تمرین سری 8 درس سیگنال - رادین خیام - 9910157

سوال 1)

در صورت سوال گفته شده است که $h(t)$ حقیقی است، پس طبق خواص تبدیل لاپلاس

می توانیم نتیجه بگیریم که : $H(s) = \overline{H(\bar{s})}$

و این یعنی که صفرها و قطب ها نسبت به محور افقی تقارن دارند.

طبق گزاره اول : $x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = H(s)e^{st}$: میدانیم

$$\longrightarrow \boxed{H(1) = 1}$$

در گزاره سوم گفته شده که $s = \sigma$ یک قطب است، در نتیجه طبق تقارنی که بالاتر به آن اشاره شد

متوجه می شویم که قطب دیگری هم در $\boxed{s = -\sigma}$ است.

در گزاره دوم گفته شده کلاً سه قطب داریم پس قطب دیگر حتماً یک عدد حقیقی است.

طبق گزاره چهارم می شود نتیجه گرفت که :

(تابع تبدیل سیستم فیدبک دار را با $H'(s)$ نشان می دهیم)

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} h'(t)\,dt$$

$$u(\infty) \to 1 \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h'(t)\,dt = 1 \longrightarrow \lim_{s \to 0} H'(s) = 1$$

$$H'(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)} \longrightarrow \lim_{s \to 0} \frac{H(s)}{1+H(s)} = 1 \longrightarrow$$ در صفر یک قطب داریم.

پس قطب های ما در $-\sigma$، $+\sigma$، 0 قرار دارند.

ادامه سوال 1)

پس می‌توانیم تابع تبدیل را به این صورت نشان دهیم:

$$H(s) = \frac{a}{(s^2+1)(s)}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق گزاره اول}} H(1) = 1 \longrightarrow \frac{a}{2\times 1} = 1 \longrightarrow \boxed{a=2}$$

$$\longrightarrow \boxed{H(s) = \frac{2}{(s^2+1)s}}$$

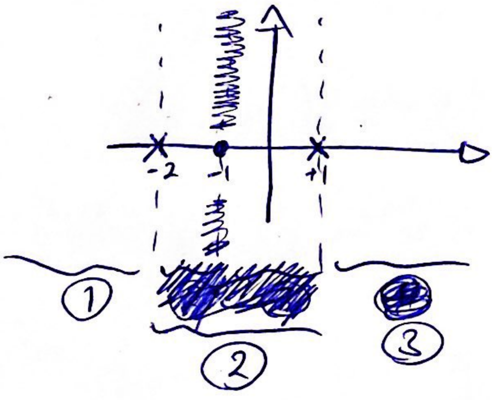
سوال 2)

الف)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s-1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+2}\ ,\ ROC: Re\{s\}>-2 \longrightarrow X(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$$

نمودار صفر و قطب‌های $X(s)$ را رسم می‌کنیم:



دیده می‌شود که سه ناحیه برای ROC $X(s)$ امکان‌پذیر است، اما از آنجایی که ROC، $Y(s)$ برابر شد با $Re\{s\}>-2$ و $X(s)$ باید این بازه را شامل شود پس حالت 1 حذف می‌شود و برای ناحیه همگرایی دو حالت زیر را داریم:

$$(I):\ \boxed{ROC = Re\{s\}>1}$$

$$(II):\ \boxed{ROC = \cancel{Re\{s\}}-2<Re\{s\}<+1}$$

ادامه سؤال 2)

a) ابتدا کسر $X(s)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$X(s)=\frac{s+1}{(s-1)(s+2)}=\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{s-1}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{s+2}\right)$$

if (I) : $\boxed{x(t)=\frac{2}{3}e^{t}u(t)+\frac{1}{3}e^{-2t}u(t)}$

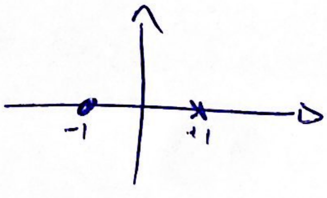
if (II) : $\boxed{x(t)=-\frac{2}{3}e^{t}u(-t)+\frac{1}{3}e^{-2t}u(t)}$

b) طبق رابطه‌ای که داده شده است یعنی $x(t)$ کاملاً انتگرال‌پذیر است و این یعنی که تبدیل فوریه آن وجود دارد و محور $j\omega$ باید در ROC آن باشد پس حالت (II) قابل قبول است و:

