FIZICA

MIHAELA CHIRIȚĂ

CULEGERE DE PROBLEME

propuse și rezolvate

pentru clasa a IX-a și BACALAUREAT

Conține:

MIC BREVIAR TEORETIC și FORMULE

Editura Tamar

Mihaela CHIRIȚĂ

Fizică

CULEGERE DE PROBLEME propuse și rezolvate

pentru **CLASA A IX-A**

și examenul de BACALAUREAT

Conține:
MIC BREVIAR TEORETIC
ȘI FORMULE

Editura **Tamar**
2016

Copyright © Editura TAMAR 2016

Toate drepturile asupra acestei lucrări aparţin editurii Tamar

Nicio parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă în mod electronic, mecanic, prin fotocopiere sau prin orice alt mod, fără acordul scris, dat în prealabil de editor

Lucrare realizată de Mihaela Chiriţă

profesor/profesoară la Colegiul Naţional Sf. SAVA Bucureşti

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
CHIRIŢĂ, MIHAELA
Fizică : culegere de probleme propuse şi rezolvate pentru clasa a IX-a şi bacalaureat : conţine mic breviar teoretic şi formule / Mihaela Chiriţă. - Bucureşti : Tamar, 2016
ISBN 978-606-8010-52-6

53(075)(076)

Comenzile se pot face:

- telefon mobil: 0742.014.405
- tel/fax: 021/ 411.33.93
- e-mail: tamarprint@gmail.com

În memoria tatălui meu

Recomandări

Această culegere de probleme se adresează atât elevilor de clasa a IX-a cât şi elevilor care se pregătesc să susţină un examen la mecanică sau optică.

Ca să puteţi să rezolvaţi problemele trebuie să cunoaşteţi teoria din manualul de clasa a IX-a. Încercaţi să rezolvaţi problemele în ordinea propusă (gradual). Pentru a obţine o pregătire minimă este necesar să rezolvaţi prima treime a problemelor din fiecare capitol. Pentru a obţine o pregătire medie trebuie să rezolvaţi şi a doua treime din problemele propuse. Dacă veţi reuşi să rezolvaţi toate problemele înseamnă că această disciplină nu are secrete pentru voi. În cazul în care nu reuşiţi să rezolvaţi o problemă, amânaţi o zi sau două şi apoi încercaţi din nou. Dacă nici în acest caz nu reuşiţi, citiţi rezolvarea, încercaţi să înţelegeţi această rezolvare şi după un timp (câteva zile) încercaţi să rezolvaţi singuri problema.

Problemele cu steluţă „*" se adresează elevilor cu trei ore de studiu pe săptămână, dar pot fi rezolvate şi de ceilalţi elevi, dacă profesorul a predat acea materie. Unele capitole cu caracter facultativ (de exemplu: mişcarea rectilinie uniform variată, mişcarea sub acţiunea greutăţii, impulsul punctului material, etc.) se adresează elevilor care doresc să cunoască foarte bine această disciplină. Este bine ca fiecare elev să fie capabil să rezolve cel puţin problemele din materia obligatorie.

În calcule se consideră $\sqrt{2}=1{,}41$, $\sqrt{3}=1{,}73$, $\pi=3{,}14$ şi accelerația gravitaţională $g = 10\ m/s^2$.

În speranţa că v-am venit în ajutor, vă urez baftă!

Mihaela Chiriţă

Cuprins

		Enunţuri	Rezolvări
Capitolul 1. Optica geometrică			
	Teorie optică	5	
1.1	Principiile opticii geometrice, reflexie, refracţie	11	142
1.2	Lentile, asociaţii de lentile, sisteme de lentile	18	158
1.3	Instrumente optice:	30	185
Capitolul 2. Principii şi legi în mecanica newtoniană			
	Teorie mecanică	33	
2.1	Mişcarea mecanică	43	194
2.1.1.	Mişcarea rectilinie şi uniformă a punctului material	46	198
2.1.2.	Mişcare rectilinie uniform variată a punctului material	50	207
2.1.3.	Mişcarea punctului material sub acţiunea greutăţii	53	213
2.2	Principiile mecanicii	56	224
2.3	Forţa de frecare	63	238
2.4	Forţa elastică. Legea lui Hooke	76	267
2.5	Legea atracţiei universale	84	280
2.6	Mişcarea circular uniformă. Forţa centripetă*	85	282
Capitolul 3. Teoreme de variaţie şi legi de conservare în mecanică			
3.1	Lucrul mecanic şi puterea mecanică	89	290
3.2	Energia mecanică cinetică şi potenţială*	94	300
3.3	Teorema de variaţie a energiei cinetice	96	302
3.4	Conservarea energiei mecanice	113	332
3.5	Impulsul punctului material. Teorema de variaţie a impulsului	120	348
3.6	Ciocniri plastice şi elastice	122	351
Capitolul 4. Elemente de statică			
4.1	Echilibrul de translaţie	134	376
4.2	Echilibrul de rotaţie	137	384
Bibliografie		392	

Optica geometrică

Optica geometrică studiază fenomenele luminoase, ocupându-se cu studiul propagării luminii prin diferite medii şi cu studiul formării imaginilor prin sisteme optice.

Noţiuni utilizate:

1. Sursa de lumină punctiformă se obţine atunci când dimensiunile ei sunt mici în comparaţie cu distanţele la care se observă efectele luminoase.

2. Raza de lumină este direcţia pe care se propagă energia luminoasă.

3. Fasciculul de lumină este format din mai multe raze de lumină. El poate fi paralel când razele de lumină sunt paralele sau conic când razele pleacă dintr-un punct (facicul divergent) sau când razele de întâlnesc într-un punct (fascicul convergent).

Principiile opticii geometrice:

1. Principiul propagării rectilinii a razelor de lumină care afirmă că într-un mediu omogen şi izotrop lumina se propagă în linie dreaptă.

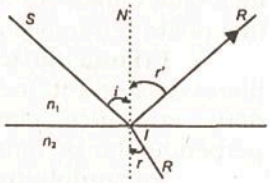
2. Principiul reversibilităţii razelor de lumină afirmă că pe direcţia de propagare lumina se propagă în ambele sensuri.

3. Principiul acţiunii independente a razelor de lumină afirmă că efectul produs de o rază de lumină care face parte dintr-un fascicul este independentă de prezenţa celorlalte raze din fascicul.

Reflexie şi refracţie

Când o rază de lumină întâlneşte suprafaţa de separare dintre două medii optice transparente ea suferă atât fenomenul de reflexie cât şi fenomenul de refracţie.

Reflexia luminii este fenomenul de întoarcere a razei de lumină în mediul din care a provenit atunci când raza întâlneşte suprafaţa de separaţie cu un alt mediu.



Notăm cu *SI* raza incidentă, *NI* normala construită în punctul de contact, *IR'* raza reflectată şi *IR* raza refractată.

Notăm cu *i* unghiul de incidenţă format de raza incidentă cu normala construită în punctul de contact, *r'* unghiul de reflexie format de raza reflectată cu normala construită în punctul de contact şi *r* unghiul de refracţie format de raza refractată cu normala construită în punctul de contact.

Legile reflexiei:

1. Raza incidentă, normala construită în punctul de contact şi raza reflectată sunt coplanare.

2. Unghiul de incidenţă este egal cu unghiul de reflexie. Astfel $i = r'$.

Refracţia luminii este fenomenul de pătrundere a razei de lumină în alt mediul atunci când raza întâlneşte suprafaţa de separaţie cu un alt mediu.

Legile refracţiei:

1. Raza incidentă, normala construită în punctul de contact şi raza reflectată sunt coplanare.

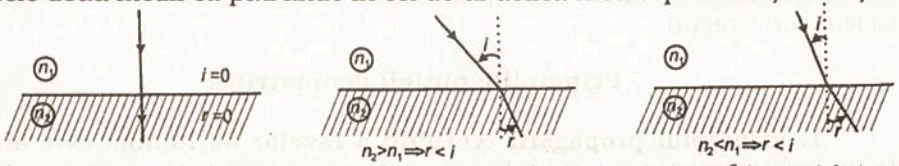
2. Produsul dintre unghiul de incidenţă într-un mediu şi indicele de refracţie absolut al mediului este constant. Astfel: $n_1 \sin i = n_2 \sin r$, unde n_1 şi n_2 reprezintă indicii de refracţie absoluţi ai celor două medii.

Indicele de refracție absolut al unui mediu reprezintă raportul dintre viteza luminii în vid c și viteza de propagare a luminii în acel mediu v. Astfel $n = \frac{c}{v}$ și este supraunitar și adimensional.

Indicele de refracție relativ al mediului 2 față de mediul 1 este raportul indicilor de refracție alsoluți ai celor două medii. Astfel: $n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$ și este adimensional.

Cazuri particulare:

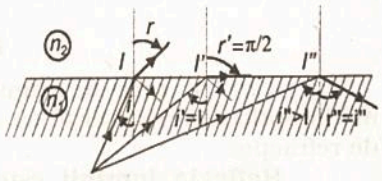
a. Dacă raza de lumină cade perpendicular pe suprafața de separație dintre cele două medii ea pătrunde în cel de-al doilea mediu pe aceeași direcție.



b. Dacă raza de lumină trece dintr-un mediu mai puțin refringent într-un mediu mai refringent ea se apropie de normală, astfel $n_1 < n_2 \Rightarrow r < i$

c. Dacă raza de lumină trece dintr-un mediu mai refringent într-un mediu mai puțin refringent ea se depărtează de normală de normală, $n_1 > n_2 \Rightarrow r > i$.

d. Dacă raza de lumină trece dintr-un mediu mai refringent într-un mediu mai puțin refringent, $n_1 > n_2$, există un unghi numit unghi limită ℓ pentru care unghiul de refracție devine r=90°, astfel că $\sin \ell = \frac{n_2}{n_1}$. Dacă unghiul de incidență depășește valoarea unghiului limită $\ell < i$, atunci raza de lumină nu se mai poate refracta și apare fenomenul numit **reflexie totală**.



Prisma optică este un mediu transparent delimitat de două suprafețe plane care se întâlnesc după o dreaptă numită muchie. Unghiul format de cele două suprafețe plane se numește unghiul prismei A. Orice plan situat perpendicular pe muchia prismei se numește secțiune principală.

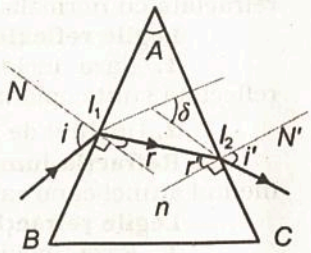
Formulele prismei:

1. $\sin i = n \sin r$ -legea refracției la fața AB

2. $n \sin r' = \sin i'$ -legea refracției la fața Ac

3. $A = r + r'$

4. $\delta = i + i' - A$, unde δ este unghiul de deviație

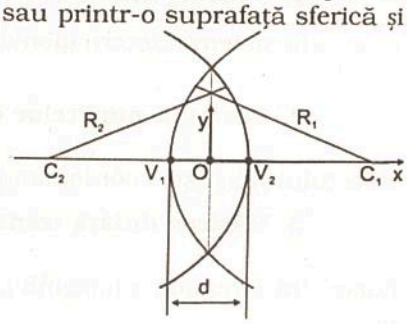


Dacă raza de lumină se propagă simetric prin prismă, atunci raza va fi deviată cu un unghi minim δ_{min}, astfel că:

$$r = r' \Rightarrow i = i' \Rightarrow \delta_{min} = 2i - A \Rightarrow n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{min} + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

Lentile subţiri

Lentilele sunt sisteme optice confecţionate dintr-un mediu transparent delimitat de exterior prin două suprafeţe sferice sau printr-o suprafaţă sferică şi una plană.



Elemente ce caracterizează o lentilă:

1. Axa optică principală este dreapta care trece prin centrele de curbură ale suprafeţelor sferice O_1 şi O_2, dacă lentila are două suprafeţe sferice, sau trece prin centrul de curbură al suprafeţei sferice şi este perpendicular pe suprafaţa plană, dacă lentila are o suprafaţă sferică şi una plană.

2. Centrul optic este punctul în care practic coincid pentru o lentilă subţire punctele de intersecţie V_1 şi V_2 ale suprafeţelor sferice cu axa optică principală.

3. Axa optică secundară este orice dreaptă care trece numai prin centrul optic al lentilei subţiri.

Prin construcţie lentilele sunt:

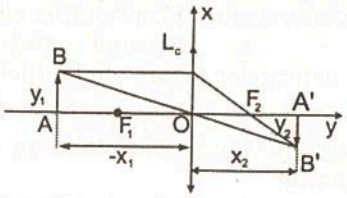
a. lentile convergente care în aer sunt mai groase la mijloc şi mai subţiri la capete. Pot fi ca formă: biconvexe, plan-convexe şi menisc convergent.

b. lentile divergente care în aer sunt mai subţiri la mijloc şi mai groase la capete. Pot fi ca formă: biconcave, plan-concave şi menisc divergent.

Razele de lumină paralele cu axul optic principal după refracţia prin lentilă se întâlnesc ele sau prelungirile lor într-un punct numit focar principal.

Dacă după refracţia razelor paralele cu axul optic principal fasciculul devine convergent şi razele se întâlnesc într-un punct focarul este real. La lentila convergentă focarele sunt reale, focarul principal imagine este situat în spatele lentilei, iar cel obiect în faţa lentilei şi dacă lentila este mărginită de acelaşi mediu pe ambele feţe focarele principale sunt situate simetric faţă de lentilă.

Dacă după refracţia razelor paralele cu axul optic principal fasciculul devine divergent şi prelungirile razelor se întâlnesc într-un punct focarul este virtual. La lentila divergentă focarele sunt virtuale, focarul principal imagine este situat în faţa lentilei, iar cel obiect în spatele lentilei şi dacă lentila este mărginită de acelaşi mediu pe ambele feţe focarele principale sunt situate simetric faţă de lentilă.



Prin convenţie definim distanţă focală a lentilei distanţa focală imagine. Alegând un sistem de axe de coordonate cu originea în centrul optic al lentilei ca în figură, atunci lentila convergentă are distanţa focală pozitivă, iar cea divergentă negativă. Astfel $f_2 = -f_1 = f$, unde f este distanţa focală a lentilei, f_1 este distanţa focală obiect a lentilei şi f_2 este distanţa focală imagine a lentilei.

Pentru a construi imaginea unui punct printr-o lentilă sunt necesare două din următoarele trei raze:

1. O rază care trece prin centrul optic al lentilei şi se refractă pe aceeaşi direcţie.

2. O rază paralelă cu axul optic principal care se refractă prin focarul principal imagine.

3. O rază care trece prin focarul principal obiect şi se refractă paralel cu axul optic principal.

Formulele lentilelor subțiri:

1. Convergența unei lentile este inversul distanței focale a lentilei. Astfel $C=\frac{1}{f}$. În sistemul internațional $[C]=m^{-1}=dioptrie$.

2. Formula punctelor conjugate: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}$, unde x_1 este coordonata obiectului și x_2 este coordonata imaginii.

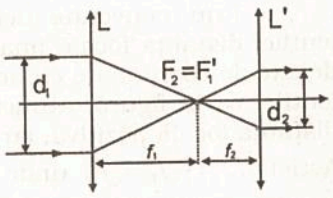
3. Mărirea liniară transversală $\beta=\frac{y_2}{y_1}$ este raportul dintre dimensiunea liniară transversală a imaginii y_2 și dimensiunea liniară transversală a obiectului y_1.

4. $C=\left(\frac{n}{n'}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$ este relația dintre convergența lentilei, razele de curbură ale celor două suprafețe sferice R_1 și R_2, precum și indicele de refracție absolut al materialului lentilei n și indicele de refracție absolut al materialului în care este introdusă lentila n'.

Asociațiile de lentile subțiri sunt formate din două sau mai multe lentile subțiri centrate, astfel că imaginea dată de prima lentilă devine obiect pentru următoarea și așa mai departe până la ultima lentilă. Mărirea liniară tranversală a sistemului esteprodusul măririlor liniare transversale ale lentilelor componente, astfel că $\beta_s=\prod\beta_k$.

Dacă distanța dintre lentile este nulă se formează un sistem de lentile alipite pentru care convergența sistemului este suma algebrică a convergențelor lentilelor componente. Astfel $C_s=\sum_{k=1}^{N}C_k \Rightarrow \frac{1}{F}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{f_k}$.

Un sistem de lentile este afocal dacă o rază paralelă cu axul optic principal al unei lentile după refracția prin lentile rămâne paralel cu axul optic principal. Un sistem afocal poate fi format din două lentile convergente sau dintr-o lentilă convergentă și una divergentă cu proprietatea ca modulul distanței focale a lentilei divergente să fie mai mic decât distanța focală a lentilei convergente. Proprietățile sistemului afocal sunt:



a. Distanța dintre lentile este suma distanțelor focale ale lentilelor componente, astfel că $d=f_1+f_2$, unde f_1 este distanța focală a primei lentile, iar f_2 este distanța focală a celei de-a doua lentile.

b. Focarul imagine al primei lentile F_2 coincide cu focarul obiect al celei de-a doua lentile F_1'.

c. Mărirea liniară transversală a sistemului afocal depinde doar de distanțele focale ale lentilelor componente și nu depinde de poziția obiectului, astfel că $\beta_s=-\frac{f_2}{f_1}$.

Instrumente optice

Un instrument optic este un ansamblu de lentile, oglinzi și diafragme cu ajutorul căruia obținem imagini ale diferitelor obiecte în care se pot distinge amănunte care nu pot fi observate cu ochiul liber.

Mărimi fizice care caracterizează instrumentele optice:

1. Mărirea este raportul dintre dimensiunea liniară transversală a imaginii și dimensiunea liniară transversală a obiectului, astfel că $\beta = \frac{y_2}{y_1}$, unde y_2 este dimensiunea liniară transversală a imaginii și y_1 este dimensiunea liniară transversală a obiectului.

