Алгоритмы и структуры данных

densine

28 сентября 2025 г.

Содержание

1. От автора

Этот документ я делаю торопясь, поэтому если вдруг вы найдете ошибки или же недостатки - просто пишите мне в ЛС в Telegram - @Denantm. Я всегда рад исправлениям и стоящим советам по написанию документов и т.п. Начнем.

2. Организационные моменты

2.1. Платформа, контесты, оценки...

Все занятия будут проходить на платформе algocourses.ru, логины для каждого контеста можно найти в файле в канале параллели (пароли те же, что и от аккаунта, в котором вы писали отборочный этап). Ваши старания и усилия будут оцениваться, и в зависимости от их результата, вы можете получить стипендию или перейти в другую параллель (стипендии у параллели C нет уж точно). Оценка рассчитывается примерно так:

$$Rate = 0.7 * ContenstRate + 0.3 * TestRate + 0.1 * ExamsRate$$

Затем, если ваша оценка $>= 7$ - вас не исключают и вы продолжаете заниматься (информация неподтверждена).

На уроки в дистанционном формате ссылка будет появляться в канале паралелли.

3. Введение

На этом курсе изучаются основы C++ для решения олимпиадных задач. Цели - научить решать подобные задачи на C++ и подготовить в региональному этапу Всероса по информатике. (Слова не мои, это было на сайте). В введении разберем общие для олимпиадного программирования понятия - O-нотацию и основы C++.

3.1. Оценка сложности алгоритмов - O-нотация

Для начала разберемся, как мы оцениваем сложнось того или иного алгоритма. Универсальной для нас единицой измерения будет количество операций. Например:

- если мы суммируем два числа - a и b, например, то совершается 1 операция.
- если наш алгоритм суммирует числа от 1 до n:

$$1 + 2 + ... + n - 1 + n = ...$$

  То всего будет совершено n - 1 Операций.

- если наш алгоритм суммирует все числа в матрице n на n:

$$X = \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n*(n-1)} & \dots & \dots & x_{n^2} \end{matrix}$$

  то совершается $n^2 - 1$ операций.

Или же, используя код на Python:

```python
print(a + b) # 1 операция

sum_of_1_to_n = 1
for i in range(2, n + 1): # n - 1 операций
    sum_of_1_to_n += i # 1 операция

# Итого - n - 1 операций.

sum_of_1_to_n_squared = 0
for i in range(n): # n операций
    for j in range(1, n + 1): # n операций
        sum_of_1_to_n_squared += i * n + j # 1 операция

# n*n = n^2 операций.
```

Затем, сама асимптотическая сложность записывается как $O(...)$, где внутри скобок оставляем только самое быстрорастущее значение, а константы опускаем. Напимер:

- Возьмем строчку

  ```python
  print(a + b)
  ```

$a+b$ - одна операция, но для наглядности скажем, что и $print(...)$ выполняется за несколько операций. Тогда сложность - $O(1)$, после того, как опустим константы. 1 в 0 превратить нельзя - тогда n превращалось бы в 0, как и любая другая переменная.

- Рассмотрим второй цикл. Выполняется он за $n-1$ операций, после того, как опустим константы - $O(n)$.
- Теперь рассмотрим код целиком! Суммарная сложность - $1+n+n^2$. Выбираем самый значимый элемент - в нашем случае n^2 - и опускаем константы. Получаем $O(n^2)$

Вопрос - зачем нам вообще нужно оценивать сложность алгоритма? Компьютер все-таки имеет свои лимиты, а сервер на олимпиаде уж точно, и оценить их тоже можно в количестве выполняемых операций, например, в секунду. Так, если ограничение по времени выполнения - 1 секунда, а сложность нашей программы на Python - $O(n^2)$, то появится ошибка Time Limit Exceeded (или что-то в этом духе) - время исполнения превышено. Поэтому важно оптимизировать алгоритмы, а понять, до какой степени это нужно делать поможет асимптотическая сложность.

