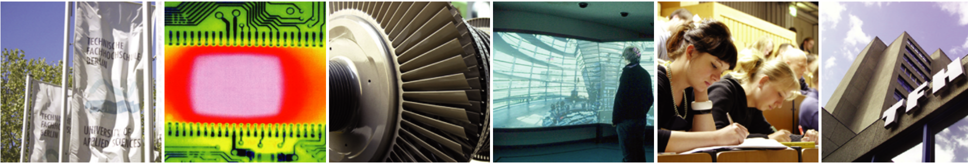
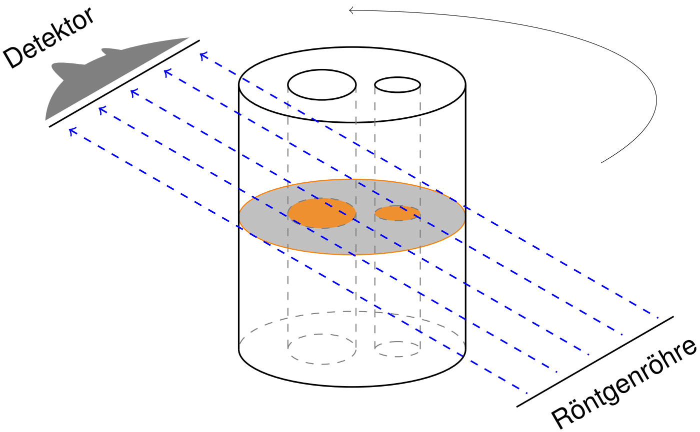
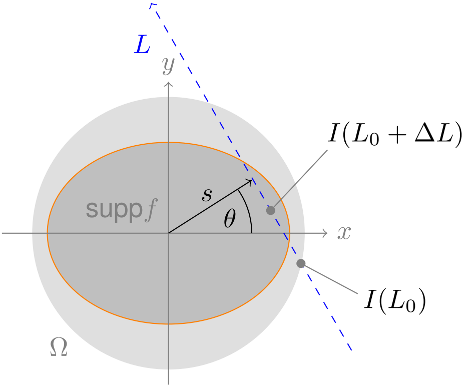
Rekonstruktionsverfahren für Computertomographie-Bilddaten

Präsentation der Bachelorarbeit

Radmir Gesler




Detektor
Röntgenröhre



$$I(L_0 + \Delta L) - I(L_0) = -f(L) \parallel \Delta L \parallel I(L_0).$$

Definition

Sei nun $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, dann ist ihre Radon Transformation durch

$$\mathcal{R}f(s,\theta) := \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} f(L(s,\theta,t))\mathrm{d}t \tag{1}$$

definiert. Hier ist $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\begin{aligned} L(s,\theta,t) &= s\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R};\ \theta \in [0,\pi]. \\ &= s\omega(\theta) + t\omega^{\perp}(\theta) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\gamma(s) = \begin{cases} \sqrt{1-s^2} & : \quad |s| \leq 1 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}. \tag{3}$$

Definition

Sei nun $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, dann ist ihre Radon Transformation durch

$$\mathcal{R}f(s,\theta) := \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} f(L(s,\theta,t))\mathrm{d}t \qquad (1)$$

definiert. Hier ist $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\begin{aligned} L(s,\theta,t) &= s\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R};\ \theta \in [0,\pi]. \qquad (2)\\ &= s\omega(\theta) + t\omega^{\perp}(\theta) \end{aligned}$$

$$\gamma(s) = \begin{cases} \sqrt{1-s^2} & : \quad |s| \leq 1 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}. \qquad (3)$$

Definition

Sei nun $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, dann ist ihre Radon Transformation durch

$$\mathcal{R}f(s,\theta) := \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} f(L(s,\theta,t))\mathrm{d}t \tag{1}$$

definiert. Hier ist $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\begin{aligned} L(s,\theta,t) &= s\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R};\ \theta \in [0,\pi]. \\ &= s\omega(\theta) + t\omega^{\perp}(\theta) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\gamma(s) = \begin{cases} \sqrt{1-s^2} & : \ |s| \leq 1 \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}. \tag{3}$$

Im Folgenden betrachten wir die Radon-Transformation als $\mathcal{R} : L^2(\Omega) \to L^2(Z)$.

