01.11.2025

Saturday, 1 November 2025 0:29

$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $R = \{(a,b) \mid a|b\}$

$a|b \overset{def}{\Leftrightarrow} (\exists c \in \mathbb{N})(a.c = b)$

R е Ч.Н.

---

1 е минимален за R

x е мин. за R $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall y \, ((y,x) \in R \rightarrow x = y)$

Нека $(y,1) \in R$. $\Rightarrow y|1 \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{N})(y.c = 1)$

$\Rightarrow$ Ако $c_0 \in \mathbb{N}$ е такова, че $y.c_0 = 1$, то $y = c_0 = 1$.

$\Rightarrow$ 1 наистина е мин. за R

1 е най-малък за R

x е най-малък $\overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall y \in A)(x \neq y \rightarrow (x,y) \in R)$

Нека $y \in A$, $y \neq 1$.

$1.y = y \Rightarrow 1|y \Rightarrow (1,y) \in R$

$\Rightarrow$ 1 е наистина НМ за R

- Обратна релация

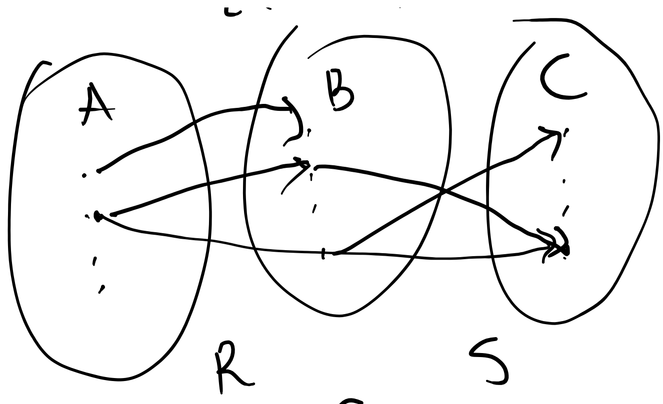
$$R^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$$

- Допълнение на релация

$$\overline{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\}$$

- Нека $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$. Композиция на релациите R и S наричаме:

$$S \circ R = \{(a,c) \mid (\exists b \in B)((a,b) \in R \land (b,c) \in S)\}$$



$S \circ R \subseteq A \times C$

<u>Затваряния на релации</u>

1. Рефлексивно затваряне на $R \subseteq A \times A$

   $id_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$ → идентитет

$refl(R) = R \cup id_A$

2. Симетрично затваряне на $R \subseteq A \times A$

   $sym(R) = R \cup R^{-1}$

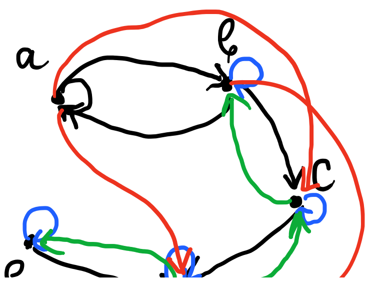
3. Транзитивно затваряне на $R \subseteq A \times A$

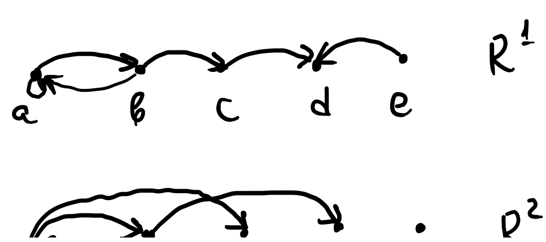
Дефиниране $\begin{cases} R^1 = R \\ R^{n+1} = R \circ R^n \end{cases}$

$$trans(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

<u>Пример</u>: Нека $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,c), (c,d), (e,d)\}$

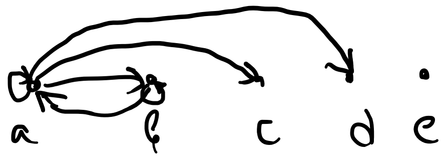




$refl(R) = R \cup id_A$

$sym(R) = R \cup R^{-1}$

$tran(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$



R^3

Зад. Нека $R \subseteq A \times A$. Казваме, че R е заместителна, ако
$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)(xRy \land xRz \rightarrow yRz)$$
Док, че R е Р.Е. $\Leftrightarrow$ R е рефл. и заместителна.

Реш. $\boxed{\Rightarrow}$ Нека R е Р.Е. Ясно е, че R е рефл.

Нека $xRy \land xRz$.

$xRy \overset{R \text{ е сим.}}{\Longrightarrow} yRx$

$yRx \land xRz \overset{R \text{ е транзит.}}{\Longrightarrow} yRz$

$\Rightarrow$ R е и заместителна

$\boxed{\Leftarrow}$ Нека R е рефл. и заместителна

1) рефл. – Да!