3.2. Основы C++

Здесь я, по понятным причинам, описывать все прикасы и уродства всеми любимого C++ не буду, для этого есть отдельные уроки или курсы. Сами организаторы "Алгоритмов и структур" советуют этот курс, лично я советую хендбук Яндекса - там много задач связанных с теми или иными фичами языка.

3.3. Контейнеры

Контейнер - это тип, позволяющий хранить в себе объекты других типов (списки и т.д.). С vector'ом вы познакомитесь как с основой C++, но несколько других полезных контейнеров мы разберем, реализуя с помощью него. Представляем вам стек, очередь, и деку! Разберем по порядку.

- Стек - структура last in - first out (последний зашел, первый вышел - LIFO). Пример из жизни: стопка блинов. Когда вы их готовите, последний кладете (по крайней мере, обычно) сверху, а когда едите - берете тоже сверху.

  В C++ есть структура $stack$, однако мы рекомендуем использовать вместе нее $vector$. Методы, которые должен реализовывать стек:

```
#include <vector>
...
std::vector<T> stack;

stack.push_back(elem); // Добавить элемент на вершину стека
stack.pop_back();      // Удалить верхний элемент стека
stack.size()           // Размер стека
...
```

  Что мы можем сделать, чтобы найти минимум в стеке? Вызывать функции вроде min каждый раз неэффективно (они могут иметь сложность до n). Взамен

этого мы можем поддерживать стек с текущими минимумами! Каждый раз, когда мы добавляем элемент в стек, сравниваем его с последним элементом стека минимумов, и если он меньше - добавляем его, иначе добавляем снова последний элемент стека минимумов. Рассмотрим пример. Пусть наши входные данные выглядят так:

$$x = [5, 2, 3, 4, 1]$$

и мы имеем два стека:

```
std::vector<int> stack;
std::vector<int> minsstack;
```

Рассмотрим каждый добавленный элемент и как выглядит стек в этот момент.

1. $x_1 = 5$. Оба стека пусты, значит просто добавляем в конец каждого стека $x = 5$:

   ```
   stack.push_back(x);
   minsstack.push_back(x);
   ```

   $stack = [5]$; $minsstack = [5]$
2. $x_2 = 2$. Сравниваем последний элемент $minsstack$ с $x = 2$ и добавляем меньшее из $x_1 = 5$ и $x_2 = 2$, т.е. правую часть std::min(...):

   ```
   stack.push_back(x);
   minsstack.push_back(std::min(minsstack.back(), |\ttfamily\uline{x}|)
   ```

   $stack = [5, 2]$; $minsstack = [5, 2]$
3. $x_3 = 3$. Текущий x больше последнего элемента $minsstack$, значит добавляем не x, а последний элемент $minsstack$, т.е. левую часть std::min(...):

   ```
   stack.push_back(x);
   minsstack.push_back(std::min(minsstack.back(), x));
   ```

   $stack = [5, 2, 3]$; $minsstack = [5, 2, 2]$
4. $x_4 = 4$. $x_4 > x_2$, значит в конец minsstack добавляем x_2. $stack = [5, 2, 3, 4]$; $minsstack = [5, 2, 2, 2]$
5. $x_5 = 1$, $x_5 < x_2$, значит в конец minsstack добавляем x_5. $stack = [5, 2, 3, 4, 1]$; $minsstack = [5, 2, 2, 2, 1]$

Таким образом получается стек обычный и стек префиксных минимумов. Затем, если нам нужно удалить последний элемент стека, мы просто удаляем его из обоих стеков:

```
stack.pop_back();
minsstack.pop_back();
```

- Следующая структура - очередь (queue). Для нее характерна концепция "первым зашел, первым вышел" - first in-first out (FIFO). В C++ есть готовая структура:

```
#include <queue>
...
std::queue<T> queue;
queue.push(elem); // Добавить элемент в конец очереди
```

```
queue.pop();       // Удалить элемент из начала очереди
queue.size();      // Узнать размер очереди
queue[i]           // Получть i-ый элемент очереди
```

