تمرین سری ۱۰ درس سیگنال و سیستم - رادین خیاری - 99101579

سئوال 1)

$$X(Z) = \ln(1-2Z), \quad |Z| < \frac{1}{2}$$

(a

$$\ln(1-2Z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2Z)^k}{k} \overset{m=-k}{=} -\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{(2Z)^{-m}}{-m} = \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{(2Z)^{-m}}{m}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^m \times Z^{-m} \times \frac{1}{m} \longrightarrow \boxed{x[n] = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]}$$

(b

$$\frac{d}{dZ} X(Z) = \frac{-2}{1-2Z} = (-2) \times \frac{1}{-2+Z^{-1}} = \frac{+Z^{-1}}{1-\frac{1}{2}Z^{-1}}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dZ} X(Z) = +Z^{-1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}Z^{-1}}\right) \rightarrow +Z\frac{d}{dZ}X(Z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}Z^{-1}}$$

$|Z| < \frac{1}{2}$

از دو طرف تبدیل Z معکوس بگیریم $\rightarrow -n\,x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \rightarrow \boxed{x[n] = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]}$

سئوال 2)

$$V[n] = x[n] * -w[n] \rightarrow V(Z) = X(Z) - W(Z)$$

(a

$$W(Z) = V(Z)H(Z) + E(Z) \rightarrow W(Z) = X(Z)H(Z) - W(Z)H(Z) + E(Z)$$

$$\rightarrow (1+H(Z))W(Z) = X(Z)H(Z) + E(Z)$$

$$\rightarrow W(Z) = X(Z)\frac{H(Z)}{1+H(Z)} + E(Z)\frac{1}{1+H(Z)} \rightarrow H_1(Z) = \frac{H(Z)}{1+H(Z)}$$

$$H_2(Z) = \frac{1}{1+H(Z)}$$

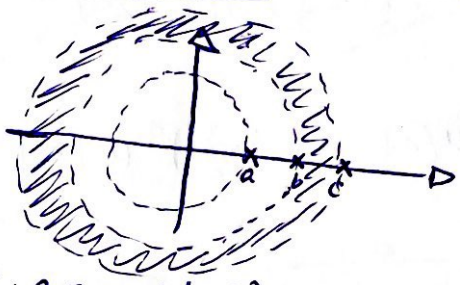
(سؤال 3

(a

$x[n] = a^n u[n] + b^n u[n] + c^n u[-n-1]$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-cz^{-1}}$$

ROC: $|b| < |z| < |c|$



$$X(z) = \frac{1 - 2cz^{-1} + (bc + ac - ab)z^{-2}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})(1-cz^{-1})}$$

zeros: $z^2 - 2cz + bc + ac - ab = 0 \rightarrow z = \frac{+2c \pm \sqrt{4c^2 - 4(bc+ac-ab)}}{2}$

$= c \pm \sqrt{c^2 - bc - ac + ab}$

(b

$x[n] = n^2 a^n u[n]$

$a^n u[n] \xrightarrow{Z.T} \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|$

$n a^n u[n] \xrightarrow{Z.T} -z \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = -z \times \frac{-a}{z^2} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$

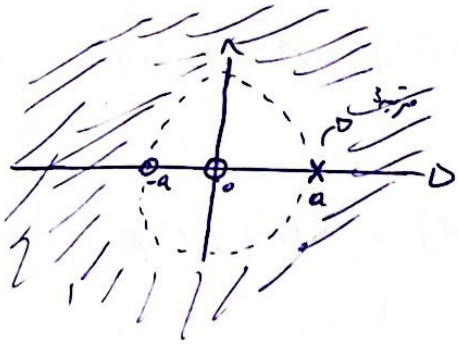
$|z| > |a|$

$n^2 a^n u[n] \xrightarrow{Z.T} -z \frac{d}{dz}\left(\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}\right) = -z \times \left(\frac{-a}{z^2}(1-az^{-1})^2 - az^{-1} \times 2 \times \frac{a}{z^2}\right) \Big/ (1-az^{-1})^4$

$= \frac{az^{-1}(1-az^{-1})^2 + 2a^2 z^{-2}}{(1-az^{-1})^4} = \frac{az^{-1} + a^2 z^{-2}}{(1-az^{-1})^3}$

ادامه سوال 3 قسمت b)

$$\Rightarrow X(z) = \frac{-az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3} \qquad ROC: |z|>|a|$$

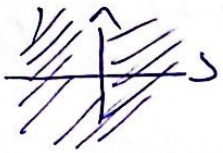


c)

$$x[n] = e^{n4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}n\right)\right]u[n] - e^{n4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}n\right)\right]u[n-1]$$

$$= \underbrace{e^{n4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}n\right)\right]}_{\text{برابر ۱ به ازای } n=0} \underbrace{\left(u[n]-u[n-1]\right)}_{\delta[n]} = \delta[n] \rightarrow X(z)=1$$

ROC: صفحه



هیچ قطب، صفری ندارد.