2. Puterea este raportul dintre tangenta unghiului sub care se vede prin instrument obiectul și dimensiunea liniară transversală a obiectului, astfel că $P = \frac{tg\alpha_2}{y_1}$, unde α_2 este unghiul sub care se vede prin instrument obiectul. În sistemul internațional $[P] = m^{-1}$.

3. Grosismentul este raportul dintre tangenta unghiului sub care se vede prin instrument obiectul și tangenta unghiului sub care se vede cu ochiul liber obiectul dacă se află la distanța optimă de citire. Astfel $G = \frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1}$, unde $tg\alpha_1 = \frac{y_1}{\delta}$, iar δ=25 cm pentru un ochi normal și este distanța optimă de citire. În sistemul internațional grosismentul este adimensional.

4. Puterea separatoare este capacitatea instrumentului de a forma imagini distincte, separate, pentru două puncte obiect alăturate. Puterea separatoare poate fi:

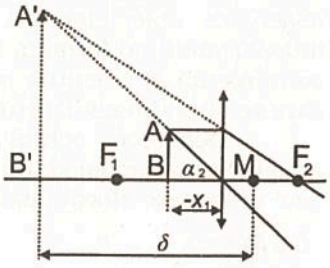
a. puterea separatoare liniară reprezintă distanța minimă între două puncte vecine ale obiectului pentru care instrumentul formează imagini diferite.

b. puterea separatoare unghiulară reprezintă unghiul minim dintre razele care provin de la două puncte vecine pentru care instrumentul formează imagini diferite.

Instrumentele optice se clasifică în:

a. instrumente care formează imagini reale: ochiul, aparatul de fotografiat, aparatul de proiecție. Aceste instrumente se comportă ca niște lentile convergente și prin urmare imaginile se pot prinde pe un ecran, pe un film sau placă fotografică.

În cazul ochiului, obiectele se află între punctul proximum-punctul cel mai apropiat unde vede ochiul și punctul remotum-punctul cel mai depărtat unde vede ochiul. Pentru un ochi normal punctul proximum se află la 25 cm (numită distanță optimă de citire) de ochi iar punctul remotum se află la infinit. Ochiul preferă să privească fără acomodare, adică la infinit, astfel că $x_2 \to \infty$. Imaginile reale, răsturnate și mai mici decât obiectele se formează pe retină.

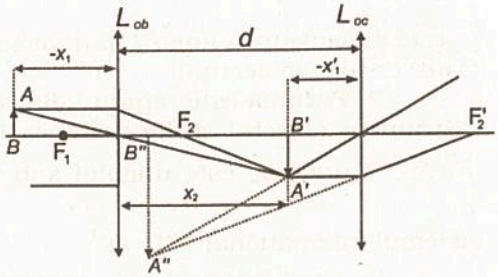


b. instrumente care formează imagini virtuale: lupa, microscopul, luneta, telescopul. Aceste imagini se vor observa cu ochiul liber.

1. Lupa este un sistem optic convergent cu distanță focală mică, astfel că formează pentru un obiect real situat între focarul principal obiect și lentilă o imagine virtuală, dreaptă și mărită.

$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{\delta - a} = \frac{1}{f}$, unde a reprezintă distanța de la ochi la lupă.

Puterea lupei în cazul în care ochiul privește fără acomodare adică la infinit este: $P = \frac{tg\alpha_2}{AB} \approx \frac{1}{f} = C$.

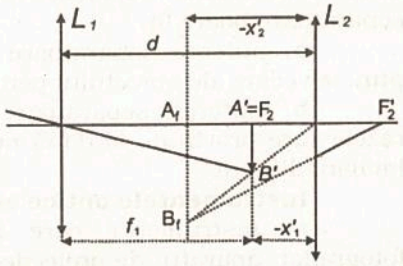


2. Microscopul optic este format din două lentile convergente, prima numită obiectiv și care formează pentru un obiect real o imagine reală, iar a doua numită lentilă ocular îndreptată spre ochi și care formează o imagine virtuală și mărită a imaginii reale dată de obiectiv. Imaginea finală virtuală se observă cu ochiul lipit de ocular.

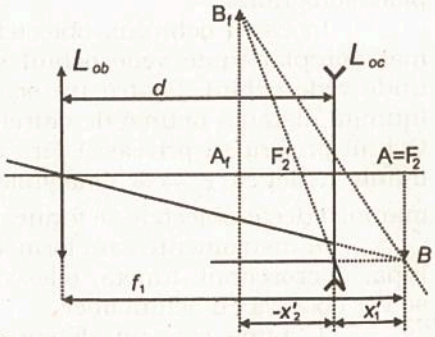
Deoarece ochiul preferă să privească fără acomodare imaginea finală se formează la infinit, astfel că imaginea reală produsă de lentila obiectiv se află în focarul principal obiect al ocularului.

Puterea microscopului este: $P = \frac{e}{f_1 f_2}$, unde f_1 și f_2 reprezintă distanțele focale ale obiectivului și respectiv ocularului, iar e este intervalul optic și reprezintă distanța dintre focarul imagine al obiectivului și focarul obiect al ocularului.

Grosismentul microscopului este: $G = P\delta$.



3. Luneta este un instrument optic destinat observării obiectelor foarte îndepărtate. Lunetele Sunt formate din două lentile. Prima lentilă numită lentilă obiectiv formează pentru obiectele foarte îndepărtate imagini reale situate în planul focal imagine. Cea de-a doua lentilă numită lentilă ocular formează o imagine virtuală pe care ochiul preferă să o vadă fără acomodare. Lunetele sunt de două feluri:



a. luneta astronomică este destinată observării obiectelor foarte îndepărtate fiind formată din două lentile convergente cu care se obțin imagini virtuale și răsturnate.

b. luneta terestră este destinată observării obiectelor de pe Pământ foarte îndepărtate fiind formată din o lentilă obiectiv convergentă și o lentilă ocular divergentă cu care se obțin imagini virtuale și drepte.

Deoarece ochiul preferă să vadă imaginea fără acomodare, luneta astronomică este un sistem afocal, astfel că are grosismentul:

$$G = \frac{f_{obiectiv}}{f_{ocular}} = f_{obiectiv} P_{ocular}.$$

1. Optică geometrică

1.1.Principiile opticii geometrice, reflexie, refracţie

1. Umbra unui om cu înălţimea h=1,73 m este de d=1 m. Să se afle unghiul sub care cad razele de lumină pe Pământ.

2. Într-o zi însorită un par înfipt vertical, cu înălţimea h=1 m deasupra Pământului, formează o umbră cu lungimea ℓ=25 cm. Care este lungimea umbrei unei persoane cu înălţimea H=1,8 m?

3. Un om porneşte de sub un felinar aflat la o înăţime de h=8 m într-o mişcare rectilinie uniformă cu viteza v=1 m/s. Omul are înălţimea de h_0=1,8 m. Cu ce viteză se deplasează umbra omului?

4. Flacăra unei lumânări cu înălţimea h=20 cm arde uniform cu viteza v=1 cm/min. Iniţial umbra flăcării se află la distanţa ℓ=10 cm de lumânare. Cu ce viteză se deplasează umbra flăcării?

5. Într-o cameră întunecoasă se află pe podea o sursă de lumină punctiformă. La h=50 cm de sursă este aşezată o fantă pătratică cu latura de ℓ=10 cm decupată într-un carton, astfel încât centrul său de greutate se află pe verticala sursei. Să se afle latura petei luminoase obţinute pe tavanul aflat la H=2,5 m de podea.

6. O lampă considerată punctiformă este acoperită în partea superioară şi se află într-o cameră întunecoasă la distanţa h=25 cm de o oglindă plană circulară cu raza r=10 cm, pe verticala centrului oglinzii. Să se afle raza petei luminoase care se formează pe tavanul aflat la distanţa H=2,5 m de oglindă.

7. Fie o oglindă plană. Să se afle:

a. unghiul cu care se roteşte raza reflectată în jurul axei, dacă pe oglinda plană cade o rază sub un unghi de incidenţă i, iar oglinda se roteşte cu unghiul α în jurul unei axe oarecare

b. înălţimea faţă de podea a punctului în care raza de lumină cade pe oglindă, dacă raza de lumină pătrunde prin fereastra unei încăperi întunecoase la înălţimea h=1,5 m de podea şi se reflectă pe oglinda aflată pe peretele opus ferestrei formând apoi o pată luminoasă la mijlocul podelei

c. unghiul şi sensul în care se roteşte imaginea obiectului faţă de noua poziţie a obiectului, dacă obiectul aflat în faţa unei oglinzi plane se roteşte cu unghiul $\alpha=30^0$

d. viteza cu care se deplasează imaginea faţă de obiect, dacă o persoană se apropie cu viteza v=4 m/s de o oglindă plană verticală

8. Două oglinzi plane formează între ele un unghi α. Să se afle:

a. unghiul cu care va fi deviată o rază de lumină în urma reflexiei succesive pe cele două oglinzi

b. numărul imaginilor unui obiect luminos punctiform aşezat între cele două oglinzi plane care se formează datorită reflexiilor succesive pe ele

c.numărul imaginilor care se formează în cazul **b.**, dacă unghiul dintre oglinzi este $\alpha=15^0$

9. Un om cu înălţimea H=1,8 m se fotografiază printr-o oglindă plană paralelă cu el pe un perete vertical. Distanţa dintre om şi oglindă este d=60 cm, înălţimea oglinzii h=60 cm, iar aparatul de fotografiat se află la om la jumătatea înălţimii lui, faţă în faţă cu centrul oglinzii. Neglijând distanţa de la ochi la creşted, să se afle:

a. cât la sută din înălțimea omului apare pe fotografia lui?
b. distanța față de perete la care se află cel mai apropiat punct de pe podea pe care îl poate vedea omul prin reflexie
c. înălțimea minimă a oglinzii pentru ca omul să se poată vedea în întregime, dacă distanța de la creșted la ochi este h_1=10 cm

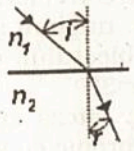
10. Pe o oglindă sferică concavă cu raza R=5 cm cad două raze de lumină paralele cu axul optic principal: una trece la distanța h_1=0,5 cm de ax, iar cealaltă la h_2=3 cm. Razele se reflectă pe oglindă. Să se afle:
a. distanța măsurată față de vărful oglinzii unde prima rază taie axul optic principal
b. distanța măsurată față de vărful oglinzii unde a doua rază taie axul optic principal
c. distanța între punctele în care aceste raze intersectează axul optic principal

11.O oglindă sferică concavă are raza R=-20 cm. Un obiect liniar cu înălțimea y_1=6 mm se așază la distanța $-x_1$=30 cmîn fața oglinzii. Să se afle:
a. distanța la care se formează imaginea față de oglindă
b.înălțimea imaginii
c. poziția și natura imaginii dacă obiectul se apropie de oglindă cu d=25 cm

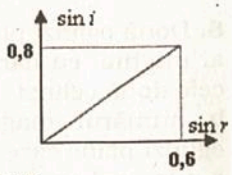
12. Se așază un obiect în fața unei oglinzii sferice concave cu raza R=-30 cm, asftel că imaginea se prinde pe un ecran așezat la distanța d=60 cm de oglindă. Să se afle:
a.distanța la care se află obiectul față de oglindă
b. mărirea liniară transversală în condițiile punctului **a.**
c.distanța la care se află obiectul față de oglindă pentru a se obține o imagine egală cu obiectul

13. Se așază un obiect în fața unei oglinzii sferice concexecu raza R=40 cm la distanța d=20 cm de oglindă. Să se afle:
a. distanța focală a oglinzii
b. distanța la care se formează imaginea față de oglindă
c. mărirea liniară transversală în condițiile punctului **b.**

14. O rază de lumină care cade pe suprafața de separație dintre două medii optice transparente se propagă dintr-un mediu în alt mediu ca în figură. Să se afle:

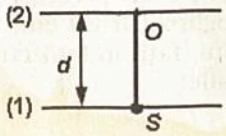


a. indicele de refracție relativ al celui de-al doilea mediu față de primul mediu, dacă unghiul de incidență de incidență este i=45⁰ iar cel de refracție este r=30⁰
b. unghiul dintre raza refractată și raza reflectată, dacă unghiul de incidență de incidență este i=45⁰, primul mediu este aer iar al doilea are indicele de refracție $n=\sqrt{2}$ **c.** indicele de refracție relativ al mediului în care se refractă lumina față de mediul din care vine lumina, dacă unghiul de incidență este i=60⁰ iar raza reflectată este perpendiculară pe raza refractată



d.indicele de refracție al celui de-al doilea mediu, dacă primul mediu are indicele de refracție n_1=3/2 iar graficul alăturat reprezintă dependența sin$i$=f(sin$r$) la trecerea unei raze de lumină dintr-un mediu optic în alt mediu optic

15. Pe partea inferioară a unei plăci din sticlă de grosime d=3,46 cmși indice de refracție n=1,73se află o sursă de lumină punctiformă S. O rază de lumină pornește de la



sursa S şi formează cu faţa (2) în punctul P un unghi $\alpha=60^0$ ca în desenul alăturat. Placa este situată în aer. Să se afle:

a. reprezentaţi mersul razei de lumină care ajunge la un observator plasat în aer deasupra feţei (2) a plăcii

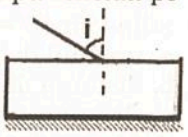
b. unghiul de refracţie la ieşirea în aer a razei de lumină

c. distanţa de la punctul O până la punctul P

16. O rază de lumină pătrunde din aer într-un lichid cu indicele de refracţie $n=4/3$, sub un unghi de incidenţă i astfel că $\sin i=2/3$.Lichidul se află într-un vas suficiet de larg având fundul argintat, ca în figura alăturată. Să se afle:

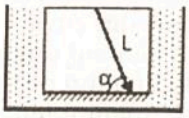
a. unghiul de refracţie în punctul de incidenţă

b. unghiul format de direcţia razei de lumină care iesedin lichid (după reflexia pe fundul vasului) cu direcţia razei incidente, dacă unghiul de incidenţă la trecerea luminii din aer în lichid ar fi $i=60^0$



c. unghiul de incidenţă i, dacă sinusul unghiului de refracţie la intrarea luminii în lichid ar fi $\sin r=3/4$

17. Un cub de sticlă la care una dintre feţe este o oglindă plană este introdus într-un vas cu apă ($n_a=4/3$) astfel încât faţa reflectătoare să se afle pe fundul vasului, ca în figură. O rază de lumină L se propagă în sticlă, se reflectă pe oglindă şi întâlneşte faţa laterală a cubului. Se constată că, mărind treptat unghiul razei faţă de oglindă (α), începând de la $\alpha_{min}=60^0$lumina nu mai intră în apă deşi întâlneşte faţa laterală a cubului. Să se afle:



a. mersul razelor de lumină prin dispozitiv pentru $\alpha<60^0$

b. indicele de refracţie al sticlei

c. noua valoare minimă a sinusului unghiului αpentru care raza de lumină nu iese din cub prin faţa laterală, daca apa s-ar scoate din vas

18. Fie o suprafaţă de separaţie dintre aer şi o soluţie de argint coloidal plană şi orizontală. Soluţia are indicele de refracţie $n=1,4$. Se utilizează o rază a unui fasciculul laser care trece prin soluţie. Soluţia este transparentă pentruraza fasciculului laser. Să se afle:

a. unghiurile de reflexie şi de refracţie, dacă raza trece din aer în soluţie perpendicular pe suprafaţa de separare

b. sinusul unghiului de incidenţă corespunzător unui unghi de refracţie de 90^0, în cazul în care raza trece din soluţie în aer

c. sinusul unghiului de incidenţă, dacă raza trece din aer în soluţie şi cosinusul unghiului de refracţie este 0,80

d. ce se întâmplă cu razele laser care pleacă din soluţie şi cad pe suprafaţa de separare sub unghiuri de incidenţă x pentru care $\mathrm{tg}x>1,2$

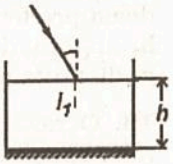
19. Un vas de formă cilindrică are diametrul bazei $D=60$ cm şi înălţimea $H=40$ cm. O sursă punctiformă de lumină este plasată pe fundul vasului, în centrul acestuia. Se umple vasul cu apă. Indicele de refracţie al apei este $n_a=4/3$. Să se afle:

a. valoarea maximă a sinusului unghiului sub care se refractă lumina la trecerea prin suprafaţa orizontală plană de separare dintre apă şi aer

b. distanţa dintre sursă şi imaginea sursei formată în oglindă, dacă se aşază pe suprafaţa apei, pe verticala sursei, o oglindă plană circulară cu faţa reflectătoare lipită de suprafaţa apei

c. diametrul minim al oglinzii astfel încât baza vasului să fie luminată în întregime de razele reflectate în condiţiile punctului **b.**

20. O rază de lumină este incidentă sub unghiul i=30° pe suprafața plană a unui lichid cu indicele de refracție n =4/3, ca în figura alăturată. Lichidul se află într-un vas suficient de larg având suprafața bazei argintată, iar înălțimea stratului de lichid este h=10 cm. Să se afle:



a. sinusul unghiul de refracție al razei de lumină în punctul de incidență I_1

b. unghiul format de direcția razei care iese din lichid după reflexia pe fundul vasului cu suprafața lichidului

c. distanța d parcursă în lichid de o rază de lumină

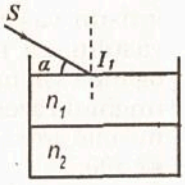
21. O rază de lumină este incidentă sub un unghi i=45⁰ din aer pe o lamă cu fețe plan paralele de grosime h=1,5 cm și indicele de refracție $n=\sqrt{2}$. Știind sin15⁰=0,26. Să se afle:

a. unghiul de refracție al razei de lumină în lamă

b. distanța dintre direcția razei incidente și direcția razei emergente din lamă

c. distanța dintre punctul de intrare a razei în lamă și punctul de ieșire a razei din lamă, dacă fața inferioară a lamei se argintează