Die Radon Transformation ist:

1. Linear, also $\mathcal{R}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{R} f + \beta \mathcal{R} s g$.
2. $\mathcal{R}$ ist beschränkt $\|\mathcal{R} f(s,\theta)\|^2_{L^2(Z)} \leq 2\pi \|f\|^2_{L^2(\Omega)}$, somit auch stetig.
3. $\mathcal{R}$ hat einen adjungierten Operator $\mathcal{R}^* : L^2(Z) \to L^2(\Omega)$

$$\mathcal{R}^* g(x) = \int_0^\pi g(x^T \omega(\theta), \theta) \mathrm{d}\theta. \tag{4}$$

4. $\mathcal{R}$ ist kompakt, somit ist auch $\mathcal{R}^*$ kompakt (nach Satz von Schauder).

Im Folgenden betrachten wir die Radon-Transformation als $\mathcal{R} : L^2(\Omega) \to L^2(Z)$.

Die Radon Transformation ist:

1. Linear, also $\mathcal{R}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{R} f + \beta \mathcal{R} s g$.
2. $\mathcal{R}$ ist beschränkt $\|\mathcal{R} f(s,\theta)\|^2_{L^2(Z)} \leq 2\pi \|f\|^2_{L^2(\Omega)}$, somit auch stetig.
3. $\mathcal{R}$ hat einen adjungierten Operator $\mathcal{R}^* : L^2(Z) \to L^2(\Omega)$

$$\mathcal{R}^* g(x) = \int_0^\pi g(x^T \omega(\theta), \theta) \mathrm{d}\theta. \tag{4}$$

4. $\mathcal{R}$ ist kompakt, somit ist auch $\mathcal{R}^*$ kompakt (nach Satz von Schauder).

Im Folgenden betrachten wir die Radon-Transformation als $\mathcal{R} : L^2(\Omega) \to L^2(Z)$.

Die Radon Transformation ist:

1. Linear, also $\mathcal{R}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{R} f + \beta \mathcal{R} s g$.
2. $\mathcal{R}$ ist beschränkt $\|\mathcal{R} f(s,\theta)\|^2_{L^2(Z)} \leq 2\pi \|f\|^2_{L^2(\Omega)}$, somit auch stetig.
3. $\mathcal{R}$ hat einen adjungierten Operator $\mathcal{R}^* : L^2(Z) \to L^2(\Omega)$

$$\mathcal{R}^* g(x) = \int_0^\pi g(x^T \omega(\theta), \theta) \mathrm{d}\theta. \tag{4}$$

4. $\mathcal{R}$ ist kompakt, somit ist auch $\mathcal{R}^*$ kompakt (nach Satz von Schauder).

Im Folgenden betrachten wir die Radon-Transformation als $\mathcal{R} : L^2(\Omega) \to L^2(Z)$.

Die Radon Transformation ist:

1. Linear, also $\mathcal{R}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{R} f + \beta \mathcal{R} s g$.
2. $\mathcal{R}$ ist beschränkt $\|\mathcal{R} f(s,\theta)\|^2_{L^2(Z)} \leq 2\pi \|f\|^2_{L^2(\Omega)}$, somit auch stetig.
3. $\mathcal{R}$ hat einen adjungierten Operator $\mathcal{R}^* : L^2(Z) \to L^2(\Omega)$

$$\mathcal{R}^* g(x) = \int_0^\pi g(x^T \omega(\theta), \theta) \mathrm{d}\theta. \tag{4}$$

4. $\mathcal{R}$ ist kompakt, somit ist auch $\mathcal{R}^*$ kompakt (nach Satz von Schauder).

Im Folgenden betrachten wir die Radon-Transformation als $\mathcal{R} : L^2(\Omega) \to L^2(Z)$.

Die Radon Transformation ist:

1. Linear, also $\mathcal{R}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{R} f + \beta \mathcal{R} s g$.
2. $\mathcal{R}$ ist beschränkt $\|\mathcal{R} f(s,\theta)\|^2_{L^2(Z)} \leq 2\pi \|f\|^2_{L^2(\Omega)}$, somit auch stetig.
3. $\mathcal{R}$ hat einen adjungierten Operator $\mathcal{R}^* : L^2(Z) \to L^2(\Omega)$

$$\mathcal{R}^* g(x) = \int_0^\pi g(x^T \omega(\theta), \theta) \mathrm{d}\theta. \tag{4}$$

4. $\mathcal{R}$ ist kompakt, somit ist auch $\mathcal{R}^*$ kompakt (nach Satz von Schauder).

