

# IEE3393 Economía de la Energía y del Medio Ambiente

## Pauta Ayudantía: Optimización en Sistemas Eléctricos

Cristián Muñoz y Joaquín La Rosa  
Agosto 2024

### Objetivo de la Ayudantía

Esta pauta presenta los conceptos fundamentales para resolver problemas de optimización aplicados a sistemas eléctricos. Se explicará desde lo más básico qué es un problema de optimización, los términos clave utilizados en el modelado, y se detallará cada componente del problema de planificación de sistemas eléctricos.

## Índice

|  |          |
|--|----------|
| <b>1. ¿Qué es un problema de optimización?</b>     | <b>2</b> |
| <b>2. Términos clave</b>                           | <b>2</b> |
| 2.1. Tasa de descuento . . . . .                   | 2        |
| 2.2. Factor de disponibilidad . . . . .            | 2        |
| 2.3. Consumos propios . . . . .                    | 3        |
| 2.4. Bloques de demanda . . . . .                  | 3        |
| <b>3. Componentes del problema de optimización</b> | <b>4</b> |
| 3.1. Conjuntos . . . . .                           | 4        |
| 3.2. Variables de decisión . . . . .               | 4        |
| 3.3. Función objetivo . . . . .                    | 4        |
| 3.3.1. Inversión . . . . .                         | 5        |
| 3.3.2. Operación . . . . .                         | 5        |
| 3.3.3. Fallas . . . . .                            | 6        |
| 3.4. Restricciones . . . . .                       | 6        |
| 3.4.1. Demanda de Energía . . . . .                | 6        |
| 3.4.2. Disponibilidad de tecnologías . . . . .     | 7        |
| 3.4.3. Restricciones de capacidad . . . . .        | 8        |

# 1. ¿Qué es un problema de optimización?

**Definición:** Un problema de optimización consiste en encontrar la mejor solución posible (óptima) dentro de un conjunto de soluciones factibles, según un criterio específico.

En términos matemáticos, se busca:

- **Maximizar o minimizar** una función objetivo
- **Sujeto a** un conjunto de restricciones

## 2. Términos clave

### 2.1. Tasa de descuento

**Definición:** La tasa de descuento (10 % en este caso) es un parámetro económico que refleja la preferencia temporal del dinero (valora más el presente que el futuro). Es como un truco para saber cuánto vale tu dinero hoy si en lugar de recibirlo ahora lo recibes más adelante.

Permite calcular el valor presente de flujos futuros mediante la fórmula:

$$VP = \frac{VF}{(1+r)^t}$$
$$(1+r)^t \cdot VP = VF$$

donde:

- $VP$  = Valor presente (valor hoy de un dinero futuro)
- $VF$  = Valor futuro (dinero que recibirás en el futuro)
- $r$  = Tasa de descuento (10 % = 0.1 en este caso)
- $t$  = Tiempo en años

**Ejemplo numérico:** Si tienes que pagar \$1000 dentro de 5 años con una tasa de descuento del 10 %, su valor presente hoy sería:

$$VP = \frac{1000}{(1+0,1)^5} = \frac{1000}{1,6105} \approx \$620,92$$

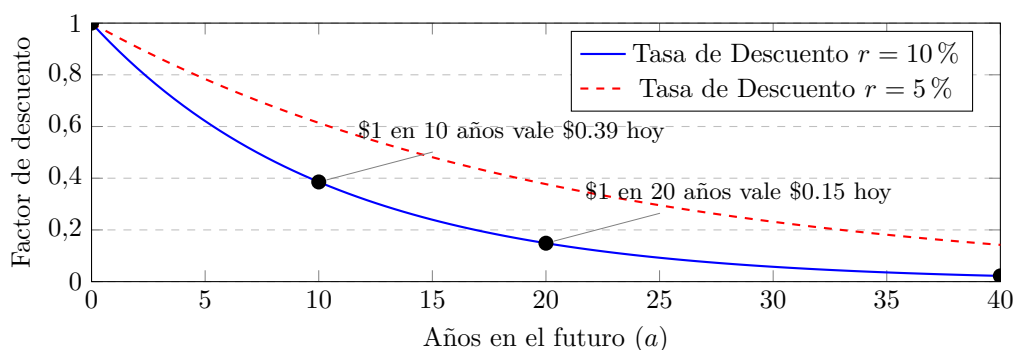


Figura 1: Comparación del factor de descuento con diferentes tasas. El eje Y muestra cuánto vale \$1 futuro en el presente. Con una tasa del 10 %, \$1 recibido en 40 años vale solo \$0.02 hoy.

