ITMO UNIVERSITY

Saint Petersburg, Russia

Системы очувствления роботов

bia@itmo.ru

Расширенный фильтр Калмана по ошибке состояния

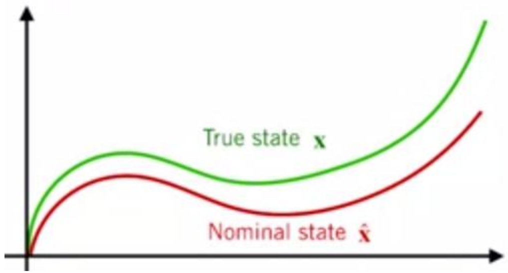
- Идея проста: рассмотреть параметр состояния x, как состоящий из двух частей: <u>большая часть</u>, называемая номинальным состоянием $\hat{\mathbf{x}}$, и маленькая часть (ошибка состояния) Δx.
- <u>**Пример:**</u> отслеживания положения с течением времени.

$$\boxed{x = \hat{\mathbf{x}} + \Delta x}$$

Ошибка

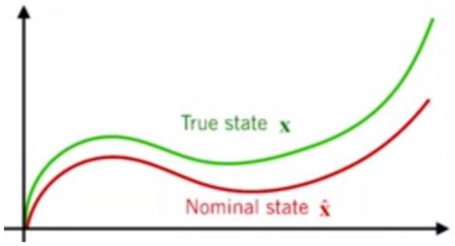
Номинальная часть

Действительное состояние



Расширенный фильтр Калмана по ошибке состояния

- Если мы сможем выяснить значение ошибки состояния, мы можем фактически его прибавить к номинальному состоянию и приблизиться к истинному состоянию.
- Отличие от РФК: вместо фильтрации по полному состоянию (может обладать высокой степенью нелинейности) **оцениваем ошибку состояния**, а затем используем оценку ошибки состояния как коррекцию к номинальному состоянию.
- Номинальное состояние получаем путем интегрирования модели движения по времени



Расширенный фильтр Калмана по ошибке состояния

Линеаризованная модель движения

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, 0) + \mathbf{F}_{k-1}\left(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right) + \mathbf{L}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}$$

$$\underbrace{\mathbf{x}_k - \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, 0)}_{\delta\mathbf{x}_k} = \mathbf{F}_{k-1}\underbrace{\left(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right)}_{\delta\mathbf{x}_{k-1}} + \mathbf{L}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}$$

Ошибка состояния

Линеаризованная модель измерения

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\check{\mathbf{x}}_k, 0) + \mathbf{H}_k\left(\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_k\right) + \mathbf{M}_k\mathbf{v}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\check{\mathbf{x}}_k, 0) + \mathbf{H}_k\underbrace{\left(\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_k\right)}_{\delta\mathbf{x}_k} + \mathbf{M}_k\mathbf{v}_k$$

Ошибка состояния

Пример использования: **DOI:** 10.1109/ROBOT.1999.772597

Алгоритм РФК по ошибке состояния

В цикле:

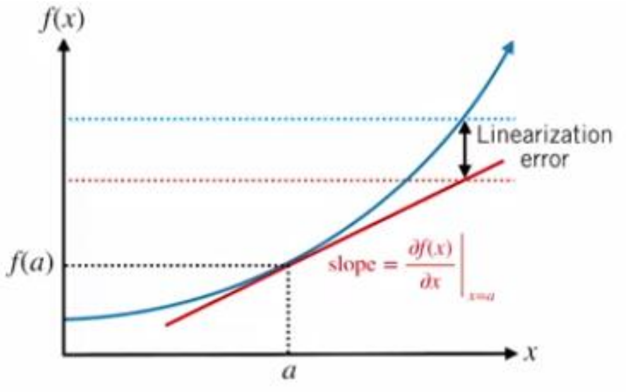
1. Обновить номинальное состояние по модели движения $\check{\mathbf{x}}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0})$
2. Пересчитать неточность $\check{\mathbf{P}}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{L}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{L}_{k-1}^T$
3. Если доступно новое измерение:
    1. Расчет коэф. усиления $\mathbf{K}_k = \check{\mathbf{P}}_k\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k\check{\mathbf{P}}_k\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R})^{-1}$
    2. Расчет ошибки состояния $\delta\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\check{\mathbf{x}}_k, \mathbf{0}))$
    3. Поправка номинального состояния $\hat{\mathbf{x}}_k = \check{\mathbf{x}}_k + \delta\hat{\mathbf{x}}_k$
    4. Поправка ковариации состояния $\hat{\mathbf{P}}_k = (\mathbf{1} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\check{\mathbf{P}}_k$

