TR zad 2,3,4

Denis Firat

June 2020

Wstep

Zadania zostały wykonane z pomoca skryptu napisanego w pythonie, skrypt ten został napisany przy okazji poprzedniego projektu. Niezwykle użyteczna okazała sie jego umiejetność do automatycznego generowania sprawozdania.

Zadanie 2

Przykład a)

$$K_O = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$K_R = k$$

$$G = 1$$

Transmitancja CLS:

$$K_Z = \frac{K_O \cdot K_R}{1 + K_O \cdot K_R G} = \frac{\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \cdot k}{1 + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \cdot k \cdot 1} = \frac{k}{k + (s+1)(s+2)(s+3)}$$

Transmitancja OLS:

$$K_O = K_O \cdot K_R \cdot G = \frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Sprawdzamy stabilność CLS z pomoca kryterium Hurwitza:
Wielomian charakterystyczny CLS:

$$M_Z = k + (s+1)(s+2)(s+3)$$

Macierz Hurwitza na podstawie tego wielomianu oraz wartości wyznacznika i podwyznaczników:

$$\begin{bmatrix} 6 & k+6 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & k+6 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik:

$$W = 66k - (k+6)^2 + 396$$

Wyznacznik dodatni gdy: $-6 < k \wedge k < 60$
Wyznacznik:

$$W = 60 - k$$

Wyznacznik dodatni gdy: $k < 60$
Wyznacznik:

$$W = 6$$

Wyznacznik dodatni zawsze
CLS stabilny gdy $k \in (-6, 60)$

Sprawdzam stabilność CLS z pomoca kryterium Nyquista

Macierz hurwiza dla OLS oraz wyznaczniki macierzy:

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik:

$$W = 360$$

Wyznacznik dodatni zawsze
Wyznacznik:

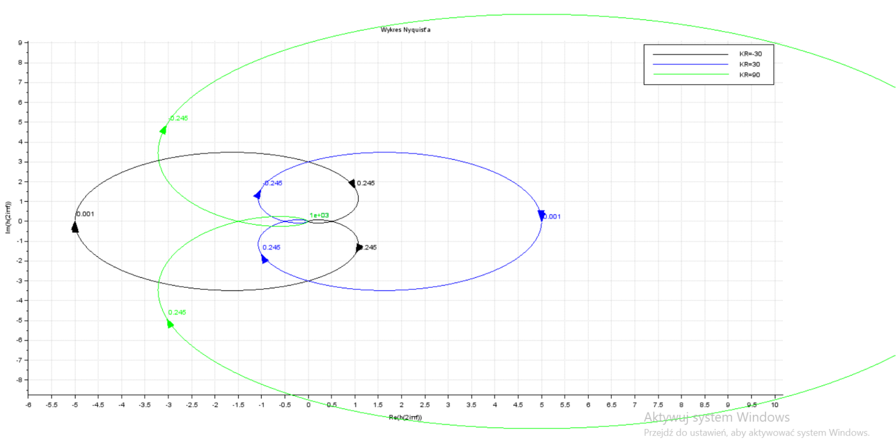
$$W = 60$$

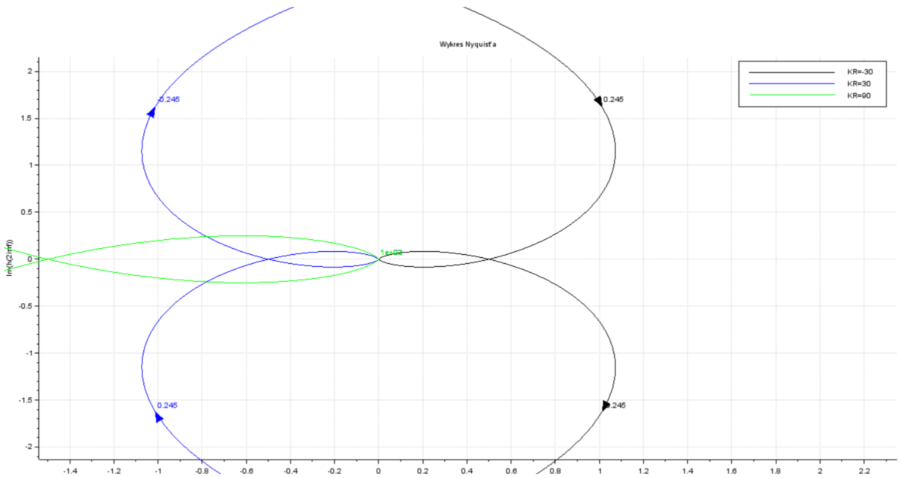
Wyznacznik dodatni zawsze
Wyznacznik:

$$W = 6$$

Wyznacznik dodatni zawsze
OLS stabilny dla $k \in (R)$
Wykres Nyquista dla OLS:

$$K_{OLS} = \frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$





Jak widać wykres nyquitsa dla różnych k, potwierdzaja, że skoro OLS jest stabilny zawsze, to CLS bedzie stabilny gdy wykres nq nie bedzie zawierał punktu nq. w przypadku gdy k=30, rzeczywiście, wykres nie zawiera pnq(punkt Nyquitsa), wieć CLS jest stabilny.

