ALJABAR LINIER

Operasi Matriks

Muhammad Afif Hendrawan, S.Kom., M.T.

Outlines

- Skalar, Vektor, Matriks, dan Tensor
- Anatomy Matriks
- Penjumlahan dan Perkalian Skalar Pada Matriks
- Perkalian Matriks
- Pangkat dari Matriks
- Transpos dari Matriks

Skalar, Vektor, Matriks, dan Tensor

Skalar

- Direpresentasikan dalam nilai tunggal
- Tidak memiliki arah, hanya besaran
- Notasi matematika → $s = 4$
- Contoh: Suhu → 25°C, Bobot → 70kg, Kecepatan → 30km/jam
- Ranking dalam tensor -> Rank 0
- Implementasi dalam kode,

```
s = 5 # Angka biasa (skalar)
```

Vektor

- Daftar angka dalam 1 dimensi (array 1D) yang memiliki besar dan arah
- Memiliki panjang n
- Notasi matematika,

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```python
v = [2, 3, 5] # Daftar (list) sebagai vektor
import numpy as np
v = np.array([2, 3, 5]) # Vektor NumPy
```

- Contoh,
  - Kecepatan → $[3, -2] m/s$
  - Warna RGB → $[255, 128, 64]$
- Ranking dalam tensor → Rank 1

Matriks

- Nilai yang di representasikan dalam baris dan kolom (Array 2D)
- Digunakan dalam transformasi linier, gambar, grafik, dan masih banyak lagi
- Notasi matematika,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- Contoh,
  - Gambar grayscale

