تمرین 5 سیگنال - رادین خیام - 99101579

سوال 1)

$x_1[n]$ :

$$a_k = \frac{1}{8}\sum_{m=0}^{m=7} x_1[m]\, e^{-j\frac{k\pi}{4}m} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi k}{4}} + e^{-j\frac{2k\pi}{4}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{3k\pi}{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{5k\pi}{4}} - e^{-j\frac{6k\pi}{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{7k\pi}{4}}\right)$$

$$\rightarrow a_k = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-j\frac{k\pi}{4}} + e^{-j\frac{3k\pi}{4}} - e^{-j\frac{5k\pi}{4}} - e^{-j\frac{7k\pi}{4}}\right) + e^{-j\frac{2k\pi}{4}} - e^{-j\frac{6k\pi}{4}}\right)$$

$x_2[n]$ :

$$a_k = \frac{1}{8}\sum_{m=0}^{m=7} x_2[m]\, e^{-j\frac{k\pi}{4}m} = \frac{1}{8}\left(1 + e^{-j\frac{k\pi}{4}} + e^{-j\frac{2k\pi}{4}} - e^{-j\frac{3k\pi}{4}} - e^{-j\frac{4k\pi}{4}} - e^{-j\frac{5k\pi}{4}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{6k\pi}{4}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{7k\pi}{4}}\right)$$

$x_3[n]$ :

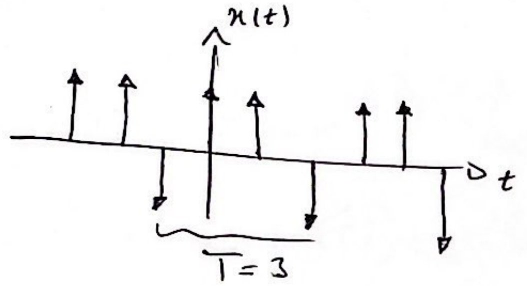
$$a_k = \frac{1}{8}\sum_{m=0}^{m=7} x_3[m]\, e^{-j\frac{k\pi}{4}m} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}e^{-j\frac{k\pi}{4}} + \frac{2}{3}e^{-j\frac{2k\pi}{4}} + e^{-j\frac{3k\pi}{4}} - e^{-j\frac{5k\pi}{4}} - \frac{2}{3}e^{-j\frac{6k\pi}{4}} - \frac{1}{3}e^{-j\frac{7k\pi}{4}}\right)$$

$x_4[n]$ :

$$a_k = \frac{1}{8}\sum_{m=0}^{m=7} x_4[m]\, e^{-j\frac{k\pi}{4}m} = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{2k\pi}{4}} + e^{-j\frac{3k\pi}{4}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{4k\pi}{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{6k\pi}{4}} - e^{-j\frac{7k\pi}{4}}\right)$$

(سؤال 2

$$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-3m)+\delta(t-1-3m)-\delta(t-2-3m)$$

$\longrightarrow$ 

$$\longrightarrow a_k=\frac{1}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{5}{2}}x(t)\,e^{-j\frac{2k\pi}{3}t}\,dt\longrightarrow\boxed{a_k=\frac{1}{3}\left(1+e^{-j\frac{2k\pi}{3}}-e^{-j\frac{4k\pi}{3}}\right)}$$

$$\longrightarrow x(t)=\frac{1}{3}\sum_{k\in Z}\left(1+e^{-j\frac{2k\pi}{3}}-e^{-j\frac{4k\pi}{3}}\right)e^{j\frac{2k\pi}{3}t}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sum_{k\in Z}e^{j\frac{2k\pi}{3}t}+\sum_{k\in Z}e^{j\frac{2k\pi}{3}(t-1)}-\sum_{k\in Z}e^{j\frac{2k\pi}{3}(t-2)}\right)$$

$$\longrightarrow y(t)=\frac{1}{3}\left(\sum_{k\in Z}\left(e^{j\frac{2k\pi}{12}}-e^{-j\frac{2k\pi}{12}}\right)e^{j\frac{2k\pi}{3}t}+\sum_{k\in Z}\left(e^{j\frac{2k\pi}{12}}-e^{-j\frac{2k\pi}{12}}\right)e^{j\frac{2k\pi}{3}(t-1)}+\sum_{k\in Z}\left(e^{j\frac{2k\pi}{12}}-e^{-j\frac{2k\pi}{12}}\right)e^{j\frac{2k\pi}{3}(t-2)}\right)$$

$$e^{j\frac{2k\pi}{12}}-e^{-j\frac{2k\pi}{12}}=j2\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)\longrightarrow y(t)=\frac{1}{3}\sum_{k\in Z}j2\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)\left(e^{j\frac{2k\pi}{3}t}+e^{j\frac{2k\pi}{3}(t-1)}-e^{j\frac{2k\pi}{3}(t-2)}\right)$$

$$y(t)=\frac{1}{3}\sum_{k\in Z}j2\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)\times e^{j\frac{2k\pi}{3}t}\left(1+e^{-j\frac{2k\pi}{3}}-e^{-j\frac{4k\pi}{3}}\right)$$

$$\longrightarrow b_k=\frac{1}{3}\times j2\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)\times\left(1+e^{-j\frac{2k\pi}{3}}-e^{-j\frac{4k\pi}{3}}\right)$$

$$\longrightarrow b_3=\frac{1}{3}\times j2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\times\left(1+e^{-j2\pi}-e^{-j4\pi}\right)$$

$$\longrightarrow b_3=\frac{1}{3}\times j2\times(1+\cancel{1}-\cancel{1})=\boxed{j\frac{2}{3}}$$

