



Fachbereich VI Informatik und Medien

Masterarbeit

von

Radmir Gesler

Zur Erlangung
des akademischen Grades
Master of Engineering (M.Eng.)

Im Studiengang
Technische Informatik

Thema:

Lösung zwei dimensionaler Wärmeleitungsgleichung mit PINN

Betreuer: Prof. Dr. Frank Haußer
Betreuer/in extern: —
Gutachter: —

Eingereicht am: 20. August 2019

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	1
1.1. Kurze Zusammenfassung über Wärmeübertragung	1
1.1.1. Wärmeleitung	1
1.1.2. Wärmekonvektion	1
1.1.3. Wärmestrahlung	1
1.2. Herleitung der Wärmeleitungsgleichung	2
1.3. Physics Informed Neural Network	4
1.4. Das Prinzip des Computertomographen	4
1.5. Die Radon Transformation	6
1.5.1. Kleiner Einschub über L^2 -Raum	9
1.5.2. Eigenschaften der Radon Transformation	12
A. Implementierung	18
A.1. Radon Transformation	18
A.2. Ungefilterte Rückprojektion	19
A.3. Gefilterte Rückprojektion	19
A.4. Erzeugung der Systemmatrix von \mathcal{R}	20
A.5. Iterative Rekonstruktion nach Kaczmarz	20
A.6. Rekonstruktion durch SWZ	21
B. Inhalt der CD-ROM	23
B.1. PDF-Dateien	23
B.2. MATLAB Funktionen	23
Quellenverzeichnis	24
Literatur	24
Online-Quellen	24

1. Einführung

1.1. Kurze Zusammenfassung über Wärmeübertragung

Die Beobachtung der Naturvorgänge, die mit dem Transport der Wärme zu tun haben, hat zu einer Feststellung geführt. Und zwar, falls ein Medium zwei Gebiete mit unterschiedlichen Temperaturen besitzt, bewegt sich die Wärme immer aus dem Gebiet mit der höheren Temperatur in das, wo eine niedrigere Temperatur herrscht. Dieser Vorgang der Wärmeübertragung kann auf drei Arten geschehen, durch sogenannte Wärmeleitung, durch Wärmekonvektion und durch Wärmestrahlung. Im folgendem wollen wir diese Begrifflichkeiten zuerst klären.

1.1.1. Wärmeleitung

Man stelle sich vor, wie ein Metallstab an einem Ende aufgeheizt wird. Nach einiger Zeit würde man an dem anderem Ende eine Temperaturerhöhung messen können. Im Umkehrschluss hieße es, dass die Wärme von dem Stabende, wo eine Wärmequelle angelegt wurde, zu dem anderem gewandert ist. Eine physikalische Erklärung dafür könnte so lauten, die Atome, wo eine Wärmequelle angelegt ist, fangen an stärker zu schwingen, also bekommen mehr Energie. Durch die Gitterstruktur im Metall regen die schon stärker schwingende Atome ihre Nachbarn an und so weiter, bis die Atome an dem anderem Ende auch stärker schwingen. Somit wird die Wärmeenergie in Form schwingender Atome durch einen Festkörper transportiert, in solchen Fällen spricht man von *Wärmeleitung*.

1.1.2. Wärmekonvektion

Bei der *Konvektion* handelt es sich um Transport der Stoffmengen. Dieser Prozess findet in festen, flüssigen und gasförmigen Materialzuständen statt. Zum Beispiel bei Flüssigkeiten und Gasen tritt eine Ausgleichsströmung durch den Dichteunterschied zwischen warmen und kühleren Gebieten auf. In solchen Fällen sind die wärmeren Gebiete spezifisch leichter und steigen in die Höhe, wo sie sich dann abkühlen. Der beschriebene Verlauf ist ein Fall für sogenannte *freie Konvektion*. Eine *erzwungene Konvektion* liegt dann vor, wenn eine äußere Einwirkung dem System hinzugefügt wird. Hierfür könnte eine Vulkaneruption als Beispiel dienen.

1.1.3. Wärmestrahlung

Im Vakuum, da wo keine Materie vorhanden ist, kann die Wärmeübertragung weder durch Wärmeleitung noch durch Konvektion stattfinden. Nehmen wir ein Beispiel der Wärmeübertragung von der Sonne zur Erde an. Trotz der Tatsache, dass der

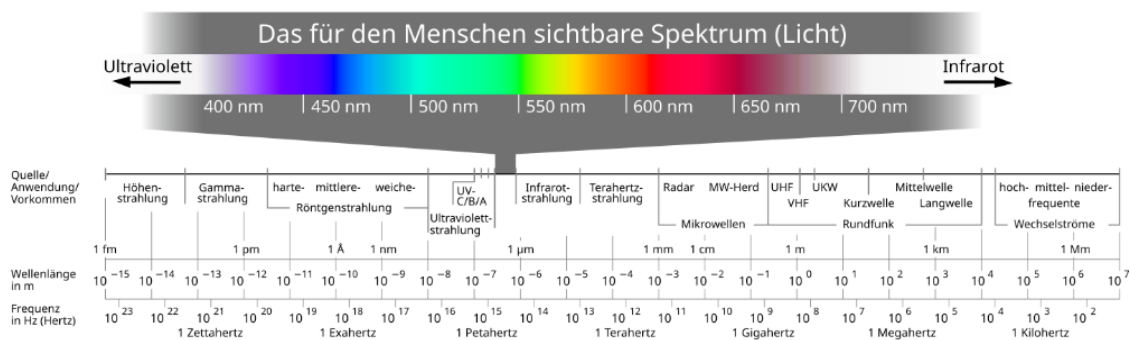


Abbildung 1.1.: Das Spektrum der elektromagnetischen Strahlung. Quelle: Wikipedia.

Raum zwischen der Erde und Sonne (fast) leer von Materie ist, findet die Wärmeübertragung von der Sonne auf die Erde statt. Es ist die *Wärmestrahlung*, die für die Energieübertragung sorgt. Im Allgemeinen werden solche Prozesse durch das Konzept der elektromagnetischen Strahlung erklärt. Fakt ist, dass die elektromagnetische Strahlung kein Medium braucht um sich im Raum auszubreiten. Strahlung an sich kann mittels Wellen mathematisch beschrieben werden. Wellen schwingen, alles was schwingt hat eine Frequenz und kann daher in einem Frequenzspektrum eingeordnet werden. So ist die Wärmestrahlung nur ein Teil des gesamten elektromagnetischen Spektrums, wobei die UV-Strahlung, das sichtbare Spektrum und die Infrarot-Strahlung die Wärmestrahlung ausmachen (Abb.1.1). Tritt die Wärmestrahlung auf Materie, so wird sie absorbiert, wodurch sich die Materie aufwärmt oder gar erhitzt.

1.2. Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Im Allgemeinen beschreibt die Wärmeleitungsgleichung die Ausbreitung der Wärme in einem Medium. Das Medium kann beispielsweise ein räumlicher Gegenstand sein, zum Beispiel eine rechteckige Metallplatte. Man stelle sich vor, die gegebene Platte wird in der Mitte kurz erhitzt. Diesen Prozess kann man mithilfe einer Wärmebildkamera sichtbar machen.

Würde man diese Situation über einen Zeitraum beobachten, so würde man feststellen, dass die Temperatur in der Mitte der Platte sich über die gesamte Fläche verteilt. Und irgendwann kommt es zum Abkühlen, also zur Gleichverteilung der Temperatur in der Platte.

Der beschriebene Prozess kann mithilfe sogenannter Wärmeleitungsgleichung modelliert werden, die wir zunächst herleiten möchten.

Wärmeausbreitung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ das Gebiet auf dem die Verteilung der Temperatur bestimmt werden soll.¹ Die gesuchte Temperaturverteilung auf Ω bezeichnen wir mit u . u ordnet jedem Punkt $x \in \Omega$ eine Zahl $u(x) \in \mathbb{R}$ zu, also $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Zusätzlich wollen wir die Bewegung der Wärme in Ω auffassen, es ist der Wärmefluss j . Für jeden Punkt $x \in \Omega$ gibt der Wärmefluss die Richtung in der die Wärmeenergie transportiert wird an, somit $j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Damit sind nötigen *Variablen* für die Modellierung festgelegt.

