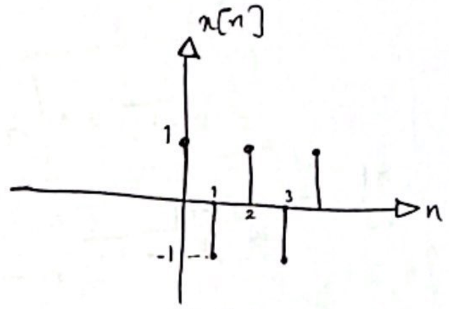
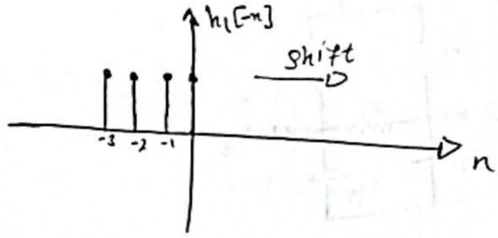
تمرین سری 3 - درس سیگنال و سیستم - راوین خیام - 99101579

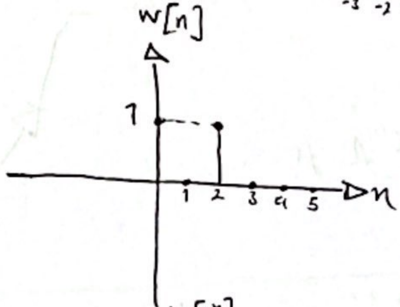
سوال 1)

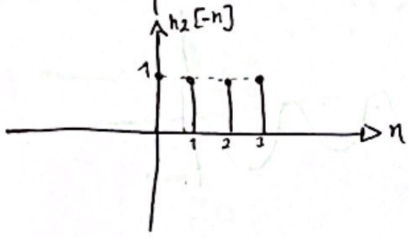
a) $x[n] = (-1)^n u[n]$



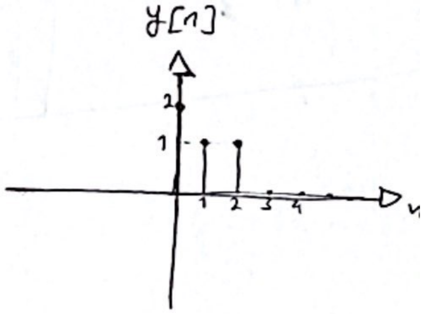




—▷ w[n]:

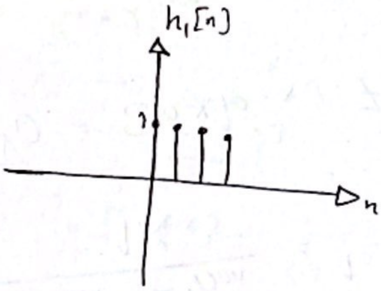


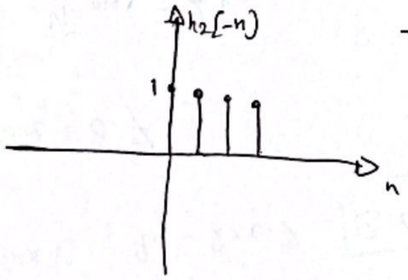




—▷



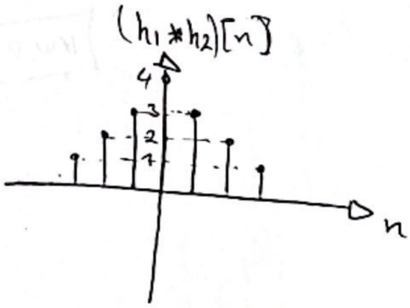

b)




پاسخ ضربه کل سیستم می شود: $h_1 * h_2$

—▷



ادامه سؤال 1 -

c)

میدانیم : $\underset{x[n]:}{\delta[n]} \longrightarrow \boxed{\text{system 1}} \longrightarrow \underset{w[n]:}{h_1[n]}$