22. Într-o cuvă din sticlă (n_2=1,5) se toarnă apă (n_1=1,33). Grosimea stratului de apă este egală cu grosimea fundului cuvei, care constituie o lamă cu fețe plan-paralele. O rază de lumină SI_1 sosește din aer și formează un unghi α=30⁰ cu suprafața liberă a apei din cuvă, ca în figura alăturată. Să se afle:



a. sinusul unghiului de refracție în punctul de incidență

b. unghiul de emergență al razei la ieșirea din cuvă prin fața inferioară

c. unghiul față de verticală sub care se propagă lumina în sticla flint, dacă cuva se așază pe o lamă orizontală din sticlă flint cu indicele de refracție $n_3 \approx \sqrt{3}$

23. O plăcuță cu suprafețele plan-paralele aflată în aer este formată din trei regiuni plane și paralele cu fețele plăcuței, cu indicii de refracție $n_1=\sqrt{2}$, $n_2=n_1/k$, $n_3=n_2/k$, unde k este o constantă. Să se afle:

a. unghiul de refracție al razei în prima regiune a plăcuței, dacă pe fața ei superioară cade o rază de lumină sub un unghi de incidență i=45⁰

b. constanta k, dacă în regiunea a doua raza pătrunde sub unghiul r_2=60⁰

c. indicelele de refracție n_0 al mediului înconjurător în care se introduce plăcuța dacă se produce o reflexie totală pe suprafața ce separă regiunile 2 și 3, dacă unghiul de incidență pe plăcuță este i=15⁰(sin15⁰=0,26)

24. Un om privește o piatră aflată pe fundul unui bazin de înălțime h=4 m plin cu apă sub un unghi de incidență i=60⁰. Indicele de refracție al apei este n=4/3. Să se afle:

a. poziția imaginii pietrei față de suprafața apei

b. distanța dintre piatră și imaginea ei

c. poziția imaginii pietrei față de suprafața dacă omul privește normal pe suprafața apei

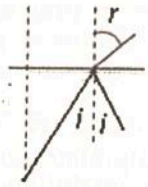
25. Un scafandru stă în picioare într-un bazin în care adâncimea este de h=2,4 m. Indicele de refracție al apei este n=4/3. Ochii scafandrului sunt la înălțimea h'=1,8 m față de fundul bazinului. În aer pe aceeași verticală cu scafandrul este un observator ai cărui ochi se află la înălțimea h_1=48 cm față de apă. Privind către suprafața apeiscafandrul vede ca într-o oglindă obiectele de pe fundul bazinului. El observă că imaginile obiectelor se văd mai intens decât cele ale obiectelor apropiate. Să se afle:

a. înălțimea față de suprafața apei la care vede scafandrul ochii observatorului

b. distanța dintre observator și adâncimea la care vede observatorul ochii scafandrului

c. distanța minimă măsurată pe orizontală dintre scafandru și obiectele a căror imagine este intensă

26. O sursă de lumină de mici dimensiuni se află la h=1,2 m sub nivelul lichidului transparent dintr-un bazin. Dacă sursa este privită din afara bazinului, pe verticala ce trece prin aceasta, imaginea se observă la adâncimea H=90 cm față de suprafața plană a lichidului. Dacă observarea se face în lungul unei drepte înclinate față de verticală cu unghiul r pentru care sin$r$=0,8, se poate constata că raza care a suferit reflexia pe suprafața lichidului, revine în lichid sub un unghi i față de verticalăca în figură. Să se afle:



a. indicele de refracție al lichidului

b. sinusul unghiului dintre raza reflectată și verticală

c. raza cercului luminos de la suprafața apei cu centrul pe verticala sursei de lumină

27. Intr-un bazin se află un lichid cu adâncimea de h=3 m. Pe fundul bazinului se află o oglindă plană. O rază de lumină monocromatică din aer, ajunge pe suprafața de separare dintre lichid și aer sub un unghi de incidență i=60°, după care se refractă sub un unghi de refracție r=30°. În continuare se reflectă pe oglinda aflată pe fundul bazinului, întâlnește iar suprafața de separare dintre lichid și aer și se refractă la trecerea din lichid în aer. Să se afle:

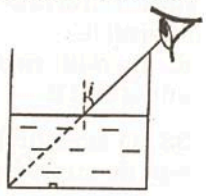
a. desenul în care evidențiați mersul razei de lumină

b. indicele de refracție al lichidului

c. distanța dintre punctul în care raza pătrunde în lichid și punctul în care raza iese din lichid

d. adâncimea aparentă la care un observator din aer vede moneda aflată pe fundul bazinului dacă observatorul privește sub unghiul de incidență i=60°

28. Un vas are înălțimea h=20 cm. Un copil privește o monedă la marginea vasului sub un unghi de incidență i=30°, ca în figură și nu o vede. Turnând apă în vas, copilul vede moneda când nivelul apei a ajuns la jumătatea vasului. Indicele de refracție al apei este n=4/3. Să se afle:



a. distanța monedei față de marginea vasului

b. lărgimea unui fascicului în apă, dacă în aer lărgimea sa este d_{aer}=4 cm și acesta cade pe suprafața apei sub un unghi de incidență i=30°

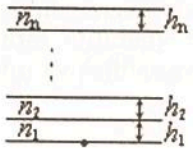
c. distanța dintre punctul unde va atinge un bețișor fundul vasului și monedă, dacă acesta este introdus de copil sub un unghi de α=60° față de suprafața apei, cu scopul de a atinge moneda

29. În fața unei lame de sticlă cu fețe plan-paralele se așază un obiect. Lama are grosimea h=3 cm și indicele de refracție n=1,5. Să se afle:

a. distanța dintre imagine și obiect

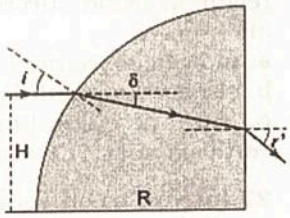
b. poziția imaginii obiectului față de suprafața superioară a lamei, dacă obiectul luminos punctiform se află pe marginea inferioară a lamei

c. poziția imaginii unui punct luminos față de fața superioară, a unui sistem format din n lame cu fețe plan paralele și de grosimi h_1, h_2,...h_n și indici de refracție n_1, n_2,...n_n format ca în figura alăturată, dacă punctul luminos se află pe baza inferioară a ultimei fețe a sistemului



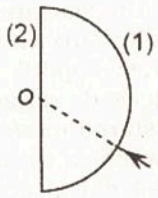
30. Pe suprafața plană a unei fibre optice de diametru d=2 cm si indice de refractie $n=\sqrt{2}$, cade o rază de lumină sub unghiul de incidență i=45°, care intră pe axul optic. Să se afle:
a. unghiul de refracție
b. unghiul de incidență pe suprafața cilindrică
c. distanța străbătută de raza de lumină de-a lungul fibrei optice după N=20 reflexii pe suprafața cilindrică

31. Piesa optică din figura alăturată a fost obținută prin secționarea longitudinală a unui cilindru după două diametre perpendiculare. Venind din aer și propagându-se paralel cu baza piesei, o rază de lumină suferă o deviație unghiulară δ=30°la trecerea prin suprafața convexă a piesei. Cunoscând înălțimea la care se propagă raza de lumină $H=5\sqrt{3}$ cm precum și raza de curbură a suprafeței convexe R=10 cm, să se afle:

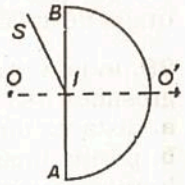


a. unghiul de incidență al razei de lumină la intrarea în piesa optică
b. indicele de refracție al materialului din care este confecționată piesa
c. unghiul de refracție al razei de lumină la ieșirea din piesa optică

32. Un semicilindru aflat în aer este confecționat din sticlă transparentă cu indicele de refracție n=1,41. O rază de lumină monocromatică, care se propagă într-un plan perpendicular pe axa cilindrului, ajunge pe suprafața cilindrică (1) și apoi în punctul O situat pe axa cilindrului ca în figura alăturată. Raza de lumină care iese din semicilindru prin suprafața plană (2) a acestuia formează cu normala la suprafață unghiul r_2=45°. Să se afle:
a. unghiul r_1 sub care se refractă raza de lumină la traversarea suprafeței (1)
b. unghiul αdintre raza incidentă pe suprafața (2) și cea reflectată pe aceeași suprafață
c. unghiul de incidență i_4 pe suprafața (2), dacă raza de lumină este deplasată paralel cu ea însăși până într-o poziție în care raza refractată prin suprafața (2) este de-a lungul acestei suprafețe
d. mersul razei de lumină prin semicilindru în condițiile punctului **c.**



33. O rază de lumină monocromatică, SI, soseşte din aer sub un unghi de 30° față de suprafața plană AB a unui semicilindru din sticlă cu indicele de refracție $n=\sqrt{3}$ și raza R=5 cm, ca în figura alăturată. Punctul de incidență Ieste situat la mijlocul segmentului AB. Să se afle:



a. unghiul de refracție în punctul I și unghiul de refracție a luminii la trecerea din sticlă în aer
b. unghiul de refracție a luminii la trecerea din sticlă în aer, dacă într-un alt aranjament raza de lumină cade normal pe fața AB a semicilindrului, la distanța h=2,5 cmde axa OO'
c. distanța față de suprafața plană a semicilindrului la care raza de lumină transmisă va intersecta axa optică OO' în condițiile punctului **b.**

34. Un semicilindru este confecționat din sticlă cu indicele de refracție $n=\sqrt{2}$. Pe fața plană cad raze de lumină sub un unghi $i=45^0$. Razele de lumină se află într-un plan perpendicular pe axa cilindrului. Să se afle:
a. unghiul sub care intră razele în semicilindru
b. unghiul limită la trecerea razelor din semicilindru în aer
c. porțiunea suprafeței cilindrice pe care ies razele de lumină

35. În imediata apropiere a suprafeței unei sfere transparente și în stânga centrului se află un izvor luminos punctiform. Raza sferei este $R=10$ cm și indicele de refracție al materialului sferei este $n=2$. Să se afle:
a. unghiul limită la trecerea razei din sferă în aer
b. distanța de la imaginea punctiformă a izvorului luminos față de obiect
c. distanța față de centrul sferei la care raza fascicului emergent din sferă, în dreapta centrului acesteia, este egală cu dublul razei sferei

36. O prismă optică al cărei indice de refracție relativ față de aer este egal cu $n=\sqrt{3}$ are secțiunea principală transversală sub forma unui triunghi echilateral. Să se afle:
a. unghiul de incidență la care apare deviația minimă
b. unghiul de deviație minimă
c. indicele de refracție al unui mediu în care trebuie introdusă prisma dacă o rază de lumină care cade perpendicular pe o muchie a prismei părăsește prisma de-a lungul celeilalte

37. Secțiuneadreaptă a unei prisme acoperiș este un triunghi echilateral *ABC*. Pe fața *AB* a prismei cade o rază de lumină sub unghiul de incidență $i=60^0$ corespunzător condiției de deviație minimă. Considerând că raza incidentă se proapagă în aer sub unghiul de incidență corespunzător deviației minime, se argintează fața *AC* a prismei și se așază prisma *ABC* cu baza în contact cu baza *BC* a unei prisme isoscele *BCD*, dreptunghiulare ($BDC=90^0$), al cărei indice de refracție este egal cu $n_2=\sqrt{3/2}$. Să se afle:
a. indicele de refracție al prismei *ABC*
b.direcția după careiese raza de lumină din ansamblul celor două prisme, după argintarea feței *AC*
c.mersul razelor de lumină prin ansamblul prismelor

38. O prismă are indicele de refracție $n=2$. Să se afle:
a. pentru ce valori ale unghiului prismei orice rază de lumină incidentă pe prima față a prismei emerge din prismă?
b.pentru ce valori ale unghiului prismei nici o rază de lumină incidentă pe prima față a prismei nu emerge din prismă?
c.dacă unghiul prismei este cuprins între ℓ și 2ℓ unele raze incidente pe prima față a prismei ies din prismăși altele nu. Să se precizeze care raze pot ieși din prismă.

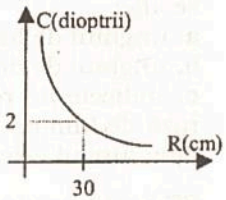
1.2. Lentile, asociații de lentile, sisteme de lentile

1. O lentilă biconvexă simetrică din sticlă ($n=1,5$) cu distanța focală $f=30$ cm, formează imaginea unui obiect așezat la 45 cm de ea. Să se afle:
a. convergența lentilei
b. poziția imaginii față de lentilă și natura acesteia
c. mărirea liniară transversală
d. modulul razei de curbură a unei suprafețe sferice

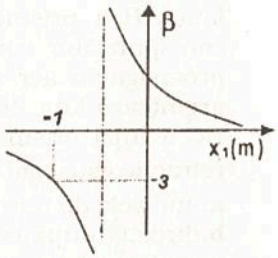
2. O lentilă convergentă are distanța focală f=20 cm. Un obiect este așezat față de lentilă la distanța 40 cm, iar apoi se apropie cu 10 cm de lentilă. Imaginea se prinde pe un ecran așezat corespunzător. Să se afle:
a. unde trebuie așezat inițial ecranul față de lentilă?
b. cu cât și în ce sens se va deplasa ecranul când obiectul se apropie?
c. de câte ori se modifică dimensiunea liniară transversală a noii imagini față de prima imagine?

3. O lentilă subțire biconvexă simetrică cu raza $|R|$=20 cm, confecționată din sticlă, formează o imagine reală și de 3 ori mai mare decât obiectul. Distanța dintre obiectul așezat perpendicular pe axul optic principal și imaginea sa este de 80 cm. Să se afle:
a. distanța de la lentilă la imagine
b. distanța focală a lentilei
c. indicele de refracție al materialului din care este confecționată lentila

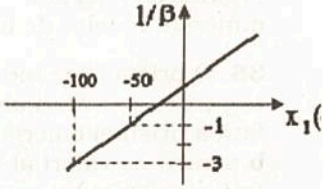
4. În graficul din figura alăturatăeste reprezentată convergența unei lentile plan-convexe în funcție de valoarea razei de curbură a feței convexe. În fața lentilei se așază un obiect la distanța de 30 cm de aceasta. Să se afle:
a. indicele de refracție al materialului din care este confecționată lentila
b. poziția imaginii față de lentilă și natura acesteia dacă R=30 cm
c. mărirea liniară transversală în condițiile de la punctul **b.**



5. Graficul din figura alăturatăreprezintă dependența măririi liniare transversale de coordonata obiectului în cazul imaginii formate printr-o lentilă subțire.Să se afle:
a. distanța focală a lentilei
b.mărirea liniară transversală a lentilei dacă x_1=−2,25 m
c.distanța focală a lentilei dacă aceasta se introduce într-un mediu cu indicele de refracție egal cu cel al lentilei



6. Pentru o lentilă convergentă subțire se reprezintă grafic inversul măririi liniare transversale $1/\beta$în funcție de coordonata x_1 a obiectului ca în figura alăturată.Lentila esteplan-convexă cu raza de curbură a feței convexe de 15 cm. Un obiect se așază la 75 cm în fața lentilei. Să se afle:
a. distanța focală a lentilei
b. mărirea liniară transversală a lentilei
c. indicele de refracție al materialului din care este confecționată lentila



7.O lentilă plan-convexă care formează pe un ecran imaginea unui obiect are distanța focală f=7,5 cm și raza feței convexe de R=4,5 cm. Să se afle:
a. indicele de refracție al materialului din care este confecționată lentila
b. distanța obiect-ecran în cazul în care imaginea este de 3 ori mai mică decât obiectul
c. convergența lentilei, dacă aceasta se scufundă într-un mediu cu indice de refracție n_a=4/3

8. O lentilă convex-concavă (menisc convergent) are razele feţelor de curbură 3 cm şi 5 cm. Mediul din care este confecţionată lentila are indicele de refracţie n=1,5. În faţa lentilei se aşază un obiect luminos la distanţa 45 cm de aceasta şi cu înălţimea y_1=4 cm. Să se afle:

a. distanţa focală a lentilei

b. poziţia imaginii faţă de lentilă

c. înălţimea y_2 a imaginii

9.O lentilă subţire biconvexă simetrică este confecţionată dintr-un material cu indicele de refracţie n=1,5. Un obiect cu înălţimea y_1=3 cm, situat la distanţa $-x_1$=30 cmîn faţa lentilei, perpendicular pe axa optică principală, îşi formează imaginea prin lentilă la o distanţă x_2=20 cmfaţă de lentilă. Se introduce apoi lentila într-o cuvă cu pereţi transparenţi subţiri, plani şi paraleli, umplută cu lichid şi de grosime egală cu a lentilei. Pentru ca imaginea obiectului să se formeze în acelaşi punct, pe axa optică principală, trebuie ca obiectul să fie îndepărtat foarte mult de sistem. Să se afle:

a. distanţa focală a lentilei în aer

b. înălţimea imaginii

c. convergenţa sistemului optic obţinut prin introducerea lentilei în cuvă

d. razele de curbură ale feţelor convexe ale lentilei

10. Un obiect cu înălţimea y_1=5 cm este aşezat în faţa unei lentile divergente cu distanţa focală f=−7 cm la distanţa de 28 cm de aceasta. Să se afle:

a. convergenţa lentilei

b. poziţia imaginii faţă de lentilă şi natura acesteia

c.înălţimea y_2a imaginii

11. Distanţa focală a unei lentile subţiri divergente este f=−40 cm. Imaginea virtuală a unui obiect real situat perpendicular pe axa optică are înălţimea egală cu jumătate din înălţimea obiectului. Să se afle:

a. valoarea măririi liniare transversale

b. distanţa la care trebuie aşezat obiectul în faţa lentilei

c. distanţa faţă de lentilă la care s-ar forma imaginea, dacă obiectul s-ar îndepărta de lentilă cu 20 cm