### 2.2. Factor de disponibilidad

**Definición:** Representa el porcentaje de tiempo que una central puede generar energía. No todas las centrales operan al 100 % del tiempo debido a mantenimientos, fallos o limitaciones técnicas.

Depende de:

- Mantenimientos programados (revisiones periódicas)
- Fallos no programados (averías inesperadas)
- Limitaciones técnicas (disponibilidad de recursos como agua o viento)

**Ejemplo numérico:** Una central de carbón con 100 MW de capacidad y factor de disponibilidad del 90 % puede generar:

$$100 \text{ MW} \times 0,90 = 90 \text{ MW en promedio}$$

Para las hidroeléctricas, varía según el bloque de demanda debido a la capacidad de almacenamiento de agua.

## 2.3. Consumos propios

**Definición:** Porcentaje de energía generada que consume la propia planta para su funcionamiento (bombas, ventiladores, sistemas de control, etc.). Esta energía no se inyecta a la red eléctrica.

**Ejemplo:** Una planta de carbón genera 100 MWh pero tiene un consumo propio del 8.5 %. La energía neta inyectada es:

$$100 \text{ MWh} \times (1 - 0,085) = 91,5 \text{ MWh}$$

**Ejemplo de comparación entre tecnologías:**

| Tecnología     | Consumo propio | Energía neta por 100 MWh generados |
|----------------|----------------|------------------------------------|
| Carbón         | 8.5 %          | 91.5 MWh                           |
| Gas natural    | 2.5 %          | 97.5 MWh                           |
| Diésel         | 2.0 %          | 98.0 MWh                           |
| Eólica         | 0 %            | 100.0 MWh                          |
| Hidroeléctrica | 0 %            | 100.0 MWh                          |

## 2.4. Bloques de demanda

**Definición:** Segmentación de la demanda eléctrica según su nivel y duración anual. La demanda eléctrica no es constante a lo largo del tiempo, sino que varía significativamente según la hora del día, el día de la semana y la estación del año.

La demanda eléctrica en un sistema real presenta un comportamiento altamente variable. Esta variabilidad se debe a múltiples factores:

- **Patrones de consumo humano:** Las personas consumen más energía durante el día (actividades laborales, comerciales) y menos durante la noche (descanso)
- **Ciclos estacionales:** En invierno se consume más por calefacción, en verano por aire acondicionado
- **Actividad económica:** Días laborables tienen mayor demanda que fines de semana
- **Condiciones climáticas:** Días nublados aumentan el consumo de iluminación

**¿Por qué se modela en bloques?** Modelar la demanda hora por hora durante 40 años sería computacionalmente inviable. Por ello, se agrupa la demanda anual en tres niveles representativos

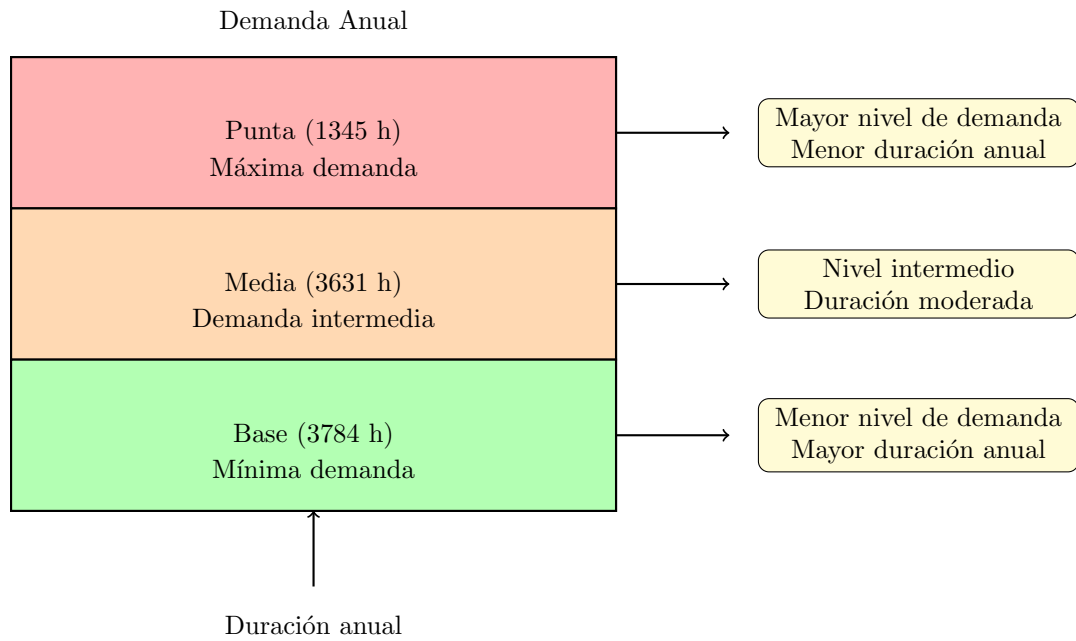


Figura 2: Esquema conceptual de los bloques de demanda. Cada bloque representa un nivel de demanda diferente con sus características distintivas. El bloque de punta tiene la mayor demanda pero menor duración, mientras que el bloque base tiene la menor demanda pero mayor duración.