Für die Herleitung der Gleichungen der Modellierung wird ein beliebiges Volumen $V \subset \Omega$ betrachtet. In einem homogenen Fall, also es gibt keine Wärmequellen, die in das Volumen V die Wärmeenergie hinein oder heraus transportieren, würde man keinen Wärmestrom am Rand dV detektieren, es gilt also

$$\int_{\partial V} \langle j, v \rangle dS = 0. \quad (1.1)$$

Mit der Gleichung 1.1 wird der Strom j in Richtung jeder Normalen v an Rand dV von V aufsummiert (Abb.1.2). Und mit der Annahme, dass es keine Quellen gibt, erwarten wir eine 0 Summe.

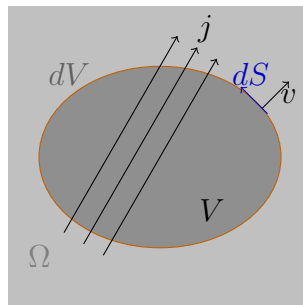


Abbildung 1.2.: Schematische Darstellung der Gleichung 1.1, mit V das Volumen eine Mediums, dV Rand (orange) von V , j Der Wärmestrom durch V , $v \in \mathbb{R}^3$ Normalenvektor an dV und dS Tangente an dV .

An dieser Stelle benötigen wir den *Gauß'schen Satz* um das Oberflächenintegral 1.1 in ein Volumenintegral umzuschreiben.

Definition 1. Der Gauß'sche Satz

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit abschnittsweise glattem Rand $S = \partial V$, der Rand ist orientiert durch äußeres Normaleneinheitsvektorfeld n . Das Vektorfeld F sei stetig differenzierbar auf eine offenen Menge Ω mit $V \in \Omega$. Dann gilt

$$\int_V \langle \nabla, F \rangle dV = \int_{\partial V} \langle F, n \rangle dS. \quad (1.2)$$

¹ Im Allgemeinen gilt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Temporäres DenkZettel

Definition 2. *Kompakte Menge*

Definition 3. *Glatter Rand*

1.3. Physics Informed Neural Network

...

1.4. Das Prinzip des Computertomographen

Das Wort Tomographie setzt sich aus zwei dem Altgriechischen entstammten Wörtern zusammen. $\tau\omicron\mu\eta$ [*tome*], bedeutet Schnitt und $\gamma\rho\alpha\varphi\epsilon\iota\nu$ [*graphien*] bezeichnet Schreiben. Zusammengefasst zu einem Wort *Tomographie* kann es als Schnittbild eines Objekts verstanden werden.

Die CT ist ein bildgebendes Verfahren, das in der medizinischen Radiologie und in der Materialforschung eingesetzt wird. Die Technologie des Verfahrens erlaubt eine zerstörungsfreie Materialuntersuchung. Das ausschlaggebende Wort ist hier *zerstörungsfrei*, damit ist die Untersuchung des inneren Aufbaus eines Objekts, ohne es zu öffnen, gemeint.

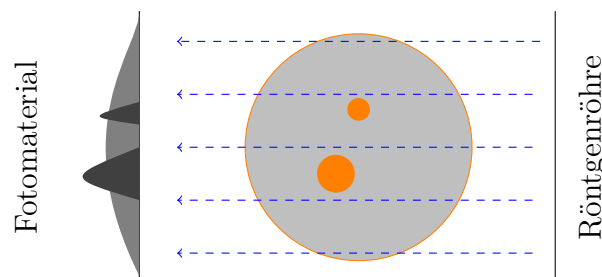


Abbildung 1.3.: Schematischer Aufbau einer Röntgenaufnahme im Draufsicht. Links ist das Schwächungsprofil nach Durchgang der Röntgenstrahlen durch ein Medium mit verschiedenen Dichten zu sehen (mit der Annahme, dass orangene Kreise höhere Dichte haben, als die graue Fläche).

Sicherlich wäre die Computertomographie ohne die Röntgenstrahlung nicht denkbar. Diese verdankt ihren Namen dem deutschen Physiker Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923). Im Jahre 1895 gelang es ihm zum ersten Mal eine elektromagnetische Strahlung zu erzeugen, deren Wellenlänge zwischen 10nm und 1pm lag. Solche kurze Wellenlängen haben nur energiereiche Strahlen. Das erlaubt ihnen die Durchdringung der Materie. Anzumerken ist, dass die Intensität hochenergetischer Strahlen beim Durchgehen der Materie mit der Eindringtiefe abfällt. Dies bedeutet, dass die Röntgenstrahlung beim Auftreffen auf ein Probestück eine höhere Intensität besitzt als beim Austreten. Bei den herkömmlichen Röntgenaufnahmen wurde diese

Eigenschaft direkt ausgenutzt und man hat überlagerte Schatten von Objekten mit verschiedenen Dichten auf das Aufnahmematerial projiziert bekommen. Damit erschienen die dichteren Stellen des Objekts dunkler, weiche entsprechend heller. Für gewisse Situationen geben solche Projektionen genug Information her, jedoch nicht, wenn die räumliche Anordnung des Inneren eines Objekts diskutiert werden soll (Abb.??).

Um das Problem der räumlichen Anordnung der Objekte zu lösen, ist folgendes Vorgehen sehr nützlich. Würde man das Schattenbild aus der Abbildung ?? zurück in die Schnittebene des Objekts projizieren, so wie es in der Abbildung 1.4 (a) gezeigt ist, erhält man etwas Information über die gegebene Objekte. Projiziert man mehrere Schattenbilder, die aus verschiedenen Winkeln aufgenommen worden sind, so erhält man als Summe der Rückprojektionen, die sogenannte Rückprojektion (Abb. 1.4(b)). Später werden wir sehen, welcher mathematischer Aufwand sich hinter dieser Idee verbirgt, bevor ein annehmbares Resultat zustande kommt.

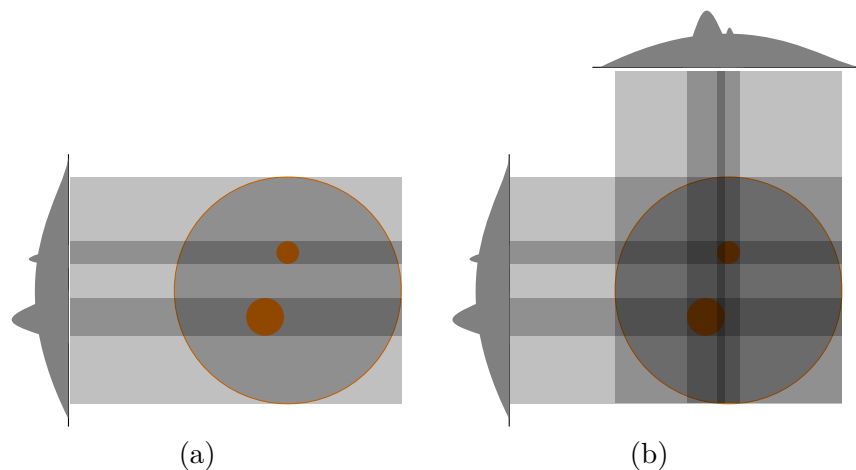


Abbildung 1.4.: Das Prinzip der Bildrekonstruktion aus CT-Daten mit einer Rückprojektion (a) und zwei Rückprojektionen (b).

Ein Pionier der Tomographie, A. M. Cormack², veröffentlichte 1964 eine Arbeit über die mathematische Bestimmung der Dichten eines Objekts. Aus den Projektionsdaten konnte er die innere Dichteverteilung des Objekts bestimmen.

Der erste Prototyp eines CT-Scanners wurde vom G. N. Hounsfield³ im Jahr 1968 entwickelt. Seine Arbeit beruhte auf den Erkenntnissen von M. Cormack. Die Idee, der um das Objekt rotierenden Scanneinheit (Abb. 1.5) findet man hier wieder. Vorerst konnten nur anatomische Präparate vermessen werden. Aber schon im Jahre 1972 entstehen erste klinische Untersuchungen mit einem Schädelscanner durch Hounsfield und Ambrose. 1973 werden Berichte über die Weichteildiagnostik des Gehirns mithilfe eines CT-Scanners veröffentlicht. Hinsichtlich der Nützlichkeit des CT-Verfahrens in der Medizin, wurden A. M. Cormack und G. N. Hounsfield im Jahre 1979 mit dem Nobelpreis für Medizin ausgezeichnet.

