تمرین سری 7 درس سیگنال و سیستم - رادین خیام - 99101579

سوال 1)

$$\hat{h}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(s) e^{-j\omega s} ds = \int_0^2 e^{-j\omega s} ds = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega s}\Big|_0^2$$

$$= \boxed{-\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j2\omega} - 1\right)}$$

$$\hat{x}(\omega) = \int_0^4 2e^{-j\omega s} ds + \int_4^8 -2e^{-j\omega s} ds = 2\times\left(-\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega s}\Big|_0^4 - e^{-j\omega s}\Big|_4^8\right)\right)$$

$$= -\frac{2}{j\omega}\left(e^{-j4\omega} - 1 - e^{-j8\omega} + e^{-j4\omega}\right) = \boxed{-\frac{2}{j\omega}\left(2e^{-j4\omega} - e^{-j8\omega} - 1\right)}$$

$$\hat{h}_2(\omega) = j\omega$$

$$\longrightarrow \hat{y}(\omega) = \hat{h}_1(\omega)\hat{h}_2(\omega)\hat{x}(\omega) = -\frac{1}{\cancel{j\omega}}\left(e^{-j2\omega} - 1\right) \times \cancel{j\omega} \times \frac{-2}{j\omega}\left(2e^{-j4\omega} - e^{-j8\omega} - 1\right)$$

a)

$$= \boxed{\frac{2}{j\omega}\left(2e^{-j6\omega} - e^{-j10\omega} - e^{-j2\omega} - 2e^{-j4\omega} + e^{-j8\omega} + 1\right)}$$

b)

$$\hat{H}(\omega) = \hat{h}_1(\omega)\hat{h}_2(\omega) = 1 - e^{-j2\omega}$$

$$\cancel{\longrightarrow H(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{H}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-2)} d\omega\right)}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{jt} e^{j\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{j(t-2)} e^{j\omega(t-2)}\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right)}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2\pi}}$$

$$\longrightarrow H(t) = \boxed{\delta(t) - \delta(t-2)}$$

با استفاده از خواص تبدیل فوریه و اینکه تبدیل فوریه $\delta(t)$ برابر با 1 می‌شود.

ادامه سؤال 1)

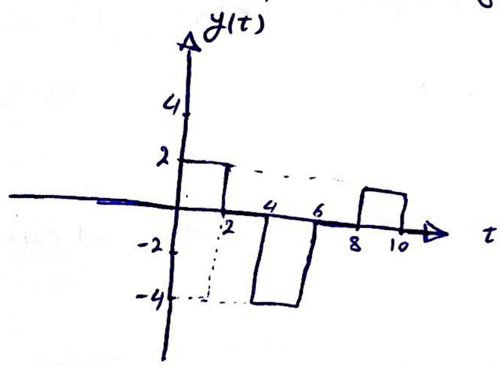
c) من در این قسمت به دو روش سیگنال $y(t)$ را بدست میاورم.

روش اول: (تبدیل فوریه معکوس از $\hat{y}(\omega)$)

$$y(t) = F^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega}\left(2e^{-j6\omega} - e^{-j10\omega} - e^{-j2\omega} - 2e^{-j4\omega} + e^{-j8\omega} + 1\right)\right\}$$

$$= \boxed{4u(t-6) - 2u(t-10) - 2u(t-2) - 4u(t-4) + 2u(t-8) + 2u(t)}$$

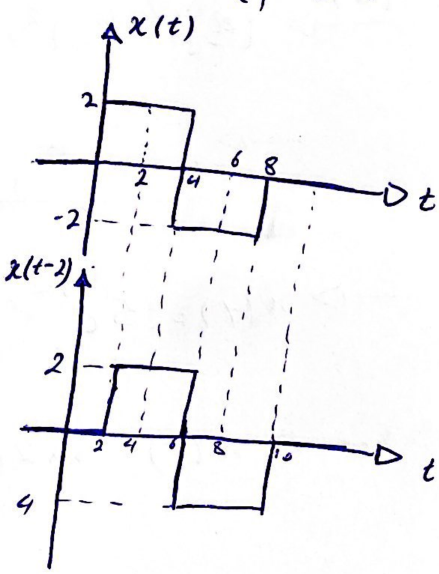
* دقت شود که ترم های $\pi\delta(\omega)$ با هم ساده میشوند.



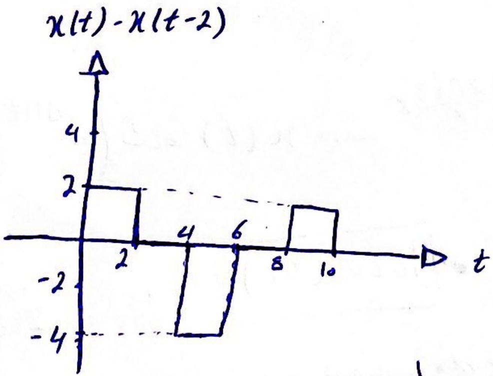
(روش دوم): استفاده از پاسخ ضربه کلی که در قسمت b بدست آوردیم:

$$H(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$$

$$\longrightarrow y(t) = x(t) * H(t) = x(t) - x(t-2)$$



$\longrightarrow$



نتیجه یکسان شد.

