Relations_Functions

Sunday, 2 November 2025 23:53

Задача 3. Нека $I := \{1, 2, ..., n\}$. Разглеждаме релацията $\sim$ над $\mathcal{P}(I)\setminus\{\emptyset\}$:

$$A \sim B \overset{def}{\longleftrightarrow} \max_{x\in A} x = \max_{y\in B} y$$

Да се докаже, че $\sim$ е релация на еквивалентност и да се намери $|[\{k\}]_\sim|$ за произволно $1 \leq k \leq n$.

Задача 20: Нека $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Докажете, че релацията
$R_\preceq \subseteq J_2^n \times J_2^n = \{(\alpha = (a_1, ..., a_n), \beta = (b_1, ..., b_n)) | \forall i \in I_n, a_i \leq b_i\}$,
е релация на *частична наредба*, но не е релация на *пълна наредба*.

Задача 25. Нека разгледаме множеството $\mathbb{N}_* = \mathbb{N} \cup \{*\}$. Нека $R = \{(a, b) \mid a = b \ \vee \ a = *\} \subseteq \mathbb{N}_* \times \mathbb{N}_*$. Докажете, че R е частична наредба и определете минималните, максималните, най-малкия и най-големия елемент в $\mathbb{N}_*$ по отношение на R, ако такива има.

Задача 11. Нека R е релация над A. Докажете, че следните три условия са еквивалентни:

1. R е симетрична.
2. $R^{-1} \subseteq R$.
3. $R = R^{-1}$.

Задача 10. Нека R е релация над A. Докажете, че

1. Ако R е транзитивна и рефлексивна, то $R \circ R = R$.
2. Възможно ли е $R \circ R = R$, ако R не е рефлексивна.

Задача 24: Намерете рефлексивното, симетричното и транзитивното затваряне на релациите "по-малко от" и "по-малко или равно на" в множеството $\mathbb{R}$.

Задача 6: Проверете биекция ли е функцията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, дефинирана по следния начин:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{ако } x \text{ е четно} \\ x - 1 & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Задача 9: Нека $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{R}^-$ са съответно множествата на положителните и отрицателните реални числа. Покажете, че всяка от изброените по-долу функции е биекция:

a) $f : (0, 1) \to (a, b); f(x) = (b - a)x + a; \ a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$

Задача 15: Нека $f : A \to B$ и $g : B \to C$ са функции. Да се докаже, че:
a) ако f и g са инекции, то $g \circ f$ е инекция;
b) ако f и g са сюрекции, то $g \circ f$ е сюрекция;
c) ако f и g са биекции, то $g \circ f$ е биекция.