In darauf folgenden Jahren entstand eine ganze Reihe von Generationen des CT-Scanners. Die Hauptunterschiede bestehen in der Komposition der Scanneinheit und

² Allan M. Cormack (1924-1998) südafrikanischer Physiker.

³ Godfrey N. Hounsfield (1919 - 2004) englischer Ingenieur.

dessen Technik, siehe auch [2, Kap. 3]. Heutzutage hat sich die dritte Generation am meisten durchgesetzt. Der prinzipielle Grundaufbau (Abb. 1.5) dieses Scanners besteht darin, dass die Röntgenröhre und Detektor fest auf einem Ringkörper, einander gegenüber installiert sind. In der Mitte des Rings ist ein fest installierter Probetisch, sodass die Scanneinheit um diesen rotieren kann. Mittels dieser Konstruktion ist es möglich *tomographische* Bilddaten aus allen Positionen um die Längsachse des Objekts aufzunehmen. Die oben beschriebene Rückprojektion aller tomographischen

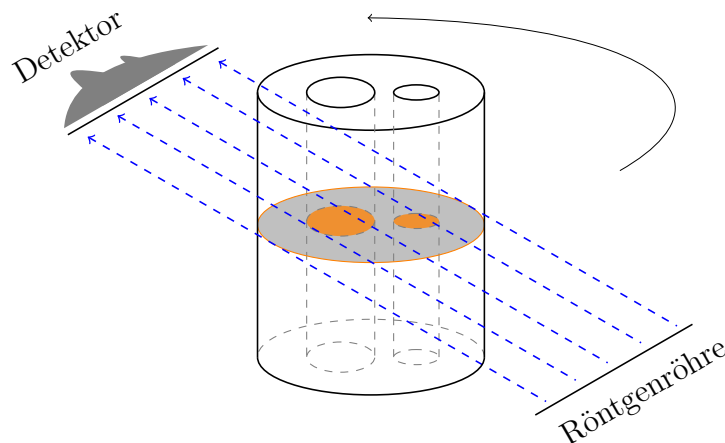


Abbildung 1.5.: Prinzipieller Aufbau eines CT-Scanners der dritten Generation.

Daten (Projektionen) erzeugt ein Schnittbild. Erzeugt man mehrere Schnittbilder entlang der Längsachse des Objekts, so kann man diese der Reihe nach aufstellen und mithilfe programmierter technischer Werkzeuge ein dreidimensionales Bild dieses Objekts gewinnen (Abb. 1.6) .

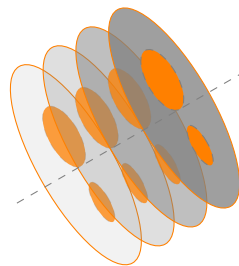


Abbildung 1.6.: Das Schichtmodell eines Objekts als Grundlage zur dreidimensionalen Rekonstruktion.

Im Folgenden gehen wir mehr auf die mathematisch-physikalischen Gegebenheiten der oben beschriebenen Situation ein.

1.5. Die Radon Transformation

Das Verständnis des mathematischen Problems der Bildrekonstruktion in der Computertomographie verlangt zunächst das Verständnis der Entstehung der tomogra-

phischen Bilddaten. Die Entstehung solcher Daten kann mithilfe eines mathematischen Modells nachvollzogen werden. Bekanntlich baut man das mathematische Modell auf physikalischen Annahmen auf. Die Abbildung 1.7 soll in diesem Fall als physikalisches Ausgangsmodell dienen. Wir nehmen an, dass der graue Kreis eine homogene Dichteverteilung besitzt. Unter weiteren Annahme sollen die Röntgenstrahlen sich geradlinig ohne Streuung in Richtung des Detektors ausbreiten.

Sei nun $f(x, y)$ die gesuchte Dichtefunktion, die auf einem Einheitskreis $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ definiert ist. Dass f auf einem Kreis liegen soll, folgern wir aus der physikalischen Situation. Das Objekt wird aus einem bestimmten Radius um den Mittelpunkt der Scanneinheit gescannt, daher möchten wir, dass ein Objekt in die CT-Scanneinheit passt, gegebenenfalls muss die Scanneinheit skaliert werden.

Die blau gestrichelte Linie in Abbildung 1.7 stelle einen Röntgenstrahl dar. Wir möchten das Verhalten der Intensität entlang der Strahllinie an den Punkten L_0 und $L_0 + \Delta L$ beobachten. Wie schon erwähnt wurde, nimmt die Intensität I der Röntgenstrahlen mit der Eindringtiefe in das Objekt ab. Das Verhalten ist in der Physik unter dem Namen *Lambert-Beer'sches Gesetz* bekannt und besagt:

Die Intensitätsabnahme der Strahlung ist proportional zur Intensität. Der Proportionalitätsfaktor hängt von der Art der durchdrungenen Materie ab.

$$I(L_0 + \Delta L) - I(L_0) = -\alpha I(L_0). \quad (1.3)$$

Der Proportionalitätsfaktor α ist durch das Produkt der Dichteverteilung entlang des Strahls, also $f(L)$ und seiner zurückgelegten Strecke $\|\Delta L\|$ gegeben. Hier wird angenommen, dass $f(L)$ die Eigenschaften des Materials in sich trägt. Insgesamt ergibt sich

$$I(L_0 + \Delta L) - I(L_0) = -f(L) \|\Delta L\| I(L_0). \quad (1.4)$$

Nimmt man an, dass die Gleichung (1.4) asymptotisch im Sinne $\|\Delta L\| \rightarrow 0$ verstanden werden kann, so kann die linke Seite von (1.4) als Ableitung von I nach L interpretiert werden und man schreibt:

$$\lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{I(L_0 + \Delta L) - I(L_0)}{\|\Delta L\|} = \frac{\partial I}{\partial L} = -f(L)I(L_0). \quad (1.5)$$

Mit 1.5 liegt eine lineare Differentialgleichung (DGL) erster Ordnung vor. Diese DGL kann mithilfe einfacher analytischer Werkzeuge, wie Variablenseparation gelöst werden. Nach der Separation der Variablen in (1.5) und anschließender Integration bekommt man nun folgenden Ausdruck

$$\ln\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = - \int_{L_0}^{L_1} f(L) dL. \quad (1.6)$$

Durch das Exponentieren von (1.6) gelangt man zu dem *Lambert-Beer'schen Gesetz* $I(L_1) = I_0 e^{-\int_{L_0}^{L_1} f(L) dL}$. Jedoch für die Zwecke der Computertomographie interessiert man sich für etwas von (1.6) abgewandelte Darstellung

$$\ln\left(\frac{I_0}{I_1}\right) = \int_{L_0}^{L_1} f(L) dL. \quad (1.7)$$

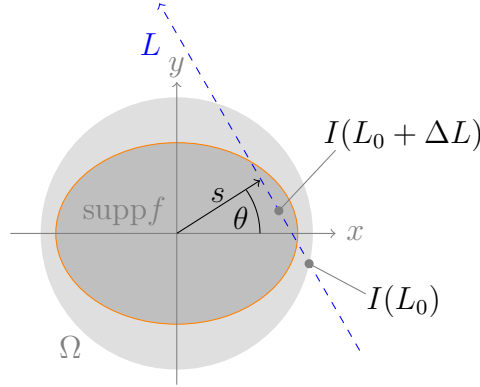


Abbildung 1.7.: Intensitätsänderung der Röntgenstrahlung beim Passieren eines homogenen Objekts.

Die rechte Seite in (1.7) liefert einen Summenwert von f entlang der Geraden L (Abb. 1.8), die wie folgt parametrisiert werden kann:

$$\begin{aligned} L(s, \theta, t) &= s \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}; \quad \theta \in [0, \pi]. \\ &= s\omega(\theta) + t\omega^\perp(\theta) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Betrachtet man alle Geraden, die den Einheitskreis schneiden, dann ergibt sich folgende Menge

$$G = \{L(s, \theta, t) \mid |s| \leq 1, \theta \in [0, \pi], t \in [-\gamma(s), \gamma(s)]\}. \quad (1.9)$$

Wobei $\gamma(s)$ den Parameter t für (1.8) festlegt und folgendermaßen definiert werden kann

$$\gamma(s) = \begin{cases} \sqrt{1-s^2} & : |s| \leq 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}. \quad (1.10)$$

Die Gleichung (1.10) liefert nun die Integrationsgrenzen für (1.7). Da die Werte von $\pm\gamma(s)$ genau die Schnittpunkte von L mit Ω liefern und $\text{supp } f^4 \subseteq \Omega$, heißt es insgesamt, dass nur die Werte von $L \subset \text{supp } f$ bei der Integration von (1.7) berücksichtigt werden.