Anhand der obigen Eigenschaften von $\mathcal{R}$ ist es möglich die Singulärwertzerlegung für $\mathcal{R} : L^2(\Omega) \to L^2(Z)$ anzugeben (*Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren*).

$$\mathcal{R}f = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \langle f, v_j \rangle_{L^2(\Omega)} u_j. \tag{5}$$

Hier bezeichnen:

- $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in L^2(\Omega)$ das Orthonormalsystem (ONS) von Kern$(\mathcal{R})^\perp$.
- $\sigma_j := \sqrt{\lambda_j}$, wobei $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine positive absteigende Folge der Eigenwerten von $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$, die entweder abbricht oder gegen Null geht.
- $u_j := \sigma^{-1}\mathcal{R}v_j$, sodass $\{u_j\} \in L^2(Z)$ das ONS von $\overline{\text{Bild}(\mathcal{R})}$ ist.

Anhand der obigen Eigenschaften von $\mathcal{R}$ ist es möglich die Singulärwertzerlegung für $\mathcal{R} : L^2(\Omega) \to L^2(Z)$ anzugeben (*Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren*).

$$\mathcal{R}f = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \langle f, v_j \rangle_{L^2(\Omega)} u_j. \tag{5}$$

Hier bezeichnen:

- $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in L^2(\Omega)$ das Orthonormalsystem (ONS) von $\mathrm{Kern}(\mathcal{R})^\perp$.
- $\sigma_j := \sqrt{\lambda_j}$, wobei $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine positive absteigende Folge der Eigenwerten von $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$, die entweder abbricht oder gegen Null geht.
- $u_j := \sigma^{-1}\mathcal{R}v_j$, sodass $\{u_j\} \in L^2(Z)$ das ONS von $\overline{\mathrm{Bild}(\mathcal{R})}$ ist.

Anhand der obigen Eigenschaften von $\mathcal{R}$ ist es möglich die Singulärwertzerlegung für $\mathcal{R} : L^2(\Omega) \to L^2(Z)$ anzugeben (*Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren*).

$$\mathcal{R}f = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \langle f, v_j \rangle_{L^2(\Omega)} u_j. \tag{5}$$

Hier bezeichnen:

- $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in L^2(\Omega)$ das Orthonormalsystem (ONS) von $\mathrm{Kern}(\mathcal{R})^{\perp}$.
- $\sigma_j := \sqrt{\lambda_j}$, wobei $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine positive absteigende Folge der Eigenwerten von $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$, die entweder abbricht oder gegen Null geht.
- $u_j := \sigma^{-1}\mathcal{R}v_j$, sodass $\{u_j\} \in L^2(Z)$ das ONS von $\overline{\mathrm{Bild}(\mathcal{R})}$ ist.

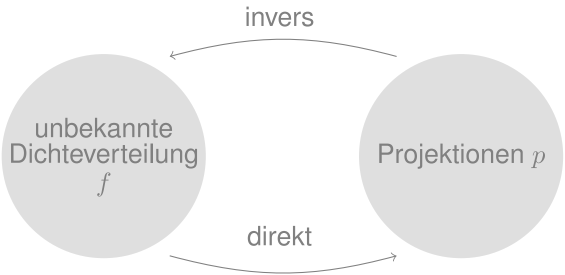
Anhand der obigen Eigenschaften von $\mathcal{R}$ ist es möglich die Singulärwertzerlegung für $\mathcal{R} : L^2(\Omega) \to L^2(Z)$ anzugeben (*Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren*).

$$\mathcal{R}f = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \langle f, v_j \rangle_{L^2(\Omega)} u_j. \tag{5}$$

Hier bezeichnen:

- $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in L^2(\Omega)$ das Orthonormalsystem (ONS) von Kern$(\mathcal{R})^\perp$.
- $\sigma_j := \sqrt{\lambda_j}$, wobei $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine positive absteigende Folge der Eigenwerten von $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$, die entweder abbricht oder gegen Null geht.
- $u_j := \sigma^{-1}\mathcal{R}v_j$, sodass $\{u_j\} \in L^2(Z)$ das ONS von $\overline{\text{Bild}(\mathcal{R})}$ ist.

Übertragung auf das Rekonstruktionsproblem aus den CT-Bilddaten



Das heißt, man sucht nach einer zu $\mathcal{R}$ inversen Abbildung, sodass aus den Projektionsdaten die unbekannte Dichteverteilung f berechnet werden kann.

Mögliche Invertierung des Operators $\mathcal{R}$ kann aus der Gleichung 4 hergeleitet werden:

$$\mathcal{R}^+ g = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{-1} \langle g, u_j \rangle_{L^2(Z)} v_j. \tag{6}$$

Problem:

$$\sigma_j^{-1} \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$$

Was zu einer Oszillation in der Lösung führen kann.

Ziel:

Die Oszillation zu dämpfen, was im allgemeinen als **Regularisierung** bezeichnet wird.