سؤال 2)

a)

$$z(t) = e^{-t}u(t) + 2\delta(t) \longrightarrow \hat{z}(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} + 2$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 20y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)z(t-\tau)\,d\tau - x(t)$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل فوریه از دو طرف}} j\omega\hat{y}(\omega) + 20\hat{y}(\omega) = \hat{x}(\omega)\hat{z}(\omega) - \hat{x}(\omega)$$

$$\longrightarrow \hat{y}(\omega)(j\omega+20) = \hat{x}(\omega)\left(\frac{1}{1+j\omega} + 2 - 1\right)$$

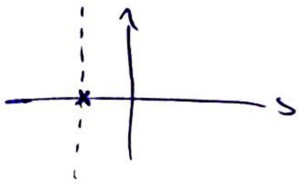
$$\longrightarrow \hat{h}(\omega) = \frac{\hat{y}(\omega)}{\hat{x}(\omega)} = \frac{\frac{2+j\omega}{1+j\omega}}{j\omega+20} = \boxed{\frac{2+j\omega}{(1+j\omega)(20+j\omega)}}$$

b) کافیست از $\hat{h}(\omega)$ تبدیل فوریه معکوس بگیریم:

$$\hat{h}(\omega) = \frac{2+j\omega}{(1+j\omega)(20+j\omega)} = \left(\frac{1}{19} \times \frac{1}{1+j\omega}\right) + \left(\frac{18}{19} \times \frac{1}{20+j\omega}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{19}e^{-t}u(t) + \frac{18}{19}e^{-20t}u(t)}$$

سوال 3)



a) $X_1(s) = \dfrac{s+2}{(s+1)^2} = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{(s+1)^2}$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{ll} Re\{s\} > -1 : & e^{-t}u(t) + te^{-t}u(t) \\ Re\{s\} < -1 : & -e^{-t}u(-t) - te^{-t}u(-t) \end{array}}$$

b) $X_2(s) = \dfrac{1}{s} e^{-sT}$

$$\boxed{\begin{array}{l} Re\{s\} > 0 : u(t-T) \\ Re\{s\} < 0 : -u(-t-T) \end{array}}$$

c) $X_3(s) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}$

$s' = s+1 \longrightarrow X_3(s') = \dfrac{s'}{s'^2+4} \longrightarrow Re\{s'\} > 0 : x_3'(t) = \cos(2t)u(t)$

$$\xrightarrow{s\text{-shifting}} \boxed{x_3(t) = \left(e^{-t}\cos(2t)\right)u(t) \quad : Re\{s\} > -1}$$

برای $-1 > Re\{s\}$ باید $u(-t)$ گذاشت و یک منفی هم پشتش یادم رفت بنویسم.

d) $X_4(s) = \dfrac{(s+1)^2 - 1}{((s+1)^2+1)^2} = \underbrace{\dfrac{1}{(s+1)^2+1}}_{(I)} - \underbrace{\dfrac{2}{((s+1)^2+1)^2}}_{(II)}$

$(I) : \left(e^{-t}\sin(t)\right)u(t) \quad : Re\{s\} > -1$

$(II) : = -\left(\sin(t) - t\cos(t)\right)e^{-t}u(t) \quad Re\{s\} > -1$

برای $-1 > Re\{s\}$ باید $u(-t)$ گذاشت و یک منفی هم پشتش.

$$\longrightarrow \boxed{x_4(t) = \left(-t\cos(t)\right)e^{-t}u(t) \quad : Re\{s\} > -1}$$

سؤال ۴)

میدانیم که اگر سیستم LSI باشد داریم:

$$x(t)=e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=H(s)e^{st}$$

$$x(t)=\cos(t)=\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}, \quad H(s)=K\frac{s-a}{s+b}$$

$$\longrightarrow y(t)=\frac{K}{\cancel{2}}\left(e^{jt}\times\frac{j-a}{j+b}+e^{-jt}\times\frac{-j-a}{-j+b}\right)=\sin(t)=\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{\cancel{2}j}$$

$$\longrightarrow \frac{K(j-a)}{j+b}\left(\cos(t)+j\sin(t)\right)+\frac{K(j+a)}{j-b}\left(\cos(t)-j\sin(t)\right)=2\sin(t)$$