Ограничения РФК

- Вспоминаем: РФК работает путем линеаризации нелинейных моделей движения и наблюдения, чтобы обновить среднее значение и ковариацию состояния
- Линеаризованная модель – локальная линейная аппроксимация.

Ошибка линеаризации зависит:

- Степени нелинейности системы
- Насколько далеко от рабочей точки находится используемая линейная апороксимация

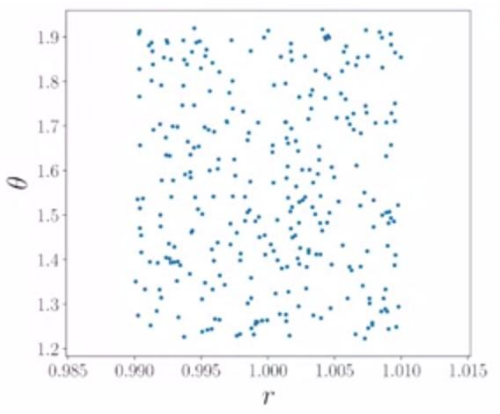


Ошибка линеаризации - разница между приближением и истинной моделью.

Чем дальше от рабочей точки, тем больше вероятность, что линейное приближение отклоняется от истинной.

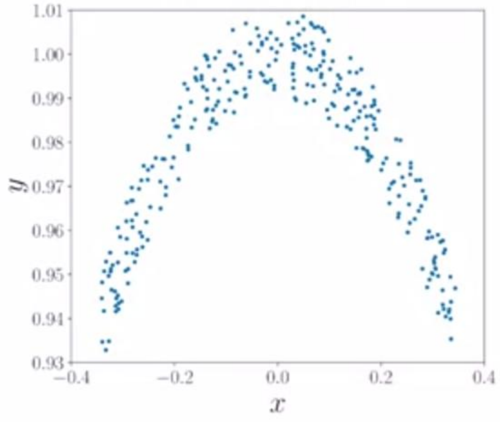
Ошибка линеаризации

- Рассмотрим пример того, как ошибка линеаризации влияет на среднее значение и ковариацию двух случайных величин, преобразованных общей парой нелинейных функций. В частности, посмотрим на нелинейное преобразование из полярных координат **r** и $\boldsymbol{\theta}$ в декартовые координаты **x** и **y**.



