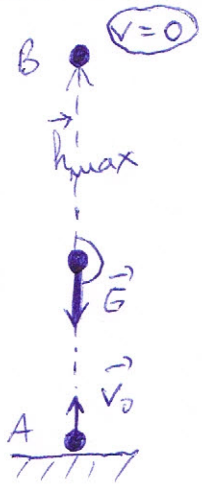
1

TEOREMA VARIAȚIEI ENERGIEI CINETICE

$$\boxed{\Delta E_c = L_{F_{rezultante}}} \Leftrightarrow \boxed{E_{c_{finală}} - E_{c_{inițială}} = L_{F_{rezultante}}}$$

Obs: $L_{F_{rezultante}} = L_{total}$ = suma lucrurilor mecanice ale forțelor ce acționează asupra punctului material în timpul variației energiei cinetice.

1) Să se deducă înălțimea maximă atinsă de un corp aruncat vertical în sus cu v_0. (fără frecări)



$$A \to B : \Delta E_c = L_{total} \Leftrightarrow$$

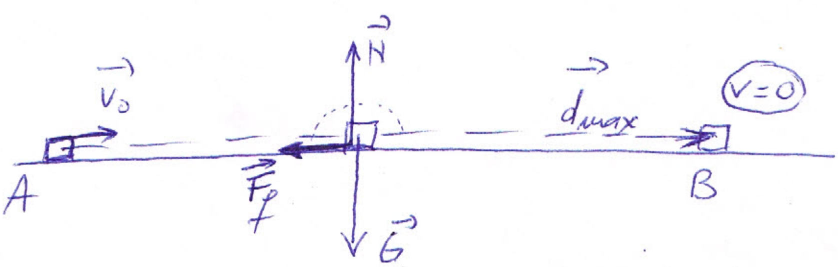
$$E_{c_B} - E_{c_A} = L_{total} \Leftrightarrow$$

$$0 - \frac{m v_0^2}{2} = L_G \Leftrightarrow$$

$$-\frac{m v_0^2}{2} = G \cdot h_{max} \cdot \cos 180° \Leftrightarrow -\frac{m v_0^2}{2} = -m g h_{max} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}}$$

2) Să se deducă distanța maximă parcursă de un corp lansat cu v_0 pe o suprafață orizontală cu coeficientul de frecare μ.



$$A \to B : \Delta E_c = L_{total} \Leftrightarrow E_{c_B} - E_{c_A} = L_{F_f} + \underbrace{L_G}_{0} + \underbrace{L_N}_{0} \Leftrightarrow$$

$$0 - \frac{m v_0^2}{2} = F_f \cdot d_{max} \cdot \cos 180° \Leftrightarrow -\frac{m v_0^2}{2} = -\mu m g d_{max} \Longrightarrow$$

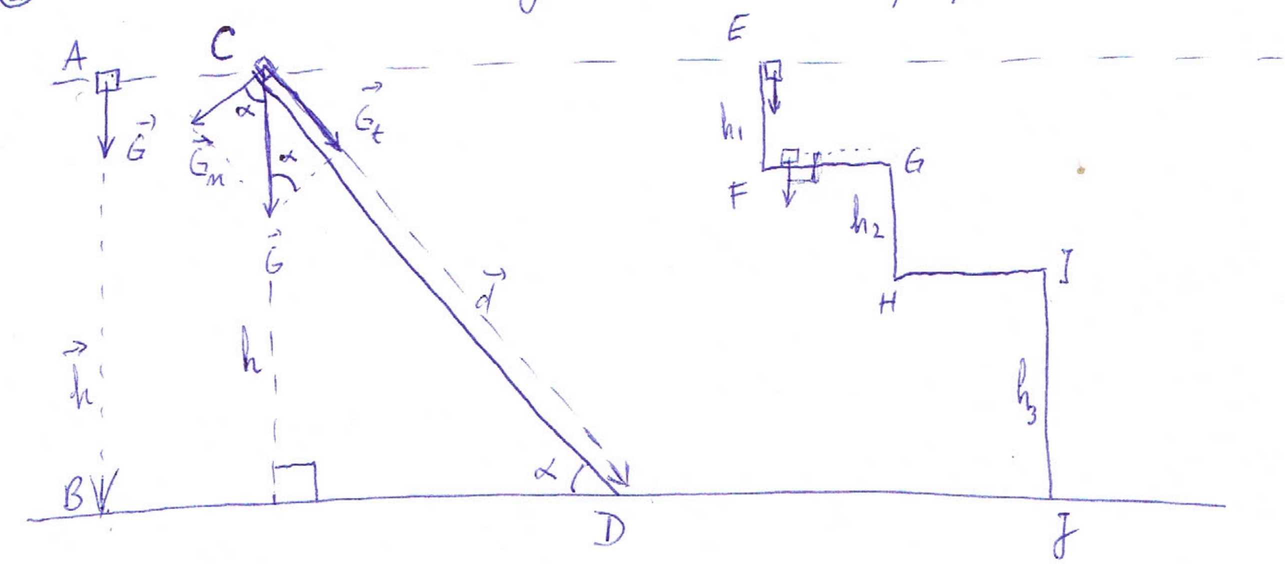
$$\boxed{d_{max} = \frac{v_0^2}{2\mu g}}$$

FORȚE CONSERVATIVE : G, F_e

FORȚĂ DISIPATIVĂ (NECONSERVATIVĂ) : F_f

● **Def**: Forța conservativă este forța al cărei lucru mecanic nu depinde de drum și nici de legea de mișcare a punctului material și depinde numai de pozițiile punctelor extreme ale traiectoriei.