Kehren wir zur Gleichung (1.7) zurück und betrachten die Abbildung 1.8, werden wir feststellen, dass die Funktion f über den Parameter t integriert werden muss. Hierzu bedarf es einer Variablentransformation:

$$|(J(L))| = \left| \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \right| = 1$$

und

$$dL = \det(J(L))dt.$$

⁴ Mit $\text{supp } f$ (Support) ist der Träger einer Funktion f gemeint. Def.: $\text{supp } f := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$

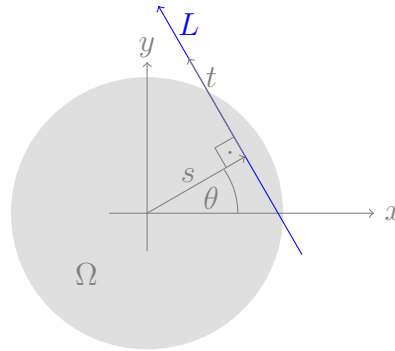


Abbildung 1.8.: Parametrisierung des Strahls L auf dem Gebiet Ω .

Mit den obigen Abmachungen haben wir nun alles Nötige in der Hand, um die Radon⁵ Transformation angeben zu können.

Definition 4. Sei nun $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, dann ist ihre Radon Transformation durch

$$\mathcal{R}f(s, \theta) := \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} f(s\omega(\theta) + t\omega^\perp(\theta)) dt \quad (1.12)$$

definiert. Hier ist $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Bemerkung 1. \mathcal{R} wird als Integraloperator oder einfach als Operator bezeichnet.

Die Gleichung (1.12) trägt das Wesen der Computertomographie in sich und gehört in den Bereich der Integraltransformationen. In der Tat ist man aber an der Inversion von \mathcal{R} interessiert. Das wird klarer, wenn man (1.12) etwas anders auffasst:

$$p(s, \theta) = \mathcal{R}f(s, \theta). \quad (1.13)$$

Somit stellt $p(s, \theta)$ in (1.13) genau die Projektion einer unbekannten Dichteverteilung entlang eines Röntgenstrahls $L(s, \theta)$ dar. Da die Projektionen als Messwerte beim CT-Verfahren entstehen, möchte man f folgendermaßen wiedergewinnen

$$f(x) = \mathcal{R}^{-1}p(x). \quad (1.14)$$

Jedoch offenbaren sich einige mathematische Hürden bei der Inversion von (1.12), was die Rekonstruktion von f aus den Projektionsdaten schwierig macht. Um die dahinterstehende Problematik besser verstehen zu können, untersuchen wir zunächst die Eigenschaften von (1.12).

1.5.1. Kleiner Einschub über L^2 -Raum

Um den Operator \mathcal{R} untersuchen zu können, sollte man wissen auf welchen Räumen er operiert. Dieses Wissen erlaubt uns Aussagen über die Stetigkeit, Kompaktheit

⁵ Johann Karl August Radon (1887-1956) österreichischer Mathematiker.

und auch über die Singulärwertzerlegung (SWZ) von \mathcal{R} zu treffen. Besonders wichtig ist die SWZ, denn anhand dieser ergibt sich eine Möglichkeit den Operator \mathcal{R} zu invertieren. Zudem wollen wir im nächsten Kapitel die Schlechtgestelltheit des computertomographischen Problems diskutieren, welche die Eigenschaften der SWZ benutzt.

In Bezug auf das hier vorgestellte Rekonstruktionsproblem der Computertomographie betrachten wir Funktionen auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Wir setzen voraus, dass die Funktionen auf Ω integrierbar sind. Wie dieser Sachverhalt zu verstehen ist, wollen wir kurz und grob andeuten.

Zunächst klären wir den Begriff der Integrierbarkeit einer Funktion im Sinne von Lebesgue⁶. Das Lebesgue-Integral wird für Funktionen auf einem geeigneten Maßraum definiert. Ein Maßraum ist durch ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ gegeben.

Eine sogenannte σ -Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ auf Ω ist ein Mengensystem bestehend aus Teilmengen von Ω . \mathcal{A} besitzt folgende Eigenschaften: (i). Jede endliche oder abzählbar unendliche Vereinigung oder jeder Durchschnitt der Elemente aus \mathcal{A} liegen wieder in \mathcal{A} , sowie Ω und \emptyset . (ii). Die Komplemente der Elemente aus \mathcal{A} , also $\forall A \in \mathcal{A} : \Omega \setminus A = A^C \in \mathcal{A}$, liegen auch in \mathcal{A} .

Nun suchen wir eine Funktion, die allen Elementen A aus \mathcal{A} eine positive Zahl zuordnet, also $\lambda(A) \in [0, \infty]$. Somit beschreibt λ das Maß einer Menge in \mathcal{A} . Im Falle $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ordnet λ den Flächeninhalt einer Teilmenge von Ω zu. Des Weiteren hat λ folgende Eigenschaften: (i): $\lambda(\emptyset) = 0$ und (ii): die σ -Additivität, das heißt für paarweise disjunkte Mengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathcal{A} gilt

$$\lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Nun gilt per Definition *messbarer Abbildungen* zwischen zwei Maßräumen, dass die Urbilder messbarer Mengen messbar sind. Das heißt $f : (X_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{A}_2)$ ist messbar, wenn für alle $A_{2j} \in \mathcal{A}_2$ gilt $f^{-1}(A_{2j}) \in \mathcal{A}_1$.

Um den Begriff der Integrierbarkeit im Sinne von Lebesgue einführen zu können, fehlt uns noch der Begriff der Borel⁷- σ -Algebra. Dazu benutzen wir für uns relevante mengen \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 . Das ist insofern klar, weil die gesuchten Dichtefunktionen in einem Punkt $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ einen skalaren Wert $f(x) \in \mathbb{R}$ liefern. Noch legen wir fest, dass die Werte der Funktionen auf Ω immer positiv sind, also $f(x) \in \mathbb{R}^+$, denn es gibt keine negativen Dichten. Betrachten wir den topologischen Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, hier stellt \mathcal{T} ⁸ ein System von offenen Mengen von \mathbb{R} dar, dann heißt $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die von \mathcal{T} erzeugte σ -Algebra auf \mathbb{R} , die Borel- σ -Algebra. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist die kleinste Algebra, die \mathcal{T} enthält. Das bringt uns ein Vorteil bezüglich der Messbarkeit, denn somit erhalten wir die größtmögliche Menge messbarer Mengen von \mathbb{R} . Für \mathbb{R}^2 gilt das Obere auch.

⁶Henri Léon Lebesgue (1875-1941) französischer Mathematiker.

⁷Émile Borel (1871-1956) französischer Mathematiker.

⁸Sei X eine Menge, dann ist $\mathcal{T} \subset 2^X$ eine Topologie auf X , falls folgendes gilt:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- (ii) $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$.
- (iii) $\{A_i\}_{i \in I} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

So nennt man das Paar (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Alle Elemente von \mathcal{T} sind offene Mengen.

Im letzten Schritt definieren wir die sogenannten positiven Treppenfunktionen $h^+ : (\Omega, \mathcal{B}(\Omega)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, die endlich viele Werte $c_j \in \mathbb{R}_0^+$, $j \in [1, n]$, $n \in \mathbb{N}$ auf Ω annehmen. Auf diese Weise ist es möglich das Integral über h^+ folgendermaßen anzugeben:

$$\mathcal{I}(h^+) = \sum_{j=1}^n c_j \lambda(A_j), \quad \text{für } A_j \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Jetzt können wir das Lebesgue-Integral einer messbaren Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ definieren, indem wir die Funktion f ‘von unten’ mit Treppenfunktionen approximieren:

Definition 5. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ messbar, dann ist sie integrierbar im Sinne von Lebesgue, wenn gilt

$$\int_{\Omega} f(x) = \sup \{ \mathcal{I}(h^+) \mid \forall x \in \Omega : h^+(x) \leq f(x) \} < \infty.$$

Bemerkung 2. Im Falle einer Lebesgue-Integrierbarkeit spricht man meistens davon, dass eine Funktion integrierbar ist. Streng genommen müsste man das Lebesgue-Integral für beliebige Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit einer geeigneten Fortsetzung einführen, um dem Begriff der Integrierbarkeit gerecht zu werden. Aber die Definition 5 reicht uns, um das Prinzip der Integration verstanden zu haben.