Uchyb

Dla $Y_0(t) = 1$

$$K_E = \frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{k+(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\varepsilon = \lim_{s\to 0} s \cdot K_E \cdot Y_0 = \frac{6}{k+6}$$

Przykład b)

$$K_O = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$K_R = k$$

$$G = 1$$

Transmitancja CLS:

$$K_Z = \frac{K_O \cdot K_R}{1+K_O \cdot K_R G} = \frac{\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \cdot k}{1+\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \cdot k \cdot 1} = \frac{k}{k+(s+1)^2(s+2)}$$

Transmitancja OLS:

$$K_O = K_O \cdot K_R \cdot G = \frac{k}{(s+1)^2(s+2)}$$

Sprawdzamy stabilność CLS z pomoca kryterium Hurwitza:

Wielomian charakterystyczny CLS:

$$M_Z = k+(s+1)^2(s+2)$$

Macierz Hurwitza na podstawie tego wielomianu oraz wartości wyznacznika i podwyznaczników:

$$\begin{bmatrix} 4 & k+2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & k+2 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik:

$$W = 20k - (k+2)^2 + 40$$

Wyznacznik dodatni gdy: $-2 < k \wedge k < 18$
Wyznacznik:

$$W = 18 - k$$

Wyznacznik dodatni gdy: $k < 18$
Wyznacznik:

$$W = 4$$

Wyznacznik dodatni zawsze
CLS stabilny gdy $k \in (-2, 18)$
Sprawdzam stabilność CLS z pomoca kryterium Nyquista
Macierz hurwiza dla OLS oraz wyznaczniki macierzy:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik:

$$W = 36$$

Wyznacznik dodatni zawsze
Wyznacznik:

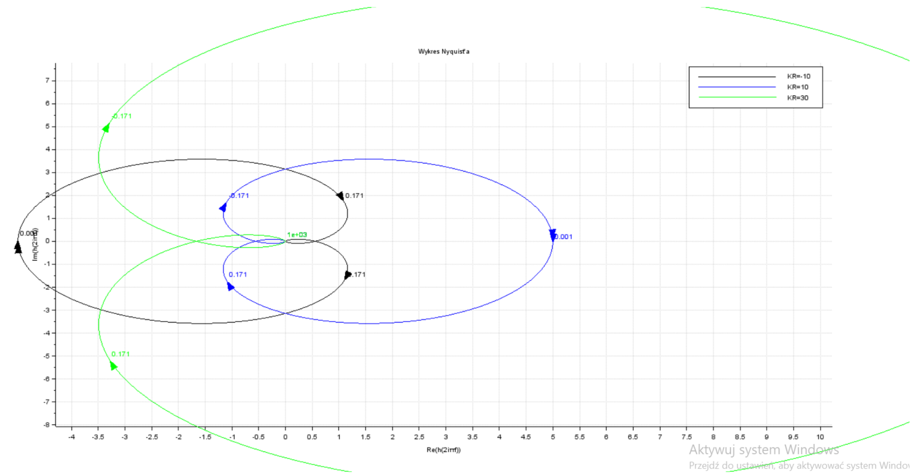
$$W = 18$$

Wyznacznik dodatni zawsze
Wyznacznik:

$$W = 4$$

Wyznacznik dodatni zawsze
OLS stabilny dla $k \in (R)$
Wykres Nyquista dla OLS:

$$K_{OLS} = \frac{k}{(s+1)^2 (s+2)}$$



Jak widać wykres nyquitsa dla różnych k, potwierdzaja, że skoro OLS jest stabilny zawsze, to CLS bedzie stabilny gdy wykres nq nie bedzie zawierał punktu nq. w przypadku gdy k=30, rzeczywiście, wykres nie zawiera pnq(punkt Nyquitsa), wieć CLS jest stabilny.