سئوال 3)

$$a_k = \begin{cases} jk & |k|<3 \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$\xrightarrow{T=4} x(t) = -2je^{-j\pi t} - je^{-j\frac{\pi}{2}t} + je^{j\frac{\pi}{2}t} + 2je^{j\pi t}$$

$$\longrightarrow x(t) = -2j(\cos(\pi t) - j\sin(\pi t)) - j(\cos(\tfrac{\pi}{2}t) - j\sin(\tfrac{\pi}{2}t)) + j(\cos(\tfrac{\pi}{2}t) + j\sin(\tfrac{\pi}{2}t))$$
$$+ 2j(\cos(\pi t) + j\sin(\pi t))$$

$$\longrightarrow \boxed{x(t) = -4\sin(\pi t) - 2\sin(\tfrac{\pi t}{2})} \quad 0 \leqslant t < 4$$

$$b_k = \begin{cases} 1 & k \text{ odd} \\ 0 & k \text{ even} \end{cases}$$

$$\longrightarrow x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k e^{j\frac{k\pi}{2}t} = \sum_{k \text{ odd}} e^{j\frac{k\pi}{2}t}$$

از اسلاید ها میدانیم که سری فوریه یک قطار ضربه با دوره تناوب T می‌شود:

$$\frac{1}{T}\sum e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$\longrightarrow Ш_4(t) = \frac{1}{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{j\frac{k\pi}{2}t}$$

حال اگر قطار ضربه‌ای داشته باشیم که دوره تناوب آن 2 باشد:

$$Ш_2(t) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{jk\pi t}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{k' \text{ even} \\ k\in\mathbb{Z}}} e^{j\frac{k'\pi}{2}t} \qquad \longrightarrow 4Ш_4(t) - 2Ш_2(t) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ k \text{ odd}}} e^{j\frac{k\pi}{2}t}$$

حال اگر روی 0 تا 4 بخواهیم بررسی کنیم این تابع را:

$$\sum_{L=-\infty}^{+\infty} 4\delta(t-4L) - 2\delta(t-2L)$$

$$= \boxed{2\delta(t) - 2\delta(t-2)}$$

سئوال 4)

(1)

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m] \times e^{-j\frac{2k\pi}{N}m}$$

$$x[n] = -x[n+\tfrac{N}{2}] \longrightarrow a_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[m] \times \left(e^{-j\frac{2k\pi}{N}m} - e^{-j\frac{2k\pi}{N}(\frac{N}{2}+m)}\right)$$

$$\longrightarrow a_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[m] \times e^{-j\frac{2k\pi}{N}m}\left(1 - e^{-jk\pi}\right)$$

به ازای $K$ های زوج این

عبارت 0 می‌شود پس $a_K$ به ازای $K$ های زوج صفر است .

سئوال 4)

(1) $$a_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\times e^{-j\frac{2k\pi}{N}m}$$

$$x[n] = -x[n+\tfrac{N}{2}] \to a_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[m]\times\left(e^{-j\frac{2k\pi}{N}m} - e^{-j\frac{2k\pi}{N}(\frac{N}{2}+m)}\right)$$

$$\to a_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[m]\times e^{-j\frac{2k\pi}{N}m}\left(1-e^{-jk\pi}\right)$$

به ازای k های زوج این

عبارت 0 می‌شود پس $a_k$ به ازای k های زوج صفر است .

(2)

طبق صورت سوال $$\to \sum_{r=0}^{\frac{N}{m}-1} x[n+\tfrac{rN}{m}] = 0 \to \sum_{r=0}^{\frac{N}{m}-1}\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2k\pi}{N}(n+r\frac{N}{m})} = 0$$

$$\to \sum_{r=0}^{\frac{N}{m}-1}\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2k\pi}{N}n} e^{j\frac{2k\pi}{\cancel{N}}\times\frac{r\cancel{N}}{m}} = 0$$

$$\to \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2k\pi}{N}n}\left(\sum_{r=0}^{\frac{N}{m}-1} e^{j\frac{2k\pi r}{m}}\right) = 0$$