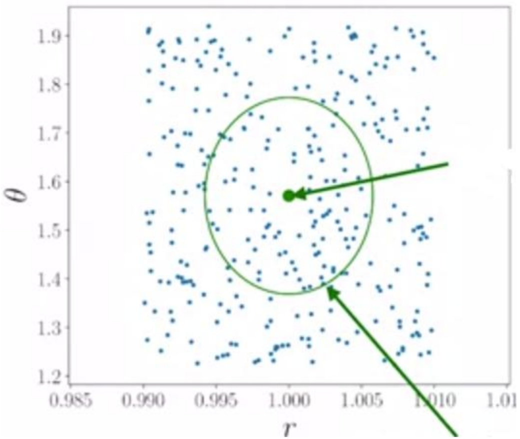
Нелинейное преобразование

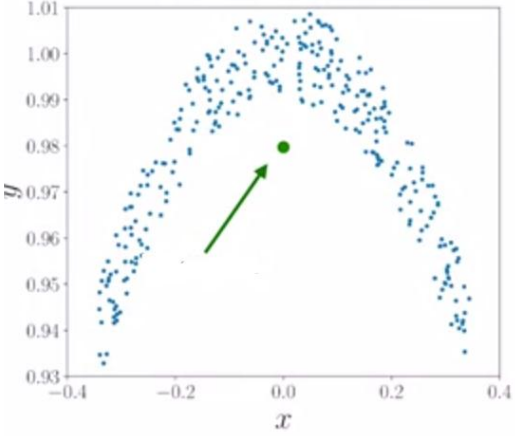
$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$



До линеаризации

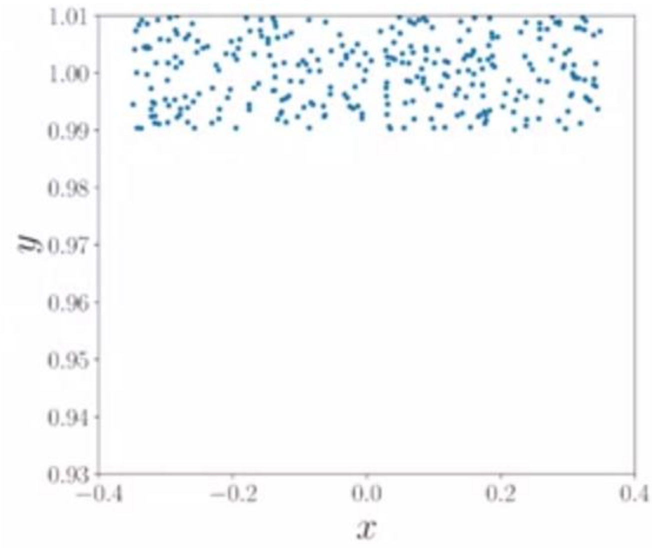
- Что происходит со средним значением и ковариацией исходного распределения?





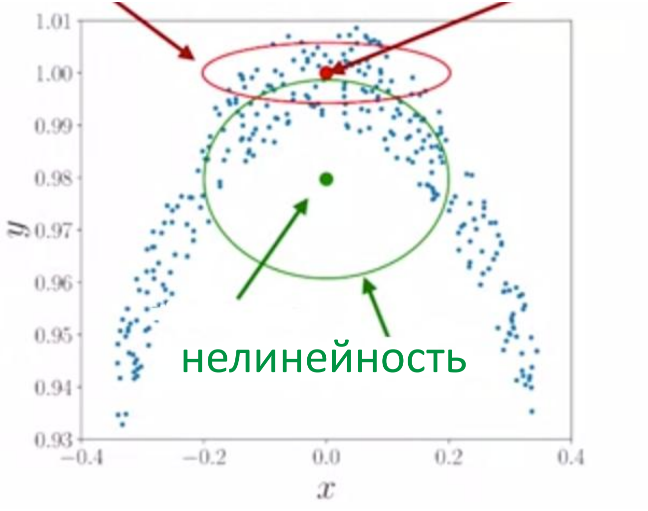
После линеаризации

$$x \approx \bar{r}\cos\bar{\theta} + \cos\bar{\theta}\,(r - \bar{r})$$
$$-\bar{r}\sin\bar{\theta}\,(\theta - \bar{\theta})$$
$$y \approx \bar{r}\sin\bar{\theta} + \sin\bar{\theta}\,(r - \bar{r})$$
$$+\bar{r}\cos\bar{\theta}\,(\theta - \bar{\theta})$$



Сравним

Результат линеаризации



РФК не подходит, если:

- **Система сильно нелинейная**
- **Частота дискретизации сенсора медленнее, чем скорость изменения состояния системы**

