Задачи от изпита по Логическо програмиране
24.01.2018г.

Зад. 1. *Диаметър* на списък наричаме разликата между броя срещания на най-често срещан елемент на списъка и броя срещания на най-рядко срещан елемент на списъка. Да се дефинира на Пролог едноместен предикат p, който по даден списък от списъци L разпознава дали:

Вариант 1: всички елементи на L имат един и същ диаметър.

Вариант 2: има елемент на L, чийто диаметър е различен от диаметъра на всеки друг елемент на L.

Примерно решение:

```
% count(L,X,N):- генерира в N броя срещания на X в списъка L
count([],_,0).
count([X|Xs],X,N):-count(Xs,X,M), N is M + 1.
count([X|Xs],Y,N):-X \= Y, count(Xs,Y,N).

% mf(L,N):- генерира в N броя срещания на най-често срещан елемент на L
mf([],0).
mf(L,N):-member(X,L), count(L,X,N), not((member(Y,L), count(L,Y,M), M > N)).

% lf(L,N):- генерира в N броя срещания на най-рядко срещан елемент на L
lf([],0).
lf(L,N):-member(X,L), count(L,X,N), not((member(Y,L), count(L,Y,M), M < N)).

% диаметъра
diam(L,D):-mf(L,A), lf(L,B), D is A - B.

% вариант 1
%p(L):-not((member(X,L), diam(X,DX), member(Y,L), diam(Y,DY), DX =\= DY)).

% вариант 2
p(L):-append(A,[X|B],L), append(A,B,M), diam(X,DX), not((member(Y,M),
      diam(Y,DY), DX =:= DY)).
```

Зад. 2. *Фенски списък* е краен списък, всеки елемент на който е някоя от буквите 1, 2 или е фенски списък, като:

Вариант 1: никои два съседни елемента не са еднакви букви.

Вариант 2: броят на елементите, които са буквата 1 е равен на броя на елементите, които са буквата 2.

Да се дефинира на Пролог едноместен предикат $p(X)$, който при преудовлетворяване генерира в X всички фенски списъци, които се записват на Пролог с краен брой "[".

Примерно решение:

```
% вариант 1
%cond(X):-not(append(_,[1,1|_],X)), not(append(_,[2,2|_],X)).

% вариант 2
cond(X):-count(X,1,C), count(X,2,C).
```

```
r(1,1).
r(2,2).
r(N,X):-N > 2, M is N - 3, s(M,X), cond(X).

s(0,[]).
s(N,[X|Xs]):-N > 0, between(1,N,R), T is N - R, r(R,X), s(T,Xs).

g(X,T):-r(X,T).
g(X,T):-Y is X + 1, g(Y,T).
p(X):-g(3,X).
```

Зад. 3. Структурата $\mathcal{A}$ е с носител множеството на естествените числа и е за език с равенство и два функционални символа: двуместен инфиксен символ ., който се интерпретира като умножение и едноместен символ f, който се интерпретира като остатък при делене на 7.

1. Да се определят множествата $\{5\}$, $\{6\}$, $\{7\}$.
2. Да се докаже, че съществува естествено число n, такова че $\{n\}$ е неопределимо множество.

Примерно решение:

$$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y\, x.y = x$$
$$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y\, x.y = y$$
$$\varphi_{prime}(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_1(x) \wedge \forall y(\exists z\, (y.z = x) \Rightarrow \varphi_1(y) \vee y = x)$$

$$\varphi_7(x) \leftrightharpoons \exists y\left(\varphi_0(y) \wedge f(x) = y \wedge \varphi_{prime}(x)\right)$$
$$\varphi_6(x) \leftrightharpoons f(x) = x \wedge \exists y(\varphi_1(y) \wedge f(x.x) = y \wedge x \neq y)$$
$$\varphi_5(x) \leftrightharpoons f(x) = x \wedge \varphi_{prime}(x) \wedge \exists y\big(\varphi_6(y) \wedge \neg\exists z(x.z = y)\big)$$

Числата 11 и 53 са прости и дават един и същи остатък по модул 7. Биекцията породена от размяната на степените им в представянето на естествените числа като безкрайно произведение от степени на простите числа, поражда автоморфизъм, който изхвърля 11 от $\{11\}$.