12. Aşezăm în faţa unei lentile biconcave simetrice cu distanţa focală f=−30 cm un obiect, astfel încât imaginea acestuia este de 5 ori mai mică decât obiectul. Lentila este confecţionată din sticlă cu indicele de refracţie n=1,5. Să se afle:

a.poziţia obiectului faţă de lentilă

b. raza feţei concave

c. distanţa focală a lentilei, dacă aceasta se scufundă într-un mediu optic transparent cu indicele de refracţie n_l=1,6

13. O lentilă subţire biconcavă cu razele de curbură de valori egale cu 20 cm are indicele de refracţie n=1,5. În faţa acestei lentile, la o distanţă de 50 cm este plasat, perpendicular pe axa optică principală, un obiect liniar cu înălţimea de 10 cm. Să se afle:

a. convergenţa lentilei

b. distanţa la care se formează imaginea faţă de lentilă

c. distanţa dintre obiect şi noua sa imagine dacă lentila este deplasată cu 50 cm, îndepărtându-se de obiect

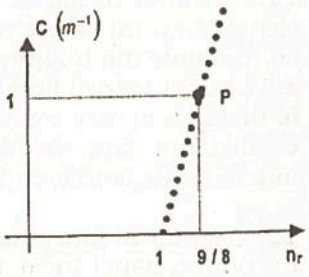
14. O lentilă divergentă convex-cocavă are razele feţelor de 30 cm, respectiv 60 cm şi este confecţionată din sticlă cu indicele de refracţie n=1,5. Să se afle:
a. distanţa focală a lentilei
b. poziţia imaginii faţă de lentilă a unui obiect aşezat la 60 cm de lentilă
c. distanţa focală a lentilei, dacă aceasta se intoduce într-un mediu transparent cu indicele de refracţie n' =1,8

15. Pentru studiul experimental al formării imaginilor prin lentilele subţiri se foloseste un banc optic pe care sunt montate: un obiect, o lentilă subţire şi un ecran. În timpul experienţei se modifică distanţa dintre obiect şi lentilă. Pentru fiecare poziţie a obiectului, se deplasează ecranul astfel încât să se obţină o imagine clară si se măsoară dimensiunea imaginii. Datele experimentale prezentate în tabelul de mai jos sunt $d_1$distanţa obiect-lentilă, iar $h_2$înălţimea imaginii. Să se afle:

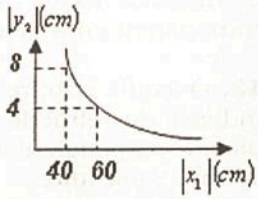
poziţia	A	B	C	D
d_1(cm)	48	36	32	30
h_2(mm)	10	20	30	x

a. dependenţa distanţei imagine-lentilă de distanţa $d_1$dintre obiect şi lentilă, pentru o lentilă cu distanţa focală f
b. raportul dintre mărirea liniară transversală corespunzătoare unei distanţe obiect-lentilă d_{1C}=32cm şi cea corespunzătoare distanţei obiect-lentilă d_{1B}=36 cm
c. distanţa focală a lentilei
d. valoarea lipsă din tabel

16. Convergenţa unei lentile biconvexe simetrice variază atunci când este plasată în medii transparente diferite, în funcţie de indicele de refracţie relativ n_r al lentilei în raport cu mediul, conform graficului alăturat Se cunoaşte că lentila este confecţionată din sticlă cu indicele de refracţie n=1,5. Să se afle:
a. valoarea razelor de curbură ale feţelor lentilei
b. poziţia imaginii faţă de lentilă a unui obiect aflat la distanţa de 50 cm de aceasta
c. poziţia obiectului faţă de lentilă, dacă lentila formează pentru acesta o imagine reală şi de două ori mai mare decât obiectul



17. În graficul din figură este redată dependenţa modulului imaginii unui obiect obţinut cu ajutorul unei lentile convergente biconvexe, în funcţie de modulul distanţei dintre obiect şi centrul optic al lentilei. Să se afle:
a. distanţa focală a lentilei
b. mărimea liniară a obiectului
c. indicele de refracţie al materialului din care este confecţionată lentila, dacă aceasta are raza de curbură cea mai mică de15 cm, iar cealaltă rază de curbură este de trei ori mai mare

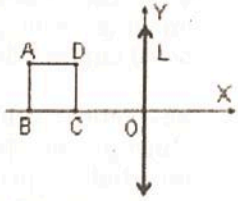


18. O lentilă convergentă cu distanţa focală f se află la distanţa $2f$ de un obiect real. Să se afle:
a. raportul măririlor liniare transversale ale imaginilor, dacă lentila se apropie cu $f/2$ de obiect

b. raportul mărimilor liniare transversale ale imaginilor, dacă lentila se depărtează cu f de obiect

c. poziția imaginii finale a obiectului punctiform, dacă se roteşte lentila în sens orar cu unghiul $\alpha=60^0$

19. Un obiect luminos $ABCD$ de forma unui pătrat este situat ca în figură. Lentila are distanța focală f=4 cm şi diametrul d=10 cm. Punctele B şi C sunt pe axa optică principală a lentilei. A_1, B_1, C_1 şi D_1 reprezintă imaginile punctelor A, B, C şi D. Într-un sistem de axe XOY punctul A_1 are coordonatele (8, −2) cm. Să se afle:

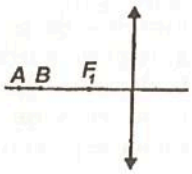


a. coordonatele punctului A

b. mărimea segmentului B_1C_1

c. diametrul petei luminoase care se obține pe un ecran aşezat în planul focal imagine al lentilei atunci când în punctul A se aşază o sursă punctiformă de lumină

20. Un segment luminos AB este aşezat pe axa optică principală a unei lentile cu distanța focală în aer de 20 cm ca în figură. Mijlocul segmentului se află la 30 cm de lentilă, iar lungimea lui este 4 cm. Să se afle:

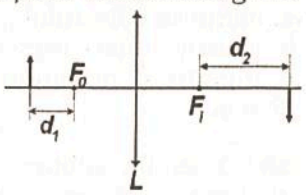


a. lungimea imaginii segmentului AB

b. mărirea longitudinală

c. relația dintre mărirea longitudinală şi măririle transversale pentru obiectele transversale aflate în punctele A şi B

21. Un obiect cu înălțimea y_1=3 cm este situat pe axa optică principală a unei lentile L plan-convexe, din sticlă cu indicele de refracție n=1,5. Obiectul se află în fața focarului obiect F_o al lentilei, la distanța d_1=10 cm față de acesta. Imaginea obiectului este reală şi se formează la distanța d_2=40 cm de focarul imagine F_i, ca în figura alăturată. Să se afle:



a. distanța focală a lentilei

b. înălțimea imagini

c. raza de curbură a feței convexe a lentilei;

d. distanța d_2,dacă d_1=20 cm

22. Cu ajutorul unei lentile subțiri convergente de sticlă (n=3/2) s-a obținut imaginea reală a unui obiect, imginea fiind situată la o distanță de 10 cm de lentilă. După ce obiectul şi lentila au fost scufundate în apă fără a schimba distanța dintre ele s-a obținut imaginea la o distanța de 60 cm de lentilă. Dacă indicele de refracție al apei este n_a=4/3 să se afle:

a. distanța focală a lentilei în aer

b. poziția obiectului față de lentilă

c. distanța focală a lentilei în apă

23. Cu ajutorul unei lentile plan-concave cu convergența C=−5 dioptrii se obține o imagine virtuală situată la distanța d=18 cm de obiect. Să se afle:

a. distanța focală a lentilei

b. poziția obiectul față de lentilă

c. raza feței concave, dacă indicele de refracție al lentilei este n=1,5

24. O lentilă subțire convex-concavă (menisc convergent) din sticlă (n=1,5), situată în aer are razele fețelor de curbură 4 cm și respectiv 5 cm. Să se afle:
a. distanța focală a lentilei
b. distanța minimă dintre un obiect și un ecran, astfel încât imaginea obiectului obținută pe ecran să fie reală
c. cu cât trebuie deplasat obiectul față de lentilă și în ce sens pentru a obține o imagine reală pe ecran, dacă lentila rămâne fixă și ecranul se depărtează cu d=10 cm față de poziția anterioară de la punctul**b.**?

25. Pentru o lentilă convergentă valoarea măririi unui obiect este β_1=−4. Dacă obiectul este îndepărtat cu distanța d=10 cm, valoarea măririi devine β_2=−2. Imaginile se prind pe un ecran. Să se afle:
a. distanța focală a lentilei
b. distanța minimă dintre obiect și imaginea sa reală
c. mărirea liniară transversală în cazul distanței minime obiect-imagine

26. O lentilă plan-convexă din sticlă cu indicele de refracție n=1,5 are convergența C=2 dioptrii. La distanța 60 cm în fața lentilei se află un obiect luminos. Să se afle:
a. raza de curbură a lentilei
b. distanța obiect-ecran
c. în ce sens și cu cât trebuie deplasată lentila pentru a se obține o nouă imagine pe ecran, dacă obiectul și ecranul sunt la distanța de la punctul **b.**

27. Între un obiect real și un ecran aflate la distanța d se constantă că se poate deplasa o lentilă convergentă cu distanța focală $f<d/4$. Notăm cu y_2=−4 cm și y_2'=−9 cmmărimile imaginilor clare obținute pe ecran pentru două poziții ale lentilei și cu D distanța dintre cele două poziții ale lentilei pentru care pe ecran se obțin imaginile clare. Să se afle:
a. mărimea obiectului y_1
b. măririle liniare transversale în cele două situații
c. raportul dimensiunilor corespunzătoare a celor două imagini y_2'/y_2 în funcție de d și D

28. O lentilă subțire convergentă formează pe un ecran o imagine clară cu înălțimea h_1=8 cm a unui obiect așezat perpendicular pe axa optică principală a lentilei. Menținând obiectul și ecranul fixe la distanța D=90 cm unul de cealălat, se apropie lentila de ecran și se obține o a doua imagine clară de înălțime h_2=2 cm a obiectului pe ecran. Să se afle:
a. înălțimea obiectului
b. măririle imaginilor în cele două situații
c. distanța focală a lentilei

29. Imaginea reală a unui obiect cu înălțimea y=3 cm se formează pe un ecran situat la distanța D=1 m de obiect. Se utilizează o lentilă subțire plan convexă cu raza de curbură a feței convexe egală cu 10 cm. Se constată că există două poziții posibile ale lentilei, distanța dintre ele fiind egală cu d=50 cm pentru care pe ecran se formează imagini clare ale obiectului. Să se afle:
a. distanța focală a lentilei
b. mărimile imaginilor în cele două cazuri
c. indicele de refracție al materialului lentilei

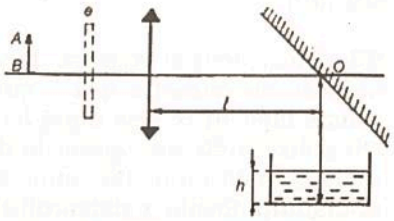
30. O lentilă subţire cu distanţa focală f=30 cm formează pentru un obiect aflat pe axa optică a lentilei şi în faţa ei o imagine reală la distanţa de 55 cm de lentilă. Să se afle:

a. poziţia obiectului faţă de lentilă

b. mărirea liniară transversală

c. grosimea unei lame cu feţele plan-paralele şi cu indicele de refracţie n=1,5 care aşezată perpendicular pe axa optică, între obiect şi lentilă, ar determina ca imaginea să fie egală cu obiectul

31. Un obiect rectiliniu este aşezat perpendicular pe axa optică principală a unei lentile subţiri cu distanţa focală f=30 cm astfel încât lentila formează o imagine reală de trei ori mai mare ca obiectul pe un ecran ca în figura alăturată. Să se afle:



a. poziţia obiectului faţă de lentilă

b. dacă aşezăm apoi o lamă cu feţe plan-paralele şi grosimea e=9 cm şi indicele de refracţie n=1,8, între obiect şi lentilă, în ce sens şi cu cât trebuie deplasat ecranul pentru a obţine din nou imaginea pe ecran?

c. dacă în condiţiile punctului **b.**, aşezăm o oglindă plană O în dreapta lentilei şi care intersectează axul optic la distanţa de 1 m de lentilă sub un unghi α=45^0, la ce distanţă de axa optică principală a lentilei se va forma imaginea şi ce natură are aceasta?

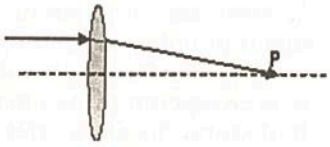
d. unde trebuie să se găsească fundul unei cuve faţă de axul optic principal al lentilei, în condiţiile de la punctul **c.**, dacă cuva conţine un strat de apă cu adâncimea h=20 cm şi indicele de refracţie n=4/3 pentru ca imaginea finală să fie reală şi plasată pe fundul cuvei

32. Un fascicul paralel de lumină, îngust, trece printr-o lentilă subţire biconvexă simetrică, din sticlă cu indicele de refracţie n=1,5 şi se strânge într-un punct P aflat în partea opusă a lentilei, la 20 cm de ea, ca în figura alăturată. Să se afle:

a. distanţa focală a lentilei

b. raza de curbură a unei suprafeţe a lentilei

c. în ce sens se deplasează imaginea, dacă între lentilă şi punctul P se interpune, perpendicular pe axa optică, o placă transparentă cu feţe plane şi paralele, având indicele de refracţie n_1=1,6 şi grosimea d=2 cm?



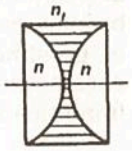
33. Un obiect se află în faţa unei lentile convergente subţiri din sticlă (n=1,5). Lentila este biconvexă şi are razele feţelor de curbură 5 cm şi respectiv 20 cm. Lentila formează pentru obiect o imagine care se prinde pe un ecran şi care este de 4 ori mai mare decât obiectul. Să se afle:

a. poziţia obiectului faţă de ecran

b. cu cât şi în ce sens trebuie deplasat ecranul, dacă între obiect şi lentilă se aşază o lamă cu feţe plan-paralele cu grosimea e=2,25 cm şi indicele de refracţie n_1=1,8?

c. poziţia imaginii faţă de lentila de la punctul **a.** şi care este natura imaginii, dacă din planul focal imagine al lentilei se află un mediu transparent cu indicele de refracţie n=1,6 care umple complet spaţiul din spatele lentilei, în condiţiile în care obiectul se află aşezat ca la punctul **a.**

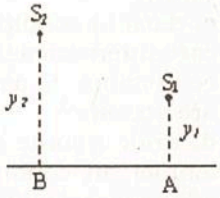
34. Două lentile plan-convexe identice, confecționate din sticlă, cu indicele de refracție n=1,5 și distanța focală f=60 cm, sunt centrate pe aceeași axă cu fețele curbe în contact ca în figură. Spațiul dintre ele se umple cu un lichid și se constată că sistemul astfel format are distanța focală F=1,62 m. Să se afle:



a. raza de curbură a feței convexe
b. indicele de refracție al lichidului
c. poziția unui obiect față de sistemul de lentile, dacă imaginea formată de acest sistem este reală și de două ori mai mare decât obiectul

35. Două lentile subțiri, biconvexe, identice, cu distanța focală f=20 cm și indicele de refracție n=1,5 sunt puse în contact. Se umple cu lichid intervalul rămas liber între cele două lentile și se obține astfel un sistem optic convergent. Un obiect y_1=6 cm, așezat la distanța de 20 cm de sistem, își formează imaginea reală la distanța de 60 cm de sistem. Să se afle:
a. distanța focală a sistemului echivalent
b. mărimea imaginii obiectului
c. indicele de refracție al lichidului

36. Cu ajutorul unei lentile subțiri din sticlă situată în aer se obține o imagine virtuală a sursei de lumină, ca în figura alăturată. Se cunosc y_1=5 cm, y_2=10 cm și distanța AB=50 cm. Indicele de refracție al sticlei este n=1,5. Să se afle:



a. distanța focală a lentilei
b. indicele de refracție al unui lichid în care, dacă introducem lentila, distanța ei focală crește de două ori
c. distanța focală a lentilei care alipită de prima lentilă face ca imaginea unui obiect real să devină virtuală și de două ori mai mică, în condițiile în care obiectul se menține la aceeași distanță față de prima lentilă

37. Imaginea reală a unui obiect cu înălțimea h=6 cm, plasat la distanța de 90 cm de o lentilă subțire, așezat perpendicular pe axa optică principală a acesteia, se formează la 45 cm de lentilă. Dacă alipim de prima lentilă o a doua lentilă, iar distanța obiect-sistem optic rămâne neschimbată, imaginea reală a obiectului se va forma la 72 cm de sistemul celor două lentile alipite. Să se afle:
a. convergența primei lentile
b. distanța focală a celei de a doua lentile
c. înălțimea imaginii formate de sistemul celor două lentile alipite

38. În fața unei lentile subțiri este plasat, perpendicular pe axa optică principală, la 10 cm de lentilă, un obiect liniar. Imaginea formată prin lentilă este virtuală și de cinci ori mai mare decât obiectul. Să se afle:
a. distanța focală a lentilei
b. convergența lentilei
c. convergența celei de-a doua lentile, dacănoua imagine a obiectului este prinsă pe un ecran aflat la 40 cm de sistemul de lentile în situația în care fără a modifica poziția obiectului și a lentilei se lipește de prima lentilă o a doua lentilă subțire

39. Imaginea reală a unui obiect așezat la distanța de 60 cm în fața unei lentile subțiri, perpendicular pe axa optică principală a lentilei, se formează la 15 cm de

lentilă. Alipind de prima lentilă o a doua lentilă subțire, centrată pe aceeaşi axă optică principală, imaginea virtuală a aceluiaşi obiect aşezat la 60 cm de sistem se formează la 30 cm de acest sistem. Să se afle:

a. distanța focală a primei lentilei

b. distanța focală a sistemului format din cele două lentile

c. convergența celei de-a doua lentile

d. raportul dintre înălțimea imaginii formate de prima lentilă şi înălțimea imaginii formate de sistemul de lentile