① Demonstrăm că greutatea este forță conservativă:



$$L_G^{A\to B} = \vec{G}\cdot\vec{h} = G\cdot h\cdot\cos 0^\circ = mgh \qquad (1)$$

$$L_G^{C\to D} = \vec{G}\cdot\vec{d} = (\vec{G}_t+\vec{G}_n)\cdot\vec{d} = \vec{G}_t\cdot\vec{d}+\vec{G}_n\cdot\vec{d} = G_t\cdot d\cdot\cos 0^\circ + \overbrace{G_n\cdot d\cdot\cos 90^\circ}^{0} =$$

$$= mg\sin\alpha\cdot d = mg\frac{h}{d}\cdot d = mgh \qquad (2)$$

$$L_G^{E\to J} = L_G^{E\to F}+L_G^{F\to G}+L_G^{G\to H}+L_G^{H\to I}+L_G^{I\to J} =$$

$$= mgh_1 + 0 + mgh_2 + 0 + mgh_3 = mg(h_1+h_2+h_3) = mgh \qquad (3)$$

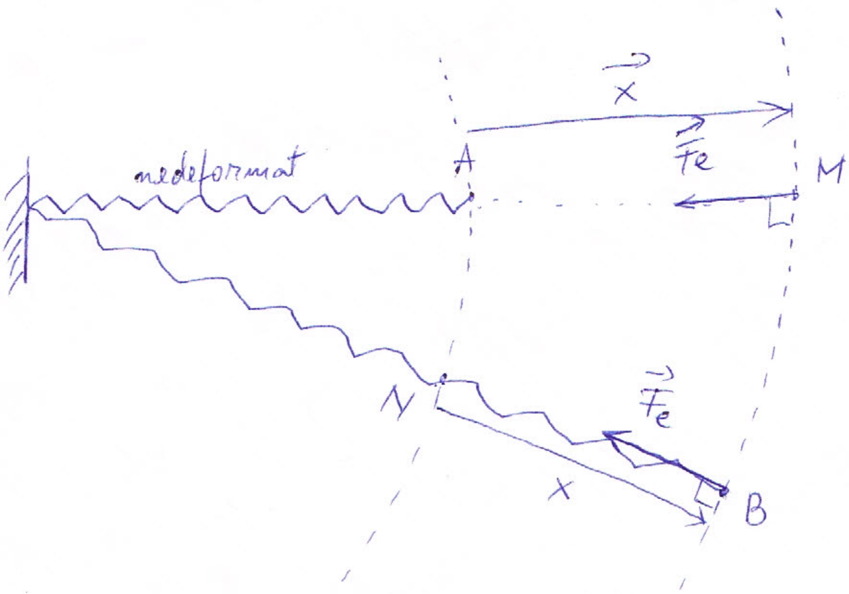
Din (1) (2) (3) $\Rightarrow$ L_G este același pe orice traseu $\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{G} \text{ este forță conservativă}}$$

3

2) Demonstrăm că forța elastică este forță conservativă

$F_e = Kx$



Calculăm L_{Fe} pe două trasee: $A \to M \to B$ și $A \to N \to B$

$$L_{Fe}^{A\to M\to B} = L_{Fe}^{A\to M} + L_{Fe}^{M\to B} = F_{e\,medie} \cdot x \cdot \cos 180 + F_e \cdot \overset{\frown}{MB} \cdot \cos 90 =$$

$$= \frac{0+Kx}{2} \cdot x \cdot (-1) = -\frac{Kx^2}{2} \qquad (1)$$

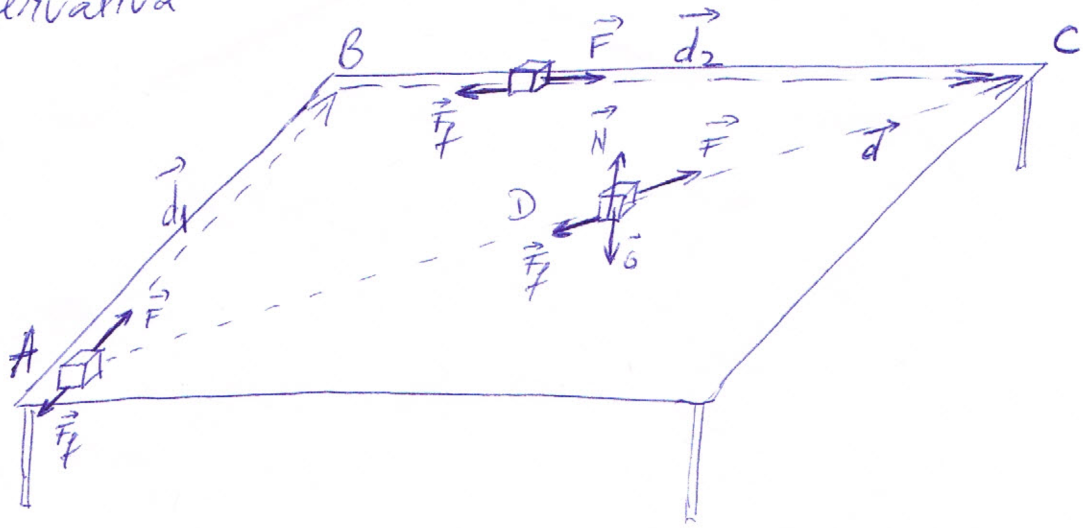
$$L_{Fe}^{A\to N\to B} = L_{Fe}^{A\to N} + L_{Fe}^{N\to B} = 0 + F_{e\,medie} \cdot x \cdot \cos 180^\circ =$$

$$= \frac{0+Kx}{2} \cdot x \cdot (-1) = -\frac{Kx^2}{2} \qquad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow L_{Fe}$ este același pe orice traseu $\Rightarrow$

$\boxed{\vec{F_e} \text{ este forță conservativă}}$

3 Demonstrăm că forța de frecare <u>nu</u> este forță conservativă



$$L_{F_f}^{A\to B\to C} = L_{F_f}^{A\to B} + L_{F_f}^{B\to C} = F_f\cdot d_1\cdot\cos 180^\circ + F_f\cdot d_2\cdot\cos 180^\circ =$$

$$= -\mu m g d_1 - \mu m g d_2 = -\mu m g (d_1 + d_2) \qquad (1)$$

$$L_{F_f}^{A\to D\to C} = F_f\cdot d\cdot\cos 180^\circ = -\mu m g d \qquad (2)$$

(1) și (2), $d_1 + d_2 > d \Rightarrow L_{F_f}^{A\to B\to C} \neq L_{F_f}^{A\to D\to C} \Rightarrow$

$\boxed{\vec{F_f} \text{ NU este forță conservativă}}$ pt. că L_{F_f} depinde de drum

<u>Obs</u>: $\vec{F_f}$ este <u>forță disipativă</u>: disipă energia sub formă de căldură; prin frecare corpurile se încălzesc.