Mögliche Invertierung des Operators $\mathcal{R}$ kann aus der Gleichung 4 hergeleitet werden:

$$\mathcal{R}^+ g = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{-1} \langle g, u_j \rangle_{L^2(Z)} v_j. \tag{6}$$

Problem:

$$\sigma_j^{-1} \xrightarrow[j \to \infty]{} \infty$$

Was zu einer Oszillation in der Lösung führen kann.

Ziel:

Die Oszillation zu dämpfen, was im allgemeinen als **Regularisierung** bezeichnet wird.

Mögliche Invertierung des Operators $\mathcal{R}$ kann aus der Gleichung 4 hergeleitet werden:

$$\mathcal{R}^+ g = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{-1} \langle g, u_j \rangle_{L^2(Z)} v_j . \tag{6}$$

Problem:

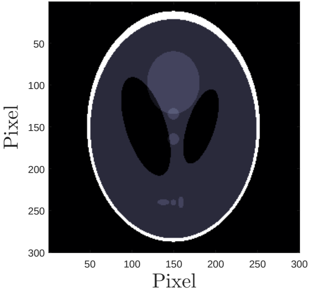
$$\sigma_j^{-1} \xrightarrow[j \to \infty]{} \infty$$

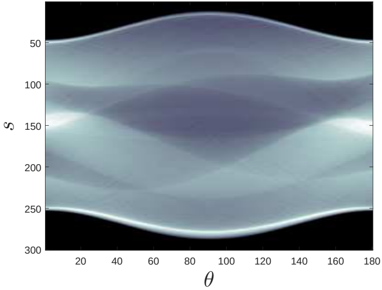
Was zu einer Oszillation in der Lösung führen kann.

Ziel:

Die Oszillation zu dämpfen, was im allgemeinen als **Regularisierung** bezeichnet wird.

Bedingung: die Rekonstruktionsverfahren werden für parallele Strahlengeometrie betrachtet.

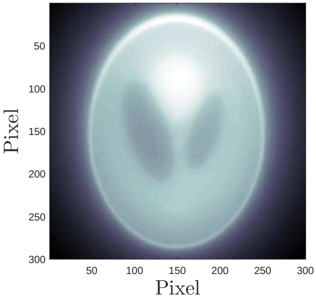




$$\mathcal{R}f(s,\theta) := \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} f(L(s,\theta,t))\mathrm{d}t \tag{7}$$

Die ungefilterte Rückprojektion ist genau der adjungierte Operator zu $\mathcal{R}$

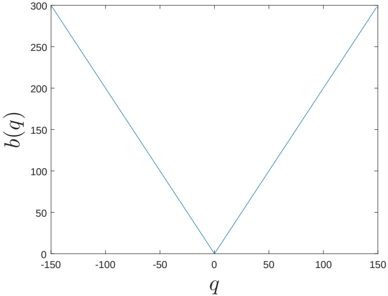
$$\mathcal{R}^* g(x) = \int_0^\pi g(x^T \omega(\theta), \theta) \mathrm{d}\theta$$
$$\mathcal{R}^* g(x_0) = f(x) * h(x) = f(x) * \frac{1}{|x - x_0|} \tag{8}$$

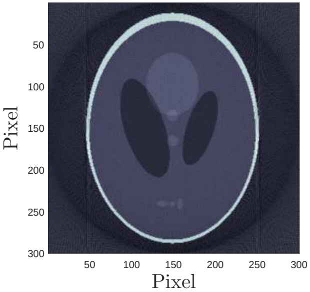


Die Regularisierung erfolgt durch verschiedene Filterfunktionen $h_\xi(q)$.

$$f(x) = \int_0^\pi \left(\int_{-1}^{1} (\ P(q,\theta) h_\xi(q)\ )\, e^{2\pi i q x^T \omega(\theta)}\, \mathrm{d}q \right) \mathrm{d}\theta \qquad (9)$$

Wobei hier $P(q,\theta)$ die Fouriertransformierte der Projektion ist.





Hier fasst man den Operator $\mathcal{R}$ als eine lineare Abbildung

$$\mathcal{R}f = Af = p \tag{10}$$

auf. Die Anzahl der Zeilen von A ist gleich der Anzahl der Projektionen und die Anzahl der Spalten gleicht der Zahl der Diskretisierungsstellen zum Quadrat.