```
# Matrix
matrix_python = [[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]
matrix_numpy = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]])
```

Tensor

- Generalisasi skalar, vektor, dan matriks ke dimensi yang lebih tinggi
- Bisa memiliki 3, 4, atau lebih dimensi
- Notasi matematika,

$$T = \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{bmatrix} \right]$$

- Contoh,
    - Tensor 3D (Rank 3) → Citra RGB → $(lebar \times tinggi \times 3)$
    - Tensor 4D (Rank 4) → Kumpulan citra RGB →$(batch \times lebar \times tinggi \times 3)$

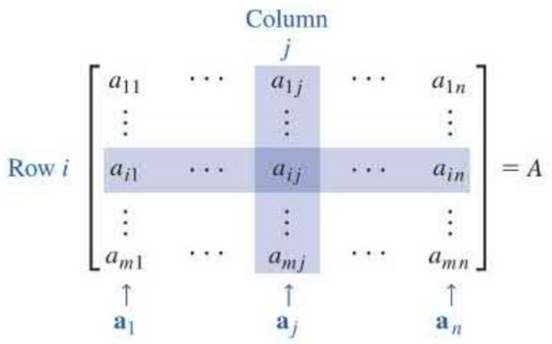
```
# Tensor (3D array)
tensor_python = [
[[1, 2, 3], [4, 5, 6]],
[[7, 8, 9], [10, 11, 12]]
]
tensor_numpy = np.array([
[[1, 2, 3], [4, 5, 6]],
[[7, 8, 9], [10, 11, 12]]
])
```

Anatomi Matriks

Matriks (1)

- Jika A adalah matriks $m \times n$, A memiliki m baris dan n kolom
- Nilai skalar pada baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A di notasikan sebagai a_{ij}
- Sebagai contoh nilai pada (3,2) → a_{32} → baris ke-3 kolom ke-2
- Setiap kolom dari A adalah daftar (*list*) dari bilangan riil m yang berupakan sebuah vektor pada $\mathbb{R}^m$ → biasa ditulis,

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$$



Matriks (2)

- **Nilai-nilai diagonal** pada matriks A, $m \times n$ adalah $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ dan membentuk diagonal utama pada matriks A
- **Matriks diagonal** adalah matriks dengan ukuran $\boldsymbol{n \times n}$ dimana **nilai selain diagonalnya adalah nol**. Contoh → Matriks identitas, I_n
- Matriks $m \times n$ dengan seluruh nilainya adalah 0 disebut sebagai **matriks nol** (***zero matrix***)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c}\text{Column}\\ j\end{array} \\ \text{Row } i & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} = A \\ & \begin{array}{ccccc}\uparrow & & \uparrow & & \uparrow\\ \mathbf{a}_1 & & \mathbf{a}_j & & \mathbf{a}_n\end{array}\end{array}$$

Penjumlahan dan Perkalian Skalar

Penjumlahan Pada Matriks

- Dua matriks dikatakan sama (**equal**) jika memiliki ukuran yang sama (jml. baris dan jml kolom) → Ordo sama
- Jumlah dari $A + B$ dapat didefinisikan jika $A + B$ memiliki ukuran yang sama.
- Contoh,

Diberikan, $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, and $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Maka, $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$A + C$ tidak valid / tidak terdefinisi karena A dan C tidak memiliki ukuran yang sama / tidak equal

Perkalian Skalar Pada Matriks

- Jika r adalah nilai skalar dan A adalah matriks → Perkalian skalar rA adalah matriks dengan nilai "**kolom**" r kali dari setiap kolom pada A
- Pada vektor, $-A = (-1)A$, $A - B = A + (-1)B$
- Contoh,

Dengan matriks A dan B pada contoh sebelumnya,

$$2B = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -7 & -7 & -12 \end{bmatrix}$$

Sifat-Sifat Penjumlahan dan Perkalian Skalar

Jika matriks A, B, C, ekual satu sama lain, r dan s adalah nilai skalar,

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0 = A$
- $r(A + B) = rA + rB$
- $(r + s)A = rA + sA$
- $r(sA) = (rs)A$

Bagaimana dengan pengurangan?

- **Aturan sama! Ukuran sama / Ordo Sama / Equal**
- $A - B \neq B - A$
- $(A - B) - C = A - (B - C)$

Latihan!

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 & 4 \\ -5 & -1 & -3 & 5 \\ 6 & -8 & 11 & 3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 6 & 3 & -5 \\ -2 & 7 & -8 \end{bmatrix}$

Tentukan (jika mungkin),

- $A + B$
- $A - B$
- $A + C$
- $B - C$

Perkalian Matriks

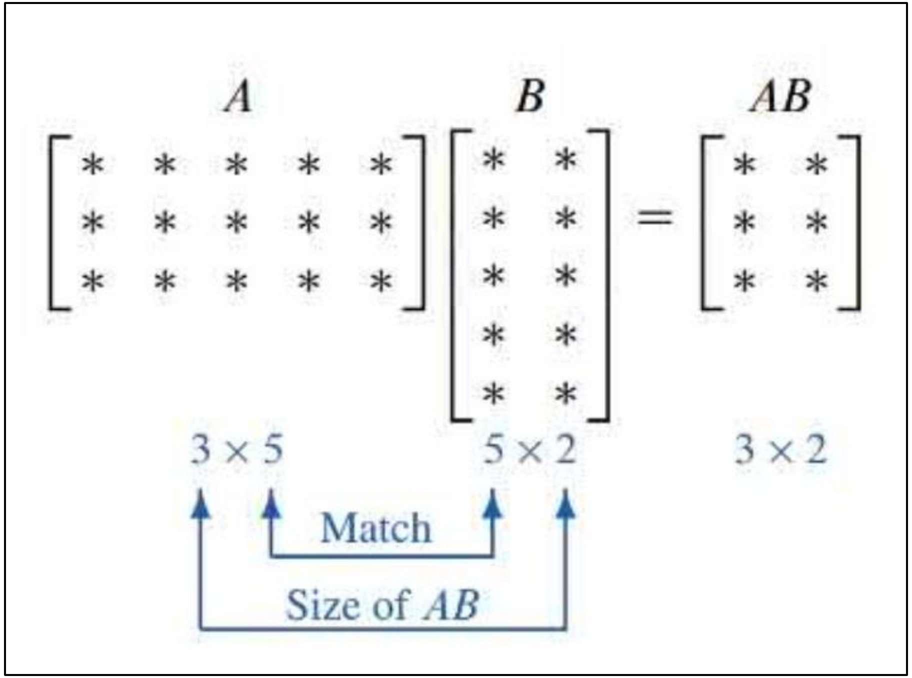
Perkalian Matriks (1)

- Jika A adalah matriks $m \times n$ dan B adalah matriks $n \times p$ → Hasil dari AB adalah matriks $m \times p$
- Contoh,