Nun sind wir im Stande den Raum der quadratintegrierbarer Funktionen folgendermaßen zu definieren:

$$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \lambda) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist integrierbar und } \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \leq \infty \}. \quad (1.15)$$

Versehen wir den Raum $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ mit einer Norm

$$\|f\|_2 := \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \Omega, \quad (1.16)$$

so erhalten wir den Raum $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ (einfach $L^2(\Omega)$), also den *Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen*.

Im Allgemeinen ist $L^2(\Omega)$ ein unendlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen, der bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm vollständig ist.

Kehren wir zurück, zu den gesuchten Funktionen auf einer Kreisscheibe Ω , dann sei das Urbild des Operators \mathcal{R} genau die Menge $L^2(\Omega)$. Das Bild von \mathcal{R} liegt jedoch auf einem halben Zylinder $Z := [0, \pi] \times [-1, 1]$. Der Grund hierfür ist ein technischer, denn bei Projektionen über den ganzen Durchmesser einer Kreisfläche auf einem Intervall von 0 bis 2π , entstehen redundante Daten, also reichen die Projektionen von 0 bis π .

Des Weiteren wissen wir an dieser Stelle noch nicht wohin \mathcal{R} den Raum $L^2(\Omega)$ abbildet. Aber wie oben schon erwähnt wurde, wollen wir später die SWZ von \mathcal{R}

angeben, dafür muss ein *adjungierter* Operator \mathcal{R}^* zu \mathcal{R} existieren⁹. Um das zu bewerkstelligen, muss man fordern, dass der Bildraum sowie der Kern von \mathcal{R} Orthogonalbasen besitzen sollen, was auch einen Skalarprodukt impliziert. Hieraus kann eine Vermutung aufgestellt werden, dass $\mathcal{R} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(Z)$ abbilden soll, weil eben L^2 Räume der Forderung gerecht sind. Somit erhalten wir insgesamt

$$\mathcal{R} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(Z). \quad (1.17)$$

Mit (1.17) kann man die Eigenschaften des Operators \mathcal{R} gut untersuchen.

1.5.2. Eigenschaften der Radon Transformation

In diesem Kapitel sollen einige Eigenschaften des Operators \mathcal{R} erarbeitet werden. Anhand der Eigenschaften von \mathcal{R} kann die Problematik der Gleichung (1.14) besser verstanden werden. Zunächst zeigen wir die Linearität von \mathcal{R} .

Linearität von \mathcal{R}

\mathcal{R} ist linear, denn für $f, g \in L^2(\Omega)$ beliebig, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\alpha f + \beta g) &\stackrel{\text{Def.4}}{=} \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} (\alpha f + \beta g) dt \\ &\stackrel{\text{Lin.}}{=} \alpha \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} f dt + \beta \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} g dt \\ &= \alpha \mathcal{R}f + \beta \mathcal{R}g. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Der Übersichtlichkeit halber wurden in (1.18) die Argumente weggelassen, also für alle $f \in \Omega$ gilt $f = f(s\omega(\theta) + t\omega^\perp(\theta))$.

Stetigkeit von \mathcal{R}

Mit dem obigen Ergebnis kann man die Theorie der linearen Operatoren in normierten Räumen auf \mathcal{R} anwenden. Nun wollen wir die Stetigkeit von \mathcal{R} überprüfen.

Lemma 1. *Der Operator $\mathcal{R} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(Z)$ ist stetig.*

Beweis. Das Ziel ist zu zeigen, dass das Bild von \mathcal{R} beschränkt ist. Demnach ist jeder linearer beschränkter Operator stetig (s.a. [1, S.82]). Wir führen den Beweis in zwei Schritten durch. Zuerst geben wir eine Abschätzung für $|\mathcal{R}f(s, \theta)|^2$ und dann für $\|\mathcal{R}\|_2$.

⁹ Der Grund weshalb \mathcal{R}^* existieren muss ist folgender: Es kann nicht vorausgesetzt werden, dass \mathcal{R} selbstadjungiert ist, wonach der *Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren* für \mathcal{R} nicht gelten würde. Aber für $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$ funktioniert der Satz schon, da $\mathcal{R}\mathcal{R}^* = (\mathcal{R}\mathcal{R}^*)^* = \mathcal{R}^*\mathcal{R}$ gelte.

- i. Sei nun $f \in L^2(\Omega)$ beliebig, dann gilt mit Benutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für Integrale

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{R}f(s, \theta)|^2 &= \left| \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} f(s\omega(\theta) + t\omega^\perp(\theta)) dt \right|^2 \\
 &\leq \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} 1 dt \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} |f(s\omega(\theta) + t\omega^\perp(\theta))|^2 dt \\
 &= 2\gamma(s) \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} |f(s\omega(\theta) + t\omega^\perp(\theta))|^2 dt.
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Aus der Gleichung (1.10) wissen wir, dass $\gamma(s) \leq 1$ ist, damit können wir (1.20) weiter abschätzen

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{R}f(s, \theta)|^2 &\leq 2\gamma(s) \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} |f(s\omega(\theta) + t\omega^\perp(\theta))|^2 dt \\
 &\stackrel{(1.10)}{\leq} 2 \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} |f(s\omega(\theta) + t\omega^\perp(\theta))|^2 dt.
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

- ii. Mit (1.20) lässt sich das Skalarprodukt $\|\mathcal{R}f(s, \theta)\|_{L^2(Z)}^2$ abschätzen:

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{R}f(s, \theta)\|_{L^2(Z)}^2 &= \int_0^\pi \int_{-1}^1 |\mathcal{R}f(s, \theta)|^2 ds d\theta \\
 &\stackrel{(1.20)}{\leq} 2 \int_0^\pi \int_{-1}^1 \left(\int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} |f(s\omega(\theta) + t\omega^\perp(\theta))|^2 dt \right) ds d\theta \\
 &= 2 \int_0^\pi \left(\int_{-1}^1 \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} |f(s\omega(\theta) + t\omega^\perp(\theta))|^2 dt ds \right) d\theta \\
 &= 2 \int_0^\pi \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx \right) d\theta \\
 &= 2\pi \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

In der vorletzten Zeile von (1.21) wurde $s\omega(\theta) + t\omega^\perp(\theta) = x$ für ein festes θ gesetzt. Damit wurde der Integrationsbereich über t und s zu einem über x gefasst, um insgesamt über ganz Ω integrieren zu können.

Nach dem Wurzelziehen aus (1.21), kommt man zur Erkenntnis, dass \mathcal{R} beschränkt ist, nämlich $\|\mathcal{R}\|_2 \leq \sqrt{2\pi}$. Da \mathcal{R} linear und beschränkt ist, dürfen wir auf seine Stetigkeit schließen. \square

Ist \mathcal{R} linear und stetig so schreiben wir $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(Z))^{10}$.

Adjungierter Operator \mathcal{R}

Da \mathcal{R} stetig von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(Z)$ abbildet, existiert zu \mathcal{R} ein stetiger adjungierter Operator \mathcal{R}^* , d.h.

$$\forall f \in L^2(\Omega) \wedge g \in L^2(Z) : \langle \mathcal{R}f, g \rangle_{L^2(Z)} = \langle f, \mathcal{R}^*g \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (1.22)$$

Lemma 2. Der adjungierte Operator \mathcal{R}^* zu \mathcal{R} ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^* : L^2(Z) &\rightarrow L^2(\Omega) \\ \mathcal{R}^*g(x) &= \int_0^\pi g(x^T \omega(\theta), \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Bemerkung 3. Bevor wir (1.22) für (1.23) zeigen, wollen wir die letztere Gleichung etwas besser in unsere Vorstellung einprägen. Sei dazu die Abb.1.9 betrachtet. Wir wählen einen beliebigen Punkt $x = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T \in \Omega$ und einen Wert $s \in [-1, 1]$. So existiert folgende Beziehung zwischen x und s

$$x^T \omega(\theta) = (s \cos(\theta), s \sin(\theta)) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = s(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = s. \quad (1.24)$$

Wobei wir gemäß der Abb.1.9 für $x = (s \cos(\theta), s \sin(\theta))^T$ schreiben dürfen.