<u>Obs</u>: Dacă există forțe de frecare ⇒ nu se conservă energia mecanică. O parte din energia mecanică inițială se transformă în căldură.

ENERGIA POTENȚIALĂ (DE POZIȚIE)

Def: Energia potențială = energia unui sistem fizic care „poate" efectua lucru mecanic prin schimbarea poziției părților sale componente care interacționează prin forțe conservative:

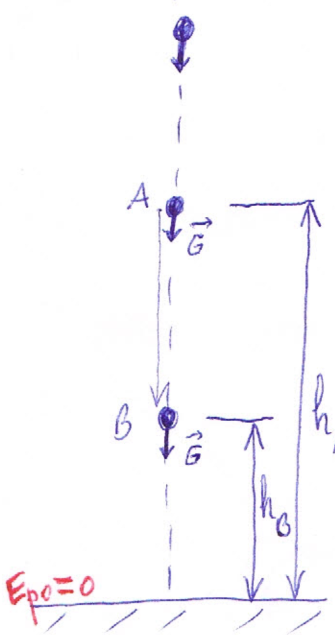
Ex: sisteme care au energie potențială
- sistemul Pământ – corp aflat la înălțime : $\vec{G}$: forța conservativă
- resort elastic comprimat : $\vec{F_e}$: forța conservativă

Def: Variația energiei potențiale este egală și de semn opus cu lucrul mecanic al forței conservative

$$\boxed{\Delta E_p = -L_{F\,conservative}}$$

① ENERGIA POTENȚIALĂ GRAVITAȚIONALĂ

Corp aflat în cădere:



Def: $\boxed{\Delta E_{pg} = -L_G}$

$A \to B: \Rightarrow E_{pB} - E_{pA} = -L_G^{A\to B} \Longleftrightarrow$

$E_{pB} - E_{pA} = -G\cdot(h_A - h_B)\cdot\cos 0°$

$E_{pB} - E_{pA} = -mgh_A + mgh_B$

$E_{pB} - mgh_B = E_{pA} - mgh_A \Longrightarrow$

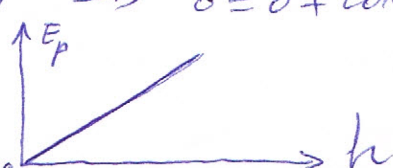
în $\forall$ stare $E_p - mgh = const. \Longrightarrow$

$E_p = mgh + const.$

Convenție: La $h=0$ se alege $E_{p0}=0$ (NIVEL DE ENERGIE POTENȚIALĂ NULĂ) $\Longrightarrow$ $0 = 0 + const. \Rightarrow$

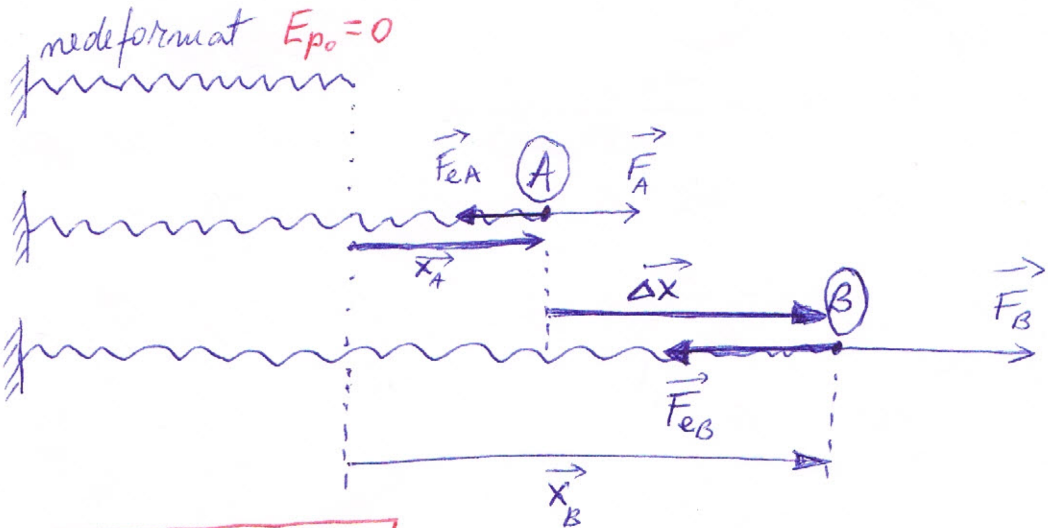
$$\boxed{E_p = mgh}$$

grafic



2 ENERGIA POTENȚIALĂ ELASTICĂ

Alungirea unui resort (fir) elastic:



<u>Def</u>: $\boxed{\Delta E_{p_e} = -L_{F_e}}$

$$A \to B: \Rightarrow \quad E_{pB} - E_{pA} = -L_{F_e}^{A\to B} \quad \Longleftrightarrow$$

$$E_{pB} - E_{pA} = -\vec{F}_{e\,medie} \cdot \vec{\Delta x} \cdot \cos 180^\circ \quad \Longleftrightarrow$$

$$E_{pB} - E_{pA} = -\frac{F_{eA}+F_{eB}}{2} \cdot \Delta x \cdot (-1) \quad \Longleftrightarrow$$

$$E_{pB} - E_{pA} = \frac{Kx_A + Kx_B}{2}(x_B - x_A) \quad \Longleftrightarrow$$

$$E_{pB} - E_{pA} = \frac{K(x_B^2 - x_A^2)}{2} \quad \Longleftrightarrow$$

$$E_{pB} - E_{pA} = \frac{Kx_B^2}{2} - \frac{Kx_A^2}{2} \Rightarrow E_{pB} - \frac{Kx_B^2}{2} = E_{pA} - \frac{Kx_A^2}{2} \Rightarrow$$