40. Un sistem optic este format din patru lentile plan-convexe identice de sticlă cu indicele de refracție n=1,5 având fiecare distanța focală f=50 cm. Prima şi a doua, precum a treia şi a patra sunt aşezate cu fețele convexe în contact. Fețele plane ale lentilelor 2 si 3 sunt lipite. Se umple spațiul dintre lentilele 1 şi 2 precum şi cel dintre 3 si 4 cu un lichid transparent cu indicele de refracție n'=1,4. Să se afle:

a. convergența sistemului astfel format

b. indicele de refracție al lichidului care umple spațiul dintre lentilele de sticlă, dacă o rază de lumină care cade pe sistemul astfel format iese din sistem paralelă cu ea însăşi

c. convergența sistemului dacă se înlătură lichidul transparent dintre lentilele 1 şi 2 şi 3 şi 4

41. În fața unei lentile biconvexe subțiri simetrică din sticlă cu indicele de refracție n=1,5 este aşezat un obiect luminos rectiliniu perpendicular pe axa optică principală. Deplasând obiectul de-a lungul axei optice a lentilei se constată că distanța minimă dintre obiect şi imaginea sa reală este D=40 cm. Să se afle:

a. raza unei fețe a lentilei

b. distanța minimă dintre obiect şi imaginea reală, dacă întreg sistemul se introduce în apă cu indicele de refracție n_a=4/3

c. distanța față de obiectul plasat la 30 cm în fața lentilei la care se formează imaginea obiectului, dacă alături de prima lentilă lipită de de ea plasăm o a doua lentilă subțire convergentă cu distanța focală f_2=15 cm în cazul în care sistemul se află în aer

42. Două lentile subțiri biconvexe identice, confecționate din sticlă cu indicele de refracție n=1,5 şi razele de curbură 20 cm sunt puse în contact coaxial. Spațiul dintre lentile este umplut cu apă care are indicele de refracție n_a=4/3. În fața acestui sistem optic se plasează un obiect cu înălțimea y=10 cm la distanța de 30 cm. Să se afle:

a. distanța focală a ansamblului de lentile

b. distanța dintre obiect şi imaginea acestuia prin sistem

c. înălțimea imaginii

d. distanța față de sistem la care se formează imaginea dacă întregul sistem se introduce în apă păstrând distanța obiect-sistem

43. Un obiect este plasat perpendicular pe axa optică principală a unei lentile subțiri L_1. Imaginea acestuia prin lentilă este reală, de două ori mai mică decât obiectul şi se formează la distanța de 45 cm de centrul optic al lentilei L_1. Alipind de prima lentilă o a doua lentilă subțire, L_2, înălțimea imaginii obiectului rămas la aceeaşi distanță față de lentila L_1, observată pe un ecran, este cu 20% mai mică decât înălțimea obiectului. Să se afle:

a. distanța focală a lentilei L_1
b. convergența sistemului format din cele două lentile alipite
c. distanța focală a lentilei L_2
d. înălțimea imaginii date de sistemul de lentile alipite, dacă înălțimea obiectului este h=10 mm

44. O lentilă plan-concavă are raza de curbură 10 cm și indicele de refracție n=1,5. La 20 cm în fața ei se așază un obiect înalt de 2 cm. Să se afle:
a. mărimea imaginii
b. poziția și mărimea imaginii în cazul în care se alătură lentilei o a doua lentilă identică având fețele plane în contact
c. distanța focală a sistemului optic cu cele două lentile alipite cu fețele curbe în contact, dacă spațiul dintre lentile se umple cu apă (n_a=4/3)

45. Două lentile convergente cu distanțele focale f_1=20 cm și f_2=7,5 cm sunt așezate coaxial la distanța d=40 cm una de cealaltă. În stânga primei lentile se așază un obiect cu înălțimea y_1=2 cm la 60 cm de aceasta. Să se afle:
a. poziția imaginii finale față de cea de-a doua lentilă
b. mărirea liniară transversală a sistemului de lentile
c. înălțimea imaginii obținute cu ajutorul sistemului

46. Două lentile subțiri convergente L_1 și L_2 au distanțele focale f_1=5 cm și respectiv f_2=10 cm. Ele sunt așezate coaxial. În fața primei lentile L_1, la distanța de 25 cm de centrul ei, se găsește un obiect de înălțime 12 cm. Lentila L_1 formează imaginea acestui obiect la distanța de 6 cm în fața lentilei L_2. Să se afle:
a. distanța dintre lentilele L_1 și L_2
b. distanța față de lentila L_2 la care se formează imaginea finală
c. înălțimea imaginii formate de sistemul de lentile

47. Un sistem optic este format din două lentile subțiri situate în aer la distanța d=30 cm una de cealaltă. Perpendicular pe axul optic principal la 20 cm în fața primei lentile se află un obiect liniar luminos. Prima lentilă produce o imagine reală, răsturnată și la fel de mare ca obiectul. Lentila a doua are convergența C_2=−10 m^{-1}. Să se afle:
a. distanța focală a primei lentile
b. poziția imaginii finale față de lentila a doua
c. mărirea liniară transversală a sistemului de lentile

48. La distanța de 30 cm de o lentilă convergentă cu convergența C_1=4 δ se așază perpendicular pe axul optic un obiect liniar luminos cu înălțimea y_1=2 mm, iar imaginea se obține pe un ecran așezat într-o poziție convenabilă. Menținând obiectul și lentila fixe, la distanța de d=1,2 m de lentilă, către partea ecranului, se așază o a doua lentilă divergentă cu convergența de C_2=−1,25 δ. Să se afle:
a.poziția imaginii față de prima lentilă
b. deplasarea ecranului și sensul pentru ca imaginea să se formeze pe ecran
c. natura imaginii și mărimea ei

49. De o lentilă cu convergența C_1=10 δ se alipește central o a doua lentilă cu convergența C_2=−2 δ. În fața primei lentile se așază un obiect real la distanța de 25 cm de ea. Să se afle:
a. natura celor două lentile și distanța focală a sistemului echivalent

b. poziția imaginii față de sistemul echivalent și natura imaginii
c. dacă lentila a doua se depărtează de prima lentilă C_1 cu d=20/3 cm, care este natura imaginii finale și unde se formează față de lentila din dreapta

50. Două lentile subțiri cu convergențele de C_1=10 m^{-1} și de C_2=−10 m^{-1} sunt centrate pe aceeași axă la d=5 cm una de alta. Un obiect cu înălțimea y_1=4 cm este așezat la 20 cm în fața lentilei convergente. Să se afle:
a. convergența sistemului care s-ar forma prin alipirea celor două lentile
b. distanța față de lentila divergentă la care se formează imaginea finală
c. înălțimea imaginii finale

51. Un obiect luminos se așază perpendicular pe axa optică principală, la distanța 75 cmîn fața unei lentile biconvexe din sticlă L_1, cu indice de refracție n=1,45, ale cărei fețe au aceeași rază de curbură R. Lentila L_1 formează o imagine reală a obiectului, la distanța x_2=1,5 mde lentilă. De partea opusă obiectului, la distanța d=1,25 mfață de lentila L_1, se așază o lentilă divergentă L_2 cu distanța focală f_2=−1 m. Cele două lentile au axa optică principală comună iar sistemul se află în aer. Să se afle:
a. distanța focală a lentilei L_1
b. razele de curbură ale fețelor lentilei L_1
c. coordonata imaginii dată de sistem, măsurată față de lentila L_2

52. Un obiect cu înălțimea y_1=6 cm se așază în fața unei lentile convergente cu distanța focală f_1=30 cm la 40 cm de aceasta. În spatele lentilei convergente se așază coaxial cu ea și la distanța d=1 m o a doua lentilă convergentă cu distanța focală f_2=60 cm. Să se afle:
a. poziția imaginii față de lentila a doua și natura acestei imagini
b. mărirea liniară transversală a sistemului de lentile
c. mărimea imaginii finale

53. Folosind o lentilă convergentă subțire se obține o imagine a unui obiect luminar cu mărimea y_1=10 cm așezat perpendicular pe axa optică principală a lentilei. Distanța dintre obiect și imagine este d=48 cm, iar mărirea liniară β=3. Dacă după lentilă se așază o altă lentilă subțire cu distanța focală f_2=24 cm, la distanța d=f_2 de prima lentilă, imaginea se modifică. Să se afle:
a. distanța focală a primei lentilei
b. distanța de la lentila a doua la imaginea finală
c. înălțimea imaginii formate de sistemul celor două lentile

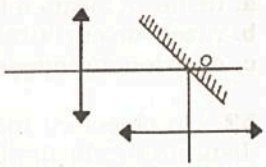
54. Un teleobiectiv este format din o lentilă divergentă cu convergența C_1=−10 δ și o lentilă convergentă cu convergența C_2=8 δ aflate la distanța d=7,5 cm una de cealaltă. În fața lentilei divergente se așază un obiect la distanța de 30 cm. Să se afle:
a. distanțele focale ale celor două lentile
b. distanța la care trebuie așezată o peliculă fotografică față de lentila divergentă pentru ca imaginea să se formeze pe aceasta
c. să se realizeze mersul razelor de lumină și să se precizeze care este mărirea liniară transversală a sistemului de lentile

55. Un sistem optic este format dintr-o lentilă divergentă și o lentilă convergentă situate la distanța d=40 cm una de cealată. Cele două lentile au distanțele focale în modul $|f|$=40 cm. Un obiect se așază în fața lentilei divergente la distanța de 10 cm de aceasta. Să se afle:

a.distanţa de la lentila a doua la imaginea finală
b.mărirea liniară transversală a sistemului de lentile
c. convergenţa sistemului obţinut prin alipirea lentilelor

56. O lentilă subţire formează imaginea unui obiect cu înălţimea y_1=1 cm pe un ecran plasat la 20 cm de lentilă. Imaginea este de 4 ori mai mare decât obiectul. La mijlocul distanţei dintre această lentilă şi ecran se aşază o lentilă divergentă. Pentru a se obţine din nou imaginea clară, ecranul trebuie deplasat cu 20 cm. Să se afle:
a. convergenţa primei lentile
b. distanţa focală a lentilei divergente
c. înălţimea imaginii finale

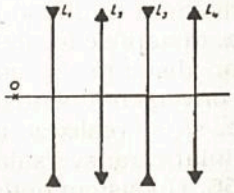
57. O sursă de lumină punctiformă este plasată pe axa optică principală a unei lentile convergente subţiri cu convergenţa C_1=5 dioptrii la distanţa de 25 cm de centrul optic al lentilei. De cealaltă parte a lentilei, la distanţa 50 cm de centrul optic se află o oglindă plană înclinată cu un unghi $\alpha=45^0$ faţă de axa optică principală a lentilei cu convergenţa C_1. Pe direcţia perpendiculară pe axa optică a primei lentile se află la distanţa d_2=80 cm de punctul de intersecţie cu oglinda plană, o altă lentilă convergentă cu distanţa focală f_2=25 cm. Să se afle:



a. poziţia imaginii formate de lentila L_1
b. poziţia imaginii finale a sursei faţă de lentila L_2
c.mărirea liniară transversală a sistemului

58. Un obiect luminos liniar este fixat perpendicular pe un banc optic. Amplasând o lentilă convergentă la o distanţă de 4 cm de obiect, se obţine o imagine reală de trei ori mai mare decât obiectul. Înlocuind lentila convergentă cu o lentilă divergentă şi menţinând aceeaşi distanţă lentilă-obiect, se obţine o imagine virtuală de trei ori mai mică decât obiectul. Cu lentila convergentă aflată la 4 cm de obiect, se amplasează pe bancul optic şi lentila divergentă, la distanţa de 16 cm faţă de lentila convergentă. Astfel lumina provenită de la obiect trece succesiv prin cele două lentile. Să se afle:
a. distanţele focale ale celor două lentile
b. poziţia şi natura imaginii finale, precum şi mărirea liniară transversală dată de sistemul de lentile
c. între ce limite şi în ce sens trebuie deplasată lentila divergentă, păstrând celelalte elemente fixe ca la punctul **b.**, astfel încât imaginea finală dată de sistem să poată fi proiectată pe un ecran

59. Un punct luminos se află la o distanţă de 10 cm de prima lentilă pe axul optic principal al unui sistem de lentile aşezate în următoarea ordine: o lentilă divergentă cu f_1=−5 cm, urmată la o distanţă de d_1=20/3 cm de o lentilă convergentă cu f_2=5 cm, urmată la o distanţa de d_2=5 cm de o lentilă divergentă cu f_3=−5 cm, urmată la o distanţă de d_3=10 cm de o lentilă convergentă cu f_4=5 cm ca în figura alăturată. Să se afle:



a. poziţia imaginii formate de prima lentilă
b. poziţia imaginii formate de a doua lentilă
c. poziţia imaginii finale a obiectului luminos faţă de ultima lentilă

60. Două lentile subțiri convergente cu distanțele focale f_1 și f_2 formează un sistem afocal. Un obiect punctiform se așază pe axa optică principală a sistemului afocal la distanța x de prima lentilă. Să se afle:

a. distanța dintre cele două lentile

b. mărirea liniară transversală a sistemului, dacă distanțele focale ale celor două lentile sunt f_1 și f_2 și să se arate că aceată mărire nu depinde de x

c. particularizați cerințele punctelor precedente pentru f_1=20 cm și f_2=50 cm

61. Două lentile subțiri situate la distanta d=40 cm, formează un sistem afocal. Sistemul afocal formează pentru un obiect așezat în fața primei lentile o imagine răsturnată și de trei ori mai mică. Să se afle:

a. distanțele focale ale celor două lentile

b.diametrul fascicului la ieșirea din cea de-a doua lentilă, dacă un fascicul paralel cu diametrul de 3 cm cade pe lentila cu convergență mai mică

c. convergența sistemului format prin acolarea celor două lentile

62. Un sistem optic este format din două lentile cu distanțele focale f_1=20 cm si f_2=4 cm. Distanța inițială dintre lentile este d=23 cm. Se îndepărtează lentila a doua cu 1 cm de prima lentilă. Să se afle:

a. poziția imaginii finale față de lentila a doua, dacă un obiect se află la o distanță infinit de mare în fața primei lentile în situația inițială

b. poziția imaginii finale față de lentila a doua a unui obiect așezat la 40 cm în fața primei lentile în situația în care L_2 s-a îndepărtat de L_1

c. mărirea liniară transversală a sistemului de lentile în situația de la **b.**

63. Două lentile subțiri cu distanțele focale de f_1=15 cm și f_2=−5 cm sunt centrate pe același ax optic, astfel încât un fascicul paralel cu axul optic principal părășește sistemul tot paralel cu axul optic principal. Un obiect înalt de 9 cm este plasat în fața lentilei convergente. Să se afle:

a. distanța dintre cele două lentile

b. înălțimea imaginii obiectului obținută cu sistemul de lentile

c. convergența sistemului astfel format prin acolarea celor două lentile

64. Un sistem afocal este format din două lentile. Prima lentilă are distanța focală f_1=30 cm și distanța dintre lentile este d=20 cm. Lentilele sunt confecționate din sticlă cu indicele de refracție n=1,5. Să se afle:

a.distanța focală a lentilei a doua

b. mărirea liniară transversală a sistemului afocal

c. distanța dintre lentile pentru ca sistemul să rămână afocal, dacă sistemul se introduce sistemul în apă cu indicele de refracție n_a=4/3

65. O lentilă convergentă are distanța focală de f_1=30 cm. În fața lentilei se așază un obiect liniar la distanța de 40 cm de aceasta. În spatele lentilei convergente se așază o a doua lentilă divergentă cu distanța focală f_2=−20 cm și la d=1,1 m de lentila convergentă. Să se afle:

a. poziția ecranului în spatele lentilei convergente și în lipsa lentilei divergente, pentru ca imaginea să se formeze pe acesta

b. cu cât și în ce sens trebuie deplasat ecranul pentru ca imaginea să se prindă pe acesta după așezarea lentilei divergente?

c. distanța dintre cele două lentile, dacă cu ajutorul acestora se formează un sistem afocal și care va fi mărirea liniară transversală a acestui sistem, dacă prima lentilă este convergentă

1.3. Instrumente optice

1. Un miop vede fără ochelari să citească la distanța d=20 cm. Cu ce lentile își corectează miopul vederea, dacă distanța optimă de vedere pentru un ochi normal este d_0=25 cm?

2. Un hipermetrop vede fără ochelari obiectele situate la distanța d=30 cm. Cu ce lentile își corectează acesta vederea, dacă distanța optimă de vedere pentru un ochi normal este d_0=25 cm?

3. Un om vârstnic are punctul remotum la distanța d=1 m. Ce lentile trebuie să utilizeze el pentru a vedea, practic, până la infinit?

4. Un prezbit vede obiectele situate între d_1=40 cm și d_2=50 cm. Vederea acestui prezbit se corectează cu ochelari bifocali, care au sus o lentilă ce îi permite să vadă bine la depărtare și jos o lentilă care îi permite să citească. Să se afle convergențele lentilelor.

5. O persoană vede clar obiectele aflate la mai mult de D=40 cm de ochii săi. Ce devin pentru acest observator limitele vederii distincte, când el privește prin ochelari cu convergența C=1 δ? Distanța dintre ochi și centrul optic al lentilei este în ambele cazuri d=1 cm.

6. Un miop vede clar până la d_1=2 m depărtare de ochi și folosește ochelarii unui miop care vede clar până la d_2=4 m. Să se afle distanța la care va vedea clar primul miop cu ochelarii celui de-al doilea miop.

7. Pentru un miop distanțele maximă și minimă de vedere distinctă sunt D=3 m și respectiv d=20 cm. El își procură ochelari care îi permit să vadă obiectele situate la infinit. Să se afle noua distanță minimă de vedere clară.

