LINEAR ALGEBRA

Inverse Matriks

Muhammad Afif Hendrawan, S.Kom., M.T.

Outlines

- Dasar Inverse Matriks

Dasar Inverse Matriks

Dasar (1)

- Nilai inverse dari sebuah bilangan adalah, e.g. 5 adalah $1/5$ atau 5^{-1}
- Nilai inverse memenuhi persamaan berikut

$$5^{-1}(5) = 1 \text{ and } 5(5^{-1}) = 1$$

- Generalisasi matriks memerlukan persamaan diatas dan menghindari pembagian→ Perkalian matriks tidak bersifat komunikatif
- Generalisasi kedua persamaan diatas memungkinkan, jika matriks yang di operasikan berbentuk persegi
- Sebuah matriks $A, n \times n$, memiliki inverse jika matriks $A, n \times n$, memenuhi,

$$CA = I \text{ and } AC = I$$

- Dimana I **adalah matriks indentitas**, dan C **adalah inverse dari** A

Dasar (2)

$$CA = I \text{ dan } AC = I$$

- Jika B merupakan inverse lain dari A, maka,

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

- Inverse dinotasikan dengan A^{-1}, sehingga,

$$A^{-1}A = I \text{ and } AA^{-1} = I$$

- Matriks yang tidak bisa di inverse-kan → **singular matrix**
- Matriks memiliki inverse → **nonsingular matrix**

Dasar (3) - Contoh

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$AC = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan

$CA = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sehingga, $C = A^{-1}$

Dasar (4) – Teorema #1

- Diberikan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ → Jka $ad - bc \neq 0$ → $\boldsymbol{A}$ **memiliki inverse**, dan

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Jika $ad - bc = 0$ → A **tidak memiliki inverse**
- $ad - bc$ → determinan dari A → $\det A = ad - bc$

Dasar (5) – Teorema #2

- Jika A matriks $n \times n$ yang memiliki inverse, maka untuk setiap nilai $\boldsymbol{b}$ in $\mathbb{R}^n$
  → $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$
- Contoh, penyelesaian sistem linier berikut dengan matriks A

$$3x_1 + 4x_2 = 3$$
$$5x_1 + 6x_2 = 7$$

Sistem tersebut ekivalen dengan $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, sehingga,

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Dasar (5) – Teorema #3

- Jika A memiliki inverse, maka A^{-1} juga memiliki inverse → $(A^{-1})^{-1} = A$
- Jika A dan B adalah matrix $n \times n$ yang memiliki inverse, maka begitu juga dengan AB, dan inverse dari AB adalah **perkalian dari inverse B dan A**

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- Jika A memiliki inverse, maka begitu juga dengan A^T, dan inverse dari A^T adalah transpose dari A^{-1} → $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Dasar (6) – Teorema #4

- Jika matriks A, $n \times n$, memiliki inverse jika dan hanya jika memiliki baris yang ekivalen dengan I_n
- Pada kasus ini, urutan apapapun dari OBE yang menjadikan A ke I_n juga menjadikan I_n ke A^{-1}
- Sebagai contoh, tentukan inverse dari $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

Dasar (7) – Teorema #4 (2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$[A\ I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dasar (8) – Teorema #4 (3)

Teorema 4 menunjukkan, dikarenakan $A \sim I$, maka A memiliki inverse, dan inversenya adalah,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Latihan!

- Gunakan determinan untuk menentukan apakah matriks berikut memiliki nilai inverse!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

- Tentukan inverse dari $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, jika ada!

- Selesaikan sistem linier berikut dengan menggunakan teorema inverse!

$$8x_1 + 3x_2 = 2$$
$$5x_1 + 2x_2 = -1$$

Tugas!

- Tentukan apakah matriks berikut memiliki nilai inverse,
  - $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \\ 8 & 5 & -1 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

- Selesaikan sistem linier berikut dengan menggunakan inverse matriks!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

Selanjutnya?

- Menentukan inverse dari matrik 3×3 dengan menggunakan determinan
- Matriks Partisi
- Determinan


thank you
danke
謝謝
ngiyabonga
شكراً جزيلاً
teşekkür ederim
gracias
merci
obrigado
спасибо
bedankt
dziękuję
sukriya
kop khun krap
terima kasih
go raibh maith agat
mochchakkeram
arigatô
dakujem
grazie
dank je
мерси
감사합니다
ありがとう
ευχαριστώ
рахмат
Баярлалаа
хвала
дякую
спасибі

References

- Lay, D.C., Lay, S.R. and McDonald, J. (2021) *Linear algebra and its applications*. Boston: Pearson.
- Kariadinata, R. (2013) *Aljabar Matriks Elementer*. Bandung: Pustaka Setia.