$\longrightarrow$ if : $x[n] = \delta[n] + 5\delta[n-4] - 2\delta[n-8]$

$\xrightarrow{LSI} w[n] = h_1[n] + 5h_1[n-4] - 2h_1[n-8]$

$\longrightarrow w[0] = h_1[0] + \cancel{5h_1[-4]}^{0} - \cancel{2h_1[-8]}^{0} = 1$

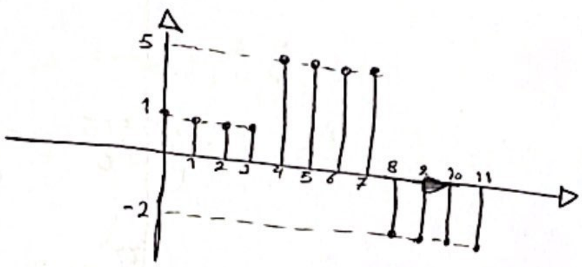
$w[1] = 1$ $\quad w[4] = 5$ $\quad w[8] = w[9] = w[10] = w[11] = -2$

$w[2] = 1$ $\quad w[5] = 5$

$w[3] = 1$ $\quad w[6] = 5$

$w[7] = 5$

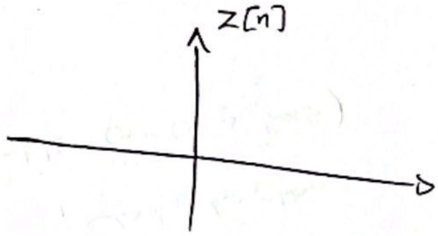
$\longrightarrow$



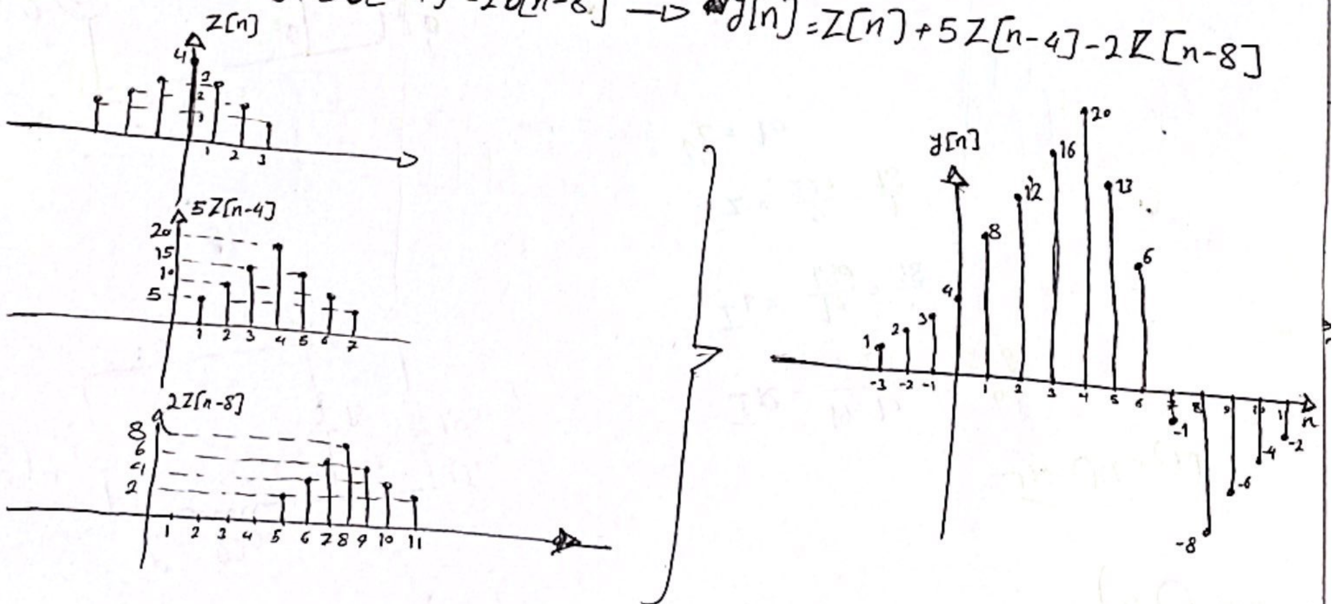

d)