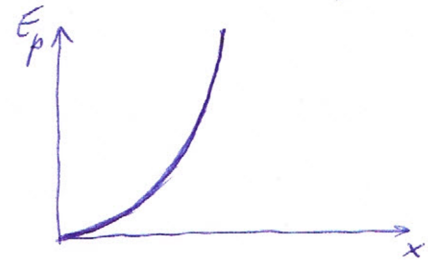
în $\forall$ stare $E_p - \frac{Kx^2}{2} = const. \Rightarrow \underline{E_p = \frac{Kx^2}{2} + const.}$

Convenție: Pentru $x=0$ (resort nedeformat) se alege $E_{p0}=0$ (NIVEL DE ENERGIE POTENȚIALĂ NULĂ) $\Rightarrow$

$0 = 0 + const. \Rightarrow$

$$\boxed{E_p = \frac{Kx^2}{2}}$$

grafic: (grad. II)

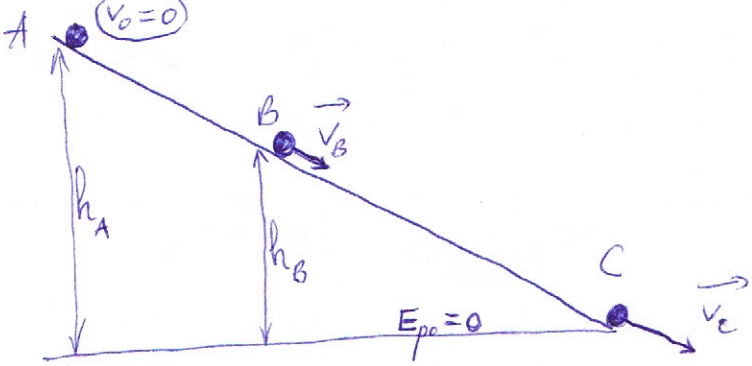


LEGEA CONSERVĂRII ENERGIEI

ENUNȚ: Energia mecanică totală a unui sistem izolat, între părțile căruia se exercită numai forțe conservative este constantă în timp (se conservă

$$\boxed{E_T = E_c + E_p = \text{constant}}$$

① Coborâre liberă pe plan înclinat fără frecare:

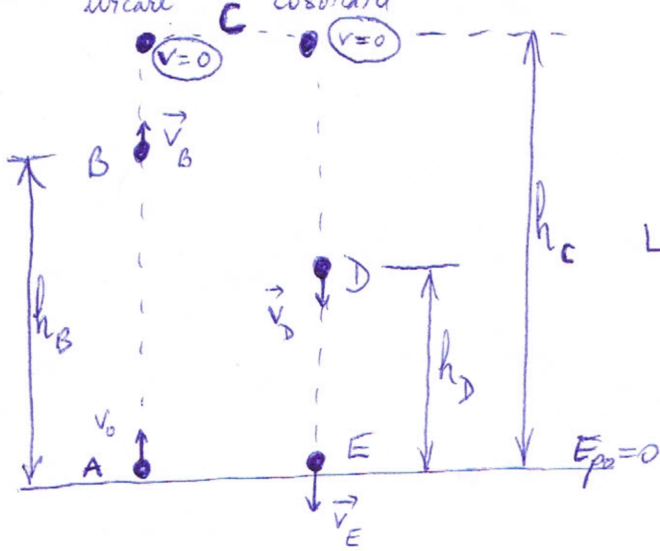


$$E_{TA} = E_{TB} = E_{Tc}$$

$$\Updownarrow$$

$$mgh_A = mgh_B + \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_c^2}{2}$$

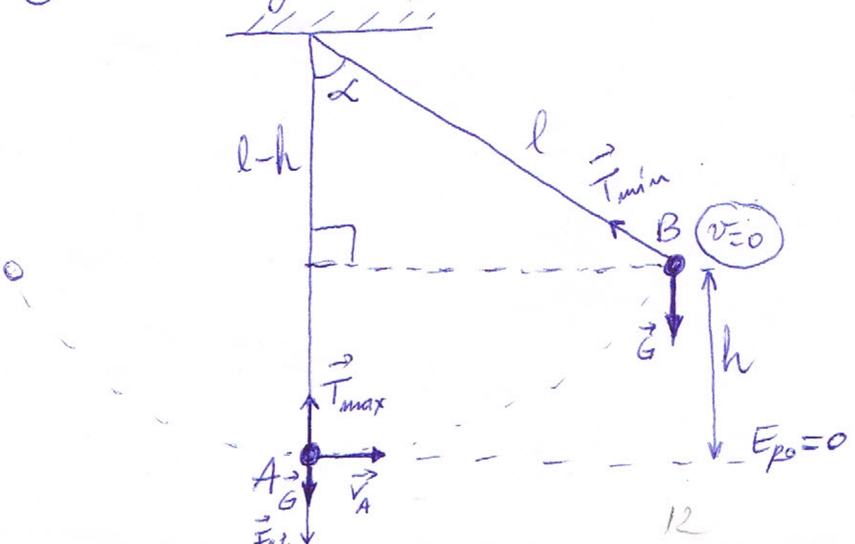
② Aruncare în sus cu v_0:



$$E_{TA} = E_{TB} = E_{Tc} = E_{TD} = E_{TE}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh_B + \frac{mv_B^2}{2} = mgh_c = mgh_D + \frac{mv_D^2}{2} = \frac{mv_E^2}{2}$$

③ Pendul gravitațional:



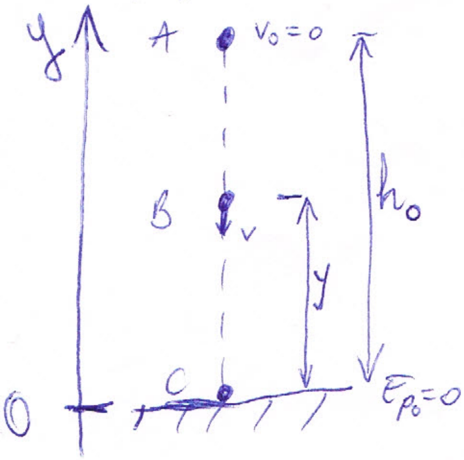
$$E_{TA} = E_{TB}$$

$$\frac{mv_A^2}{2} = mgh$$

$$\cos\alpha = \frac{l-h}{l} \Rightarrow$$

$$h = l(1-\cos\alpha)$$

4 Pentru un corp aflat în cădere liberă, graficele E_p, E_c, E_T în funcție de înălțime (y)



Pt. un punct oarecare (B):

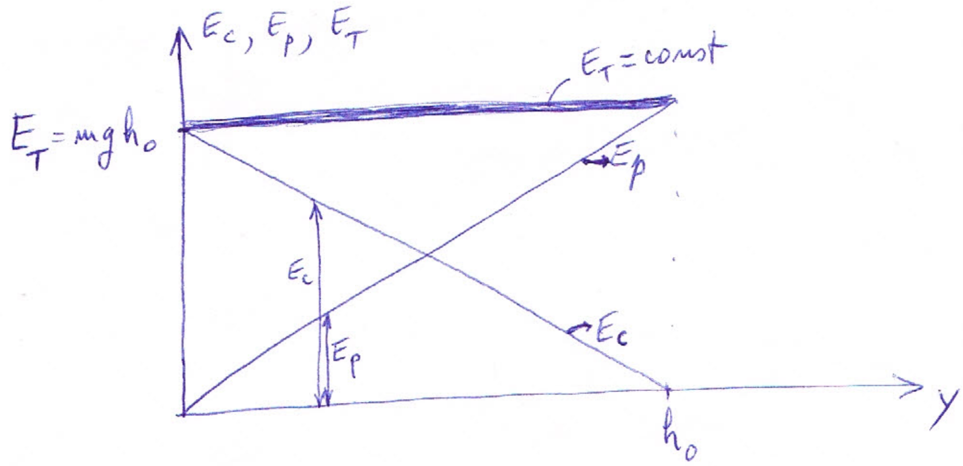
$$\boxed{E_{p_B} = mgy}$$

$$E_{c_B} = \frac{mv^2}{2}$$

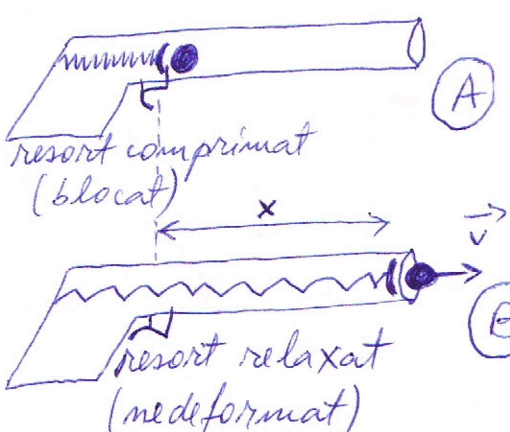
$$E_{T_B} = E_{c_B} + E_{p_B} = \frac{mv^2}{2} + mgy$$

Conservarea energiei: $E_{T_A} = E_{T_B} \Rightarrow mgh_0 = mgy + E_{c_B} \Rightarrow$

$$\boxed{E_{c_B} = mgh_0 - mgy} \quad \text{iar} \quad \boxed{E_{T_B} = E_{T_A} = mgh_0 = \text{constant}}$$