2) сим.

Нека xRy. R е рефл. $\Rightarrow xRx$

$xRy \land xRx \overset{R \text{ е зам.}}{\Longrightarrow} yRx$

3) транзит.

Нека $xRy \land yRz$.

$xRy \overset{R \text{ е сим.}}{\Longrightarrow} yRx$

$yRx \land yRz \overset{R \text{ е зам.}}{\Longrightarrow} xRz$

От 1), 2) и 3) $\Rightarrow$ R е Р.Е.

Зад. Нека $R \subseteq A \times A$ е рефл. и транзит.

$\sim \subseteq A \times A$ е дефинирана така:

$$a \sim b \Longleftrightarrow aRb \land bRa$$

а) Док., че $\sim$ е р.е.

б) Нека $F = \{ [a]_\sim \mid a \in A \}$. Дефинираме $\prec \subseteq F \times F$, т.с.

$$[a] \prec [b] \leftrightarrow (\exists x \in [a])(\exists y \in [b])(xRy).$$

Док., че $\prec$ е ч.н.

Реш. а) 1) рефл.

Нека $a \in A$. Понеже R е рефл., то aRa.

$\Rightarrow aRa \wedge aRa \Rightarrow a \sim a$

2) сим.

Нека $a \sim b$. $\Rightarrow aRb \wedge bRa \Rightarrow bRa \wedge aRb$

$\Rightarrow b \sim a$

3) транзитивност

Нека $a \sim b \wedge b \sim c$. Тогава!

$aRb \wedge bRa \overset{R \text{ е транз.}}{\Longrightarrow} aRc \wedge cRa \Rightarrow a \sim c$

$bRc \wedge cRb$

От 1), 2) и 3) $\Rightarrow \sim$ е р.е.

б) 1) рефл.

Нека $[a] \in F$. Значи, че $a \in [a]$.

$a \sim a \Rightarrow aRa \wedge aRa \Rightarrow [a] \prec [a]$

2) антисим.

Нека $[a] \prec [b] \wedge [b] \prec [a]$. Тогава

$(\exists x \in [a])(\exists y \in [b])(xRy)$

$(\exists z \in [b])(\exists t \in [a])(zRt)$

Нека x_0, y_0, z_0 и t_0 са свидетели, т.е. $x_0Ry_0 \wedge z_0Rt_0$

$x_0 \in [a] \wedge t_0 \in [a] \Rightarrow x_0 \sim t_0 \Rightarrow x_0Rt_0 \wedge t_0Rx_0$

$y_0 \in [b] \wedge z_0 \in [b] \Rightarrow y_0 \sim z_0 \Rightarrow y_0Rz_0 \wedge z_0Ry_0$

Имаме, че $x_0Ry_0 \wedge y_0Rz_0 \overset{R \text{ е транзит.}}{\Longrightarrow} x_0Rz_0$

R е тр.

$z_0 R t_0 \wedge t_0 R x_0 \Rightarrow z_0 R x_0$

$\Rightarrow x_0 \sim z_0 \Rightarrow [x_0] = [z_0] = [a] = [b]$

3) транзит.

Нека $[a] \prec [b] \wedge [b] \prec [c]$.

$\Rightarrow (\exists x \in [a])(\exists y \in [b])(xRy)$

$(\exists z \in [b])(\exists t \in [c])(zRt)$

Нека x_0, y_0, z_0, t_0 са свидет., т.е. $x_0 R y_0 \wedge z_0 R t_0$

$y_0, z_0 \in [b] \Rightarrow y_0 \sim z_0 \Rightarrow y_0 R z_0 \wedge z_0 R y_0$

$x_0 R y_0 \wedge y_0 R z_0 \overset{R \text{ е тр.}}{\Longrightarrow} x_0 R z_0$

$x_0 R z_0 \wedge z_0 R t_0 \overset{R \text{ е тр.}}{\Longrightarrow} x_0 R t_0$

И така $(\exists x \in [a])(\exists t \in [c])(xRt) \Rightarrow [a] \prec [c]$

От 1), 2) и 3) $\Rightarrow \prec$ е Ч.Н.

Функции

1. Дефиниция

Нека $R \subseteq A \times B$ е бинарна релация. Тогава:

- R е тотална ф-ция (или само функция) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
  $(\forall a \in A)(\exists! b \in B)(aRb)$
- R е частична ф-ция $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
  $(\forall a \in A)(\forall b_1 \in B)(\forall b_2 \in B)(aRb_1 \wedge aRb_2 \rightarrow b_1 = b_2)$

$f \subseteq A \times B$ – ф-ция. Записване $f: A \rightarrow B$

2. Видове ф-ции

- инекция

$f: A \rightarrow B$ е инекция $\overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)(f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2)$

- сюрекция

$f: A \rightarrow B$ е сюрекция $\overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$

f: A → B е сюрекция ...