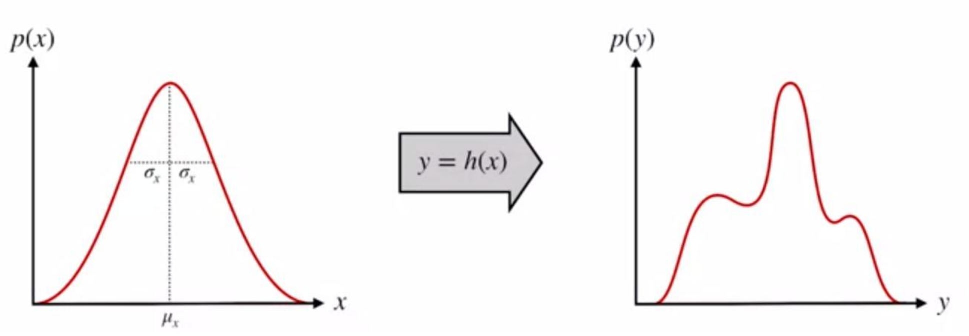
Другие проблемы при расчете якобианов связаны с:

- Ошибками при аналитическом решении производных
- Медленностью взятия производных численно

<u>А может нам и не нужна эта линеаризация?</u>

Преобразование по сигма точкам

- В англоязычной литературе «Unscented Kalman Filter».
- Основная идея: **Гораздо проще аппроксимировать распределение вероятностей, чем аппроксимировать произвольную нелинейную функцию.**

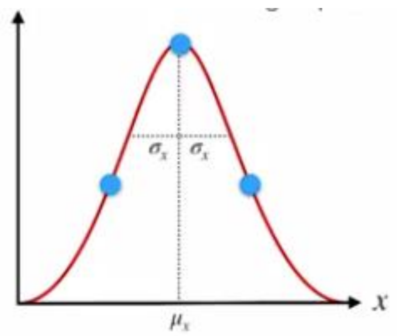


Преобразование по сигма точкам

Мы знаем нелинейную функцию, среднее значение и стандартное отклонение входной нормального распределения, и мы хотим вычислить среднее и стандартное отклонение выходного распределения.

1.) Выбираем набор точек из входного распределения.

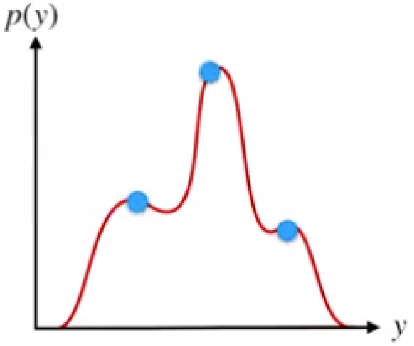
Теперь это не случайная выборка, а детерминированная выборка(сигма точки), выбранные в качестве определенного числа стандартных отклонений от среднего значения.

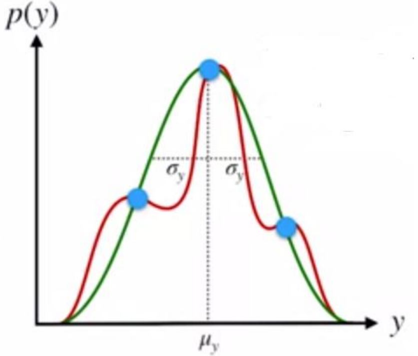


Преобразование по сигма точкам

2.) пропустить каждую сигма-точку через нашу нелинейную функцию и получить новый набор сигма-точек, принадлежащих выходному распределению.

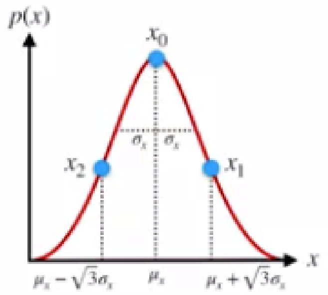
3.) вычислить среднее значение выборки и ковариацию выходных сигма-точек с некоторыми тщательно подобранными весами, и они дадут нам хорошую аппроксимацию среднего значения и ковариации истинного выходного распределения.