So lässt sich (10) in ein Gleichungssystem umschreiben

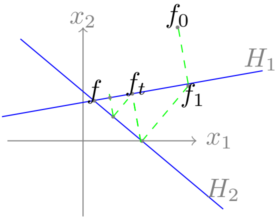
$$\begin{aligned} a_{11}f_1 + \quad \ldots \quad + a_{1m}f_m &= p_1 \\ &\vdots \\ a_{j1}f_1 + \quad \ldots \quad + a_{jm}f_m &= p_j \\ &\vdots \\ a_{n1}f_1 + \quad \ldots \quad + a_{nm}f_m &= p_n. \end{aligned} \tag{11}$$

Hier fasst man den Operator $\mathcal{R}$ als eine lineare Abbildung

$$\mathcal{R}f = Af = p \tag{10}$$

auf. Die Anzahl der Zeilen von A ist gleich der Anzahl der Projektionen und die Anzahl der Spalten gleicht der Zahl der Diskretisierungsstellen zum Quadrat.
So lässt sich (10) in ein Gleichungssystem umschreiben

$$\begin{aligned} a_{11}f_1 + \quad \dots \quad + a_{1m}f_m &= p_1 \\ &\vdots \\ a_{j1}f_1 + \quad \dots \quad + a_{jm}f_m &= p_j \\ &\vdots \\ a_{n1}f_1 + \quad \dots \quad + a_{nm}f_m &= p_n. \end{aligned} \tag{11}$$



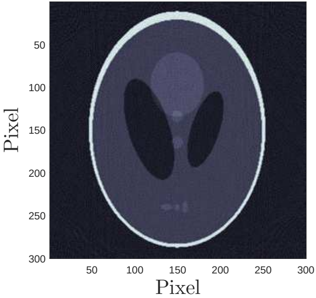
Definition (Randomisierter Kaczmarz-Algorithmus)

Sei $Af = p$ ein konsistentes, lineares Gleichungssystem. Sei $f_0 \in \mathbb{R}^m$ ein beliebiger Startwert. Für $t = 0, 1, 2, ...$ ist der Randomisierte Kaczmarz-Algorithmus definiert als

$$f_{t+1} = f_t + \frac{p_j - \langle a_j, f_t \rangle}{\| a_j \|_2^2} a_j, \tag{12}$$

wobei a_j die j-te Zeile von A ist und p_j die dazugehörige Projektion. j wird zufällig ausgewählt.

Die Regularisierung erfolgt durch die Anzahl der Iterationen, hier mit 3 Iterationen.

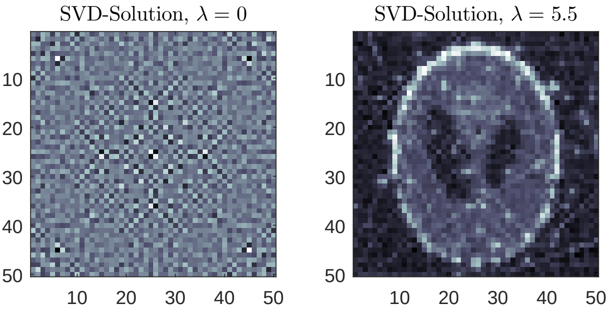


$$\mathcal{R}f = Af = (U\Sigma V^*)f = p \tag{13}$$

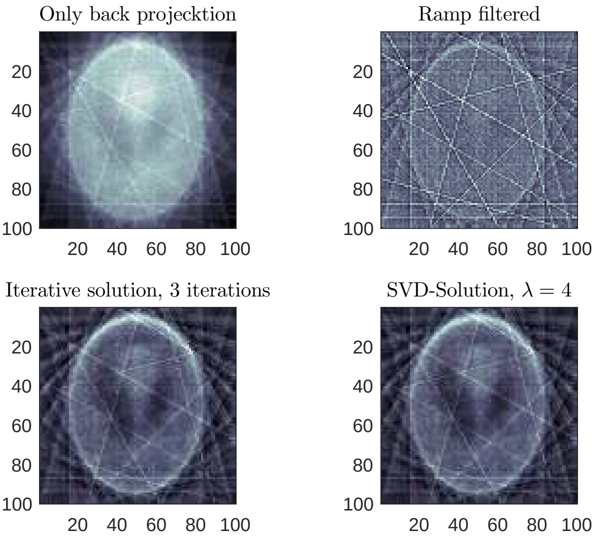
Invertierung von (13) führt zum Ergebnis

$$f = (V\Sigma^+ U^*)p \tag{14}$$

Rechenergebnisse mit der Tikhonov-Regilarisierung $[\Sigma^+]_{ii} = \frac{\sigma_j}{\lambda^2 + \sigma_j^2}$.



3. Rekonstruktionsverfahren: Gegenüberstellung der Verfahren



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.
Für Fragen und Anregungen stehe ich Ihnen gerne zur Verfügung.