اگر $\frac{k}{m}$ صحیح باشد : $$e^{j\frac{2k\pi}{N}n}\times a_k\sum_{r=0}^{\frac{N}{m}-1} e^{j\frac{2\pi}{m}rk} = e^{j\frac{2k\pi}{m}n}\times a_k\times\frac{N}{m}$$

$$a_k\times\frac{N}{m} = 0$$

$$\to \boxed{a_k = 0}$$

سئوال 6)

$$\frac{1}{6}\int_{-3}^{+3}|x(t)|^2 dt = 50 \xrightarrow{\text{پارسوال}} \sum_{k\in Z}|a_k|^2 = 50 \quad (*)$$

$$x(t) = -x(t-3) \longrightarrow -e^{-j\frac{2\pi}{6}k\times 3} a_k = a_k \longrightarrow -e^{-jk\pi} a_k = a_k$$

$$\longrightarrow \left(\cos(k\pi) - j\cancel{\sin(k\pi)}\right) a_k = -a_k$$

به ازای $k$ های فرد رابطه برقرار است و مشکلی نداریم ولی به ازای $k$ های زوج باید $a_k$ صفر باشد تا رابطه برقرار شود.

خود سئوال هم گفته است به ازای $|k|>3$ ، $a_k = 0$ است پس $a_k$ هایی که باقی می‌مانند می‌شود: $a_3, a_{-3}, a_1, a_{-1}$

از طرفی سیگنال ما حقیقی است بنابراین طبق خواص فوریه میدانیم که: $a_k = \overline{a_{-k}}$

$$\xrightarrow[\text{سئوال}]{\text{طبق صورت}} a_3\overline{a_{-3}} = 25 \xrightarrow{a_3=\overline{a_{-3}}} \boxed{a_3 = a_{-3} = \pm 5}$$

$$\xrightarrow{(*)} (a_{-3})^2 + (a_{-1})^2 + (a_1)^2 + (a_3)^2 = 50 \longrightarrow a_1^2 + a_{-1}^2 = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{a_1 = a_{-1} = 0}$$

$$\longrightarrow x(t) = \pm 5 e^{j\frac{2\pi\times -3}{6}t} \pm 5 e^{j\frac{2\pi\times 3}{6}t} \longrightarrow x(t) = \pm 5\left(e^{-j\pi t} + e^{j\pi t}\right)$$

$$\longrightarrow x(t) = 5\times 2\cos(\pi t) = \boxed{\pm 10\cos(\pi t)} \longrightarrow$$ دوره تناوب اصلی 2

هست. در سئوال سری فوریه را با دوره تناوبی غیر دوره تناوب اصلی نوشته اند.

(2)

(ادامه سؤال 5)

$$C_k = \sum_{w=0}^{4} a_w b_{k-w}$$

$$C_3 = \overset{0}{\cancel{a_0 b_3}} + \overset{2}{\cancel{a_1 b_2}} + \overset{-2}{\cancel{a_2 b_1}} + \overset{0}{\cancel{a_3 b_0}} + \overset{4}{\cancel{a_4 b_{-1}}} = \boxed{+2}$$

$$C_4 = \overset{0}{\cancel{a_0 b_4}} + \overset{-3}{\cancel{a_1 b_3}} + \overset{4}{\cancel{a_2 b_2}} + \overset{-3}{\cancel{a_3 b_1}} + \overset{0}{\cancel{a_4 b_0}} = \boxed{-2}$$

$$C_5 = \overset{0}{\cancel{a_0 b_5}} + \overset{4}{\cancel{a_1 b_4}} + \overset{-6}{\cancel{a_2 b_3}} + \overset{+6}{\cancel{a_3 b_2}} + \overset{-4}{\cancel{a_4 b_1}} = \boxed{0}$$

$$C_6 = \overset{0}{\cancel{a_0 b_6}} + \overset{-5}{\cancel{a_1 b_5}} + \overset{+8}{\cancel{a_2 b_4}} + \overset{-9}{\cancel{a_3 b_3}} + \overset{+8}{\cancel{a_4 b_2}} = \boxed{+2}$$

$$C_7 = \overset{0}{\cancel{a_0 b_7}} + \overset{+6}{\cancel{a_1 b_6}} + \overset{-10}{\cancel{a_2 b_5}} + \overset{+12}{\cancel{a_3 b_4}} + \overset{-12}{\cancel{a_4 b_3}} = \boxed{-4}$$

سؤال 5)

(1)

فرض می‌کنیم ضرایب سری فوریه سیگنال $z[n]$ ، $C_K$ باشند در نتیجه :

$$C_K = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, y[m]\, e^{-j\frac{2k\pi}{N}m}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{w=0}^{N-1} a_w e^{j\frac{2w\pi}{N}m}\, y[m]\, e^{-j\frac{2k\pi}{N}m}$$

$$= \sum_{w=0}^{N-1} a_w \left(\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} y[m]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-w)m}\right)$$

$$= \sum_{w=0}^{N-1} a_w b_{k-w} \quad \text{—}\!\circ \qquad \boxed{C_K = \sum_{w=0}^{N-1} a_w b_{k-w}}$$