$(h_1 * h_2)[n] = Z[n]$

میدانیم : $\underset{x[n]:}{\delta[n]} \longrightarrow \boxed{\text{system 1 or 2}} \longrightarrow \underset{y[n]:}{Z[n]}$




$\longrightarrow$ if: $x[n] = \delta[n] + 5\delta[n-4] - 2\delta[n-8] \longrightarrow y[n] = Z[n] + 5Z[n-4] - 2Z[n-8]$



سوال 2)

$$y[n] - \frac{1}{3}y[n-1] = x[n]$$
$$y[-2] = 0$$

این سیستم همانطور که مشخص است LSI می‌باشد ، حال می‌خواهیم پاسخ ضربه این سیستم را پیدا کنیم $\longrightarrow x[n] = \delta[n]$

$$y[n] - \frac{1}{3}y[n-1] = \delta[n]$$

$$\longrightarrow \cancel{y[-2]}^{0} - \frac{1}{3}y[-3] = 0 \longrightarrow y[-3] = 0$$

$$y[-1] - \cancel{\frac{1}{3}y[-2]}^{0} = 0 \longrightarrow y[-1] = 0$$

$$y[0] - \frac{1}{3}y[-1] = 1 \longrightarrow y[0] = 1$$

$$y[1] - \frac{1}{3}y[0] = 0 \longrightarrow y[1] = \frac{1}{3} \longrightarrow y[2] = \frac{1}{9} \cdots\cdots$$

$$\xrightarrow{\text{پاسخ ضربه}} y[n] \begin{cases} \frac{1}{3^n} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

حال می‌دانیم که برای یک سیستم LSI اگر پاسخ ضربه در فضای $l_1$ باشد به معنای این است که سیستم پایدار می‌باشد ، در این مثال میبینیم که پاسخ ضربه در $l_1$ می‌باشد زیرا :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{3^n} \right| = \boxed{\frac{3}{2}} \longrightarrow$$

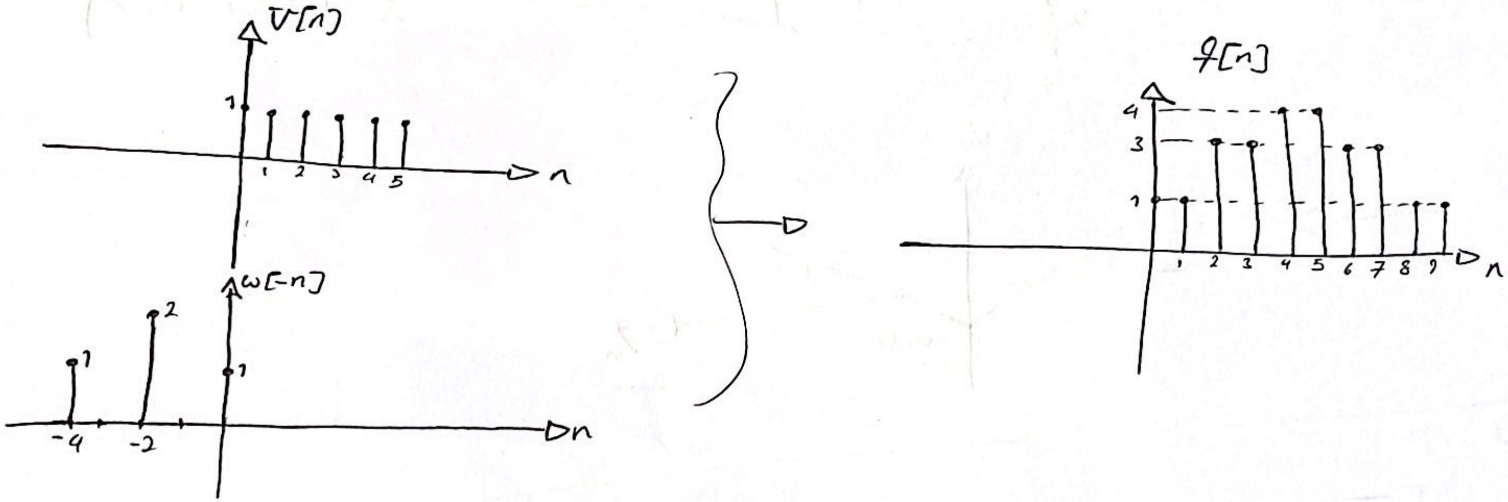
پس بی‌نهایت نشد پس در فضای $l_1$ است .