(1.23) stellt eine Ungefilterte Rückprojektion dar. Man kann sich das folgendermaßen vorstellen. Für ein festes x in der Ebene werden entsprechende Projektionen an der Stelle s und Winkel θ zurück auf den Punkt x projiziert. Nach der Addition der Projektionen auf x über alle Winkel, bekommt man den Wert der ungefilterten Rückprojektion an dem Punkt x .

Beweis von Lemma 2. Seien $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(Z)$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}f, g \rangle_{L^2(Z)} &= \int_Z (\mathcal{R}f(s, \theta)) g(x^T \omega(\theta), \theta) ds d\theta \\ &\stackrel{(1.12)}{=} \int_0^\pi \int_{-1}^1 \left(\int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} f(s\omega(\theta) + t\omega^\perp(\theta)) dt \right) g(x^T \omega(\theta), \theta) ds d\theta. \end{aligned} \quad (1.25)$$

An dieser Stelle machen wir eine Substitution in der rechten Seite von (1.25). Hier nutzen wir (1.24) aus und schreiben $x^T \omega(\theta) = \omega^T(\theta)x = s$. Dann bekommt man $g(x^T \omega(\theta), \theta) = g(\omega^T(\theta)x, \theta)$ und wir wollen die Funktion f im Punkt x betrachten,

¹⁰ $\mathcal{L}(X, Y)$: Raum der stetigen linearen Abbildungen zwischen normierten Räumen X und Y .

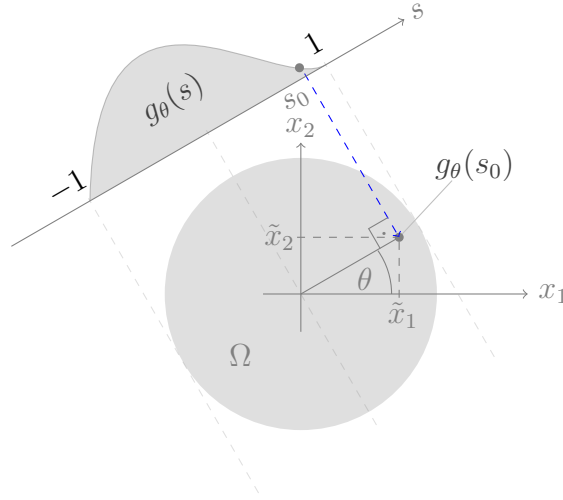


Abbildung 1.9.: Ein Beispiel der Rückprojektion eines Projektionswerts $g_\theta(s_0)$ auf einen Punkt $x \in \Omega$. Mit $g_\theta(s)$ ist hier eine Projektion bei einem festen Winkel θ bezeichnet, also $g_\theta(s) = g(s, \theta)$.

also $f(s\omega(\theta) + t\omega^\perp(\theta)) = f(x)$. Somit erhalten wir einen Integrationsbereich über Ω . Nun führen wir (1.26) weiter:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{R}f, g \rangle_{L^2(Z)} &= \int_0^\pi \int_{-1}^1 \left(\int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} f(s\omega(\theta) + t\omega^\perp(\theta)) dt \right) g(x^T\omega(\theta), \theta) ds d\theta \\
 &\stackrel{\text{Subst.}}{=} \int_0^\pi \left(\int_{-1}^1 \int_{-\gamma(s)}^{\gamma(s)} f(x) g(\omega^T(\theta)x, \theta) dt ds \right) d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_\Omega f(x) g(\omega^T(\theta)x, \theta) dx d\theta \\
 &= \int_\Omega f(x) \left(\int_0^\pi g(\omega^T(\theta)x, \theta) d\theta \right) dx \\
 &= \langle f, \mathcal{R}^*g \rangle_{L^2(\Omega)}.
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Somit ist \mathcal{R}^* adjungierter Operator der Radon Transformation und ist nach Satz von Schauder auch kompakt, wenn \mathcal{R} kompakt ist. ([3, S. 185]). \square

Kompaktheit von \mathcal{R}

Um die Kompaktheit von \mathcal{R} zeigen zu können, werden wir an dieser Stelle einen Umweg einschlagen. Dafür ziehen wir ein Ergebnis aus [4, S. 45] heran. Es handelt sich um einen zu \mathcal{R} adjungierten Operator $\tilde{\mathcal{R}}^*$ folgender Gestalt:

$$\tilde{\mathcal{R}}^* : L^2(Z, \frac{1}{\gamma(s)}) \rightarrow L^2(\Omega). \tag{1.27}$$

Hier wurde $\gamma(s)$ im Sinne der Gleichung (1.10) benutzt. Und der Raum $L^2(Z, \frac{1}{\gamma(s)})$ ist mit dem folgenden Skalarprodukt versehen

$$\langle g, f \rangle = \int_Z g \bar{f} \frac{1}{\gamma(s)} ds d\theta. \quad (1.28)$$

Wir können festhalten dass der Operator $\mathcal{R}' : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(Z, \frac{1}{\gamma(s)})$ kompakt ist¹¹. Die Kompaktheit folgt eben aus der SWZ von \mathcal{R}' . Denn die Singulärwerte von \mathcal{R}'

$$\sigma_j = 2\sqrt{\frac{\pi}{j+1}}, \quad j \in \mathbb{N}$$

bilden eine Nullfolge, was nach einer längeren Rechnung aus [4, S. 43] folgt. Also schreiben wir $\mathcal{R}' \in \mathcal{K}(L^2(\Omega), L^2(Z, \frac{1}{\gamma(s)}))$ ¹².

Wir veranschaulichen die entstandene Situation in einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Omega) & \xrightarrow{\mathcal{R}} & L^2(Z) \\ & \nwarrow \mathcal{R}' & \nearrow \text{Id} \\ & L^2(Z, \frac{1}{\gamma(s)}) & \end{array} \quad (1.29)$$

und stellen fest, dass \mathcal{R} als eine Komposition zweier Abbildungen darstellbar ist. Hier bedeutet Id die Identität auf $L^2(Z)$ dar. Der Unterschied zwischen $L^2(Z)$ und $L^2(Z, \frac{1}{\gamma(s)})$ besteht nur in der Definition des Skalarprodukts auf diesen beiden Räumen.

Insgesamt würde es heißen, dass wir die Komposition $\text{Id} \circ \mathcal{R}' = \mathcal{R}$ bezüglich der Kompaktheit beurteilen müssen. Dafür wird uns ein nützlicher Satz aus [4, S. 27] gute Dienste leisten (ohne Beweis) :

Satz 1. *Seien X, Y und Z normierte Räume. Falls $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $B \in \mathcal{K}(Y, Z)$ oder $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ und $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$, dann gilt $BA \in \mathcal{K}(X, Z)$.*

Somit wollen wir zeigen, dass der Operator $\text{Id} : L^2(Z, \frac{1}{\gamma(s)}) \rightarrow L^2(Z)$ beschränkt ist, und somit auch stetig ist. Danach könnten wir den Satz 1 benutzen, um die Kompaktheit von \mathcal{R} zu zeigen.

Sei nun $g(s, \theta) \in L^2(Z)$ beliebig, dann können wir folgende Abschätzung durchführen:

$$\begin{aligned} \|\text{Id } g(s, \theta)\|_{L^2(Z)}^2 &= \int_Z |\mathcal{R}f(s, \theta)|^2 ds d\theta \\ &\stackrel{(1.28)}{\leq} \int_Z |\mathcal{R}f(s, \theta)|^2 \frac{1}{\gamma(s)} ds d\theta \\ &= \|g(s, \theta)\|_{L^2(Z, \frac{1}{\gamma(s)})}^2. \end{aligned} \quad (1.30)$$

¹¹Prinzipiell sind \mathcal{R} und \mathcal{R}' gleich, es ist derselbe Operator, der aber $L^2(\Omega)$ in einen anderen Raum abbildet. Die Bezeichnung \mathcal{R}' führen wir ein, um uns Verwechslungen zu ersparen.