Также очередь можно реализовать с помощью двух стеков. Покажем на примере: Для начала, пусть у нас есть два стека - left и right.

```
std::vector<int> left; std::vector<int> right;
```

Чтобы добавить элемент в конец очереди:

```
right.push_back();
```

А чтобы удалить... нам нужно проверить, пуст ли стек $left$:

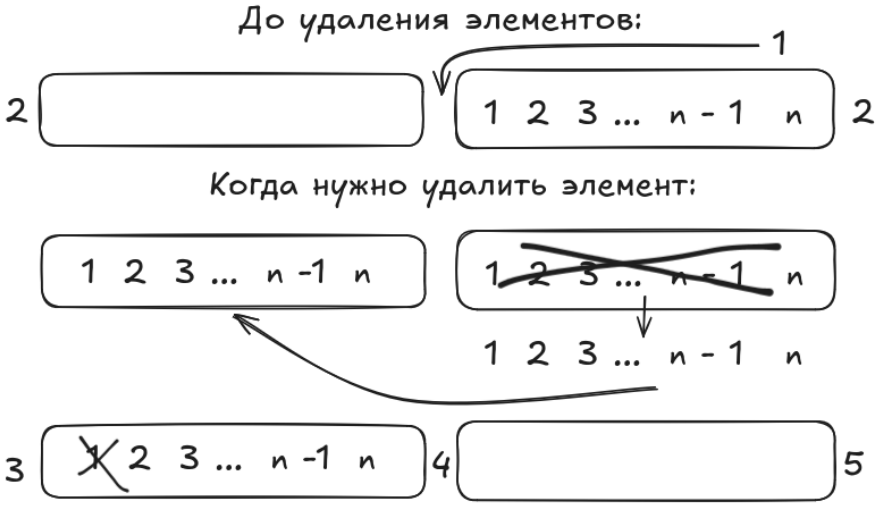
– если пуст - мы переносим все элементы из правого стека в левый, причем последний элемент правого становится первым левого. Затем, просто удаляем последний элемент левого стека:

```
...
while (!right.empty()) {
    left.push_back(right.back());
    right.pop_back();
}

left.pop_back();
...
```

– иначе - просто удаляем последний элемент левого стека.

На вопрос "Почему это работает, как положено" можно ответить графически:



Пояснения:

1. Ради удобства иллюстрации, начало обоих стеков находится по центру...
2. ...а концы - по краям, т.е. левый стек идет от центра к левому краю, а правый - от центра к правому краю. Получается, что очередь визуализировать очень просто можно с помощью двух стеков с пераметрами (1-2). Тогда:

3. начало очереди, если левый стек непуст
4. начало очереди, если левый стек пуст
5. всегда конец очереди. Это означает, что для того, чтобы добавить элемент в конец очереди нужно просто добавить его в конец правого стека.

Зачем нужна очередь из двух стеков? Для того, чтобы находить ее минимум. Реализацию поддержки минимума здесь оставлять не буду, просто скажу, что нужно поддерживать минимум обоих стеков.

- Последняя изученная нами сегодня структура - дека (dequeue). По сути это совмещение и очереди, и стека - элементы можно добавлять и убирать с обоих сторон. Эту структуру можно реализовать с помощью стеков, но их потребуется 5+ штук, поэтому мы просто используем встроенную в C++ ее реализацию.

```
#include <deque>
...
std::deque<T> deque;
deque.push_front(elem); // Вставить элемент в начало деки
deque.push_back(elem);  // Вставить элемент в конец деки
deque.pop_front();      // Удалить элемент из начала деки
deque.pop_back();       // Удалить элемент из конца деки
deque.size();           // Узнаить размер деки
...
```

Это все контейнеры, что были разобраны на лекции. Отмечу, что все они реализуют методы .back() и .front(), возвращающие ссылки на последний и первый элементы этих структур, а также .end() и .begin() - итераторы, указывающие на ячейки после и до структур (удобны для получения -2, -3 т.д. элементов).