و سیستم پایدار می‌باشد .

سؤال ۳)

a) $v[n] = u[n] - u[n-6]$

$w[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4]$



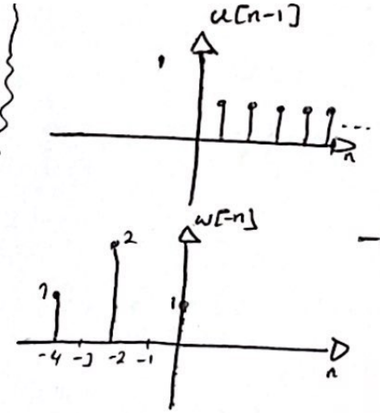
b) $(r * v)[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} f[k]$

$$\sum_{k=-\infty}^{n-1} f[k] = f[n] * u[n-1]$$

$$f[n] = v[n] * w[n]$$

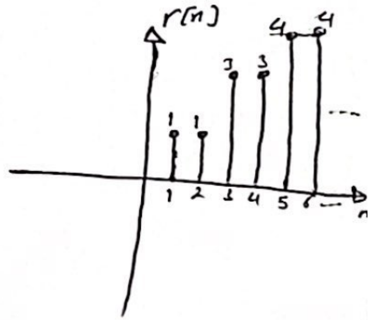
$$\rightarrow r[n] * v[n] = v[n] * w[n] * u[n-1]$$

$$\rightarrow \boxed{r[n] = w[n] * u[n-1]}$$




$\rightarrow$

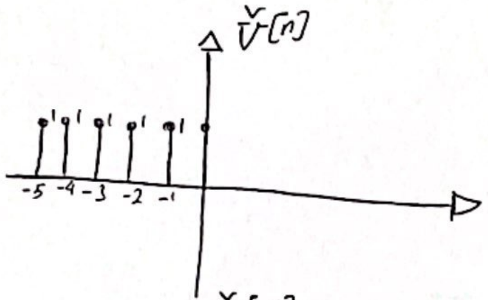
ادامه سؤال 3)

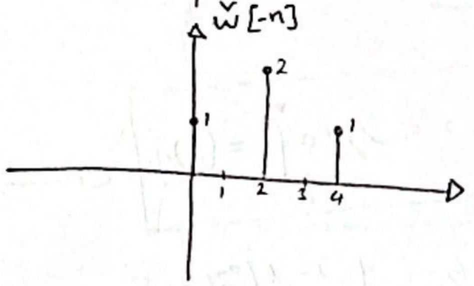


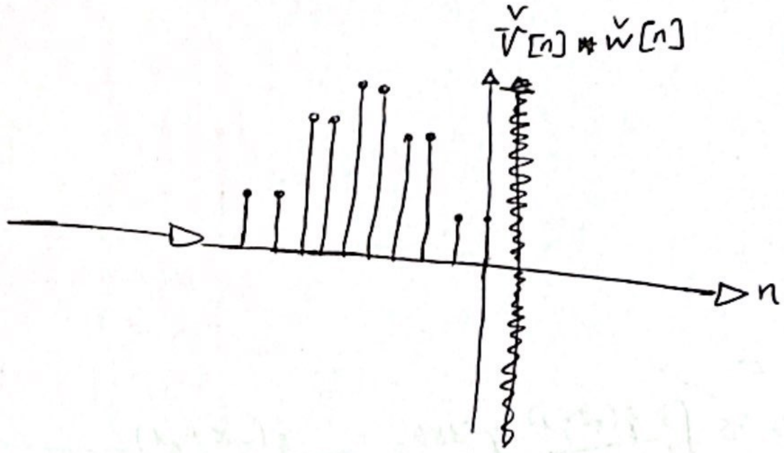
ادامه سوال 3)

c) $\check{v}[n] = u[-n] - u[-n-6]$

$\check{w}[n] = \delta[-n] + 2\delta[-n-2] + \delta[-n-4]$




$\check{v}[n] * \check{w}[n] = f[-n] = \check{f}[n]$

می‌بینیم که :