$$\boxed{x(t)=-\frac{2}{3}e^{t}u(-t)+\frac{1}{3}e^{-2t}u(t)}$$

c) این سیستم در برابر ورودی $y(t)$ خروجی $x(t)$ به ما میدهد و پس تابع تبدیل آن بدین صورت می‌باشد:

$$H(s)=\frac{X(s)}{Y(s)}=\frac{s+1}{s-1}\xrightarrow{\text{نمودار قطب و صفر}}$$



چون گفته شده است که سیستم پایدار است پس: $\underbrace{ROC=Re\{s\}<+1}_{(*)}$

$$H(s)=\frac{s+1}{s-1}=1+\frac{2}{s-1}\xrightarrow{(*)}\boxed{h(t)=\delta(t)-2e^{t}u(-t)}$$

ادامه سوال 2 بخش c)

همچنین میدانیم که ROC، $Y(S)$ به صورت $Re\{S\}>-2$ هست.

پس می شود گفت که $X(S)=Y(S)H(S)$ حداقل باید بازه $-2<Re\{S\}<1$ را شامل شود

و این به ما نتیجه می دهد که ناحیه همگرایی $X(S)$ همان حالت (II) می باشد پس:

$$x(t) = -\frac{2}{3}e^{t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-2t}u(t)$$

حال گفته شده است که یکبار هم درستی این جواب را از طریق کانولوشن مستقیم بررسی کنیم.

$$x(t) = h(t) * y(t) = \left(\delta(t) - 2e^{-t}u(-t)\right) * \left(e^{-2t}u(t)\right)$$

$$= \left(\delta(t) * e^{-2t}u(t)\right) - 2\left(e^{-t}u(-t) * e^{-2t}u(t)\right)$$

$$= e^{-2t}u(t) - 2\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-2\tau} e^{t-\tau} u(\tau - t)\, d\tau}_{(III)}$$

if $t>0$: $III = e^{t}\int_{t}^{\infty} e^{-3\tau}\, d\tau = +\frac{1}{3}e^{-2t}$

if $t<0$: $III = e^{t}\int_{0}^{\infty} e^{-3\tau}\, d\tau = +\frac{1}{3}e^{t}$

$\longrightarrow$ $x(t) = e^{-2t}u(t) - \frac{2}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{2}{3}e^{t}u(-t)$

$$= \boxed{-\frac{2}{3}e^{t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-2t}u(t)}$$

که همان جواب قبلی بدست آمد.

سؤال 3)

(a

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 24y(t) = 5\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

$$\longrightarrow H(s) = \frac{5s+3}{s^2+11s+24} = \frac{5s+3}{(s+8)(s+3)}$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کسرها}} H(s) = \left(-\frac{12}{5} \times \frac{1}{3+s}\right) + \left(\frac{37}{5} \times \frac{1}{8+s}\right)$$

چون گفته شده است که در حالت initial rest هستند پس در واقع دست راستی هستند و از آنجایی که $H(s)$ دو قطب یکی در -3 و یکی در -8 دارد می‌شود گفت که:

$$ROC: \boxed{Re\{s\} > -3}$$

$$\xrightarrow{Re\{s\} > -3} \boxed{h(t) = -\frac{12}{5}e^{-3t}u(t) + \frac{37}{5}e^{-8t}u(t)}$$

(b

$$\frac{d^4y(t)}{dt^4} + \frac{4d^1y(t)}{dt^1} = 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

$$\longrightarrow H(s) = \frac{3s+2}{s^4+4s} = \frac{3s+2}{s(s^3+4)} = \frac{1}{2s} + \frac{6-s^2}{2(s^3+4)}$$

$$= \frac{1}{2s} + \frac{3}{s^3+4} - \frac{s^2}{2(s^3+4)}$$

~~ادامه سئوال 3 قسمت b)~~

$$H(s) = \frac{1}{2s} + \frac{3}{s^3+4} - \frac{s^2}{2(s^3+4)}$$

چون initial rest است پس سیگنال دست راستی می باشد و با توجه به اینکه قطب های ما در :

$$s = 0$$
$$s = -2^{\frac{2}{3}} \simeq -1.59$$
$$s = -(2)^{\frac{2}{3}} \simeq 0.79 - 1.37j$$
$$s = (-1)^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{2}{3}} \simeq 0.79 + 1.37j$$