5 Pistol jucărie (praștie, arc):

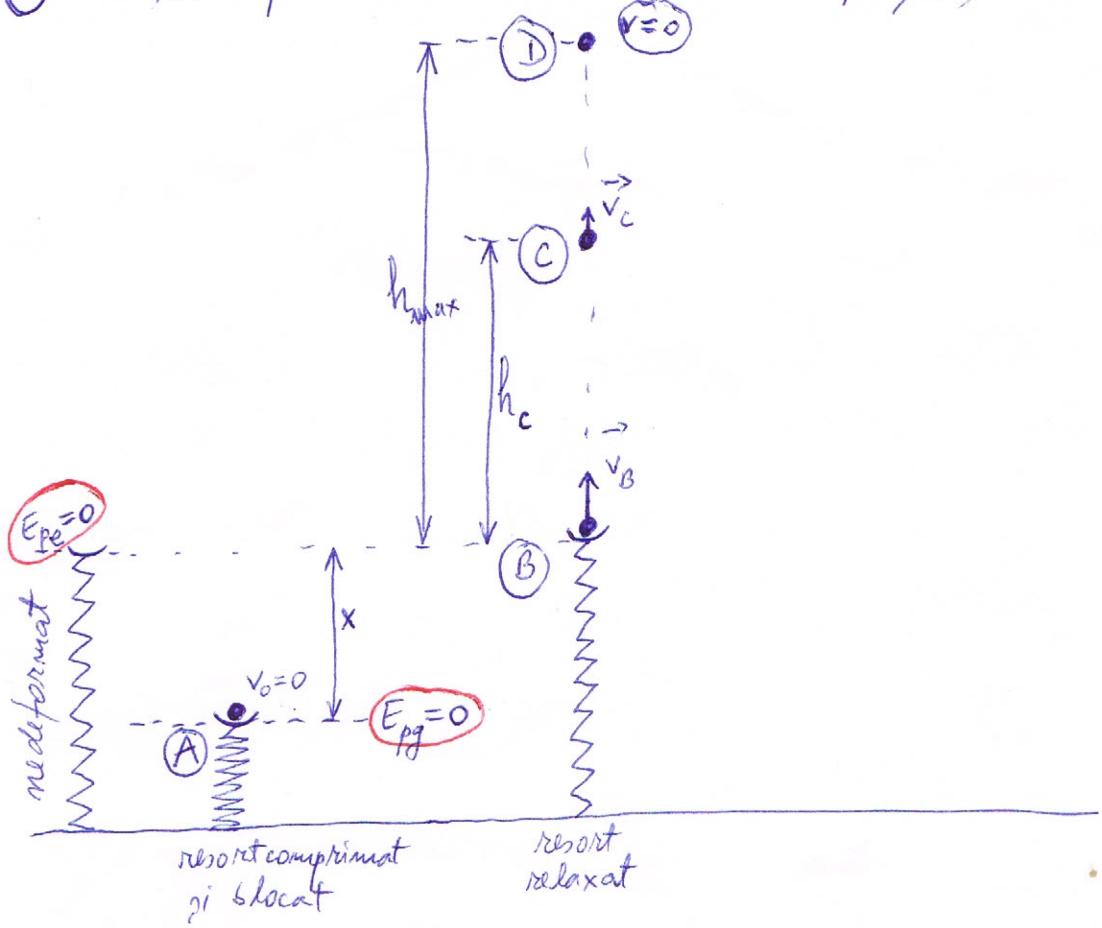


A : starea inițială : $\begin{cases} E_{pe} = \frac{Kx^2}{2} \\ E_c = 0 \end{cases}$

B : starea finală : $\begin{cases} E_{pe} = 0 \\ E_c = \frac{mv^2}{2} \end{cases}$

$$\cancel{E} \quad E_{T_A} = E_{T_B} \Leftrightarrow \underline{\frac{Kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2}}$$

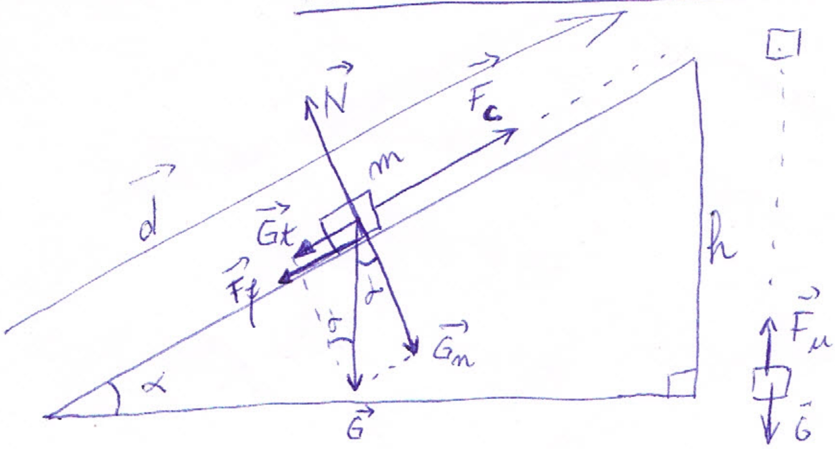
6. Lansare pe verticală dintr-un arc (praștie)



$$E_{T_A} = E_{T_B} = E_{T_C} = E_{T_D}$$

$$\frac{Kx^2}{2} = \frac{mv_B^2}{2} + mgx = \frac{mv_C^2}{2} + mg(x+h_c) = mg(x+h_{max})$$

RANDAMENTUL PLANULUI ÎNCLINAT



$$\eta = \frac{L_{util}}{L_{consumat}}$$

L_{util} = lucrul mecanic realizat în conformitate cu scopul mecanismului. Scopul planului înclinat este ridicarea corpului la înălțimea h. $\Rightarrow$

$$L_{util} = F_u \cdot h \implies L_{util} = mgh$$

$L_{consumat}$ = lucrul mecanic consumat în realitate pentru a ridica corpul la înălțimea h pe planul înclinat (trebuie învinsă și frecarea) $\Rightarrow$

$$L_{consumat} = F_c \cdot d = (G_t + F_f)\cdot d$$

$$\eta = \frac{mgh}{(G_t + F_f)\cdot d} = \frac{mgh}{(mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha)\cdot d} = \frac{mgh}{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\cdot d}$$

$$h = d\sin\alpha$$

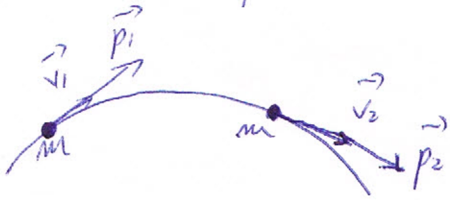
$$\eta = \frac{\cancel{d}\sin\alpha}{(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\cdot\cancel{d}} \quad \begin{matrix} /:\cos\alpha \\ /:\cos\alpha \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\eta = \frac{tg\,\alpha}{tg\,\alpha + \mu}} \iff \boxed{\eta = \frac{tg\,\alpha}{tg\,\alpha + tg\,\varphi}}$$

1

TEOREMA VARIAȚIEI IMPULSULUI PUNCTULUI MATERIAL

Impulsul : $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ $[p]_{SI} = 1\,Kg \cdot \frac{m}{s} = 1\,N \cdot s$



Th. var. impulsului : $\boxed{\Delta \vec{p} = \vec{H}}$

Def : $\boxed{\vec{H} = \vec{F}_m \cdot \Delta t}$ se numește impulsul forței $[H]_{SI} = 1\,N \cdot s$

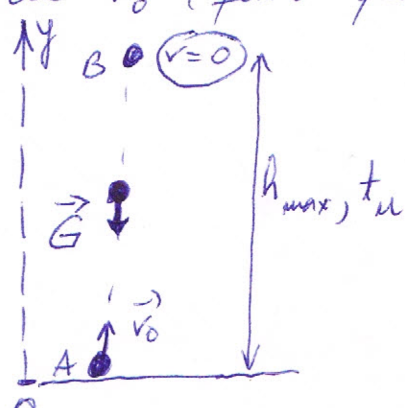
Obs. $\vec{F}_m$ = forța rezultantă medie (dacă forța rezultantă nu este constantă)

Expresii pt. th. var. impulsului:

$\boxed{\Delta \vec{p} = \vec{F}_m \cdot \Delta t} \iff \boxed{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}_m \cdot \Delta t}$

Semnificație : Forțele produc variație de impuls, adică variație a vitezei.