ضریب cos

$$\longrightarrow \frac{K(j-a)}{j+b}+\frac{K(j+a)}{j-b}=0 \longrightarrow -1-\cancel{aj}-\cancel{bj}+ab-1+\cancel{bj}+\cancel{aj}+ab=0$$

$$\longrightarrow 2ab=2 \longrightarrow \boxed{ab=1}\ *$$

ضریب sin

$$\longrightarrow \frac{K(-1-aj)}{j+b}+\frac{K(1-aj)}{j-b}=2$$

$$\longrightarrow \cancel{-j}+b+a+\cancel{abj}+\cancel{j}+b+a-\cancel{abj}=\frac{2}{K}(-1-b^2)$$

$$\cancel{2}(a+b)=\frac{-\cancel{2}}{K}(1+b^2) \longrightarrow \boxed{a+b=\frac{-1}{K}(1+b^2)}\ **$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} \frac{1}{b}+b=\frac{-1}{K}(1+b^2) \xrightarrow{b\in\mathbb{R}} \frac{1}{b}=\frac{-1}{K} \longrightarrow \boxed{K=-b}$$

$$\boxed{a=-\frac{1}{K}}$$

Scanned with CamScanner

سئوال 6)

$$x_1(t) = |t| e^{-t}$$

$$\longrightarrow X_1(s) = \int_{-\infty}^{0} -t e^{-t} \times e^{-st}\,dt + \int_{0}^{\infty} t e^{-t} \times e^{-st}\,dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} t e^{-(s+1)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} t e^{-(s+1)t}\,dt$$

$$= \left(-\frac{1}{s+1} \times t e^{-(s+1)t} - \frac{1}{(s+1)^2} \times e^{-(s+1)t}\right)\Big|_{-\infty}^{0} + \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \cancel{\frac{-1}{(s+1)^2}}$$

این انتگرال ها به ازای هیچ s ای هر دوتاشون همگرا نمی شوند.

$$x_2(t) = \cos(\omega_0 t + b)\,u(t)$$

$$\longrightarrow X_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \times \cos(\omega_0 t + b)\,dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \times \cos(\omega_0 t + b) - \int -\frac{1}{s} e^{-st} \times \omega_0 \times -\sin(\omega_0 t + b)\,dt$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-st} \cos(\omega_0 t + b) - \frac{\omega_0}{s} \int e^{-st} \sin(\omega_0 t + b)\,dt$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-st} \cos(\omega_0 t + b) - \frac{\omega_0}{s}\left(-\frac{1}{s} e^{-st} \times \sin(\omega_0 t + b) - \int -\frac{1}{s} e^{-st} \times \omega_0 \times \cos(\omega_0 t + b)\right)$$

$$\longrightarrow \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st} \times \cos(\omega_0 t + b)\,dt}_{I} = -\frac{1}{s} e^{-st} \cos(\omega_0 t + b) + \frac{\omega_0}{s^2} e^{-st} \times \sin(\omega_0 t + b) + \frac{\omega_0^2}{s^2} \int e^{-st} \times \cos(\omega_0 t + b)\,dt$$

$$\longrightarrow I = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cos(\omega_0 t + b) + \frac{\omega_0}{s^2} e^{-st} \sin(\omega_0 t + b)\right]_0^{\infty} + \frac{\omega_0^2}{s^2} I$$

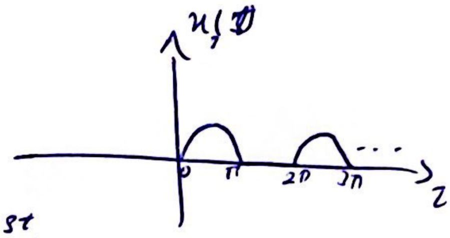
if $Re\{s\} > 0$

$$\longrightarrow I = \frac{+\frac{1}{s}\cos(b) - \frac{\omega_0}{s^2}\sin(b)}{1 - \frac{\omega_0^2}{s^2}} = \boxed{\frac{s\cos(b) - \omega_0 \sin(b)}{s^2 - \omega_0^2}}$$

ROC: $\boxed{Re\{s\} > 0}$

ادامه سؤال 16

$$x_3(t) = \sin(t)\, u(\sin(t))\, u(t)$$



$$\rightarrow X_3(s) = \int_0^{\pi} \sin(t) e^{-st} dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin(t) e^{-st} dt + \int_{4\pi}^{5\pi} \sin(t) e^{-st} dt + \dots$$

با استفاده از خاصیت شیفت تبدیل لاپلاس می‌توانیم این مجموع را بدین صورت بنویسیم:

$$X_3(s) = \int_0^{\pi} \sin(t) e^{-st} dt + e^{-2\pi s} \int_0^{\pi} \sin(t+2\pi) dt + e^{-4\pi s} \int_0^{\pi} \sin(t+4\pi) dt + \dots$$

$$\rightarrow X_3(s) = \underbrace{\left[1 + e^{-2\pi s} + e^{-4\pi s} + e^{-6\pi s} + \dots\right]}_{\text{یک سری هندسی با قدر نسبت } e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} \sin(t) e^{-st} dt$$