پس $\boxed{ROC = Re\{s\} > 0.79}$;

$$\rightarrow h(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{3}{2}(\sin(2t))u(t) + L^{-1}\left\{\frac{-s^2}{2(s^3+4)}\right\}$$

ادامه سئوال 3 بخش b)

$$\rightarrow H(s) = \frac{1}{2s} + \frac{3}{s^3+4} - \frac{s^2}{2(s^3+4)}$$

$$s^3+4 = (s + \sqrt[3]{4})(s^2 + 2\sqrt[3]{2} - s\sqrt[3]{4})$$

چون شرایط initial rest داریم پس سیگنال دست راستی می باشد و با توجه به اینکه قطب های ما در :

$$s = 0$$
$$s = -2^{\frac{2}{3}} = \boxed{-1.59}$$
$$s = -(-2)^{\frac{2}{3}} = \boxed{0.79 - 1.37j}$$
$$s = (-1)^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{2}{3}} = \boxed{0.79 + 1.37j}$$

$$\rightarrow ROC = Re\{s\} > 0.79$$

$$\rightarrow h(t) = \frac{1}{2}u(t) + L^{-1}\left\{\frac{3}{s^3+4}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{s^2}{2(s^3+4)}\right\}$$

ادامه سؤال 3 بخش b)

$$\frac{3}{s^3+4} = \frac{A}{s+\sqrt[3]{4}} + \frac{Bs+C}{s^2+2\sqrt[3]{2}-s\sqrt[3]{4}}$$

$$\rightarrow \quad s^2(A+B) + s(-A\sqrt[3]{4}+B\sqrt[3]{4}+C) + 2A\sqrt[3]{2} + C\sqrt[3]{4} = 3$$

$$\rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ \sqrt[3]{4}(B-A)+C=0 \\ 2A\sqrt[3]{2} + C\sqrt[3]{4} = 3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{حل با نرم افزار}} \begin{array}{l} A \simeq 0.4 \\ B \simeq -0.4 \\ C \simeq 1.3 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \frac{3}{s^3+4} = \frac{0.4}{s+\sqrt[3]{4}} + \frac{-0.4s+1.3}{s^2+2\sqrt[3]{2}-s\sqrt[3]{4}}$$

حس می‌کنم این سؤال اشتباه تایپی داشته، و قرار نبوده اینجوری دربیاد درنتیجه به ساده سازی ادامه نمیدیم.

سئوال 5)

گفته شده است که تابع حقیقی و زوج است ، بدین ترتیب می توان گفت که قطب ها نسبت محور افقی و عمودی متقارن هستند.

همچنین گفته شده که یکی از قطب ها $s=\frac{1}{2}e^{\frac{j\pi}{4}}$ می باشد ، پس طبق تقارنی که بالاتر توضیح داده شد، می توان سه قطب دیگر را هم پیدا کرد.

$$s=-\frac{1}{2}e^{\frac{j\pi}{4}}$$

$$s=+\frac{1}{2}e^{-\frac{j\pi}{4}}$$

$$s=-\frac{1}{2}e^{-\frac{j\pi}{4}}$$

با توجه به اینکه گفته شده کلاً چهار قطب داریم و صفری هم نداریم می توان حدس زد که $X(s)$ چنین شکلی دارد:

$$X(s)=\frac{a}{\left(s-\frac{1}{2}e^{\frac{j\pi}{4}}\right)\left(s+\frac{1}{2}e^{\frac{j\pi}{4}}\right)\left(s-\frac{1}{2}e^{-\frac{j\pi}{4}}\right)\left(s+\frac{1}{2}e^{-\frac{j\pi}{4}}\right)}$$

همچنین گفته شده است که:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt=4 \longrightarrow X(0)=4$$

$$X(s) \overset{\text{ساده}}{=} \frac{a}{\left(s^2-\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)\left(s^2+\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)} \longrightarrow X(0)=\frac{a}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}$$

$$\longrightarrow \frac{a}{\frac{1}{16}}=4 \longrightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}} \longrightarrow \boxed{X(s)=\frac{\frac{1}{4}}{\left(s^2-\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)\left(s^2+\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)}}$$

سؤال 6)

