Семестриално контролно по Дискретни структури, 03.12.2023г.

Име: ________________________________, ФН:__________, Група:___

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	6	6	6	6	6	30

Задача 1. Нека R е релация над множеството $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$, такава че:

$$(a,b)R(c,d) \iff a \leq c \wedge b \mid d$$

Докажете, че R е частична наредба и намерете най-малкия елемент, ако такъв съществува.

Задача 2. Дефинираме $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ по следния начин:

$$f(a,b) = c \longleftrightarrow c > 0 \ \wedge \ c \text{ е решение на } ax - \frac{b}{x} = 0$$

Покажете, че f е коректно дефинирана и не е инекция. Изброимо ли е множеството:

$$\left\{(2023, b) | f(2023, b) \in \mathbb{Z}^+\right\} \quad ?$$

Упътване: Постройте биекция към познато изброимо или неизброимо множество.

Задача 3. След поредните ожесточени избори в Лапландия 6 партии - БРЕГ, БДПП, Ренесанс, СПД, ПСБ и НТИ успели да прескочат бариерата за влизане в Народното събрание, като завоювали съответно 69, 64, 37, 36, 23 и 11 мандата. Поради високото напрежение между управляващи и опозиция по случай наближаващата Коледа, се наложило депутатските места да бъдат специфично разпределени. Пленарната зала в парламента се състои от 2 части - Източна и Западна, всяка от които има по 200 места. Управляващите депутати от БРЕГ, БДПП и СПД трябва да бъдат настанени в едната част, а депутатите от Ренесанс, ПСБ и НТИ - в другата. Всяка седалка в залата си има или надпис с името на партията, за която е предназначена, или е обозначена като празна. Колко са всички възможности за надписване на местата в Народното събрание, ако се знае, че за всяка парламентарна група са надписани точно толкова места, колкото е и числеността ѝ?

Задача 4. Докажете, че за всяко разположение на 5 точки по повърхността на сфера има 4 от тях, които лежат на една затворена полусфера.

Задача 5. Всяка клетка на таблица 3×3 (с фиксирана ориентация) се оцветява или в синьо, или в червено. По колко начина може да стане това оцветяване, така че да няма червена област с размер 2×2?

Упътване: Приложете принципа за включване и изключване.

Примерни решения:

Задача 1. Релация на частична наредба(нестрога) наричаме релация, която е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. Ще докажем, че R притежава и трите свойства.

1) Рефлексивност : Нека $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ е произволно. Имаме, че $a \leq a$ и $b \mid b$, понеже $b = 1.b$ и $1 \in \mathbb{Z}$. Следователно $(a,b)R(a,b)$. Тъй като $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ беше произволно, следва, че R е рефлексивна релация.

2) Антисиметричност : Нека $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ са произволни и е изпълнено $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(a,b)$. Тогава имаме a $\leq c \wedge c \leq a$, от което следва $a = c$. Също така $b \mid d \wedge d \mid b$, т.е. $b = k_1.d \wedge d = k_2.b$ за $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Това е възможно само при $k_1 = k_2 = 1$, т.е. $b = d$. Получихме, че $(a,b) = (c,d)$. Тъй като $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ бяха произволни, следва, че R е антисиметрична релация.

3) Транзитивност : Нека $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ са произволни и е изпълнено $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f)$.

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b = k_1.d \text{ за } k_1 \in \mathbb{Z}$$
$$(c,d)R(e,f) \Leftrightarrow c \leq e \wedge d = k_2.f \text{ за } k_2 \in \mathbb{Z}$$
$$\Downarrow$$
$$a \leq e \wedge b = k_1.k_2.f \text{ и } (k_1.k_2) \in \mathbb{Z}$$

От последното следва $(a,b)R(e,f)$. Тъй като $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ бяха произволни, следва, че R е транзитивна релация.

От 1), 2) и 3) следва, че R е релация на нестрога частична наредба.

Нека (x,y) е най-малък елемент спрямо R. Тогава за произволно $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ имаме $(x,y)R(a,b)$, т.е. $x \leq a \wedge y \mid b$. При $a = 0$ получаваме $x \leq 0$ и тъй като $x \in \mathbb{N}$, то трябва $x = 0$. При $b = 1$ получаваме $y \mid 1$, което е възможно единствено при $y = 1$.
Ще проверим, че $(0,1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ е най-малък елемент. Нека $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ е произволно. Наистина, $0 \leq x$ и $1|y$, от което следва $(0,1)R(x,y)$. Тъй като $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ беше произволно, то $(\forall (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+)[(0,1)R(x,y)]$, което означава, че $(0,1)$ наистина е най-малък елемент спрямо R.