Uchyb

Dla $Y_0(t) = 1$

$$K_E = \frac{(s+1)^2\,(s+2)}{k + (s+1)^2\,(s+2)}$$

$$\varepsilon = \lim_{s \to 0} s \cdot K_E \cdot Y_0 = \frac{2}{k+2}$$

zadanie 3

Przykład a)

$$K_O = \frac{1}{s\left(s+1\right)\left(s+2\right)}$$

$$K_R = k$$

$$G = 1$$

Transmitancja CLS:

$$K_Z = \frac{K_O \cdot K_R}{1 + K_O \cdot K_R G} = \frac{\frac{1}{s(s+1)(s+2)} \cdot k}{1 + \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \cdot k \cdot 1} = \frac{k}{k + s\left(s+1\right)\left(s+2\right)}$$

Transmitancja OLS:

$$K_O = K_O \cdot K_R \cdot G = \frac{k}{s\left(s+1\right)\left(s+2\right)}$$

Sprawdzamy stabilność CLS z pomoca kryterium Hurwitza:
Wielomian charakterystyczny CLS:

$$M_Z = k + s\left(s+1\right)\left(s+2\right)$$

Macierz Hurwitza na podstawie tego wielomianu oraz wartości wyznacznika i podwyznaczników:

$$\begin{bmatrix} 3 & k & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k \end{bmatrix}$$

Wyznacznik:

$$W = -k^2 + 6k$$

Wyznacznik dodatni gdy: $0 < k \wedge k < 6$
Wyznacznik:

$$W = 6 - k$$

Wyznacznik dodatni gdy: $k < 6$
Wyznacznik:

$$W = 3$$

Wyznacznik dodatni zawsze
CLS stabilny gdy $k \in (0, 6)$

Uchyby

$$K_E = \frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{k+(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Dla $Y_0(t) = 1$

$$\varepsilon = \lim_{s\to 0} s \cdot K_E \cdot Y_0 = 0$$

Dla $Y_0(t) = t$

$$\varepsilon = \lim_{s\to 0} s \cdot K_E \cdot Y_0 = \frac{2}{k}$$

Dla $Y_0(t) = t^2$

$$\varepsilon = \lim_{s\to 0} s \cdot K_E \cdot Y_0 = \infty \operatorname{sign}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Dla $Y_0(t) = 1 + t$

$$\varepsilon = \lim_{s\to 0} s \cdot K_E \cdot Y_0 = \frac{2}{k}$$

Przykład b

$$K_O = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$K_R = \frac{k}{s}$$

$$G = 1$$

Transmitancja CLS:

$$K_Z = \frac{K_O \cdot K_R}{1 + K_O \cdot K_R G} = \frac{\frac{1}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{k}{s}}{1 + \frac{1}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{k}{s} \cdot 1} = \frac{k}{k + s(s+1)(s+2)}$$

Transmitancja OLS:

$$K_O = K_O \cdot K_R \cdot G = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

Sprawdzanie dalej stabilnosci i uchybów jest identyczne jak w podpunkcie a

zadanie 4

$$K_O = \frac{1}{(s-3)(s+1)(s+2)}$$

$$K_R = k$$

$$G = 1$$

Transmitancja CLS:

$$K_Z = \frac{K_O \cdot K_R}{1 + K_O \cdot K_R G} = \frac{\frac{1}{(s-3)(s+1)(s+2)} \cdot k}{1 + \frac{1}{(s-3)(s+1)(s+2)} \cdot k \cdot 1} = \frac{k}{k + s^3 - 7s - 6}$$

Transmitancja OLS:

$$K_O = K_O \cdot K_R \cdot G = \frac{k}{(s-3)(s+1)(s+2)}$$

Sprawdzamy stabilność CLS z pomoca kryterium Hurwitza:
Wielomian charakterystyczny CLS:

$$M_Z = k + s^3 - 7s - 6$$

Macierz Hurwitza na podstawie tego wielomianu oraz wartości wyznacznika i podwyznaczników:

$$\begin{bmatrix} 0 & k-6 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & k-6 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik:

$$W = -(k-6)^2$$

Wyznacznik dodatni gdy: False
Wyznacznik:

$$W = 6 - k$$

Wyznacznik dodatni gdy: $-\infty < k \wedge k < 6$
Wyznacznik:

$$W = 0$$

Wyznacznik dodatni gdy: False
CLS jest zawsze nie stabilny
Uchyb

$$K_E = \frac{s^3 - 7s - 6}{k + s^3 - 7s - 6}$$

Dla $Y_0(t) = 1$

$$\varepsilon = \lim_{s \to 0} s \cdot K_E \cdot Y_0 = -\infty \operatorname{sign}\left(\frac{1}{k-6}\right)$$