---

سوال 4)

طبق روابط کانولوشن در این سوال می‌توانیم به معادلات روبرو برسیم :

(I) $3\times h[-1] + 2\times h[0] + 1\times h[1] = 5$

(II) $3\times h[-2] + 2\times h[-1] + 1\times h[0] = 2$

(III) $3\times h[2] + 2\times h[3] + 1\times h[4] = 7$

(IV) $3\times h[3] + 2\times h[4] + 1\times h[5] = 6$

از طرفی چون طول سیگنال پاسخ ضربه 4 است بنابراین $h[-1]$ و $h[-2]$ صفر هستند چون در غیر این صورت در معادله چهارم باید $h[3], h[4], h[5]$ صفر می‌شدند که واضحاً اشتباه است بنابراین :

$(II) \to \boxed{h[0]=2} \xrightarrow{(I)} \boxed{h[1]=1} \xrightarrow{\text{طول برابر 4}} h[4]=0 \,,\, h[5]=0 \xrightarrow{(IV)} \boxed{h[3]=2}$

$\xrightarrow{(III)} \boxed{h[2]=1}$

$a = \overset{6}{\cancel{3\times h[0]}} + \overset{2}{\cancel{2\times h[1]}} + 1\times h[2] \to a = 8 + h[2] = \boxed{9}$

$b = \underset{3}{\cancel{3\times h[1]}} + 2\times h[2] + 1\times h[3] \to b = 3 + 2h[2] + h[3] = \boxed{7}$

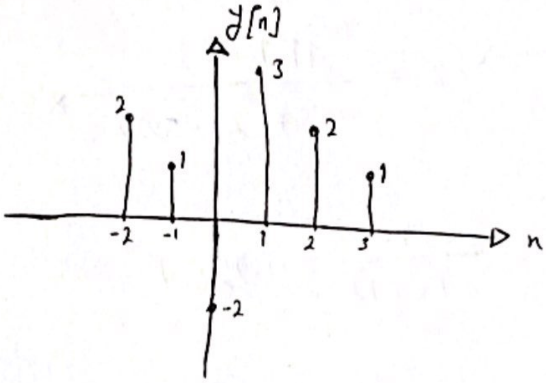
سؤال 5)

b)

ابتدا قسمت b را حل می‌کنیم :

$$\delta[n] = \tfrac{1}{2}x_1[n] - \tfrac{1}{2}x_2[n] + x_3[n]$$

$$\xrightarrow{\text{خطی بودن سیستم}} y[n] = \tfrac{1}{2}y_1[n] - \tfrac{1}{2}y_2[n] + y_3[n]$$

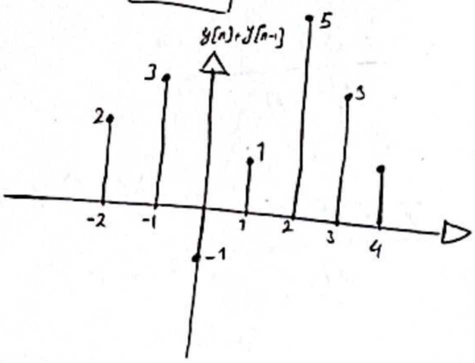



a)

$$x_3[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$\xrightarrow[\text{هم باشد}]{\text{سیستم که خطی هست اگر SI}} \quad x_3[n] \rightarrow \boxed{\text{system}} \rightarrow y[n] + y[n-1]$$

$y[n] + y[n-1]$ :




$$y[n] + y[n-1] \neq y_3[n]$$

همانطور که مشاهده می‌شود :

بنابراین سیستم SI نمی‌باشد !