8. Un observator miop care vede clar între distanțele d=10 cm și D=2 m, observă o linie subțire cu ajutorul unei lentile ce are convergența C=50 δ. Ochiul se află la distanța a=2 cm de lentilă. Între ce limite poate omul să deplaseze obiectul față de lentilă, fără a înceta să vadă clar linia?

9. O lupă are mărirea β=6 pentru un ochi normal, care privește lângă lupă. La ce distanță optimă de o foaie de hârtie trebuie ținută lupa pentru ca razele solare să carbonizeze hârtia?

10. Fie un sistem optic format din obiectivul O cu distanța focală f_1=2 mm și un ocular C cu distanța focală f_2=3 cm. Un obiect se află la distanța a=3 mm de obiectiv. Să se afle distanța minimă dintre cele două lentile pentru ca un observator a cărui distanță minimă de vedere distinctă este d_0=25 cm să vadă clar imaginea obiectului.

11. Se fotografiează un obiect de două ori cu același aparat. Când obiectul se află la distanța de d_1=20 m, înălțimea imaginii sale pe fotografie este h_1=20 mm, iar când obiectul se află la distanța de d_2=15 m, înălțimea imaginii sale pe fotografie este h_2=40 mm. Să se afle distanța focală a obiectivului aparatului.

12. Trebuie fotografiat un patinator care are viteza v=5 m/s. Distanța focală a obiectivului este f=10 cm iar distanța patinatorului până la aparat este de 5 m. Să se afle timpul de expunere maxim, dacă neclaritarea imaginii nu depășește a=0,2 mm.

13. Un obiect trebuie fotografiat cu un aparat de fotografiat al cărui obiectiv are distanța focală f=12 cm. Obiectul se află la 15 cm de obiectiv iar distanța obiectiv-placă fotografică este 20 cm. Să se afle distanța focală a lentilei adiționale ce trebuie folosită pentru a realiza fotografia.

14. Se fotografiază un obiect punctiform aflat la distanța d_1=4 m, cu un aparat foto cu un obiectiv ce are distanța focală f=25 cm. Pentru a fotografia același obiect, dar de la distanțe diferite se diafragmează obiectivul astfel că imaginea sa să nu depășească pe peliculă înălțimea d=0,1 mm. Să se afle diametrului diafragmei, dacă obiectul se află la:

a. distanța d_2=3 m de obiectiv

b. distanța d_2=6 m de obiectiv

15. Un diapozitiv cu dimensiunile 3 cm și 4 cm se proiectează pe un ecran aflat la distanța de 4 m de obiectivul aparatului de proiecție. Lentila aparatului de proiecție are distanța focală f=20 cm. Să se afle dimensiunile celor două laturi ale imaginii de pe ecranul de proiecție.

16. Un teleobiectiv este format dintr-o lentilă convergentă cu distanța focală f_1=6 cm și o lentilă divergentă cu distanța focală f_2=−10 cm, centrate la distanța d=1,5 cm una de alta. Obiectul cu înălțimea y_1=10 cm este așezat la 30 cm în fața lentilei convergente. Să se afle:

a. poziția imaginii față de lentila divergentă

b. mărirea liniară transversală a sistemului de lentile

c. înălțimea imaginii pe peliculă

17. Obiectivul unui fotoaparat are două lentile: prima divergentă cu distanța focalăf_1=−50 mm iar a doua convergentă cu distanța focală f_2=80 mm. Lentila divergentă este la distanța ℓ=45 cm de peliculă. La ce distanță de peliculă trebuie așezată lentila convergentă pentru a forma imagini clare ale obiectelor de la infinit?

18. Ocularul unui microscop cu distanța focală f_2=2 cm se află centrat față de obiectivul cu distanța focală f_1=0,6 cm la o anumită distanță. Obiectul de examinat se găsește la distanța de 5/8 cm în fața obiectivului, iar imaginea dată de microscop este observată la distanța de vedere optimă egală cu d_0=25 cm. Să se afle:

a. poziția primei imagini față de lentila obiectiv

b. lungimea tubului microscopului

c. mărirea microscopului

19. La un microscop distanța focală a obiectivului este f_1=5,4 mm, iar a ocularului este f_2=1 cm. Distanța obiectului față de obiectiv este de 5,6 mm. Un ochi normal vede între distanța de vedere optimă egală cu d_0=25 cm și punctul de infinit. Să se afle:

a. lungimea tubului microscopului când imaginea se formează la distanța optimă de vedere

b. lungimea tubului microscopului când imaginea se formează la infinit
c. cât poate să deplaseze observatorul ocularul pentru a pune la punct microscopul?

20. Un microscop optic este format din două lentile subțiri convergente cu axul optic principal comun. Un obiect este așezat la distanța de 5,2 mm în fața primei lentile obiectiv, care are distanța focală de f_1=5 mm. Imaginea virtuală este observată de ochiul unui obsevator miop alipit de a doua lentilă ocular, cu distanța focală de f_2=2 cm, la distanța de 15 cm de ochiul observatorului. Să se afle:
a. lungimea tubului microscopului
b. mărirea microscopului
c. cum ar trebui așezate cele două lentile astfel încât sistemul să păstreze paralel un fascicul incident de lumină paralelă, mărindu-i dimensiunile?

21. O lamă transparentă de grosime h=5 mm este privită printr-un microscop. Dacă se pune la punct microscopul pentru observarea feței superioare a lamei, pentru a vedea clar fața inferioară, măsuța pe care se află lama se deplasează în sus cu D=3,5 mm. Să se afle indicele de refracție al lamei.

22. Obiectivul și ocularul unui microscop au distanțele focale f_1=5 mm și f_2=2 cm, iar intervalul optic este e=12 cm. Punerea la punct a microscopului este practic pentru infinit. Să se afle:
a. valoarea grosismentului microscopului
b. valoarea puterii optice a microscopului
c. lungimea tubului microscopului

23. O lunetă astronomică are două lentile cu distanțele focale f_1=80 cm și f_2=10 cm. Să se afle:
a. lungimea minimă și maximă a lunetei pentru un om care vede între distanța optimă de citire d_0=25 cm și punctul de infinit
b. lungimea minimă și maximă a lunetei pentru un miop care vede clar între d_1=16 cm și d_2=2 m
c. distanța pe care poate deplasa ocularul un om care vede normal pentru a vedea clar imaginea formată de lunetă

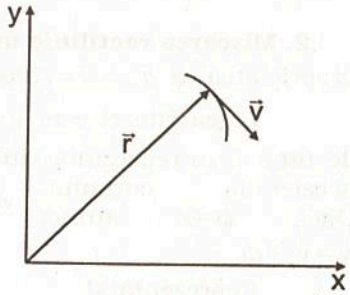
24. O lunetă al cărei obiectiv are distanța focală egală cu f_1=80 cm este focalizată pentru a observa Luna. Știind că obiectivul lunetei este fix, cum și cu cât trebuie deplasat ocularul lunetei pentru a se putea observa un obiect aflat la distanța de d=10 m de obiectivul lunetei, dacă ocularul are distanța focală f_2=5 cm și dacă în acest caz ochiul privește fără acomodare?

25. Un binoclu de teatru are obiectivul cu distanța focală f_1=8 cm și ocularul cu distanța focală de f_2=−4 cm. Între ce limite poate fi reglată distanța dintre obiectiv și ocular pentru un ochi normal?

Mişcarea mecanică

Prin **mişcare mecanică** se înţelege schimbarea poziţiei unui corp faţă de alte corpuri. Mişcare mecanică se studiază cu modelul punctului material, un punct în care se consideră concentrată toată masa corpului, şi cu ajutorul unui sistem de referinţă, format dintr-un corp de referinţă, o riglă pentru măsurarea distanţelor şi un ceas pentru măsurarea duratelor.

Mărimi fizice care caracterizează mişcare mecanică



1. Vectorul de poziţie $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, reprezintă vectorul care uneşte originea de referinţă de pe corpul de referinţă cu punctul unde se află corpul. În sistemul internaţional se măsoară în $[r]_{SI} = m$.

2. Vectorul deplasare reprezintă variaţia vectorului de poziţie: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

3. Vectorul viteză medie reprezintă raportul dintre variaţia vectorului de poziţie $\Delta\vec{r}$, numit şi vector deplasare, şi intervalul de timp corespunzător Δt, astfel că $\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Vectorul viteză medie este secant la traiectorie. În sistemul internaţional se măsoară în $[v]_{SI} = m/s$.

Vectorul viteză instantanee se obţine considerând intervale de timp din ce în ce mai scurte, astfel că $\Delta t \to 0$. Obţinem $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$. Vectorul viteză instantanee este tangent la traiectorie şi are sensul determinat de sensul de mişcare al corpului pe traiectorie.

4. Vectorul acceleraţie medie reprezintă raportul dintre variaţia vectorului viteză şi intervalul de timp corespunzător Δt, astfel că $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$. Vectorul acceleraţie medie este îndreptat spre partea concavă a traiectoiei. În sistemul internaţional se măsoară în $[a]_{SI} = m/s^2$

Vectorul acceleraţie instantanee se obţine considerând intervale de timp din ce în ce mai scurte, astfel ca $\Delta t \to 0$. Obţinem $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$.

Vectorul acceleraţie are două componete una tangenţială la traiectorie şi una normală la traiectorie.

1. Componenta tangentă la traiectorie a vectorului acceleraţie apare ori de câte ori vectoul viteză îşi modifică modulul fără a-şi modifica direcţia şi sensul (în mişcarea rectilinie uniform variată).

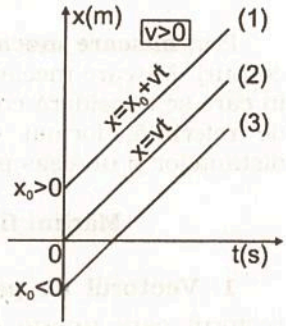
2. Componenta normală la traiectorie a vectorului acceleraţie apare ori de câte ori vectoul viteză îşi modifică direcţia şi sensul fără a-şi modifica modulul (în mişcarea circular uniform variată).

Tipuri de mişcări mecanice

1. Mişcarea rectilinie şi uniformă are proprietatea că $\vec{v}_m = \vec{v} = constant$

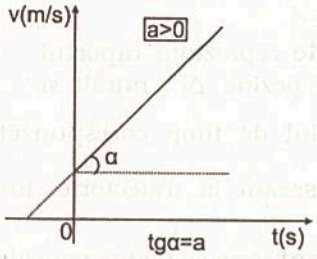
Legea mişcării rectilinii şi uniforme este: $x = x_0 + v(t - t_0)$, unde x reprezintă coordonata la momentul de timp t, x_0 reprezintă coordonata iniţială la momentul iniţial de timp t_0 şi v este viteza corpului. Dacă t_0=0, atunci $x = x_0 + vt$

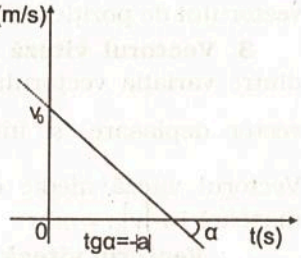
Reprezentând grafic legea coordonatei în funcție de timp se obține o dreaptă, astfel că intersecția dreptei cu axa timpului arată momentul de timp după care coordonata devine nulă (corpul trece prin originea axei de coordonate), iar intersecția graficului cu axa coordonatei *Ox* semnifică coordonata la momentul inițial. Panta dreptei (tgα) semnifică fizic viteza corpului. Astfel dacă tgα>0⇒v>0, iar dacă tgα<0⇒v<0.



2. Mișcarea rectilinie uniform variată are proprietatea că $\vec{a}_m = \vec{a} = const\tan t$

Legea vitezei este $v = v_0 + a(t - t_0)$, unde *v* reprezintă viteza la momentul de timp *t*, v_0 reprezintă viteza inițială la momentul inițial de timp t_0 și *a* este accelerația corpului. Dacă t_0=0, atunci $v = v_0 + at$

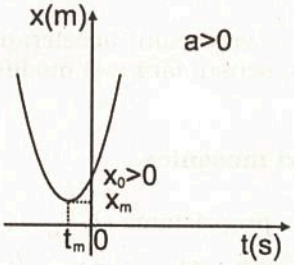


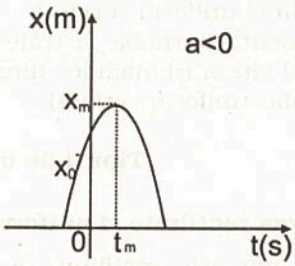


Reprezentând grafic legea vitezei în funcție de timp se obține o dreaptă, astfel că intersecția dreptei cu axa timpului arată momentul de timp după care viteza devine nulă (corpul se oprește), iar intersecția graficului vitezei cu axa vitezei semnifică viteza la momentul inițial. Panta dreptei (tgα) semnifică fizic accelerația corpului. Astfel dacă tgα>0⇒a>0, iar dacă tgα<0⇒a<0.

Dacă viteza se reprezintă în funcție de timp, aria cuprinsă între graficul vitezei, axa timpului și cele două ordonate construite prin extremități semnifică fizic distanța parcursă.

Legea coordonatei este $x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$, unde *x* reprezintă coordonata la momentul de timp *t* iar x_0 reprezintă coordonata inițială la momentul inițial de timp t_0. Dacă t_0=0, atunci ecuația coordonatei devine $x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$. Deoarece coordonata este funcție de gradul doi în *t*, reprezentarea grafică a legii coordonatei în funcție de timp este o parabolă. Dacă a>0, parabola are vârful în jos, iar dacă a<0, parabola are vârful în sus.

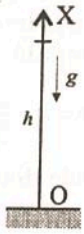




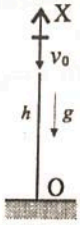
Legea lui Galilei se obține eliminând timpul din ecuațiile vitezei și cordonatei și obținem $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

3. Mişcarea sub acţiunea greutăţii

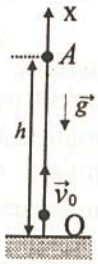
a. Căderea liberă este o mişcare uniform accelerată cu accelerația g şi fără viteză iniţială. Legea de mişcare este $x = h - \frac{g}{2}t^2$, unde h este înălţimea de la care cade corpul. Din x=0 obţinem $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ timpul de cădere şi din legea vitezei obţinem viteza la sol $v = -\sqrt{2gh}$. Semnul – ne arată că mobilul se deplasează în sens contrar axei de coordonate.



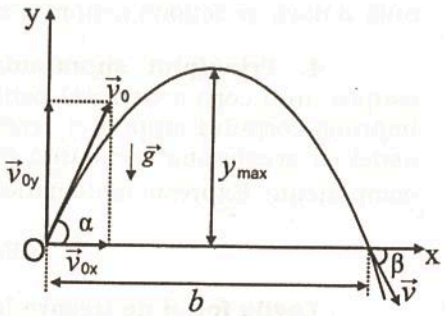
b. Aruncarea pe verticală de sus în jos este o mişcare uniform accelerată cu accelerația g şi cu viteză iniţială. Legea de mişcare este $x = h - v_0 t - \frac{g}{2}t^2$, legea vitezei este $v = -v_0 - gt$ iar ecuaţia lui Galilei este $v^2 = v_0^2 + 2gh$.



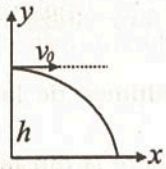
c. Aruncarea pe verticală de jos în sus este o mişcare iniţial uniform încetinită cu accelerația g. Legea de mişcare este $x = v_0 t - \frac{g}{2}t^2$ iar legea vitezei este $v = v_0 - gt$. Din $v = 0$ se obţine timpul de urcare $t_u = \frac{v_0}{g}$ şi din legea de mişcare se obţine înălţimea maximă $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$. Din x=0 se obţine timpul total de mişcare $t_m = \frac{2v_0}{g} = t_u + t_c \Rightarrow t_u = t_c = \frac{v_0}{g}$, iar corpul revine la sol cu aceeaşi valoare a vitezei.



d. Aruncarea sub un unghi α cu o viteză iniţială v_0 este o mişcare într-un plan. Mişcarea este compusă dintr-o mişcare rectilinie şi uniformă pe axa Ox cu viteza iniţială $v_0\cos\alpha$: $x = v_0 \cos\alpha t$ şi o mişcare uniform variată cu accelerația g şi viteza iniţială $v_0\sin\alpha$ pe axa Oy: $y = v_0 \sin\alpha t - \frac{g}{2}t^2$. Ecuaţia traiectoriei se obţine eliminând timpul din cele două ecuaţii: $y = x tg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$, astfel că traiectoria va fi o parabolă cu vârful în sus. Înălţimea maximă atinsă este $h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$, timpul necesar atingeii înălţimii maxime este $t_u = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$, timpul de mişcare $t_m = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ şi distanţa maximă parcusă pe orizontală, adică bătaia $b = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Corpul revine la sol cu aceeaşi valoare a vitezei sub unghiul β=α.



e. Aruncarea pe orizontală cu viteza inițială v_0, de la înălțimea h, este o mișcarea compusă dintr-o mișcare rectilinie și uniformă pe axa Ox cu viteza inițială v_0: $x = v_0 t$ și o cădere liberă cu accelerația g pe axa Oy: $y = h - \frac{g}{2}t^2$. Ecuația traiectoriei se obține eliminând timpul din cele două ecuații: $y = h - \frac{gx^2}{2v_0^2}$, astfel că traiectoria va fi o parabolă cu vârful în sus. Timpul de cădere este $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, bătaia este $b = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$ și viteza la sol $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.



Principiile mecanicii

1. Principiul inerției (principiul întâi): Un corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atât timp cât asupra lui nu acționează alte corpuri care să-i modifice această stare de mișcare.

