

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Simulare**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Se consideră numărul complex  $z = 3 + 2i$ . Arătați că  $z + \frac{13}{z} = 6$ .
- 5p** 2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 5$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2 + x$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(-a)$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^{3x+5} = 9 \cdot 3^{x+1}$ .
- 5p** 4. Se consideră  $A$ , o mulțime cu 4 elemente. Calculați probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor lui  $A$ , aceasta să aibă un număr impar de elemente.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,3)$ ,  $B(3,5)$  și  $C(0,6)$ . Determinați ecuația dreptei  $d$  care trece prin punctul  $A$  și este paralelă cu mediana din vârful  $C$  a triunghiului  $ABC$ .
- 5p** 6. Calculați lungimea laturii  $BC$  a triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = 2$ ,  $AC = 2\sqrt{3}$  și  $B = \frac{\pi}{3}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră  $a$  un număr real nenul și matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & -4x \\ 0 & a & 0 \\ x & 0 & 1-2x \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(x)) = a$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** b) Determinați numărul real nenul  $a$  astfel încât  $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p** c) Pentru  $a = 1$ , determinați matricea  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  pentru care  $A(2) \cdot X = A(3)$ .
2. Pe mulțimea  $M = [0, +\infty)$  se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \log_2(2^x + 2^y - 1)$ .
- 5p** a) Arătați că  $0 * 2021 = 2021$ .
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p** c) Determinați  $x \in M$  pentru care  $x * (x+1) * (x+2) = \log_2 54$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{1-x^2}{2(x^2+1)\sqrt{(x^2+x+1)(x^2+1)}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}} + \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}} \leq \sqrt{6}$ , pentru orice număr real  $x$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 3 - 2 \ln x$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_1^3 (f(x) + 2 \ln x) dx = 14$ .

- 5p** b) Calculați  $\int_1^e (2x + 3 - f(x)) dx$ .
- 5p** c) Arătați că  $\int_0^1 x^2 f(x^3 + 1) dx = \frac{4(2 - \ln 2)}{3}$ .