چنانچه $\underbrace{e^{-2\pi s} < 1}_{\boxed{S>0}}$ باشد همگراست

$$\rightarrow X_3(s) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin(t) e^{-st} dt}_{I}$$

$$I = -\frac{1}{s} e^{-st} \sin(t) - \int_0^{\pi} -\frac{1}{s} e^{-st} \cos(t) dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \sin(t) + \frac{1}{s}\left(-\frac{1}{s} e^{-st} \cos(t) - \int -\frac{1}{s} e^{-st} \times -\sin(t) dt\right)$$

$$\rightarrow I = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \sin(t) - \frac{1}{s^2} e^{-st} \cos(t)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{s^2} \underbrace{\int e^{-st} \sin(t) dt}_{I}$$

$$\rightarrow I = \frac{-\frac{1}{s} e^{-s\pi} \times \cancel{\sin(\pi)} - \frac{1}{s^2} e^{-s\pi} \cancel{\cos(\pi)} + \frac{1}{s} \cancel{\sin(0)} + \frac{1}{s^2} \cos(0)}{1 + \frac{1}{s^2}}$$

$$\rightarrow I = \frac{\frac{1}{\cancel{s^2}} e^{-s\pi} + \frac{1}{\cancel{s^2}}}{\frac{1+s^2}{\cancel{s^2}}} = \frac{1 + e^{-s\pi}}{1 + s^2}$$

$$\rightarrow \boxed{X_3(s) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \times \frac{1 + e^{-s\pi}}{1 + s^2}} \quad \boxed{ROC: Re\{s\} > 0}$$

Scanned with CamScanner

ادامه سؤال 6)

$$x_4(t) = \underbrace{e^{-4t}u(t)}_{\frac{1}{s+4}} + \underbrace{e^{-5t}\sin(5t)u(t)}_{\frac{5}{(s+5)^2+25}}$$

طبق جدول سورس

$\boxed{ROC: Re\{s\} > -4}$ $\boxed{ROC: Re\{s\} > -5}$

$$\rightarrow \boxed{X_4(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{5}{(s+5)^2+25}} \quad \boxed{ROC: Re\{s\} > -4}$$

سؤال 7)

فرض می‌کنیم که $x(t)$ یک تابع زوج باشد بنابراین خواهیم داشت:

$$x(t) = x(-t)$$

$$\rightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\underbrace{-t}_{\tau})e^{-st}dt = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau)e^{s\tau}d\tau = X(-s)$$

$d\tau = -dt$

$$\rightarrow \boxed{X(s) = X(-s)}$$

بنابراین چنانچه تابع زوج باشد در نمودار صفر و قطب آن ها باید تقارن نسبت به محور $s=0$ داشته باشیم. پس تا همینجا می‌دانیم که $X_2(s)$ نمی‌تواند جواب باشد.
اگر سیگنال زوج باشد باید ناحیه همگرایی آن هم نسبت به $s=0$ متقارن باشد، اما در سیگنال $X_4(s)$ می‌بینیم که دو قطب های ما روی محور $s=0$ هستند پس حالت های ممکن برای ناحیه همگرایی که یکی سمت راست محور $s=0$ و دیگری سمت چپ آن، هیچ کدام متقارن نیستند پس $X_4(s)$ هم نمی‌تواند باشد، حال بین $X_1(s)$ و $X_3(s)$:
هر دوی این سیگنال ها دو قطب در $+1$ و -1 دارند پس اگر بخواهیم به صورت کسرهای مجزا آن ها را نشان دهیم بدین صورت خواهند بود:

$$\boxed{\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1}}$$

ادامه سوال 7)

حال میبینیم که اداً X_3 در صفر یک صفر دارد پس در نمایش کسرها باید $A=13$ باشد تا این اتفاق بیفتد.

$$X_3(s)=\frac{A}{s+1}+\frac{A}{s-1} \longrightarrow x_3(t)=\underbrace{A\left(e^{-t}u(t)-e^{t}u(-t)\right)}_{\text{این یک سیگنال فرد است}}$$

در سیگنال $X_1(s)$ دیده می‌شود که هیچ صفری وجود ندارد پس انگار که در صورت s ها با هم ساده شده اند. برای این کار باید که: $A=-13$

$$\longrightarrow X_1(s)=\frac{A}{s+1}-\frac{A}{s-1} \longrightarrow x_1(t)=\underbrace{A\left(e^{-t}u(t)+e^{t}u(-t)\right)}_{\text{این یک سیگنال زوج است}}$$

جواب نهایی $\longrightarrow \boxed{X_1(s)}$