Jika, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix}$, maka AB,

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + bq & ar + bs & at + bu \\ cp + dq & cr + ds & ct + du \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks (2)



Sifa—sifat Perkalian Matriks

Jika A adalah matriks $m \times n$ dan jika B dan C memiliki ukuran untuk proses penjumlahan dan perkalian yang valid, maka,

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $r(AB) = (rA)B = A(rB)$
- $I_m A = A = A I_n$

Perkalian Matriks – Perhatian!!!

- $AB \neq BA$
- **The cancelation law** (“***coret-coret***”) tidak berlaku pada perkalian matriks!
  - Jika $AB = AC$ bukan berarti $B = C$
- Jika hasil dari AB adalah matriks nol, bukan berarti $A = 0$ atau $B = 0$

Pangkat dari Matriks

Pangkat dari Matriks

- Jika A adalah matriks $m \times n$, dan k adalah nilai positif integer, maka A^k dinotasikan sebagai hasil dari perkalian A sebanyak k kali

$$A^k = \underbrace{A \ldots A}_{k}$$

- Jika A bernilai selain nol (nonzero) dan jika x anggota $\mathbb{R}^n$ → $A^k x$ adalah hasil dari *left multiplying* (perkalian baris) x dengan A sebanyak k kali
- Jika $k = 0$ → $A^0 x = x$

Pangkat dari Matriks – *Left Multiplying*

- Jika A bernilai selain nol (nonzero) dan jika x anggota $\mathbb{R}^n \rightarrow A^k x$ adalah hasil dari *left multiplying* (perkalian baris) x dengan A sebanyak k kali
- Contoh -> Tentukan nilai $A^2 x$ dimana $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, maka

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & 2+4 \\ 6+12 & 3+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$A^2 x = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35+36 \\ 90+114 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 71 \\ 204 \end{bmatrix}$$

Transpos Matriks

Transpos Matriks

- Diberikan matriks $m \times n$, A, transpos dari A adalah matriks $n \times m$, di notasikan dengan A^T
- Contoh,

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ maka $B^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Sifat-sifat Transpos Matriks

Jika A dan B merupakan matriks dengan ukuran yang dapat digunakan untuk proses penjumlahan dan perkalian, maka,

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- Untuk semua nilai skalar r, $(rA)^T = rA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Latihan!

- Jika $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
    - Tentukan AB
    - Tentukan BA

Latihan (Lagi)! ☺

Perhatikan matriks-matriks berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tentukan (jika memungkinkan)!

- $D + E$
- $D - E$
- $5A$
- $2B - C$
- $A - A$

Tugas

Jika,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Tentukan (jika memungkinkan),

- $-2A$
- AC
- AD
- $3C - E$
- CB
- EB

Jika tidak valid, jelaskan alasannya!


شكراً جزيلاً
ngiyabonga
рахмат
danke
謝謝
spas
teşekkür ederim
Баярлалаа
mersi
kia ora
barka
welalin
tack
mahalo
tapadh leat
спасибо
faafetai lava
vinaka
спасибі
blagodaram
dank je
misaotra
matondo
paldies
grazzi
kiitos
dankie
thank you
gracias
хвала
nanni
nandri
dhanyavad
asante
manana
bedankt
bayarlalaa
gràcie
hvala
mauruuru
köszönöm
akun
dankon
obrigada
murakoze
tenki
enkosi
djiere dieuf
tau
mochchakkeram
dziękuję
дякую
mamnun
chokrane
chnorakaloutioun
gratias ago
gràcies
sulpáy
go raibh maith agat
sobodi
dėkuji
obrigado
sagolun
sukriya
kop khun krap
taiku
arigatô
takk
dakujem
trugarez
mèsi
didi madloba
najis tuke
ありがとう
tanemirt
rahmet
grazie
shukriya
merce
мерси
kam sah hamnida
rahmat
terima kasih
diolch
dhanyavadagalu
তোমাকে ধন্যবাদ
감사합니다
xièxie
ευχαριστώ
merci

References

- Lay, D.C., Lay, S.R. and McDonald, J. (2021) *Linear algebra and its applications*. Boston: Pearson.
- Kariadinata, R. (2013) *Aljabar Matriks Elementer*. Bandung: Pustaka Setia.