### 3. Componentes del problema de optimización

#### 3.1. Conjuntos

El modelo se organiza en torno a varios conjuntos:

- **CENTRALES:** Tecnologías no hidroeléctricas (carbón, gas, diésel, eólica)
- **BLOQUES:** Niveles de demanda (punta, media, base)
- **T:** Años del horizonte de planificación (40 años)

#### 3.2. Variables de decisión

| Variable       | Descripción  |
|----------------|--|
| $PHN_a$        | Potencia nuevas hidroeléctricas en año $a$ [MW]                  |
| $PT_{i,a}$     | Potencia tecnología $i$ en año $a$ [MW]                          |
| $GHE_{k,a}$    | Energía hidroeléctricas existentes en bloque $k$ , año $a$ [GWh] |
| $GHN_{k,a}$    | Energía nuevas hidroeléctricas en bloque $k$ , año $a$ [GWh]     |
| $GT_{i,k,a}$   | Energía tecnología $i$ en bloque $k$ , año $a$ [GWh]             |
| $GFalla_{k,a}$ | Energía no suministrada en bloque $k$ , año $a$ [GWh]            |

**Naturaleza de las variables:** Todas son continuas y no negativas.

#### 3.3. Función objetivo

Función Objetivo

Minimizar: Inversión + Operación + Falla

**¿Qué modela la función objetivo?** La función objetivo modela el costo económico total del sistema eléctrico a lo largo de todo el horizonte de planificación (40 años). Representa la suma de todos los costos en que incurre el sistema para satisfacer la demanda energética.

| Componente | Qué modela  | Para qué sirve  |
|------------|---|---|
| Inversión  | Costos de construir nuevas centrales eléctricas             | Determinar cuánta capacidad instalar de cada tecnología y en qué momento          |
| Operación  | Costos variables de generación (combustible, mantenimiento) | Decidir cómo operar el sistema existente y nuevo para minimizar costos operativos |
| Falla      | Costo económico de no satisfacer la demanda (penalización)  | Garantizar que el sistema sea confiable y evitar cortes de energía                |

### 3.3.1. Inversión

$$\sum_{a=1}^T \frac{1}{(1+r)^a} \left[ ahN \cdot PHN_a + \sum_{i \in \text{CENTRALES}} an_i \cdot PT_{i,a} \right]$$

**¿Qué modela?** Modela los costos de inversión en nuevas capacidades de generación, descontados a valor presente. Representa el flujo de dinero necesario para construir y poner en operación nuevas centrales eléctricas a lo largo del tiempo.

**Componentes:**

- $\frac{1}{(1+r)^a}$ : Factor de descuento que convierte costos futuros a valor presente
- $ahN \cdot PHN_a$ : Costo anualizado de inversión para nuevas hidroeléctricas
- $an_i \cdot PT_{i,a}$ : Costo anualizado de inversión para otras tecnologías

**Ejemplo numérico:** Si se invierten \$1000 millones en hidroeléctricas en el año 3, con una tasa de descuento del 10%:

$$\text{Valor presente (hoy)} = \frac{1000}{(1+0,1)^3} = \frac{1000}{1,331} \approx \$751,31 \text{ millones}$$

