برای هر دو راستا مسئله را حل کنید.

ب) در قسمت الف یک بردار پیشنهاد دهید که اگر به همه داده‌ها اضافه شود مولفه اساسی اول تغییر نکند.

پ) قسمت الف را با روش SVD حل کنید. ابتدا میانگین کل داده‌ها را صفر کنید.

ت) داده‌ها را با استفاده از Kernel PCA با کرنل گوسی با انحراف معیار ۱ به فضای دو بعدی متناظر با دو مولفه اساسی اول برده و شکل داده‌ها در فضای اولیه و فضای جدید رسم کنید. محاسبات را با استفاده از فرمول‌های ارائه شده در درس و با Matlab انجام دهید. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس 4x4 بدست آمده را ذکر کنید.

۱۱- الف) تعدادی داده دو کلاس زیر را داریم:

C1	(1,2)	(2,3)	(3,3)	(4,5)	(5,5)	--------
C2	(1,0)	(2,1)	(3,1)	(3,2)	(5,3)	(6,5)

اولا چرا اینجا PCA در کاهش بعد به ما کمک چندانی نمی‌کند؟

ثانیا با استفاده از معیار فیشر بردار تبدیل بعد به یک را بدست آورید.

ب) در نمودارهای زیر (که یکسان هستند) بردارهای مولفه اول PCA و روش فیشر را ترسیم کنید.

آیا می‌توان با تقریب خوبی این دو کلاس داده‌ها را تفکیک‌پذیر دانست؟ پس از کاهش بعد به یک با PCA و روش فیشر چطور؟