Преобразование по сигма точкам: подробнее

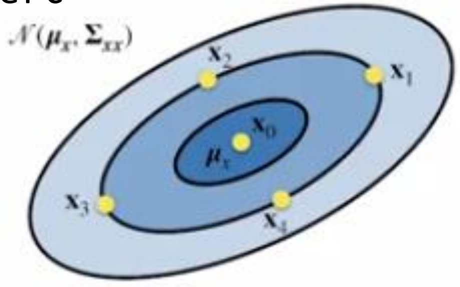
- **Главный вопрос: Сколько сигма точек брать и где они должны располагаться?**



Ответ: для n-мерного распределения вероятностей нам нужно 2n + 1 сигма-точка, одна для среднего, а остальные симметрично распределенные относительно среднего.

Ищем расположение: разложение Холецкого ковариационной матрицы, связанной с входным распределением.

<u>Разложение Холецкого</u> - операция с квадратным корнем, которая работает с симметричными положительно определенными матрицами, такими как ковариационные матрицы.



В случае 1D входного распределения, разложением Холецкого является просто квадратным корнем из дисперсии (ст. отклонение).

Преобразование по сигма точкам: подробнее

- Расчет сигма точек:

$$\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\mu}_x$$
$$\mathbf{x}_i = \boldsymbol{\mu}_x + \sqrt{N+\kappa}\ \mathrm{col}_i\mathbf{L} \qquad i = 1, \ldots, N$$
$$\mathbf{x}_{i+N} = \boldsymbol{\mu}_x - \sqrt{N+\kappa}\ \mathrm{col}_i\mathbf{L} \qquad i = 1, \ldots, N$$

- Если нормальное распределение

$\kappa = 3 - N$ но можно выбирать и другое значение

Трансформирование и рекомбинация

- Следующий шаг: пропустить каждую из сигма-точек через нелинейную функцию чтобы получить новый набор преобразованных сигма-точек

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{h}(\mathbf{x}_i) \qquad i = 0, \ldots, 2N$$

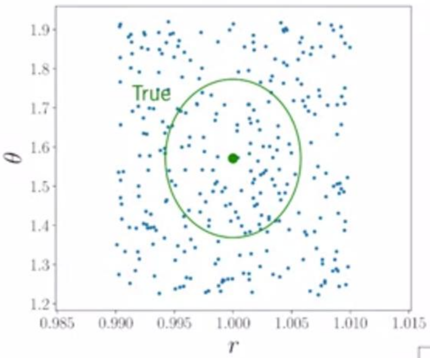
- Расчет среднего и ковариации для полученных сигм

$$\boldsymbol{\mu}_y = \sum_{i=0}^{2N} \alpha_i \mathbf{y}_i \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{yy} = \sum_{i=0}^{2N} \alpha_i \left(\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\mu}_y\right)\left(\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\mu}_y\right)^T$$

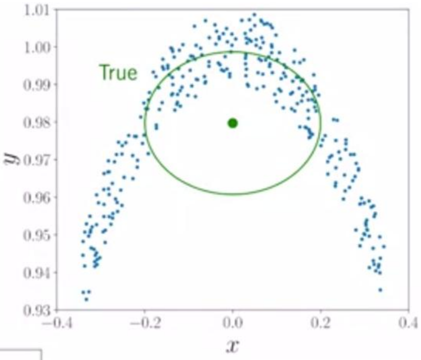
- Хитрость заключается в том, что каждая из точек получает определенный вес в вычислениях среднего значения и ковариации, и этот вес зависит от параметра $\boldsymbol{k}$ и размерности входного распределения **N**.
- И все.