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2y(t) + \delta(t) \longrightarrow \boxed{SX(S) = -2Y(S) + 1} \quad (*)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2x(t) \longrightarrow \boxed{SY(S) = 2X(S)} \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(**)} X(S) = \frac{S}{2}Y(S) \xrightarrow{(*)} \frac{S^2}{2}Y(S) = -2Y(S) + 1$$

$$\longrightarrow Y(S) = \frac{1}{\frac{S^2}{2}+2} = \boxed{\frac{2}{S^2+4}} \longrightarrow X(S) = \frac{2S}{2S^2+8} = \boxed{\frac{S}{S^2+4}}$$

چون گفته شده است که هر دو سیگنال ها دست راستی هستند پس ناحیه همگرایی آن‌ها هم برابر است با: $\boxed{Re\{s\}>0}$

که چون قطب در $\pm 2j$ دارند.

سئوال 4)

طبق نمودار :

$$E(s) = X(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = E(s)H(s)$$

$$\longrightarrow E(s) = X(s) - E(s)H(s) \longrightarrow \boxed{E(s) = \frac{X(s)}{1+H(s)}}$$

$$x(t) = u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s}$$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\varepsilon\omega_n s} \longrightarrow E(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{\omega_n^2}{s^2+2\varepsilon\omega_n s}}$$

$$\longrightarrow \boxed{E(s) = \frac{s+2\varepsilon\omega_n}{s^2+2\varepsilon\omega_n^2 s+\omega_n^2}}$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} t e'(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t e'(t)u(t)\,dt = L\{t e'(t)u(t)\}\Big|_{s=0}$$

$$= -\frac{d}{ds}\big(sE(s)\big)\Big|_{s=0} = \left(\frac{s^2+2\varepsilon\omega_n s}{s^2+2\varepsilon\omega_n^2 s+\omega_n^2}\right)'\Bigg|_{s=0}$$

$$= \left(\frac{(2s+2\varepsilon\omega_n)(s^2+2\varepsilon\omega_n^2 s+\omega_n^2)-(2s+2\varepsilon\omega_n^2)\overset{0}{\cancel{(s^2+2\varepsilon\omega_n^2 s)}}}{(s^2+2\varepsilon\omega_n^2 s+\omega_n^2)^2}\right)\Bigg|_{s=0}$$

$$= \frac{2\varepsilon\cancel{\omega_n}\times\cancel{\omega_n^2}-0}{\cancel{\omega_n^4}\,\omega_n} = \boxed{\frac{2\varepsilon}{\omega_n}}$$

ادامه سؤال 4)

(b

$$E(S) = \frac{X(S)}{1 + H(S)}$$

$$\longrightarrow E(S) = \frac{S + 2\varepsilon\omega_n}{S^2 + 2\varepsilon\omega_n S + \omega_n^2}$$

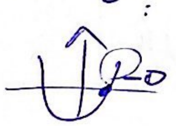
محل قطب ها :
$$P = \frac{-2\varepsilon\omega_n \pm \sqrt{4\varepsilon^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2}$$

حال میبینم که اگر $\varepsilon \geq 1$ باشد بدین معنی است که قطب های ما سمت چپ محور عمودی یا به عبارتی در منفی ها قرار می گیرند.

همچنین میدانیم که E دست راستی هست پس ناحیه همگرایی می شود سمت راست قطب بزرگتر که برابر است با:

$$-2\varepsilon\omega_n + 2\omega_n\sqrt{\varepsilon^2-1} = 2\omega_n\left(\sqrt{\varepsilon^2-1} - \varepsilon\right) > -2\varepsilon\omega_n \quad (*)$$

مخرج $E(S)$ یک تابع درجه دو با تقعر رو به بالا هست پس طرف راست ریشه راست ترش حتماً بزرگتر از صفر هست



از طرفی طبق معادله (*) صورت کسر هم همواره به ازای s های داخل ناحیه همگرایی بزرگتر از صفر است پس $E(S)$ در ناحیه همگرایی‌اش همواره بزرگتر از صفر هست از طرفی طبق خواص لاپلاس می دانیم که:

$$\frac{dx}{dt} = S X(S) \longrightarrow e'(t) \text{ همواره مثبت است} \rightarrow I_2 = I_1 = \boxed{\frac{2\varepsilon}{\omega_n}}$$