Задача 2.

c е решение на $ax - \dfrac{b}{x} = 0 \Leftrightarrow c$ е решение на $\dfrac{ax^2 - b}{x} = 0 \Leftrightarrow c$ е решение на $ax^2 - b = 0 \Leftrightarrow c \in \left\{ \sqrt{\dfrac{b}{a}}, -\sqrt{\dfrac{b}{a}} \right\}$

Следователно

$$c > 0 \;\wedge\; c \text{ е решение на } ax - \frac{b}{x} = 0 \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

т.е. $f(a,b)$ е определено еднозначно, т.е. f е коректно дефинирана.

Тогава можем да считаме, че $f(a,b) = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

За двойките $(1,4)$ и $(2,8)$ имаме, че $(1,4) \neq (2,8)$, но $f(1,4) = f(2,8) = 2$, откъдето f не е инекция.

$$\{(2023,b) | f(2023,b) \in \mathbb{Z}^+\} = \left\{ (2023,b) | \sqrt{\frac{b}{2023}} \in \mathbb{Z}^+ \right\} =$$

$$= \left\{ (2023,b) \mid \exists k \in \mathbb{Z}^+ \left(\frac{b}{2023} = k^2 \right) \right\} = \{ b \mid \exists k \in \mathbb{Z}^+ \left(b = 2023k^2 \right) \} =$$

$$= \left\{2023k^2 \mid k \in \mathbb{Z}^+\right\} = \left\{2023k^2 \mid k \in \mathbb{N}^+\right\}$$

От последното изброимостта е тривиална (има биекция към $\mathbb{N}^+$).

Задача 3. Ще разгледаме два непресичащи се случая:

1. Местата на БРЕГ, БДПП и СПД са разположени в Източната част, а местата на Ренесанс, ПСБ и НТИ са в Западната част.

   Тогава 69 места от 200 за БРЕГ могат да се изберат по $\binom{200}{69}$ начина. Веднъж избрани, в Източната част остават 131 места. От тях за БДПП избираме 64 по $\binom{131}{64}$ начина и остават 67 свободни, от които по $\binom{67}{36}$ начина избираме местата на СПД. Следователно начините за надписване на местата в Източната зала са:

   $$\binom{200}{69}\binom{131}{64}\binom{67}{36}$$

   Подобни разсъждения за Западната част и Ренесанс, ПСБ и НТИ водят до:

   $$\binom{200}{37}\binom{163}{23}\binom{140}{11} \text{ начини за надписване на Западната част}$$

   Тогава в този случай цялата зала се надписва по:

   $$\binom{200}{69}\binom{131}{64}\binom{67}{36}\binom{200}{37}\binom{163}{23}\binom{140}{11} \text{ начина}$$

2. Местата на БРЕГ, БДПП и СПД са разположени в Западната част, а местата на Ренесанс, ПСБ и НТИ са в Източната част.

   Случят е абсолютно аналогичен на предходния, понеже двете части имат равен брой места, т.е. начините за надписване на залата в този случай са:

   $$\binom{200}{69}\binom{131}{64}\binom{67}{36}\binom{200}{37}\binom{163}{23}\binom{140}{11} \text{ начина}$$

Следователно залата се надписва по общо:

$$2\binom{200}{69}\binom{131}{64}\binom{67}{36}\binom{200}{37}\binom{163}{23}\binom{140}{11} \text{ начина}$$

Задача 4. Нека т.O е центърът на сферата S и A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 са произволно разположени на S. Точките O, A_1, A_2 не лежат на една права, следователно има единствена равнина α, на която и трите лежат едновременно. Нека S_1 и S_2 са затворените полусфери, определени от S и α. Тогава $A_1, A_2 \in S_1$ и $A_1, A_2 \in S_2$. Сега точките A_3, A_4, A_5 са 3, а полусферите са 2, т.е има полусфера $S_3 \in \{S_1, S_2\}$, която съдържа поне 2 от трите точки (следва от принцип на Дирихле). Заедно с A_1 и A_2, S_3 съдържа поне 4 точки.

Задача 5. Ще отъждествяваме дъската с множеството $\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$ по следния начин:

(0,2)	(1,2)	(2,2)
(0,1)	(1,1)	(2,1)
(0,0)	(1,0)	(2,0)

Ще използваме принципа за включване и изключване, за да преброим оцветяванията на дъската, съдържащи червена област 2×2.