1 Să se afle timpul de urcare la înălțimea maximă pentru un corp aruncat vertical în sus cu v_0 (fără frecări).



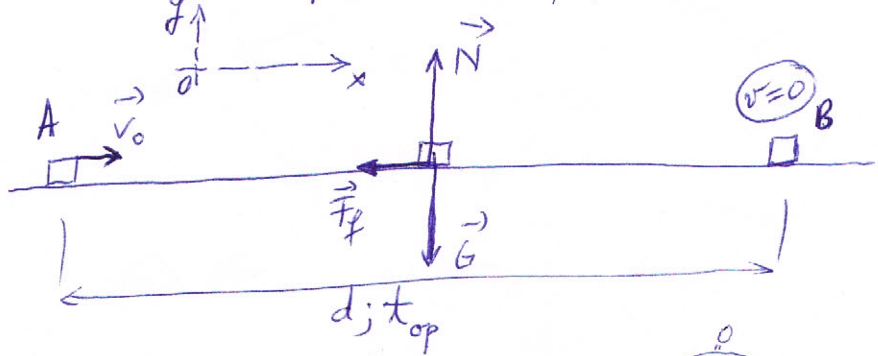
$A \to B : \Delta \vec{p} = \vec{F}_m \cdot \Delta t \iff \vec{p}_B - \vec{p}_A = \vec{G} \cdot t_u$

$\Rightarrow 0 - m\vec{v}_0 = \vec{G} \cdot t_u$

Pe Oy (scalar): $-mv_0 = -mg \cdot t_u \Rightarrow$

$$\boxed{t_u = \frac{v_0}{g}}$$

2) Să se afle timpul de oprire pentru un corp lansat cu v_0 pe o suprafață orizontală cu frecare (μ).



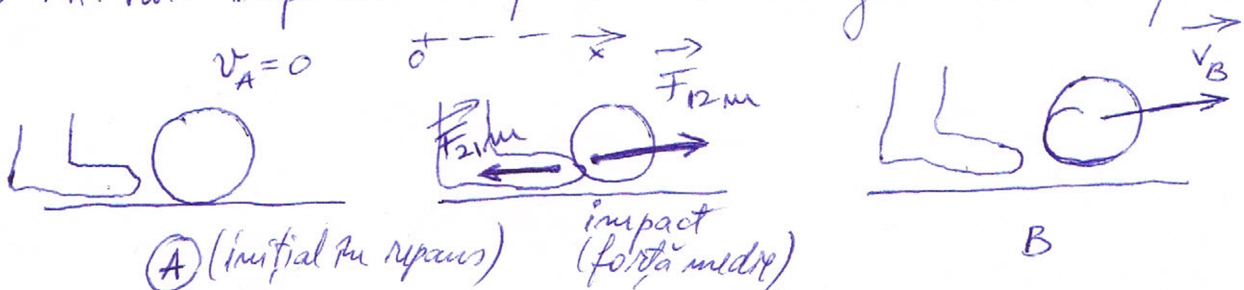
$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_m \cdot \Delta t \iff \vec{p}_B - \vec{p}_A = (\vec{F}_f + \underbrace{\vec{G} + \vec{N}}_{0}) \cdot t_{op} \iff$$

$$0 - m\vec{v}_0 = \vec{F}_f \cdot t_{op}$$

Pe Ox (scalar): $-mv_0 = -F_f \cdot t_{op} \iff$

$$mv_0 = \mu m g t_{op} \Rightarrow \boxed{t_{op} = \frac{v_0}{\mu g}}$$

3) Th. var. impulsului pentru o minge lovită cu piciorul



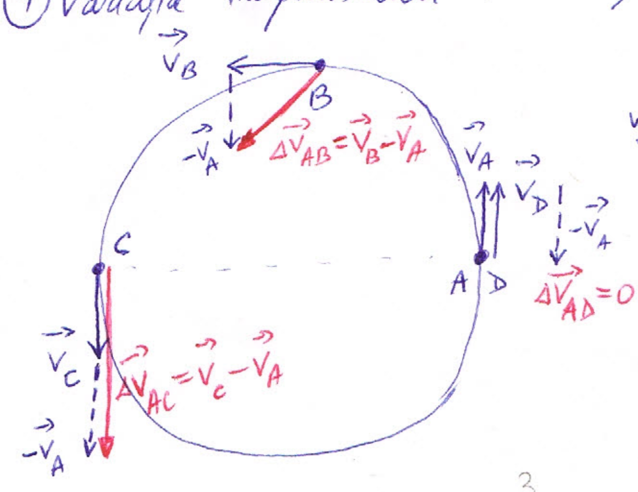
$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_m \cdot \Delta t \iff m\vec{v}_B - 0 = \vec{F}_{12m} \Delta t$$

$$Ox: \quad mv_B = F_{12m} \cdot \Delta t$$

Δt = „timpul de impact"

4) Variația impulsului în mișcarea circulară uniformă

$$\Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = m \cdot \Delta\vec{v}$$