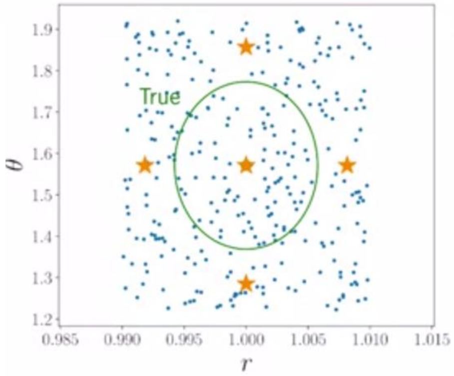
Веса: $$\alpha_i = \begin{cases} \dfrac{\kappa}{N+\kappa} & i = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{N+\kappa} & \text{Иначе} \end{cases}$$

Вернемся к примеру с нелинейной моделью измерения

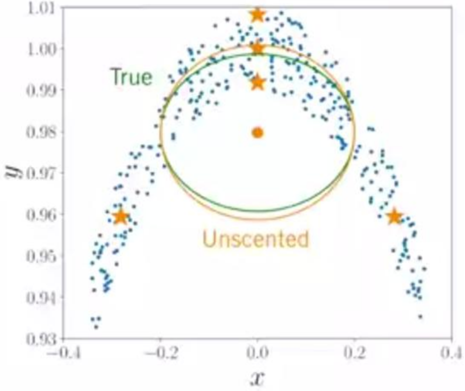


Нелинейное
преобразование





Фильтр Калмана
по сигма точкам



1. Расчет предсказания

Нелинейная модель движения

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1})$$

$$\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$$

Нелинейная модель измерения

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$$

$$\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$$

1 Расчет сигма точек

$$\hat{\mathbf{L}}_{k-1}\hat{\mathbf{L}}_{k-1}^T = \hat{\mathbf{P}}_{k-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \sqrt{N+\kappa}\,\mathrm{col}_i\hat{\mathbf{L}}_{k-1} \qquad i = 1\ldots N$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i+N)} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \sqrt{N+\kappa}\,\mathrm{col}_i\hat{\mathbf{L}}_{k-1} \qquad i = 1\ldots N$$

2 Пропускаем сигма точки через систему

$$\check{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}) \qquad i = 0\ldots 2N$$

3 Расчет предсказанного среднего и ковариации

$$\alpha^{(i)} = \begin{cases} \dfrac{\kappa}{N+\kappa} & i = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{N+\kappa} & \text{Иначе} \end{cases}$$

$$\check{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=0}^{2N} \alpha^{(i)}\check{\mathbf{x}}_k^{(i)}$$

$$\check{\mathbf{P}}_k = \sum_{i=0}^{2N} \alpha^{(i)}\left(\check{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \check{\mathbf{x}}_k\right)\left(\check{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \check{\mathbf{x}}_k\right)^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

Шум процесса

2. Расчет поправки

- Используя измерение в момент времени k, используем нелинейную модель измерения и сигма точки из предсказания, чтобы предсказать измерения.

1. Предсказание измерения(сигма точек) для имеющихся сигма точек

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} = \mathbf{h}_k(\check{\mathbf{x}}_k^{(i)}, \mathbf{0}) \qquad i = 0 \ldots 2N$$

2. Оцениваем среднее и ковариацию для предсказанного измерения

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=0}^{2N} \alpha^{(i)} \hat{\mathbf{y}}_k^{(i)}$$

$$\mathbf{P}_y = \sum_{i=0}^{2N} \alpha^{(i)} \left(\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k\right)\left(\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k\right)^T + \mathbf{R}_k$$

3. Поправка

1. Рассчитываем совместную ковариацию и коэффициент усиления

$$\mathbf{P}_{xy} = \sum_{i=0}^{2N} \alpha^{(i)} \left(\check{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \check{\mathbf{x}}_k\right)\left(\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k\right)^T$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}$$

2. Рассчитываем исправленное среднее и ковариацию

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \check{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k\right)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = \check{\mathbf{P}}_k - \mathbf{K}_k\mathbf{P}_y\mathbf{K}_k^T$$

Какой лучше использовать?

- KF (Linear Kalman Filter)
- EKF (Extended Kalman Filter)
- ES EKF (Error State Extended Kalman Filter)
- UKF (Unscented Kalman Filter)

Спасибо за внимание!

www.ifmo.ru

ITsMOre than a UNIVERSITY