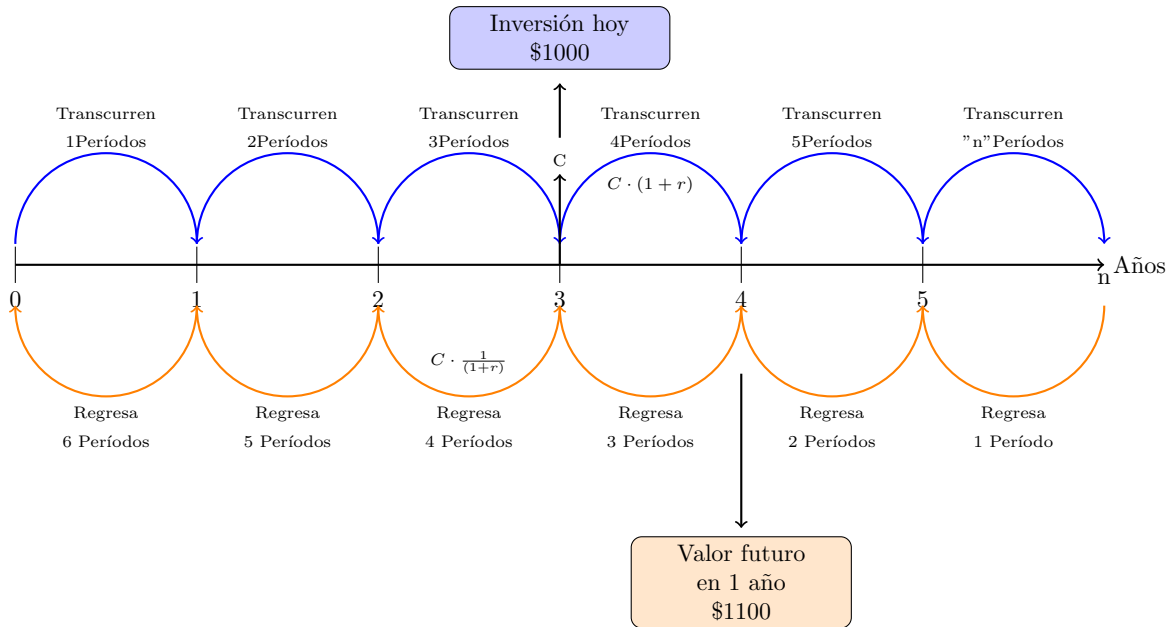


Figura 3: Línea de tiempo para el cálculo de valor presente neto. Las flechas azules representan el avance del tiempo (transcurren períodos), mientras que las naranjas representan el cálculo del valor presente (regresa períodos).

### 3.3.2. Operación

$$\sum_{a=1}^T \frac{1}{(1+r)^a} \left[ \sum_{i \in \text{CENTRALES}} \sum_{k \in \text{BLOQUES}} cv_i \cdot GT_{i,k,a} \right]$$

**¿Qué modela?** Modela los costos operativos variables del sistema, principalmente combustibles y mantenimiento asociados a la generación de energía. Representa los gastos recurrentes necesarios para operar las centrales una vez construidas.

**¿Para qué sirve?** Sirve para determinar el despacho óptimo de las centrales: qué centrales operar en cada bloque de demanda y cuánta energía generar en cada una. Permite minimizar los costos operativos aprovechando las tecnologías más económicas primero (merit order).

**Componentes:**

- $cv_i \cdot GT_{i,k,a}$ : Costo variable de generación por tecnología, bloque y año
- $cv_i$ : Costo variable en mills/kWh (1 mill = 0.001 US\$)
- $GT_{i,k,a}$ : Energía generada en GWh

**Ejemplo numérico:** Una central de carbón que genera 100 GWh en un año con costo variable de 35 mills/kWh:

$$\text{Costo} = 100 \text{ GWh} \times 1000 \text{ MWh/GWh} \times 0,035 \text{ \$/kWh} = \$3,500,000$$

### 3.3.3. Fallas

$$\sum_{a=1}^T \sum_{k \in \text{BLOQUES}} \frac{1}{(1+r)^a} \cdot cvFall a \cdot GFalla_{k,a}$$

**¿Qué modela?** Modela el costo económico asociado a no poder satisfacer la demanda energética (cortes o racionamiento). Representa una penalización por falta de suministro, que incluye pérdidas económicas por producción no realizada y costos sociales.

**¿Para qué sirve?** Sirve como mecanismo de disuasión para garantizar la confiabilidad del sistema. Al tener un costo muy alto (505.5 mills/kWh), el modelo preferirá invertir en capacidad adicional antes que permitir fallas, asegurando que el sistema tenga suficiente capacidad para satisfacer la demanda en todo momento.

**Componentes:**

- $cvFall a \cdot GFalla_{k,a}$ : Costo de no cubrir demanda
- $cvFall a$ : 505.5 mills/kWh (penalización alta para evitar fallas)
- $GFalla_{k,a}$ : Energía no suministrada en GWh

**Ejemplo numérico:** Si hay una falla de 1 GWh en el bloque de punta:

$$\text{Costo} = 1 \text{ GWh} \times 1000 \text{ MWh/GWh} \times 0,5055 \text{ \$/kWh} = \$505,500$$

## 3.4. Restricciones

**Importante:** Las restricciones modelan las limitaciones físicas, técnicas y operativas del sistema eléctrico. Sin ellas, el modelo podría proponer soluciones matemáticamente óptimas pero imposibles de implementar en la realidad.