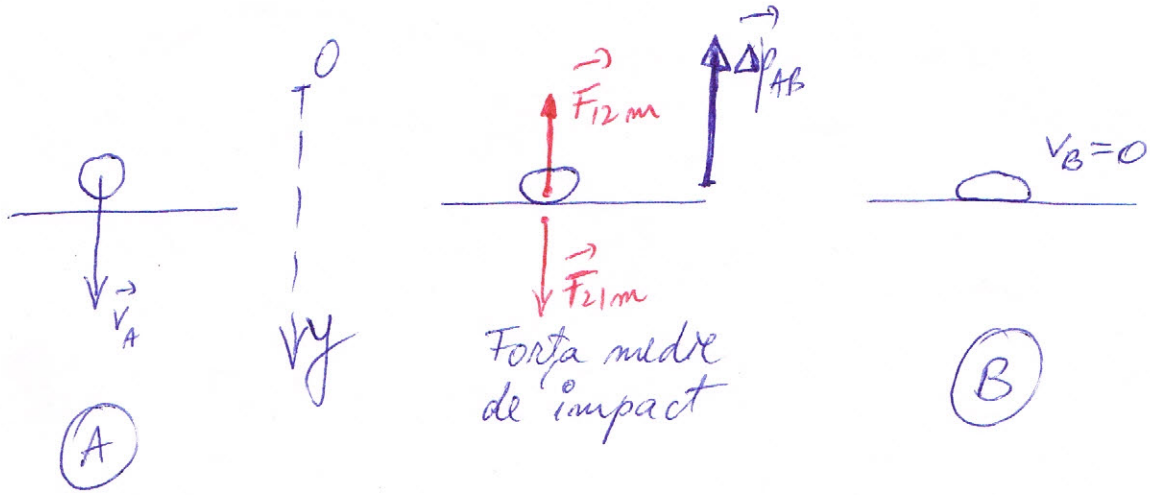


$$v_A = v_B = v_C = v_D = v. \quad (|\vec{v}| = ct.)$$

desen $\Rightarrow$
$$\Delta p_{AB} = m \cdot \Delta v_{AB} = mv\sqrt{2} \quad (\tfrac{T}{4}$$
$$\Delta p_{AC} = m \cdot \Delta v_{AC} = 2mv \quad (\tfrac{T}{2}$$
$$\Delta p_{AD} = m \cdot \Delta v_{AD} = 0 \quad (T$$

(3)

(5) Variația impulsului și th. var. impulsului în ciocnirea plastică cu un perete:



$\vec{\Delta p} = \vec{F}_m \cdot \Delta t \iff 0 - m\vec{v}_A = \vec{F}_{12m} \cdot \Delta t \Rightarrow$

Pe Oy (scalar): $-mv_A = -F_{12m} \cdot \Delta t \;/\cdot(-1) \Rightarrow$

$mv_A = F_{12m} \cdot \Delta t \Rightarrow \boxed{F_{12m} = \frac{mv_A}{\Delta t}}$

Variația impulsului: $\vec{\Delta p}_{AB} = \vec{p}_B - \vec{p}_A = -m\vec{v}_A$

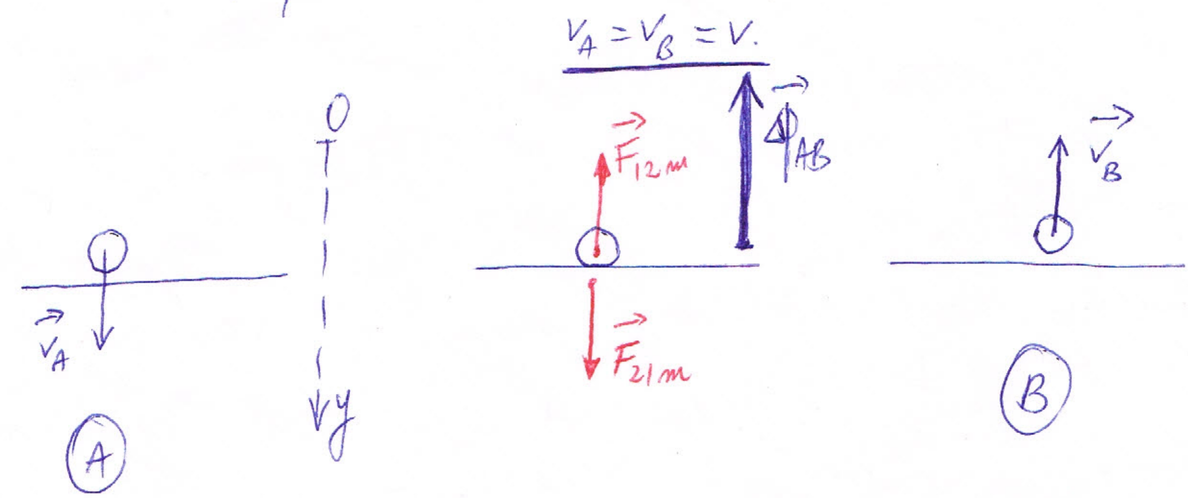
Pe Oy (scalar): $\boxed{\Delta p_{AB} = -mv_A}$

„–": $\vec{\Delta p}_{AB}$ are sensul opus vectorului $\vec{v}_A$,

$\vec{\Delta p}_{AB}$ are sensul forței $\vec{F}_{12m}$ care produce variația impulsului, adică micșorarea vitezei (de la v_A la $v_B=0$).

Δt: „durata impactului" (Δt - mic)

6 Variația impulsului și th. var. impulsului în ciocnirea perfect elastică cu un perete:



$\Delta\vec{p} = \vec{F}_m \cdot \Delta t \iff \vec{p}_B - \vec{p}_A = \vec{F}_{12m} \cdot \Delta t \iff m\vec{v}_B - m\vec{v}_A = \vec{F}_{12m}\Delta t$

Pe Oy (scalar): $-mv_B - mv_A = -F_{12m} \cdot \Delta t \Rightarrow$

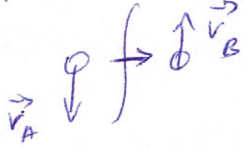
$$mv_B + mv_A = F_{12m} \cdot \Delta t \Rightarrow \boxed{F_{12m} = \frac{2mv}{\Delta t}}$$

Variația impulsului: $\Delta\vec{p}_{AB} = \vec{p}_B - \vec{p}_A = m\vec{v}_B - m\vec{v}_A$

Pe Oy (scalar): $\Delta p_{AB} = -mv_B - mv_A \Rightarrow \boxed{\Delta p_{AB} = -2mv}$

„–": $\Delta\vec{p}_{AB}$ are sensul opus lui $\vec{v}_A$ (axei Oy)

Forța $\vec{F}_{12m}$ produce, în timpul Δt, variația impulsului (variația vitezei), adică schimbarea sensului vitezei



Δt: „durata impactului".

Obs: Pentru o ciocnire elastică (NU perfect elastică): $v_B < v_A$ (pierde energie cinetică)

$$\Rightarrow \boxed{F_{12m} = \frac{m(v_A + v_B)}{\Delta t}} \quad \text{și} \quad \boxed{\Delta p_{AB} = -m(v_A + v_B)}$$