– биекция – инекция + сюрекция

$f : A \to B$

домейн

кодомейн
рейндж

3. Композиция на ф-ции

Нека $f: A \to B$ и $g: B \to C$. Композиция на f и g наричаме $g \circ f : A \to C$. Записване $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

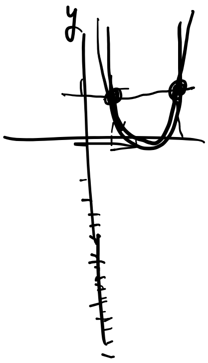
Нека $f: A \to B$ е ф-ция. Тогава за $x \in A$ $f(x)$ е единственият елемент $b \in B$, т.с. $(x, b) \in f$

<u>Зад.</u> Проверете дали следните ф-ции са инекция/сюр/биекция

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$

б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 2$

в) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = 2^x(2y+1) - 1$



<u>Реш.</u> а) • Нека $x, y \in \mathbb{R}$ и $f(x) = f(y)$

$$2x + 3 = 2y + 3$$

$$x = y$$

$\Rightarrow f$ е инекция (*)

• Нека $y \in \mathbb{R}$. Търсим $x \in \mathbb{R}$, т.с. $f(x) = y$

$\Rightarrow$ търсим $x \in \mathbb{R}$ $2x + 3 = y$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2} \in \mathbb{R}$$

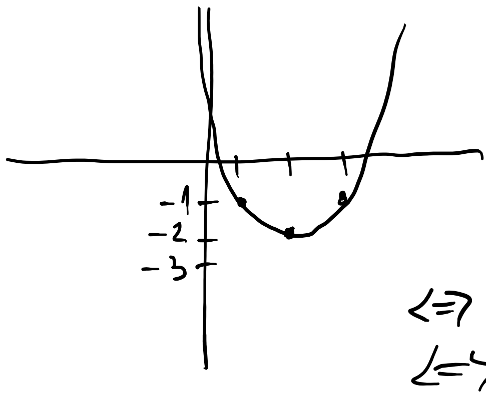
$$\Rightarrow f\left(\frac{y-3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{y-3}{2}\right) + 3 = y$$

$\Rightarrow f$ е сюрекция (**)

... $\Rightarrow f$ е биекция

От (*) и (**) => f е биекция

б) $f(x) = x^2 - 4x + 2$



$f(1) = -1 = f(3)$

$\Rightarrow$ f не е инекция

Няма такова $x \in \mathbb{R}$, че

$f(x) = -3$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = -3$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$

$D < 0$

в) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = 2^x(2y+1) - 1$

- инекция

Нека $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ са такива че

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$$

$$2^{x_1}(2y_1 + 1) - 1 = 2^{x_2}(2y_2 + 1) - 1$$

$$2^{x_1}(2y_1 + 1) = 2^{x_2}(2y_2 + 1) \quad /:2^{x_1}$$

Б.О.О. считаме, че $x_1 \leq x_2$
(без ограничение на общността)

$$\underbrace{2y_1 + 1}_{\text{нечетно}} = \underbrace{2^{x_2 - x_1}(2y_2 + 1)}_{\text{е четно при } x_2 \neq x_1}$$ (знаем, че $x_2 \geq x_1$)

$\Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow 2y_1 + 1 = 2y_2 + 1$

$y_1 = y_2$

И така $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Rightarrow$ f е инекция (*)

- сюрекция $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = 2^x(2y+1) - 1$

Нека $n \in \mathbb{N}$. Търсим такава $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, че $2^x(2y+1) - 1 = n$

$\Leftrightarrow \quad 2^x(2y+1) = n+1$

$n+1 \geq 1$ и $n+1 \in \mathbb{N}$. Тогава нека x_0 бъде най-голямата степен на 2, за която $2^{x_0} \mid n+1$.

Нека $2^{x_0} \cdot a = n+1$, $a \in \mathbb{N}$

Ако a е четно, то $a = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ и тогава

$2^{x_0} \cdot 2k = n+1$, т.е. $2^{x_0+1} \mid n+1$ $\lightning$

$\Rightarrow a$ е нечетно $\Rightarrow a = 2y_0+1$, $y_0 \in \mathbb{N}$

И така $2^{x_0} \cdot (2y_0+1) = n+1$

$$2^{x_0} \cdot (2y_0+1) - 1 = n = f(x_0, y_0)$$

$\Rightarrow f$ е сюрекция $(**)$

От $(*)$ и $(**)$ $\Rightarrow f$ е биекция.