### 3.4.1. Demanda de Energía

$$\left( GHN_{k,a} + GHE_{k,a} + \sum_{i \in \text{CENTRALES}} [GT_{i,k,a} \cdot (1 - cpr_i)] + GFalla_{k,a} \right) \cdot \frac{1000}{1 + perdTx} \geq D_{k,a} \cdot t_k$$

**¿Qué modela?** Modela el balance energético del sistema: la energía generada (neta de consumos propios) más la energía no suministrada debe ser suficiente para cubrir la demanda, considerando las pérdidas en transmisión. Representa la ley de conservación de la energía aplicada al sistema eléctrico.

**Explicación detallada:**

- $GHN_{k,a} + GHE_{k,a}$ : Energía total generada por hidroeléctricas (nuevas y existentes) en GWh
- $GT_{i,k,a} \cdot (1 - cpr_i)$ : Energía neta de otras tecnologías después de consumos propios
- $GFalla_{k,a}$ : Energía no cubierta (fallo) en GWh

- $\frac{1000}{1+perdTx}$ : Factor de ajuste por pérdidas y conversión de unidades
- $D_{k,a} \cdot t_k$ : Demanda total en MWh

**Desglose del término  $\frac{1000}{1+perdTx}$ :**

- **1000**: Convierte GWh a MWh (1 GWh = 1000 MWh)
- $1 + perdTx$ : Ajusta por pérdidas de transmisión
- $perdTx$ : Porcentaje de pérdidas (ej: 0.04 para 4 %)

**Ejemplo práctico:**

- Demanda requerida: 10,000 MWh
- Pérdidas de transmisión: 4 % ( $perdTx = 0,04$ )
- Cálculo:  $10,000 \times (1 + 0,04) = 10,400$  MWh
- Esto significa que se deben generar 10,400 MWh para que después de pérdidas lleguen 10,000 MWh

**Crecimiento de la demanda:**

$$D_{k,a} = D_{k,0} \times (1 + 0,05)^a$$

Donde  $D_{k,0}$  es la demanda inicial y crece 5 % anual. **Ejemplo numérico:** Demanda en el bloque de punta después de 10 años:

$$D_{punta,10} = 5292,36 \times (1 + 0,05)^{10} = 5292,36 \times 1,6289 \approx 8620,5 \text{ MW}$$

### 3.4.2. Disponibilidad de tecnologías

- **Hidroeléctricas existentes:**

$$GHE_{k,a} \cdot 1000 \leq t_k \cdot PHE \cdot fdHidro_k$$

- **Hidroeléctricas nuevas:**

$$GHN_{k,a} \cdot 1000 \leq t_k \cdot PHN_a \cdot fdHidro_k$$

- **Otras tecnologías:**

$$GT_{i,k,a} \cdot 1000 \leq t_k \cdot PT_{i,a} \cdot fdisp_i$$

**¿Qué modela?** Modela la limitación física de cada tecnología para generar energía. Representa que ninguna central puede generar más allá de su capacidad máxima instalada, ajustada por su factor de disponibilidad y el tiempo disponible en cada bloque.

| Restricción    | Qué modela                                       | Para qué sirve  |
|----------------|--|---|
| Disponibilidad | Límites físicos de generación de cada tecnología | Garantizar soluciones técnicamente factibles que respeten las limitaciones operativas de cada central |

**Explicación de las restricciones de disponibilidad:** Estas restricciones aseguran que la energía generada no exceda la capacidad máxima posible de cada tecnología, considerando:

- La potencia instalada (MW)
- El tiempo disponible en cada bloque (horas)
- El factor de disponibilidad (porcentaje real de operación)

### 3.4.3. Restricciones de capacidad

- **Potencia existente:**

$$PT_{i,a} = pot\_inst_i$$

- **Crecimiento hidroeléctricas:**

$$PHN_{a+1} \geq PHN_a$$

- **Crecimiento otras tecnologías:**

$$PT_{i,a+1} \geq PT_{i,a}$$

- **Límite hidroeléctrico:**

$$PHN_a \leq MaxHidro$$

¿Qué modela? Modela diferentes aspectos de la capacidad del sistema:

- **Potencia existente:** Fija la capacidad de las centrales ya construidas, que no pueden ser modificadas.
- **Crecimiento:** Modela que el sistema solo puede expandirse, no contraerse, reflejando la realidad de los sistemas eléctricos en crecimiento.
- **Límite hidroeléctrico:** Modela restricciones físicas o ambientales al desarrollo hidroeléctrico (límite de sitios viables, impacto ambiental).