¹² $\mathcal{K}(X, Y) = \{A \in \mathcal{L}(X, Y) \mid A \text{ ist kompakt} \}$

Die letzte Abschätzung beruht auf der Kenntnis, dass $\gamma(s) \leq 1$ für alle $s \in (-1, 1)$, somit aber $\frac{1}{\gamma(s)} \geq 1$ gilt. Nun haben wir gezeigt, dass $\| \text{Id} \|_2 \leq 1$ beschränkt und demnach stetig ist. Also gilt $\text{Id} \in \mathcal{L}(L^2(Z, \frac{1}{\gamma(s)}), L^2(Z))$. Dieses Ergebnis ist für uns ausreichend um den Satz 1 benutzen zu können, d.h

$$\mathcal{R} \stackrel{(1.29)}{=} \text{Id} \circ \mathcal{R}' \stackrel{\text{Satz 1}}{\implies} \mathcal{R} \in \mathcal{K}(L^2(\Omega), L^2(Z)). \quad (1.31)$$

Nun sind wir am Ende dieses Kapitels angelangt und nach einigen Untersuchungen können wir festhalten, dass der lineare stetige Operator $\mathcal{R} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(Z)$ kompakt ist und einen kompakten adjungierten Operator \mathcal{R}^* hat. Diese Ergebnisse spielen eine zentrale Rolle bei der Singulärwertzerlegung (SWZ) eines kompakten Operators und beleuchten das Problem der Invertierung solcher Operatoren sehr gut.

Die Singulärwertzerlegung (SWZ) von \mathcal{R}

Im Folgenden wird die allgemeine Form der SWZ des Operators \mathcal{R} angegeben, eine konkrete wird in [4, Kap. 2.5] hergeleitet, jedoch aber nur für \mathcal{R}' . Um zu SWZ von \mathcal{R} zu gelangen, ermittelt man zuerst die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathcal{R}\mathcal{R}^* : L^2(Z) \rightarrow L^2(Z)$, die als Komposition kompakter Operatoren kompakt ist. Demnach gilt der *Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren* [4, S. 30] und man bekommt

$$\mathcal{R}\mathcal{R}^*g = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle g, v_j \rangle_{L^2(Z)} v_j, \quad \text{für alle } g \in L^2(Z). \quad (1.32)$$

Hier bildet $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ eine Folge mit der absteigenden Anordnung der Eigenwerte $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots > 0$ und $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in L^2(Z)$ ein Orthonormalsystem in $\text{Kern}(\mathcal{R})^\perp$. Eine wichtige Tatsache ist, dass die Folge $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ entweder abbricht oder gegen Null konvergiert.

Die Singulärwerte und das Orthonormalsystem $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ des Bildes von \mathcal{R} bekommen wir aus

$$\begin{aligned} (i). \quad \sigma_j &:= \sqrt{\lambda_j} \\ (ii). \quad u_j &:= \sigma_j^{-1} \mathcal{R}v_j, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Mit den Ergebnissen aus (1.32) und (1.33) kann nun die SWZ der Radon Transformation angegeben werden

$$\mathcal{R}f = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \langle f, v_j \rangle_{L^2(\Omega)} u_j. \quad (1.34)$$

Das Tripel $\{(\sigma_j, v_j, u_j)\}$ nennt man *Singulärsystem* eines kompakten Operators und die Folgen $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ und $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ bilden folgende Orthonormalsysteme

$$\overline{\text{Span}\{u_j | j \in \mathbb{N}\}} = \overline{\text{Bild}(\mathcal{R})} \quad \text{und} \quad \overline{\text{Span}\{v_j | j \in \mathbb{N}\}} = \text{Kern}(\mathcal{R})^\perp. \quad (1.35)$$

Die Gleichung (1.34) wird im nächsten Kapitel bei der Klärung des Begriffs *schlecht gestellter Probleme* sehr hilfreich sein.

A. Implementierung

Die Implementierung aller Funktionen erfolgte im MATLAB R2016a. In diesem Abschnitt werden einige implementierte Funktionen aufgeführt und kurz erläutert. Wegen einer hohen Zeilenanzahl einiger Quellcodes, können sie nicht in voller Länge hier präsentiert werden. Für volle Quellcodes sei man hier auf die beigelegte CD verwiesen.

A.1. Radon Transformation

Die Radon Transformation wurde entsprechend der Gleichung (??) implementiert.

```
1 function [ sinogramm ] = radonTrafo( pic, angles, detWide )
2
3 ... % some argument preparation
4
5 sinogramm = zeros( detWide, length(angles) );
6
7 % loop over all angles
8 for i = 1:anglesNumber
9     % addition of 90 degrees prevents the phase shift of the sinogram
10    rotImg = imrotate( pic, angles(i)+90, 'bilinear', method );
11
12    % The difference is here, that for small picture sizes the summation
13    % has a better result than the trapez integration. Trapez is
14    % another case, which is for big size pictures better.
15    if( smallSize )
16        layer = sum( rotImg, 2 );
17    else
18        layer = trapz( rotImg, 2 );
19    end
20
21    ... % some index preparation for output
22
23    if( detWide < h )
24        sinogramm( :, i ) = layer(dist:h - b);
25    else
26        sinogramm( dist:h + dist-1, i ) = layer;
27    end
28 end % endFor i
29 end % end radonTrafo()
```

Betrachten wir die Zeile 10 in der Funktion `radonTrafo()`. Hier wird das Argument `pic` für jeden Winkel `angles(i)` rotiert. Dies entspricht der Durchstrahlung eines Objekts unter einem Winkel θ . Da hier nur parallelgeometrische Strahlengänge behandelt werden, kann somit das rotierte Bild `pic` entlang ihrer Zeilenpixel aufsummiert werden. Was auch der Summe in (??) gleichen würde. In der Zeile 29/31

wird die Spalte des Sinogramms `sinogramm` an der entsprechenden Stelle `i` mit dem Summenvektor `layer` ergänzt.

A.2. Ungefilterte Rückprojektion

Die Implementierung der ungefilterten Rückprojektion erfolgte entsprechend der Formel (1.23). Jedoch passiert die Rückprojizierung gleich für alle Pixel pro Winkel.

```

1 function [ output ] = backProjection( sinogramm, angels )
2
3     anglesNumber = length(angels);
4
5     % size for output
6     [ numberOfProjections, ~ ] = size( sinogramm );
7     output = zeros( numberOfProjections, numberOfProjections );
8
9     % discrete euklid coordinates, only one axis is needed, because
10    % the grid will be square.
11    [x] = meshgrid(ceil(-numberOfProjections/2):ceil(numberOfProjections/2-1));
12
13    % find the middle
14    middle = floor( numberOfProjections/2 ) + 1;
15
16    % back projection
17    for i = 1:anglesNumber
18        % rotate the coordinates and shift back
19        direction = round(middle + x*sind(angels(i)+90) + x'*cosd(angels(i)+90));
20
21        % indicate the pixels in which the backprojection will be written
22        indices = find(( direction > 0 ) & ( direction <= numberOfProjections ));
23
24        % sum of backprojections
25        output(indices) = output(indices) + ...
26            sinogramm(direction(indices),i)./anglesNumber;
27    end % endFor i
28 end % end backProjection()

```

Die Größe von `output` entspricht (??), also der Detektorbreite, was in diesem Falle die Zeilenanzahl des Sinogramms ist (Zeile 6, 7). In der Zeile 19 wird das erzeugte Koordinatensystem `x` (Zeile 11) gedreht und verschoben. Die Verschiebung der Koordinaten sorgt dafür, dass die Indizierung (Zeile 22) die Breite des Detektors bei Drehung beibehält. In der Zeile 25/26 wird `output` an den entsprechenden Stellen `indices` aufaddiert.

A.3. Gefilterte Rückprojektion

Der unten aufgeführter Codeabschnitt implementiert die gefilterte Rückprojektion. Die ausgelassenen Codeteile entsprechen genau dem Code der ungefilterten Rückprojektion von A.2.

```

1 function [ output ] = filteredBackProjection( sinogramm, angels, filter )
2

```

```

3  ... % some parameter preparations
4
5  % if no filter is given, than a ramp filter will be created
6  if( nargin < 3 )
7      filter = [floor(numberOfProjections/2):-1:0 1:ceil(numberOfProjections
          /2-1)]*2;
8  end
9
10 % back projection
11 for i = 1:anglesNumber
12
13     % filtering part before back projection
14     % -----
15     inpFT = ifftshift( fft( sinogram(:,anglesNumber-i+1)' ) );
16     % filtering in Fourier-Space is only multiplication:
17     filteredProjection = filter.*inpFT;
18     filteredProjection = real( ifft( fftshift( filteredProjection' ) ) );
19     % -----
20
21     ... % back projection of filteredProjection
22
23 end % endFor i
24 end % end backProjection()

```

In Zeile 7 wird eine kleine Absicherung eingeschaltet, falls kein Filter mitgeteilt wurde, so initialisiert die Funktion die Variable `filter` standardmäßig mit einem Rampenfilter. Zeile 15-18 ist die eigentliche Filterung der Projektionen. Ein kleiner Trick wurde hier angewendet. Die schnelle FT (`fft()`) liefert im MATLAB ein verschobenes Spektrum, sodass er mittels `ifftshift()` zurück verschoben werden muss. Nach der Filterung (Zeile 17) wird die schon gefilterte Projektion entsprechend verschoben und mit `ifft()` invers Fouriertransformiert. Danach passiert nur noch die Rückprojektion, wie in `backProjection()`.