Следователно $\{11\}$ е неопределимо.

При вариант 1 f се интерпретира като остатък по модул 5 и се търси да се определят $\{3\}$, $\{4\}$ и $\{5\}$. Решението е напълно аналогично като за точка 2 разглеждаме числата 11 и 31.

Зад. 4. Да се докаже, че е изпълнимо множеството от следните формули:

$$\forall x \forall y \forall z\big(q(x,y) \wedge q(y,z) \Rightarrow q(x,z)\big)$$
$$\exists x \exists y\big(q(x,y)\big)$$
$$\forall x\big(\neg q(x,x)\big)$$
$$\forall x \forall y\left(q(x,y) \Rightarrow \exists z\big(q(x,z) \wedge q(z,y)\big)\right)$$
$$\forall x \forall y\left(q(x,y) \Rightarrow \exists z\big(q(z,y) \wedge z \neq x \wedge \neg q(x,z) \wedge \neg q(z,x)\big)\right)$$

Примерно решение:

Следната структура е модел за формулите:

$$\mathcal{A} = (\mathbb{R}^2, \langle (a,b),(c,d)\rangle \in q^{\mathcal{A}} \leftrightarrow a < c \wedge b < d)$$

При вариант 1 формулите са същите, само че вместо q е предикатът p.

Зад. 5. Нека φ_1, φ_2 и φ_3 са следните 3 формули:

$$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \exists y \Big(q(y,x) \wedge \forall z \big(q(y,z) \Rightarrow r(z,x) \big) \Big)$$
$$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \Big(\exists y q(x,y) \Rightarrow \exists y \Big(q(x,y) \wedge \neg \exists z \big(q(y,z) \wedge q(x,z) \big) \Big) \Big)$$
$$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z \big(q(y,x) \wedge r(z,y) \Rightarrow q(z,x) \big)$$

С метода на резолюцията да се докаже, че $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \forall x \neg q(x,x)$

Примерно решение (това е за вариант 2, решението на вариант 1 е сходно):

Трябва да се докаже, че множеството $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \exists x q(x,x)\}$ е неизпълнимо.

Пренексни нормални форми:

$$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \exists y \forall z \Big(q(y,x) \wedge \big(\neg q(y,z) \vee r(z,x) \big) \Big)$$
$$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall t \exists y \forall z \Big(\big(\neg q(x,t) \vee q(x,y) \big) \wedge \big(\neg q(x,t) \vee \neg q(y,z) \vee \neg q(x,z) \big) \Big)$$
$$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z \big(\neg q(y,x) \vee \neg r(z,y) \vee q(z,x) \big)$$
$$\exists x q(x,x)$$

След скулемизация:

$$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \forall z \Big(q(f(x),x) \wedge \big(\neg q(f(x),z) \vee r(z,x) \big) \Big)$$
$$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall t \forall z \Big(\Big(\neg q(x,t) \vee q\big(x, g(x,t)\big) \Big) \wedge \big(\neg q(x,t) \vee \neg q(g(x,t),z) \vee \neg q(x,z) \big) \Big)$$
$$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z \big(\neg q(y,x) \vee \neg r(z,y) \vee q(z,x) \big)$$
$$q(c,c)$$

Дизюнкти:

$$D_1 = \{q(f(x),x)\}, \qquad D_2 = \{\neg q(f(x),z), r(z,x)\}, \qquad D_3 = \big\{\neg q(x,t), q\big(x,g(x,t)\big)\big\}$$
$$D_4 = \{\neg q(x,t), \neg q(g(x,t),z), \neg q(x,z)\}, \qquad D_5 = \{\neg q(y,x), \neg r(z,y), q(z,x)\}, \qquad D_6 = \{q(c,c)\}$$

Извод на празния дизюнкт (картинка):