За целта разглеждаме следните 4 множества:

$$C: \text{ множество от всички оцветявания на дъската}$$

$$C_1: \text{ множество от оцветяванията, в които клетки } (0,0),(0,1),(1,0),(1,1) \text{ са червени}$$

$$C_2: \text{ множество от оцветяванията, в които клетки } (0,1),(0,2),(1,1),(1,2) \text{ са червени}$$

$$C_3: \text{ множество от оцветяванията, в които клетки } (1,0),(1,1),(2,0),(2,1) \text{ са червени}$$

$$C_4: \text{ множество от оцветяванията, в които клетки } (1,1),(1,2),(2,1),(2,2) \text{ са червени}$$

Тогава оцветяванията, в които няма червена област 2×2, са:

$$|C| - |C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4| =$$

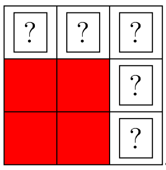
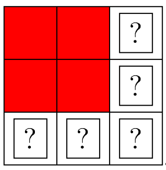
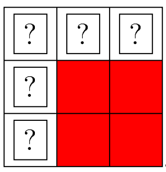
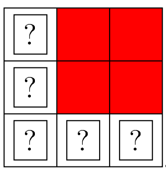
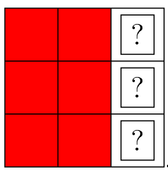
$$= |C| - (|C_1| + |C_2| + |C_3| + |C_4| -$$

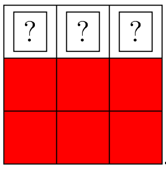
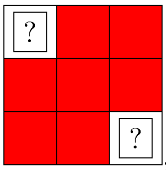
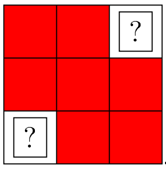
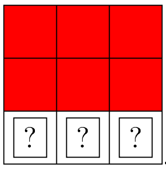
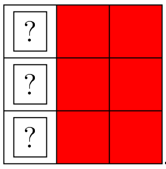
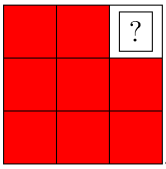
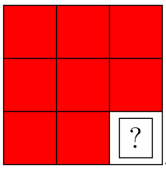
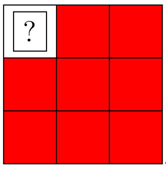
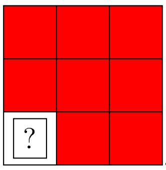
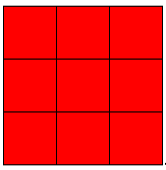
$$-|C_1 \cap C_2| - |C_1 \cap C_3| - |C_1 \cap C_4| - |C_2 \cap C_3| - |C_2 \cap C_4| - |C_3 \cap C_4| +$$

$$+|C_1 \cap C_2 \cap C_3| + |C_1 \cap C_2 \cap C_4| + |C_1 \cap C_3 \cap C_4| + |C_2 \cap C_3 \cap C_4| -$$

$$-|C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4|)$$

Ще преброим елементите на всяко сечение посредством описание на оцветяванията, които то съдържа:

- оцветяванията в C_1 са от вида: , т.е. $|C_1| = 2^5$.
- оцветяванията в C_2 са от вида: , т.е. $|C_2| = 2^5$.
- оцветяванията в C_3 са от вида: , т.е. $|C_3| = 2^5$.
- оцветяванията в C_4 са от вида: , т.е. $|C_4| = 2^5$.
- оцветяванията в $C_1 \cap C_2$ са от вида: , т.е. $|C_1 \cap C_2| = 2^3$.

- оцветяванията в $C_1 \cap C_3$ са от вида: , т.е. $|C_1 \cap C_3| = 2^3$.
- оцветяванията в $C_1 \cap C_4$ са от вида: , т.е. $|C_1 \cap C_4| = 2^2$.
- оцветяванията в $C_2 \cap C_3$ са от вида: , т.е. $|C_2 \cap C_3| = 2^2$.
- оцветяванията в $C_2 \cap C_4$ са от вида: , т.е. $|C_2 \cap C_4| = 2^3$.
- оцветяванията в $C_3 \cap C_4$ са от вида: , т.е. $|C_3 \cap C_4| = 2^3$.
- оцветяванията в $C_1 \cap C_2 \cap C_3$ са от вида: , т.е. $|C_1 \cap C_2 \cap C_3| = 2^1$.
- оцветяванията в $C_1 \cap C_2 \cap C_4$ са от вида: , т.е. $|C_1 \cap C_2 \cap C_4| = 2^1$.
- оцветяванията в $C_1 \cap C_3 \cap C_4$ са от вида: , т.е. $|C_1 \cap C_3 \cap C_4| = 2^1$.
- оцветяванията в $C_2 \cap C_3 \cap C_4$ са от вида: , т.е. $|C_2 \cap C_3 \cap C_4| = 2^1$.
- оцветяванията в $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$ са от вида: , т.е. $|C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4| = 2^0$.

Тогава след заместване в горната формула, получаваме, че търсените оцветявания са $2^9 - 4.2^5 + 4.2^3 + 2.2^2 - 4.2^1 + 1.2^0 = 417$.