

# LINEAR ALGEBRA

## Determinan

Muhammad Afif Hendrawan, S.Kom., M.T.

# Outlines

- Pengantar Determinan
- Determinan (Definisi Formal)
- Determinan dengan Ekspansi Kofaktor
- Determinan Matriks Segitiga



# Pengantar Determinan

# Pengantar Determinan (1)

- Tinjau kembali matriks  $2 \times 2$  memiliki inverse jika dan hanya jika determinannya tidak nol  $\rightarrow ad - bc \neq 0$
- Untuk memanfaatkan konsep ini pada matriks yang lebih besar  $\rightarrow$  Diperlukan definisi determinan untuk matriks  $n \times n$
- Kita dapat mendefinisikan determinan matriks  $3 \times 3$  dengan **memperhatikan apa yang terjadi jika inverse matriks  $A$ ,  $3 \times 3$  adalah hasil OBE (row reduced)**

## Pengantar Determinan (2)

- Jika  $A = [a_{ij}]$  dengan  $a_{11} \neq 0$
- Jika kita kalikan baris 2 dan dari tiga dari  $A$  dengan  $a_{11}$  dan kurangi dengan perkalian tertentu dari baris 1 dengan baris lainnya (OBE), maka matriks yang ekuivalen dengan  $A$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{bmatrix}$$

- Karena  $A$  mempunyai inverse, elemen (2,2) atau elemen (3,2) pada matriks sebelah kanan tidak bernilai 0

## Pengantar Determinan (3)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{bmatrix}$$

- Misal elemen (2,2) tidak 0  $\rightarrow$  Kali baris 3 dengan  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , pada baris 3 baru tambahkan  $-(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$  kalikan baris 2  $\rightarrow$  Didapatkan

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & a_{11}\Delta \end{bmatrix}$$

- Dimana  $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

## Pengantar Determinan (4)

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & a_{11}\Delta \end{bmatrix}$$

Dimana  $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

- Karena  $A$  memiliki inverse,  $\Delta$  bernilai tidak nol (nonzero)
- $\Delta \rightarrow$  Determinan dari matriks  $A$ ,  $3 \times 3$

## Pengantar Determinan (5)

- Tinjau kembali matriks  $2 \times 2$ , matriks  $A = [a_{ij}]$  dengan  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- Untuk matriks  $1 \times 1 \rightarrow A = [a_{11}] \rightarrow \det A = a_{11}$
- Untuk mengeneralisi konsep tersebut pada matriks yang lebih besar  $\rightarrow$  Gunakan determinan matriks  $2 \times 2$  untuk menentukan determinan matriks  $3 \times 3 \rightarrow \Delta$

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

- $\Delta$  dapat dikelompokkan dan ditulis ulang dengan,

$$(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31})$$

$$\Delta = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$



## Pengantar Determinan (6)

- Untuk setiap matriks persegi  $A$ , Dimana  $A_{ij}$  merupakan submatriks yang terbentuk dari menghapus baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dari  $A$ , maka,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{hapus baris-3, kol-2} \rightarrow A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Sehingga, kita dapat mendefinisikan determinan secara rekursif
  - Jika  $n = 3$ ,  $\det A$  didefinisikan dengan matriks  $2 \times 2$  dengan submatriks  $A_{1j}$
  - Jika  $n = 4$ ,  $\det A$  didefinisikan dengan matriks  $3 \times 3$  dengan submatriks  $A_{1j}$
  - Secara umum  $\rightarrow$  Determinan  $n \times n$  didefinisikan dengan determinan dari submatriks  $(n-1) \times (n-1)$

# Definisi Formal dari Determinan

Untuk  $n \geq 2$  determinan dari matriks  $n \times n$ ,  $A = [a_{ij}]$  adalah jumlah dari bentuk  $\pm a_{ij} \det A_{1j}$  dengan tanda plus dan minus saling berselang, dimana elemen-elemen  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{1n}$  adalah baris pertama dari  $A$ . Persamaannya,

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$

## Determinan – Contoh

Hitung determinan dari  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

→ Tentukan  $\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$

$$\det A = 1 \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - 5 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1(0 - 2) - 5(0 - 0) + 0(-4 - 0) = -2$$

→ Dapat juga ditulis dengan,

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

# Determinan – Ekspansi Kofaktor

- Untuk lebih mudahnya  $\rightarrow$  tulis  $\det A$  dengan bentuk lain
- Diberikan  $A = [a_{ij}]$ , kofaktor  $(i, j)$  dari  $A$  adalah nilai  $C_{ij}$  dengan,

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Sehingga,

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

Persamaan ini disebut sebagai ekspansi kofaktor baris pertama (**cofactor expansion across the first row**) dari  $A$

# Determinan – Ekspansi Kofaktor / Teorema #1

Determinan dari matriks  $A$   $n \times n$  dapat dihitung dengan ekspansi kofaktor baris maupun kolom. Ekspansi baris ke- $i$  menggunakan persamaan berikut,

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Ekspansi dengan kolom ke- $j$  menggunakan,

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

Tanda plus dan minus dari kofaktor  $(i, j)$  tergantung posisi  $a_{ij}$  dalam matriks.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

# Determinan – Ekspansi Kofaktor / Teorema #1 - Contoh

Gunakan ekspansi kofaktor dengan baris-3 untuk menghitung  $\det A$ , dimana,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab,

$$\det A = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$

$$\det A = (-1)^{3+1}a_{31} \det A_{31} + (-1)^{3+2}a_{32} \det A_{32} + (-1)^{3+3}a_{33} \det A_{33}$$

$$\det A = 0 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 2(-1) + 0 = -2$$

# Determinan – Matriks Segitiga

Jika  $A$  adalah matriks segitiga, maka  $\det A$  adalah hasil kali dari diagonal utama dari  $A$

Contoh  $\rightarrow$  Jika  $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , maka  $\det A = (4)(5)(-4)(2) = -160$

# Latihan!

Hitung determinan dari matriks berikut dengan ekspansi kofaktor baris-1!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Hitung determinan dari matriks berikut dengan konsep determinan matriks segitiga

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$



# Tugas!

Hitung,

$$\begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$



# References

- Lay, D.C., Lay, S.R. and McDonald, J. (2021) *Linear algebra and its applications*. Boston: Pearson.
- Kariadinata, R. (2013) *Aljabar Matriks Elementer*. Bandung: Pustaka Setia.