سوال 4)

اول فاصله قطب ها را مقایسه می کنیم:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \simeq 0.7 < \frac{3}{4}$$

حال چون گفته شده $x[n]$ علی می باشد پس ROC باید دست راستی باشد

در نتیجه: $ROC: |z| > \frac{3}{4}$

حال با توجه به محل قطب ها و صفر ها حدس می زنیم که:

$$X(z) = \frac{z}{(z^2 - z + \frac{1}{2})(z + \frac{3}{4})} \quad , \quad |z| > \frac{3}{4}$$

حال برای $y[n]$ داریم:

$$y[n] = x[\underbrace{-n+3}_{-(n-3)}]$$

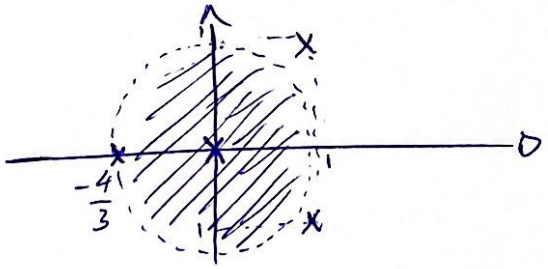
$$\longrightarrow Y(z) = X\left(\frac{1}{z}\right) \times z^{-3} \qquad ROC: |z| < \frac{3}{4}$$

$$\longrightarrow Y(z) = \frac{z^{-3} \times z^{-1}}{(z^{-2} - z^{-1} + \frac{1}{2})(z^{-1} + \frac{3}{4})} = \frac{z^{-4}}{(z^{-2} - z^{-1} + \frac{1}{2})(z^{-1} + \frac{3}{4})}$$

$$\times \frac{z^4}{z^4}$$

$$\longrightarrow Y(z) = \frac{1}{z(\frac{z^2}{2} - z + 1)(\frac{3}{4}z + 1)} = \frac{\frac{8}{3}}{z(z^2 - 2z + 2)(z + \frac{4}{3})}$$

Poles: $0, -\frac{4}{3}, 1 \pm j$



سوال 5)

(a

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n-1]$$

$$\rightarrow X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}} \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

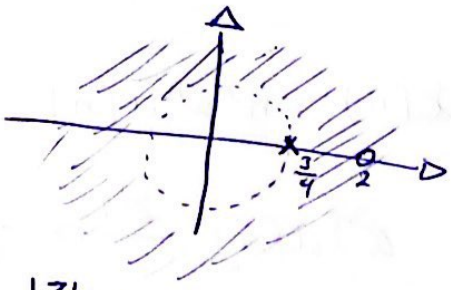
$$\rightarrow X(z) = \frac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

$$y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

$$\rightarrow Y(z) = \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow Y(z) = \frac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{3}{4}z^{-1})} \qquad |z| > \frac{3}{4}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \boxed{\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{3}{4}}$$



$$H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} - 2\frac{z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{3}{4}$$

(b

$$\xrightarrow{Z.T^{-1}} h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] - 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

$$\rightarrow \boxed{h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(u[n] - \frac{8}{3}u[n-1]\right)}$$

ادامه سوال 5)

(c

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} \longrightarrow Y(z)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right) = X(z)\left(1-2z^{-1}\right)$$

$$\xrightarrow{Z.T^{-1}} y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] = x[n] - 2x[n-1]$$

$$\longrightarrow \boxed{y[n] = \frac{3}{4}y[n-1] + x[n] - 2x[n-1]}$$

(d

سیستم علی است زیرا $h[n]=0$ می باشد به ازای $n<0$ ، همچنین ROC دنباله راست است

سیستم پایدار است زیرا ناحیه همگرایی شامل دایره $|z|=1$ می شود.

سوال ۶)

الف)

$$y[n] + \sum_{k=1}^{10} a_k y[n-k] = x[n] + \beta x[n-1]$$

$$\rightarrow h[n] + \sum_{k=1}^{10} a_k h[n-k] = \delta[n] + \beta \delta[n-1]$$

با توجه به علی بودن سیستم $h[n]$ به ازای $n<0$ برابر با ۰ می باشد.

$$\rightarrow h[0] = \delta[0] = \boxed{1}$$

ب) در رابطه بالا به جای $n=0$ ، $n=1$ قرار می دهیم:

$$\rightarrow h[1] + \sum_{k=1}^{10} a_k h[1-k] = \delta[1] + \beta \delta[0]$$

$$\rightarrow h[1] + a_1 h[0] = \delta[1] + \beta \delta[0] \rightarrow \boxed{a_1 = \frac{\beta - h[1]}{h[0]}}$$