2. Principiul fundamental al dinamicii (principiul al doilea): Dacă asupra unui corp acționează o forță, aceasta îi imprimă corpului o accelerație direct proporțională cu forța și invers proporțională cu masa corpului. Expresia matematică a acestui principiu este: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, unde $\vec{F}$ este vectorul forță, m este masa corpului iar $\vec{a}$ este vectorul accelerație. În sistemul internațional se măsoară în $[F]_{SI} = kgm/s^2 = N$

3. Principiul acțiunii și reacțiunii (principiul al treilea): Dacă un corp acționează asupra altui corp cu o forță numită acțiune, cel de-al doilea acționează asupra primului corp cu o forță numită reacțiune, astfel că cele două forțe sunt egale în modul, au aceeași direcție și sens contrar. Niciodată acțiunea și reacțiunea nu vor acționa asupra aceluiași corp, deoarece rezultanta lor este nulă și dacă ar acționa asupra aceluiași corp acesta nu ar mai putea fi accelerat.

4. Principiul suprapunerii forțelor (principiul al patrulea): Dacă asupra unui corp acționează concomitent mai multe forțe, atunci fiecare forță îi imprimă corpului propria ei accelerație, independent de existența celolalte forțe, astfel că accelerația rezultantă este suma vectorială a accelerațiilor individuale componente. Expresia matematică a acestui principiu este: $\sum_{k=1} \vec{F}_k = m \cdot \vec{a}$.

Forța de frecare

Legile forței de frecare la alunecare:

1. Forța de frecare la alunecare dintre două corpuri nu depinde de aria suprafeței de contact dintre corpuri.

2. Forța de frecare la alunecare dintre două corpuri este direct proporțională cu forța de apăsare normală exercitată pe suprafața de contact. Matematic, $F_f = \mu N$, unde μ este coeficientul de frecare, iar N este reacțiunea normală. În sistemul internațional μ este adimensional și subunitar.

3. Coeficientul de frecare depinde de natura materialelor aflate în contact și de gradul de prelucrare al acestora.

Unghiul de frecare α este unghiul unui plan înclinat pentru care un corp coboară uniform pe acesta, astfel că μ=tgα.

Legea lui Hooke. Forța elastică

1. Legea lui Hooke este $\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell}{\ell_0}$, unde F este forța, S este suprafața, E este modulul de elasticitate al lui Young, $\Delta\ell$ este alungirea absolută și ℓ_0 este lungimea inițială.
Modulul de elasticitate al lui Young este o constantă de material și în sistemul internațional se măsoară în $[E]_{SI}=N/m^2$

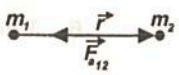
Dacă $\sigma=\frac{F}{S}$, este efortul unitar, iar $\varepsilon=\frac{\Delta\ell}{\ell_0}$, este alungirea relativă, obținem $\sigma=E\varepsilon$. În sistemul internațional $[\sigma]_{SI}=1N/m^2$, iar alungirea relativă este adimensională.

2. Forța elastică este direct proporțională cu deformația și se opune acesteia, astfel că $\vec{F}_{el}=-k\vec{x}$, unde $\vec{F}_{el}$ este forța elastică, k este constanta elastică, iar deformația este $x=\Delta\ell=\ell-\ell_0$, cu ℓ lungimea inițială a firului elastic. În sistemul internațional se măsoară în $[k]_{SI}=N/m$.

Legea atracției universale

Legea atracției universale: Două corpuri punctiforme se atrag pe direcția care le unește cu câte o forță care este direct proporțională cu produsul maselor lor și este invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele.

Expresia forței de interacțiune este: $\vec{F}=-k\frac{m_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, unde $\vec{F}$ este forța de atracție dintre corpuri, m_1 și m_2 sunt masele corpurilor, $\vec{r}$ este vectorul de poziție al corpului al doilea față de primul) iar k este constanta atracției universale și este $k=6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm²/kg²



Câmpul gravitațional

Câmpul gravitațional este o formă de existență a materiei distinctă de substanță care se manifestă prin exercitarea unor forțe de atracție asupra oricărui corp de probă adus în vecinătatea corpului care crează câmpul.

Intensitatea câmpului gravitațional într-un punct, $\vec{\Gamma}$, este o mărimea fizică vectorială care descrie câmpul gravitațional într-un punct și reprezintă raportul dintre forța cu care corpul care creează câmpul acționează asupra corpului de probă și mărimea masei corpului de probă.

Astfel că $\vec{\Gamma}=\frac{\vec{F}}{m}=-k\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, unde $\vec{\Gamma}$, este intensitatea câmpului gravitațional într-un punct, $\vec{F}$ este forța de atracție dintre corpul cu masă M care creează câmpul și corpul de probă, m masa corpului de probă și r este

distanța dintre centrele celor două corpuri considerate punctiforme. În sistemul internațional se măsoară în $[\Gamma]_{SI} = N/kg$.

Mișcarea circular uniformă. Forța centripetă

Mișcarea circular uniformă este mișcarea în care traiectoria este un cerc iar corpul descrie arce de cerc egale în intervale de timp egale.

Mărimile fizice care caracterizează mișcarea circular uniformă sunt:

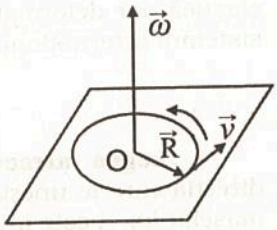
1. Raza vectoare $\vec{r}$ este vectorul de poziție al corpului măsurat față de centrul cercului.

2. Perioada *T*, este intervalul de timp în care corpul descrie o rotație completă și este $T = \frac{\Delta t}{N}$, unde Δt este intervalul de timp în care corpul efectuează N rotații complete. În sistemul internațional $[T]_{SI} = s$.

3. Frecvența ν, reprezintă numarul de rotații complete efectuate de corp într-o secundă, astfel că $\nu = \frac{N}{\Delta t}$. În sistemul internațional $[\nu]_{SI} = rot/s$.

Observăm că $\nu T = 1$.

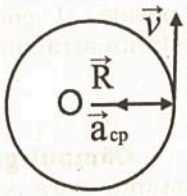
4. Viteza liniară v, reprezintă viteza cu care se deplasează corpul pe cerc și este $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, unde Δs este distanța parcursă de corp pe cerc iar Δt este intervalul de timp corespunzător. Viteza liniară este tangentă la cerc.



5. Viteza unghiulară ω, reprezintă raportul dintre variația unghiului la centrul cercului $\Delta\alpha$ și intervalul corespunzător de timp Δt, astfel că $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$. În sistemul internațional $[\omega]_{SI} = rad/s$.

Cum $\Delta s = r\Delta\alpha$, atunci $v = \omega r$. Din $2\pi r = vT \Rightarrow \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$.

6. Vectorul accelerație centripetă $\vec{a}_{cp}$, astfel că $\vec{a}_{cp} = -\omega^2\vec{r}$. Scalar $a_{cp} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$. Accelerația centripetă este orientată pe direcția razei vectoare și în sens opus acesteia, adică spre centrul cercului.



7. Forța centripetă nu este un nou tip de forță ci este rezultanta forțelor reale care acționează asupra corpului, astfel că $\vec{F}_{cp} = m\vec{a}_{cp} = -m\omega^2\vec{r}$, iar scalar $F_{cp} = ma_{cp} = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r}$.

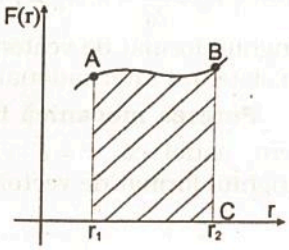
Lucrul mecanic

Lucrul mecanic al unei forțe constante *F*, care își deplasează punctul de aplicație pe distanța *d* este egal cu produsul scalar dintre vectorul forță și vectorul deplasare, astfel că $L = \vec{F}\cdot\vec{d} = Fd\cos\alpha$, unde α este unghiul format de vectorul forță cu vectorul deplasare. În sistemul internațional $[L]_{SI} = Nm = J$.

a. Dacă $0<\alpha<90^0$, atunci $\cos\alpha>0$, ceea ce înseamnă că $L>0 \Rightarrow$ forța este o forță motoare și ajută la mișcare.

b. Dacă $90^0<\alpha<180^0$, atunci $\cos\alpha<0$, ceea ce înseamnă că $L<0 \Rightarrow$ forţa este o forţă rezistivă şi nu ajută la mişcare.

c. Dacă $\alpha=90^0$, atunci $\cos\alpha=0$ şi forţa nu efecteuează lucru mecanic fiind perpendiculară pe direcţia de deplasare.



Interpretarea geometrică a lucrului mecanic: Dacă forţa este reprezentată în funcţie de coordonată, atunci aria cuprinsă între graficul forţei, axa coordonatelor şi cele două ordonate construite prin extremităţi semnifică fizic lucrul mecanic.

Cazuri particulare:

1. Lucrul mecanic al forţei de greutate între două puncte este $L_{G,AB}=mg(h_A-h_B)$, unde m este masa corpului, iar h_A, respectiv h_B reprezintă înălţimile la care se află cele două puncte faţă de acelaşi reper

Deoarece lucrul mecanic al unei forţe nu depinde de forma drumului parcurs şi nici de legea de mişcare, ci doar de poziţia iniţială şi de cea finală înseamnă că forţa este o forţă de tip conservativ. O forţă este de timp conservativ, dacă lucrul ei mecanic pe o traiectorie închisă este nul.

Prin urmare forţa de greutate este o forţă de tip conservativ.

2. Lucrul mecanic al forţei elastice care îşi deplasează punctul de aplicaţie între două puncte A si B este: $L_{F_{el},AB}=F_{elm}(x_B-x_A)=\frac{F_{el_A}+F_{el_B}}{2}(x_B-x_A)=-\frac{k}{2}(x_B^2-x_A^2)$

Deoarece lucrul mecanic al forţei elastice depinde doar de poziţia iniţială A şi de cea finală B, înseamnă că şi forţa elastică este de tip conservativ.

3. Lucrul mecanic al forţei de frecare care îşi deplasează punctul de aplicaţie între două puncte este: $L_{Ff,AB}=-F_f d=-\mu N d$.

În cazul deplasării corpului pe planul orizontal cum $N=mg \Rightarrow L_{Ff,AB}-\mu mgd$, iar în cazul deplasării corpului pe un plan înclinat cu unghiul α şi pe aceeaşi distanţă d, cum $N=mg\cos\alpha \Rightarrow L_{Ff,AB}-\mu mgd\cos\alpha$. Observăm că lucrul mecanic depinde de forma traiectoriei, ceea ce înseamnă că forţa de frecare este neconservativă şi deoacere lucrul ei mecanic este negativ forţa de frecareeste de tip rezistiv.

Randamentul planului înclinat reprezintă raportul dintre lucrul mecanic util şi lucrul mecanic consumat.

Lucrul mecanic util este lucrul efectuat de o forţă constantă paralelă cu planul astfel ca un corp să fie ridicat uniform la înălţimea h fără frecare.

Lucrul mecanic consumat este lucrul efectuat de o forţă constantă paralelă cu planul astfel ca un corp să fie ridicat uniform la înălţimea h cu frecare.

Randamentul planului înclinat este: $\eta=\frac{1}{1+\mu ctg\alpha}$, unde η este randamentul, μ este coeficientul de frecare, iar α este unghiului planului înclinat. Randamentul planului înclinat este adimensional şi subunitar.

Puterea mecanică

Puterea mecanică medie reprezintă raportul dintre lucrul mecanic L, efectuat de o forţă într-un interval de timp Δt şi intervalul de timp corespunzător.

Astfel $P_m = \frac{L}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}_m = Fv_m \cos\alpha$, unde F este forţa, v_m este viteza medie şi α este unghiul format de vectorul forţă şi vectorul deplasare.
În sistemul internaţional se măsoară în $[P]_{SI} = J/s = W$.

Puterea mecanică instantanee se obţine când intervalul de timp tinde spre zero, astfel că $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv\cos\alpha$, unde v este viteza instantanee, iar α este unghiul format de vectorul forţă şi vectorul viteză.

Energia mecanică

Energia este o mărime fizică scalară care caracterizează capacitatea unui corp de a efectua lucru mecanic.

Energia este de două feluri: energie cinetică, numită şi energie de mişcare, şi energie potenţială, numită şi energie de poziţie.

1. Energia cinetică este energia pe care o are un corp cu masa m aflat în stare de mişcare faţă de un sistem de referinţă cu viteza v, şi este egală cu semiprodusul dintre masa corpului şi pătratul vitezei acestuia, astfel că $E_c = \frac{mv^2}{2}$. Energia cinetică depinde de alegerea sistemului de referinţă inerţial.

2. Energia potenţială a unui sistem de corpuri se defineşte dacă sistemul îşi modifică configuraţia şi dacă forţele care intervin între părţile constituente ale sistemului sunt forţe de tip conservativ. În acest caz variaţia energiei potenţiale este egală cu opusul lucrului mecanic al forţelor de tip conservativ: $\Delta E_p = -L$. Variaţia energiei potenţiale este unic definită. Energia potenţială nu are valoare unică ci depinde de o constantă aditivă care se alege prin convenţie.

a. Energia potenţială a sistemului corp–Pământ este $E_{p,g} = mgh$, dacă se consideră nulă energia potenţială la nivelul solului.

b. Energia potenţială a sistemului corp–resort este $E_{p,el} = \frac{kx^2}{2}$, dacă se consideră nulă energia potenţială în poziţia în care resortul este nedeformat.

Energia mecanică a unui corp este suma dintre energia cinetică şi energia potenţială, astfel că: $E_m = E_c + E_p$. Energia mecanică a unui corp se măsoară în $|E_m|_{SI} = J$.

Teorema de variaţie a energiei cinetice

Variaţia energiei cinetice a unui corp care se deplasează în raport cu un sistem de referinţă inerţial este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţa rezultantă care acţionează asupra corpului în timpul acestei variaţii. Astfel $\Delta E_c = L$.

Teorema de conservare a energiei mecanice

Energia mecanică a unui sistem izolat în care acţionează forţe de tip conservativ este constantă, adică energia mecanică se conservă. Astfel $E_m = E_c + E_p = const$.

Impulsul punctului material

Impulsul punctului material reprezintă produsul dintre masa corpului m şi vectorul viteză $\vec{v}$, astfel că $\vec{p} = m\vec{v}$. În sistemul internaţional se măsoară în $[p]_{SI} = kgm/s$.

Teorema de variaţie a impulsului

Teorema de variaţie a impulsului pentru un punct material: Variaţia impulsului unui corp este egală cu impulsul forţei aplicate asupra acestui corp: $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$. Dacă corpul este izolat impulsul lui se conservă şi corpul se va mişca rectiliniu şi uniform sau se va afla în repaus.

Teorema de variaţie a impulsului pentru un sistem format din două puncte materiale: Variaţia impulsului total al unui sistem format din două puncte materiale într-un interval de timp este egală cu impulsul rezultantei forţelor externe care acţionează asupra sistemului în intervalul de timp considerat: $\Delta\vec{P} = \vec{F}_{rez}\Delta t$, unde $\vec{P}$ este impulsul total al sistemului şi este suma vectorială a impulsurilor corpurilor componente ale sistemului: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Forţele care se exercită între un corp ce aparţine sistemului şi corpurile care nu aparţin sistemului se numesc forţe externe. Forţele care se exercită între corpurile ce aparţin sistemului se numesc forţe interne şi rezutanta lor este nulă. Prin urmare forţele de natură internă nu pot modifica impulsul total al sistemului ci doar îl redistribuie între părţile componente. Numai forţele de natură externă pot modifica impulsul total al sistemului.

Dacă sistemul este izolat şi deci rezultanta forţelor externe este nulă, atunci impulsul total al sistemului se conservă. Astfel $\vec{F}_{rez} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{P} = const$.

Ciocniri

Prin ciocnirea a două corpuri se înţelege un proces de interacţiune care durează foarte puţin, astfel că nici înainte şi nici după ciocnire corpurile nu interacţionează.

În cazul ciocnirilor se conservă impulsul: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$, unde m_1 şi m_2 reprezintă masele corpurilor, $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ sunt vectorii viteză ai corpurilor imediat înainte de ciocnire, iar $\vec{v}_1'$ şi $\vec{v}_2'$ sunt vectorii viteză ai corpurilor imediat după ciocnire.

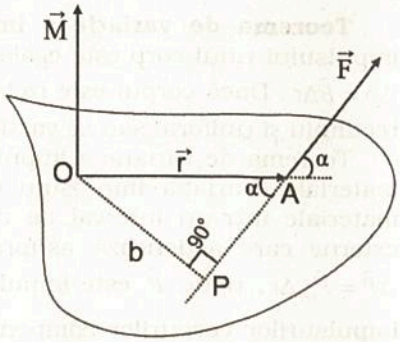
a. Ciocnirea perfect plastică este ciocnirea în care corpurile îşi cuplează masele şi se mişcă ulterior împreună, astfel că $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$, unde m_1 şi m_2 reprezintă masele corpurilor, $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ sunt vectorii viteză ai corpurilor imediat înainte de ciocnire, iar $\vec{v}$ este viteza comună după ciocnire. În cionirea plastică se degajă căldură pe seama scăderii energiei cinetice, astfel că: $Q = -\Delta E_C = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$

b. Ciocnirea perfect elastică este ciocnirea în care energia cinetică a corpurilor se conservă, astfel că: $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$.

Vitezele corpurilor imediat după ciocnirea unidimensională perfect elastică sunt: $v_1' = \frac{2(m_1v_1 + m_2v_2)}{m_1 + m_2} - v_1$ şi $v_2' = \frac{2(m_1v_1 + m_2v_2)}{m_1 + m_2} - v_2$.

Momentul forţei

Momentul forţei faţă de un punct O este o mărime fizică vectorială egală cu produsul vectorial dintre vectorul de poziţie al corpului $\vec{r}$ faţă de punct şi vectorul forţă $\vec{F}$: $\vec{M}_{F,O} = \vec{r} \times \vec{F}$. Modulul momentului forţei este $M = rF\sin\alpha$, unde α reprezintă unghiul format de vectorul de poziţie $\vec{r}$ cu vectorul forţă $\vec{F}$. Direcţia vectorului moment al forţei este perpendiculară pe planul format de vectorul de poziţie şi vectorul forţă, iar sensul se stabileşte cu regula burghiului. Se aşază burghiul perpendicular pe planul vectorul de poziţie şi vectorul forţă şi se roteşte în sensul aducerii vectorului de poziţie peste vectorul forţă cu unghiul minim. Sensul de înaintare al burghiului este sensul vectorului moment al forţei. În sistemul internaţional se măsoară în $[M]_{SI} = Nm$.



