Recapitulare - sub. III

1) Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$; $a_n = \frac{2n+1}{n^2}$. a) Studiați monotonia și mărginirea șirului

$\sqrt{3n^2+n+1}$

b) Calculați $\lim_{n\to\infty}(n\, a_n)$

2) Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$; $f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ și $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = f(1)+f(2)+\dots+f(n)$

a) Asimptotele la G_f b) $\lim_{n\to\infty}(2n+1)(a_n-\ln n)$

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ a) Asimptotele la G_f

b) Ar. că $\forall m>0$, ecuația $f(x)=m$ are sol. unică în $\mathbb{R}$.

4) Fie $n\in\mathbb{N}^*$; $I_n=\int_0^1 x^n\cdot e^x\,dx$ a) Calculați I_2

b) Ar. că $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

5) a) Ar. că $\ln(x+1)\leq x$, $\forall x\in(-1;\infty)$ a) Calculați I_2

b) ~~Fie~~ $I_n=\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Ar. că $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

6) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ a) Calculați $\int_0^1 \frac{f(x)+x^2f(x)}{x^4+1}\,dx$

b) Calc. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\cdot\int_1^x f(t)\,dt$

7) Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}\to\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$. Determinați coordonatele punctului situat pe G_f, în care tangenta la G_f este paralelă cu axa Ox

8) Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ a) Ar. că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = 1-\frac{2}{e}$

b) Ar. că $\lim_{n\to\infty}\int_1^e \frac{f(x)}{x^n}\,dx = 0$

9) Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$; $f(x)=2x^2-\sqrt{x}$.

a) Aflați Im f b) Ar. că $2e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

10) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=\operatorname{arctg} x$

a) Ar. că $\int_0^1 f(\operatorname{tg} x)\,dx=\frac{1}{2}$ b) Calc. $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx$

c) Ar. că $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+2}\leq (n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx\leq \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

11) Fie $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$; $f(x)=x\ln(x+1)$. Calc. $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\cdot\int_0^t f(x)\,dx$

12) Fie $I_n=\int_0^1 (1-x)^n e^x\,dx$. Ar. că $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

13) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{x+1}{e^x-x}$

a) Aflați ec. tangentei la G_f în $x=2$

b) Calculați $\lim_{x\to\infty} f(-x)$

14) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

a) Ar. că orice primitivă este crescătoare

b) Fie $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$; $n\in\mathbb{N}^*$. Ar. că $nI_n=\sqrt{5}-4(n-1)I_{n-2}$ $\forall n\geq 3$

15) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$. Ar. că $f(2\sqrt{3})<f(3\sqrt{2})$

16) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$. Aflați Im f

17) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=1-\frac{1}{e^x+1}$. Ar. că $\int_{-1}^1 x(f(x)+f(-x))\,dx=0$

18) Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{e^x}{x+e^x}$. Ar. că $f(x)\geq\frac{e}{e+1}$, $\forall x\in(0;\infty)$

19) Fie $I_n=\int_0^1 x\cdot e^{-nx^2}dx$ a) Ar. că $I_{n+1}\leq I_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

b) Ar. că $I_n=\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

20) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$. Verificați dacă f are pct. de inflexiune

21) Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$; $f(x)=\ln x$. Aflați $n\in\mathbb{N}^*$ dacă

$$\int_1^e \frac{1}{x}\cdot(f(x))^n dx=\frac{1}{2021}.$$

22) Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$; $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$. a) Ar. că f este convexă pe $(1;\infty)$

b) Ar. că $\lim\limits_{n\to\infty}(f'(2)+f'(3)+f'(4)+\dots+f'(n))=-\frac{3}{2}$

23) Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$; $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

a) Ar. că $\int_1^{e^2}(f(x)-\sqrt{x})\ln x\,dx=4$ b) Aflați $a>1$ dacă

$$\int_1^a f^2(x)\,dx=\ln a+\frac{7}{2}$$

24) Fie $f:(-1;1)\to\mathbb{R}$; $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$. Calculați $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)dx$

25) Fie $f:(4;\infty)\to\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{1}{x(x-4)}$

a) Calculați $\int_5^6\frac{f(x)}{x}dx$ b) Ar. că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\int_n^{n+1}f(x)\,dx\right)=1$

26) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{x^2-3}{e^x}$

a) În ce punct de pe G_f tangenta la G_f este paralelă cu dr. $6x+2y-15=0$

b) Ar. că $-2e \le f(x) \le \frac{6}{e^3}$, $\forall x \in [-1; \infty)$

27) Fie $f: (-1; \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 6\ln(x+1)$

a) Aflați $\min f(x)$ b) Calc. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{f(x)}}{x}$

28) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = (x^2+x+1) \cdot e^x$

a) Ar. că orice primitivă a lui f are exact 2 pct. de inflexiune

b) Ar. că $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(x)dx = 1$

29) Fie $f: (0; \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = e^x + \ln x + 1$. Dem. că ecuația $f(x) = 0$ are sol. unică în $(0; 1)$

30) Fie $f: (-2; \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+2)$

a) Ar. că f e convexă pe $(-2; \infty)$ b) Calc. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$

31) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3 - 12x$. Aflați $a = ?$ dacă ec. $f(x) = a$ are 3 sol. reale distincte

32) Fie $f: (-1; \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

a) Ar. că orice primitivă a lui f = str. cresc. pe $(-1; \infty)$

b) Calc. $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} dx$ c) Calc. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\int_x^{2x} f(t)dt}{x}$

That's all Folks! :)

Baftă!