سئوال 6)

a) $y(t) = (x * h)(t)$

$$\longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)h(t-s)\,ds \longrightarrow \frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} x(s)h(t-s)\,ds$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\frac{\partial}{\partial t}h(t-s)\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)h'(t-s) = (x*h')(t)$$

$\frac{dy}{dt} = (x' * h)(t)$ به همین ترتیب چون کانولوشن جابه‌جایی پذیر است می‌توان ثابت کرد که

b)

$$\int_{-\infty}^{t} (x' * h')(s)\,ds = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty} x'(T)h'(s-T)\,dT\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x'(T)\left[\int_{0}^{t} h'(s-T)\,ds\right]dT = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(T)\,h(s-T)\,ds = (x'*h)(t) \overset{\text{از قسمت a}}{=} \frac{dy(t)}{dt}$$

c) $x_I(t) = \int_{-\infty}^{t} x(T)\,dT$

$$(x_I * h')(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_I(s)h'(t-s)\,ds \overset{\text{از قسمت a}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x_I'(s)\,h(t-s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{d}{ds}\int_{0}^{s} x(T)\,dT\right]h(t-s)\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)h(t-s)\,ds = (x*h)(t) = y(t)$$

d) $$(x' * h_I)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(s)\,h_I(t-s)\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t-s)\,h_I(s)\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s)\,h_I'(s)\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s)\left[\frac{d}{ds}\int_{-\infty}^{s} h(T)\,dT\right]ds = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s)\,h(s)\,ds = (x*h)(t) = y(t)$$

سئوال 7)

$$\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=x(t)$$

$y(t)=0$ for all $t<0$

$x(t)=0$ for all $t<0$

این معادله دیفرانسیل یک معادله دیفرانسیل خطی با ضریب ثابت است و در حالت initial rest پس این یک سیستم LSI می باشد.

در ابتدا خواسته شده است که تا نشان دهیم که $e^{-2t}u(t)$ پاسخ ضربه این معادله دیفرانسیل است.

$$\to y'+2y=\delta \to \int_{0^-}^{0^+} y'dt+\int_{0^-}^{0^+} 2y=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)$$

$$\to y(0^+)-\underbrace{y(0^-)}_{0}=1 \to \boxed{y(0^+)=1}$$

$$S+2=0 \to S=-2 \to y_h=Ae^{-2t}$$

for $t>0$:

$$y'+2y=0 \to y_p=0 \to y=Ae^{-2t}$$

$$y(0^+)=1 \to \boxed{A=1} \to \boxed{y(t)=e^{-2t}u(t)}$$

البته می شد جواب را یکسره در معادله گذاشت و چک کرد:

$$y=e^{-2t}u(t)$$

$$\to y'+2y=-2e^{-2t}u(t)+e^{-2t}\delta(t)+2e^{-2t}u(t)=e^{-2t}\delta(t) \checkmark$$

حال با توجه به اینکه میدانیم سیستم LSI است به بررسی خواص گفته شده میپردازیم:

(i) میدانیم که در یک سیستم LSI اگر پاسخ ضربه به صورت $K\delta(t)$ باشد سیستم بدون حافظه است

اما در اینجا چون $h=e^{-2t}u(t)$ پس سیستم حافظه دار است.

(ii) میدانیم در یک سیستم LSI اگر به ازای $t<0$ پاسخ ضربه 0 باشد سیستم علی است پس در این سیستم

چون پاسخ ضربه $e^{-2t}u(t)$ است یک سیستم علی داریم.

(iii) میدانیم در یک سیستم LSI برای پایدار بودن نیاز داریم که $h(t)$ در فضای $L1$ باشد:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-2t}u(t)|dt=\int_0^{\infty}e^{-2t}dt=-\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^{\infty}=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\boxed{\frac{1}{2}} \to$$

بنابراین سیستم پایدار است.