A.4. Erzeugung der Systemmatrix von \mathcal{R}

Die Implementierung der Funktion `getSysMat()` (siehe CD-ROM) baut auf der Implementierung der Funktion `paralleltomo()` von [5] auf. Wobei die Funktion `paralleltomo()` für hier nötige Zwecke eingeschränkt und neu implementiert wurde.

A.5. Iterative Rekonstruktion nach Kaczmarz

Der iterative Algorithmus ist in der Funktion `iterativeReconstruction()` implementiert. Der Kernteil der Funktion (Zeile 12-32) läuft über eine *while*-Schleife, daher man eine Abbruchbedingung, die wie folgt definiert werden kann

$$\|Af_t - p\|_2 \leq \delta. \quad (\text{A.1})$$

Das heißt, wir erwarten eine Verbesserung von f_t nach jeder Iteration, so das die neue Projektion Af_t immer näher an p liegen soll und daher sich die Fehlernorm verringern soll. Anschließend wird der Fehler mit einer Schranke δ verglichen. Diese

setzt sich aus dem Datenfehler $\|\tilde{p} - p\|_2 = \epsilon$ und einer Konstante $\alpha \geq 1$ zusammen, also $\delta = \alpha\epsilon$. Die Konstante α wird größer/gleich Eins gesetzt, weil man nicht erwarten kann, dass der Fehler in der Rekonstruktion kleiner als Datenfehler wird.

```

1 function [output, iter] = iterativeReconstruction( sinogram, angels, maxIterNr
    , delta, randPar, sysMat )
2
3 ... % some parameter preparation
4
5 while( stop > delta && maxIterNr > iter )
6     if(strcmp(randPar, 'random'))
7         % creates randomized index vector for iteration
8         iterVec = randperm(M);
9     else
10        iterVec = 1:M;
11    end
12    % here Kaczmarz algorithm
13    for i = iterVec
14        ai = sysMat(:,i);
15        output = output + relax*((projections(i)-ai'*output)/sum(ai.*ai,1))*ai;
16    end
17    % stop rule  $\|Af_i - p\|_2$ 
18    stop = norm(sysMat'*output - projections);
19    iter = iter + 1;
20 end % endWhile
21 % transform the output into a matrix
22 output = vec2mat( output, detectorSize );
23
24 ... % some output preparation
25
26 end % end iterativeReconstruction()

```

In den Zeilen 6-11 wird anhand des Parameters `randPar` die Art der Berechnung eingestellt, also ob es randomisiert oder vorwärts projektiv gerechnet werden soll. In Zeile 13-16 wird über alle Hyperebenen iteriert, der Ausdruck in Zeile 15 entspricht genau (?). In der Zeile 18 wird die Norm, wie oben beschrieben berechnet und für den Abbruch der *while*-Schleife benutzt. Die *while*-Schleife wird auch abgebrochen, falls die vorgegebene Anzahl der Iterationen überschritten wird (Zeile 5).

A.6. Rekonstruktion durch SWZ

Die Funktion `svdReconstruction()` mit oder ohne der SWZ der Systemmatrix ausgeführt werden. Falls auch die Systemmatrix nicht übergeben wird, so wird die Matrix mittels `getSysMat()` erzeugt und anschließend das singuläre System mit der MATLAB Funktion `svd()` berechnet.

In den Zeilen 6/7 werden zunächst die Singulärwerte extrahiert und anschließend in der Zeile 10 mittels (?) regularisiert. Für die Regularisierungswerte wird keine neue Matrix erzeugt, sie werden an die Stellen der Singulärwerte in die Matrix *S* reingeschrieben (Zeile 11). Die Pseudoinverse wird in der Zeile 14 mittels (?) erzeugt und damit schließlich die Gleichung (?) in der Zeile 17 gelöst.

```

1 function output = svdReconstruction(sinogram, angels, lambda, sysMat, U, S, V)

```

```
2
3  ... some parameter preparation
4
5  % preparation for regularization
6  ind = S ~= 0;
7  sigma = S( ind );
8
9  % thikonov regularization
10 sigma = (sigma)./( lambda^2 + sigma.^2 );
11 S( ind ) = sigma;
12
13 % take the pseudo inverse of sysMat
14 pseudoInvers = V*S'*U';
15
16 % calculate solution
17 output = pseudoInvers*projections;
18
19 ...some output preparation
20
21 end % end svdReconstruction()
```


B. Inhalt der CD-ROM

Format: CD-ROM

B.1. PDF-Dateien

- BAGESLER.pdf - gesamte Bachelorarbeit im PDF-Format

B.2. Matlab Funktionen

- Testskripte:
 1. FBPTTest
 2. svdTest
 3. iterTest
- Funktionen:
 1. radonTrafo()
 2. backProjection()
 3. filteredBackProjection()
 4. getSysMat()
 5. iterativeReconstruction()
 6. svdReconstruction()
- Filter für FBP:
 1. blackmannFilter()
 2. hammingFilter()
 3. shepLogan()
 4. ramLaksh()

Quellenverzeichnis

Literatur

- [1] Klemens Burg, Herbert Haf und Friedrich Wille. *Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen*. 1. Aufl. Teubner, 1991 (siehe S. 12).
- [2] Thorsten M. Buzug. *Einführung in die Computertomographie*. 1. Aufl. Springer, 2004 (siehe S. 6).
- [3] Harro Heuser. *Funktionalanalysis*. 1. Aufl. B.G Teubner Stuttgart, 1975 (siehe S. 15).
- [4] Andres Rieder. *Keine Probleme mit inversen Problemen*. 1. Aufl. Vieweg, 2003 (siehe S. 15–17).

Online- Quellen

- [5] Per Christian Hansen, Jakob Sauer Jorgensen und Maria Saxild-Hansen. *A MATLAB Package of Algebraic Iterative Reconstruction Methods, AIR Tools II, Version 1.0*. URL: <http://people.compute.dtu.dk/pcha/AIRtoolsII/index.html> (besucht am 19.06.2019) (siehe S. 20).

Abbildungsverzeichnis

1.1.	Das Spektrum der elektromagnetischen Strahlung. Quelle: Wikipedia.	2
1.2.	Schematische Darstellung der Gleichung 1.1, mit V das Volumen eines Mediums, dV Rand (orange) von V , j Der Wärmestrom durch V , $v \in \mathbb{R}^3$ Normalenvektor an dV und dS Tangente an dV .	3
1.3.	Schematischer Aufbau einer Röntgenaufnahme im Draufsicht. Links ist das Schwächungsprofil nach Durchgang der Röntgenstrahlen durch ein Medium mit verschiedenen Dichten zu sehen (mit der Annahme, dass orangene Kreise höhere Dichte haben, als die graue Fläche).	4
1.4.	Das Prinzip der Bildrekonstruktion aus CT-Daten mit einer Rückprojektion (a) und zwei Rückprojektionen (b).	5
1.5.	Prinzipieller Aufbau eines CT-Scanners der dritten Generation.	6
1.6.	Das Schichtmodell eines Objekts als Grundlage zur dreidimensionalen Rekonstruktion.	6
1.7.	Intensitätsänderung der Röntgenstrahlung beim Passieren eines homogenen Objekts.	8
1.8.	Parametrisierung des Strahls L auf dem Gebiet Ω .	9
1.9.	Ein Beispiel der Rückprojektion eines Projektionswerts $g_\theta(s_0)$ auf einen Punkt $x \in \Omega$. Mit $g_\theta(s)$ ist hier eine Projektion bei einem festen Winkel θ bezeichnet, also $g_\theta(s) = g(s, \theta)$.	15