Echilibrul punctului material şi al solidului rigid.

1. Un punct material sau un solid rigid se află în **echilibru de translaţie**, adică se află în repaus sau se mişcă rectiliniu şi uniform, dacă rezultanta forţelor care acţionează asupra lor este nulă. Astfel $\sum \vec{F}_k = 0$.

2. Un solid rigid se află în **echilibru de rotaţie**, adică se află în repaus sau se roteşte cicular uniform, dacă momentul rezultant al forţelor aplicate solidului este nul. Astfel $\sum \vec{M}_k = 0$.

Principii şi legi în mişcarea mecanică

2.1. Mişcarea mecanică

1. Legea de mişcare a unui punct material este exprimată cu ajutorul vectorului de poziţie: $\vec{r}(t)=(4t-2)\vec{i}+(-3t+1)\vec{j}$ (m), unde timpul t este exprimat în secunde. Să se afle:

a. ecuaţia traiectoriei punctului material
b. expresia vectorului viteză a punctului material
c. modulul vitezei punctului material
d. acceleraţia punctului material

2. Ecuaţia de mişcare a unui punct material este $\vec{r}(t)=\frac{t^2}{2}\vec{i}+t\vec{j}$. Să se afle:

a. ecuaţia traiectoriei punctului material
b. modulul vitezei punctului material la momentul t=2 s
c. acceleraţia momentană în intervalul de timp $t\in(0,4)$s

3. Vectorul de poziţie al unui punct material depinde de timp conform relaţiei $\vec{r}(t)=\vec{i}+2t\vec{j}+t^2\vec{k}$. Să se afle:

a. vectorul viteză
b. modulul vitezei la momentul t_1=2 s
c. vectorul acceleraţie

4. Un punct material se deplasează astfel încât ecuaţiile de mişcare pe cele două axe de coordonate sunt $x=3t-4$ şi $y=8-t$, unde x şi y sunt exprimate în metri, iar t în secunde. Să se afle:

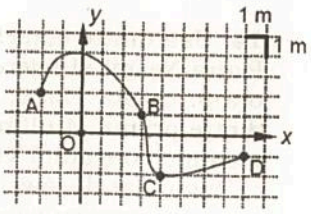
a. ecuaţia traiectoriei punctului material
b. vectorul viteză al punctului material
c. modulul vitezei punctului material

5. Un punct material se deplasează pe o traiectorie descrisă de ecuaţia $y=2x+1$. La momentul t_1=1 s mobilul se află în punctul de abscisă x_1=1 m iar la momentul t_2=2 s se află în punctul de abscisă x_2=3 m. Să se afle:

a. deplasarea punctului material între cele două momente de timp
b. modulul vitezei medii a punctului material
c. expresia vectorului viteză a punctului material, dacă mobilul se mişcă uniform pe axele de coordonate
d. vectorul acceleraţie în condiţiile punctului **c.**

6. Un punct material are la momentul iniţial de timp vectorul de poziţie $\vec{r}_0=2\vec{i}-\vec{j}$ iar componentele vectorului viteză pe axele de coordonate sunt v_x=−4 m/s şi v_y=3 m/s. Să se afle:

a. modulul vitezei punctului material şi vectorul viteză
b. vectorul de poziţie
c. deplasarea mobilului în intervalul de timp t_1=2s şi t_2=4s
d. ecuaţia traiectoriei



7. În figura alăturată este redată traiectoria curbilinie plană descrisă de un punct material în sistemul de axe xOy. Iniţial, mobilul se află în punctul A. Durata mişcării este Δt=1 min. Să se afle:

a. coordonatele mobilului atunci când acesta se află în punctul C

b. modulul vectorului de poziție al mobilului atunci când acesta se află în punctul A

c. modulul vectorului viteză medie cu care s-a deplasat mobilul între punctele A și D

8. Un mobil descrie o mișcare rectilinie caracterizată de legea de mișcare $x=2t^2-3t+5$ (m). Să se afle:

a. modul cum variază viteza instantanee a mobilului în funcție de timp

b. reprezentarea grafică a legii vitezei

c. accelerația mobilului

9. Un mobil se mișcă rectiliniu uniform încetinit cu modulul accelerației $|a|=2$ m/s² și cu viteza inițială $v_0=10$ m/s. Să se afle:

a. viteza mobilului după trei secunde de la începerea mișcării

b. momentul de timp la care mobilul se oprește

c. viteza medie a mobilului calculată de la începutul mișcării până în momentul opririi

d. distanța parcursă de mobil până la oprire

10. Un tren accelerează uniform pornind din repaus până la viteza $v=90$ km/h într-un interval de timp de $\Delta t=10$ s. Să se afle:

a. accelerația în această mișcare

b. viteza medie în acest intervalul de timp considerat

c. distanța parcursă de mobil în acest interval de timp

11. O mașină care are la un moment dat $v_0=54$ km/h vede un stop roșu și frânează uniform într-un interval de timp de $\Delta t=15$ s. Să se afle:

a. accelerația în această mișcare

b. viteza medie în acest interval de timp considerat

c. distanța parcursă de mobil în acest interval de timp

12. Un șofer care se deplasează rectiliniu și uniform cu viteza $v_0=72$ km/h intră într-o depășire și își crește viteza în fiecare secundă în mod uniform cu 1 m/s. Depășirea durează un interval de timp $\Delta t=20$ s. Să se afle:

a. accelerația în această mișcare

b. viteza medie în acest intervalul de timp considerat

c. distanța parcursă de mobil în acest interval de timp

13. Un biciclist are la un moment dat viteza $v_0=2$ m/s și frânează uniform până la viteza $v=1$ m/s într-un interval de timp $\Delta t=10$ s. Să se afle:

a. accelerația în această mișcare

b. viteza medie în intervalul de timp considerat

c. distanța parcursă de mobil în acest interval de timp

d. timpul după care se oprește bicilistul și distanța parcursă până la oprire

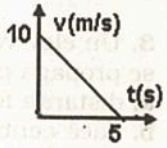
14. Una dintre etapele turului ciclist al României s-a desfășurat între localitățile Piatra Neamț și Miercurea Ciuc, pe distanța totală $D=150$ km. Startul s-a dat la ora 9. La ora 12:20, când cel mai rapid ciclist a trecut linia de sosire, distanța dintre primul și ultimul ciclist era $d=6$ km. Din acest moment ultimul ciclist își menține constantă viteza $v_0=11$ m/s pe distanța $d_1=5500$ m. Pe ultimii $d_2=500$ m, încurajat de spectatori, acesta se deplasează cu accelerație constantă și trece linia de sosire cu viteza $v=13$ m/s. Să se afle:

a. viteza medie a celui mai rapid ciclist

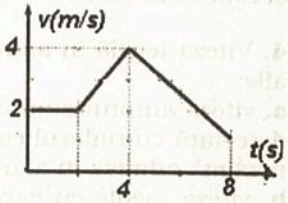
b. valoarea accelerației ultimului ciclist în timpul parcurgerii distanței d_2=500 m înaintea liniei de sosire
c. ora la care ultimul ciclist a trecut linia de sosire

15. Un mobil se deplasează pe o suprafață orizontală astfel că viteza variază în funcție de timp după legea $v=12-4t$. Să se afle:
a. momentul de timp la care corpul se oprește
b. accelerația instantanee a corpului
c. distanța parcursă de corp până la oprire

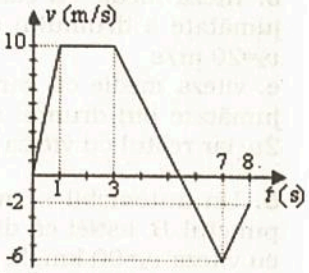
16. Reprezentarea grafică din figura alăturată a vitezei unui mobil în funcție de timp este o linie dreaptă. Să se afle:
a. accelerația mobilului
b. spațiul parcurs de mobil între momentele de timp t_1=2s și t_2=4s
c. viteza medie a mobilului în intervalul de timp (t_1, t_2)
d. spațiul parcurs de mobil până la oprire



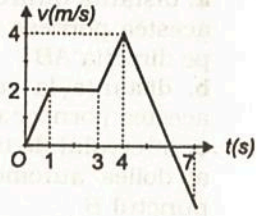
17. Un corp se mișcă pe o traiectorie rectilinie cu o viteză care variază conform graficului. Să se afle:
a. valoarea maximă a modulului accelerației în decursul mișcării
b. distanța parcursă în intervalul $t\in(0,4)$s
c. viteza medie a corpului în intervalul $t\in(0,8)$s



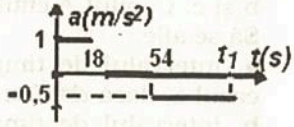
18. Un mobil pornește în sensul pozitiv al axei de coordonate Ox din originea acesteia. Viteza depinde de timp conform graficului alăturat. Să se afle:
a. viteza medie a mobilului în intervalul de timp $t\in(0;3)$s
b. modulul maxim al accelerației în timpul mișcării
c. viteza medie în intervalul de timp $t\in(0;8)$s
d. viteza în modul medie în intervalul de timp $t\in(0;8)$s



19. Este reprezentată grafic dependența vitezei în funcție de timp. Coordonata inițial este nulă. Să se afle:
a. viteza medie a mobilului în intervalul de timp $t\in(0;1)$s
b. viteza medie a mobilului în intervalul de timp $t\in(0;6)$s
c. accelerația pentru intervalul de timp $t\in(4;7)$s și să se precizeze caracterul mișcării
d. valoarea vitezei instantanee la momentul t_7=7 s



20. În graficul alăturat este reprezentată dependența de timp a accelerației unui metrou pe durata deplasării rectilinii între două stații de la pornirea din repaus până la oprirea la momentul t_1. Să se afle:
a. viteza maximă atinsă de metrou
b. durata călătoriei între cele între cele două stații
c. distanța parcursă de metrou între cele două stații
d. viteza medie a metroului pe întreaga durată a călătoriei



2.1.1. Mişcarea rectilinie şi uniformă a punctului material

1. Un sonar lansează un semnal sonor care se propagă prin apă mării cu viteza v=1500 m/s. Semnalul sonor se reflectă pe obiect şi este recepţionat după Δt=10s. Să se afle la ce distanţă de sonar se situează obiectul detectat.

2. Un radiolocator care are scopul să localizeze obiecte în spaţiul cosmic prin utilizarea semnalelor radio. Undele radio se propagă prin spaţiu cosmic cu viteza $c=3\cdot10^8$ m/s, se reflectă după ce ating obiectul respectiv şi se întorc pe aceaşi direcţie. Se măsoară timpul dintre momentul emisiei şi momentul recepţionării undelor radio Δt=2 min. Să se afle distanţa la care se află acest obiect faţă de Pământ.

3. Un elev vede lumina emisă de un fulger şi după Δt=3 s aude tunetul. Sunetul se propagă prin aer cu viteza v=340 m/s. Să se afle:
a. distanţa faţă de elev la care a fulgerat
b. dacă centrul furtunii se apropie sau se depărtează de elev, dacă după un timp acesta vede un nou fulger şi aude tunetul după $\Delta t'$=2 s

4. Viteza legală în afara localităţilor pentru autoturisme este v_1=90 km/h. Să se afle:
a. viteza autoturismului, dacă în intervalul de timp t=1/50 s deplasarea acestuia detectată cu radarul este d=60 cm şi precizaţi dacă autoturismul a depăşit viteza maximă admisă în afara localităţilor
b. viteza medie cu care s-a deplasat autoturismul, dacă acesta parcurge prima jumătate a drumului său total cu viteza legală, iar cealaltă jumătate cu viteza v_2=20 m/s
c. viteza medie cu care s-a deplasat autoturismul, dacă acesta parcurge prima jumătate din drumul său total cu viteza $4v$, următorul sfert de drum cu viteza $2v$, iar restul cu viteza v

5. Un automobil se mişcă uniform cu viteza v_1=72 km/h din punctul A spre punctul B, astfel că distanţa AB=100 km. Un al doilea automobil se deplasează cu viteza v_2=90 km/h. Să se afle:
a. distanţa dintre cele două automobile după t=1 h de la începerea mişcării, dacă acestea pornesc simultan, iar al doilea automobil porneşte din B, perpendicular pe direcţia AB
b. distanţa la care se întâlnesc cele două automobile faţă de oraşul A, dacă acestea pornesc unul spre celălalt simultan
c. intervalul de timp Δt de la plecarea primului automobil după care porneşte un al doilea automobil din acelaşi loc, astfel că cele două se întâlnesc chiar în punctul B

6. Doi copii A şi B sunt aşezaţi la distanţa D=120 m unul de celălalt, în apropierea unui zid lung şi drept. Copii se află aşezaţi faţă de zid ca în figurile a, b şi c. Copilul A emite un sunet scurt. Sunetul se propagă cu viteza c=340 m/s. Să se afle:
a. intervalul de timp dintre momentele recepţionării sunetelor de către B, în cazul a, dacă d=80 m
b. intervalul de timp dintre momentele recepţionării sunetelor de către B, în cazul b, dacă d=80 m
c. durata unui semnal lung emis de copilul A astfel ca copilul B să perceapă un sunet de două ori mai lung în cazul c, dacă d=80 m şi x=40 m

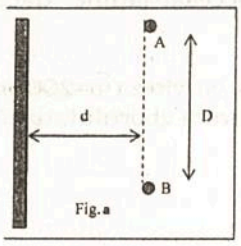


Fig.a

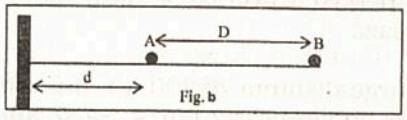


Fig.b

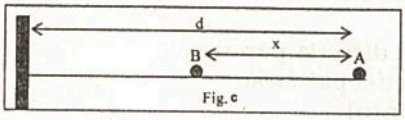


Fig.c

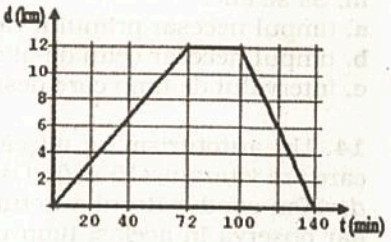
7. Distanța dintre două porturi este d=80 km. O șalupă se deplasează în sensul curentului în timpul t_1=4 h iar împotriva curentului în timpul t_2=8 h cu aceeași viteză față de apă. Să se afle:

a. viteza de curgere a apei

b. viteza șalupei față de apă

c. timpul în care apa deplasează șalupa între porturi dacă motorul acesteia nu funcționează

8. Apa unui fluviu curge cu viteză constantă între două porturi A și B. Dependența de timp a coordonatei d a unei șalupe, măsurată față de portul A, este redată în figura alăturată. Șalupa pornește din A, ajunge în B unde staționează și se întoarce în A. Viteza șalupei față de apă se consideră constantă pe tot parcursul mișcării. Să se afle:



a. viteza șalupei față de apă

b.durata deplasării șalupei pe drumul A-B-A dacă șalupa nu ar staționa în B

c. distanța față de portul B la care se întâlnesc două șalupe, presupunând că ele pornesc simultan din B și din A cu aceeași viteză față de apă ca la **a.**

d. reprezentarea grafică a dependenței de timp a coordonatei d a șalupei (la deplasările $A \rightarrow B$ și $B \rightarrow A$) în condițiile în care apa ar fi stătătoare și șalupa nu ar staționa în B

9. Pe o scară rulantă cu lungimea ℓ=10 m, aflată în mișcare, un om în vârstă urcă scara în timpul t_1=10 s. Pe scara imobilă omul urcă scara în timpul t_2=14 s. Știind că omul se mișcă cu aceeași viteză față de scară, să se afle:

a. viteza omului față de scară

b. viteza scării rulante

c. timpul în care ridică scara omul dacă acesta stă pe ea

10. O platformă de tren cu lungimea ℓ=14 m se deplasează rectiliniu cu viteza v_0=12 m/s. Un ceferist se mișcă de-a lungul platformei inițial în sensul mișcării platformei, plecând de la unul din capete, dus-întors cu viteza v=2 m/s față de aceasta. Să se afle:

a. vitezele ceferistului față de sol la dus și la întors

b. timpul în care ceferistul revine la capătul platformei de unde a plecat

c. distanța parcursă de ceferist față de sol în situația de la punctul **b.**

11. Un vâslaș care se mișcă cu viteza u=0,5 m/s față de râul care curge cu viteza v=0,3 m/s dorește să traverseze râul pe drumul cel mai scurt. Lățimea râului este ℓ=50 m. Să se afle:

a. cum trebuie să orienteze barca, pentru a ajunge pe malul opus?

b. timpul necesar pentru traversarea râului

c. timpul necesar pentru traversarea unui lac cu aceeaşi lăţime, dacă viteza vâslaşului se păstrează

12. Un avion parcurge distanţa d=200 km dus-întors cu viteza u=200 m/s faţă de vânt. Vântul bate cu viteza v=20 m/s. Să se afle durata zborului, dacă vântul suflă:
a. perpendicular pe direcţia parcursă
b. de-a lungul direcţiei parcurse
c. când nu suflă vântul

13. Doi vâslaşi pornesc simultan din acelaşi punct de pe un mal spre un punct de pe malul opus aflat perpendicular pe direcţia de curgere, mişcându-se astfel: primul îşi orientează barca asfel încât un om de pe sol să-l vadă deplasându-se perpendicular pe maluri, în timp ce al doilea îşi orientează barca perpendicular pe maluri, iar când atinge malul opus se deplasează în sens contrar curgerii râului. Apa curge cu viteza v_a=1 m/s, iar vâslaşii se deplasează cu viteza v=2 m/s aceeaşi tot timpul faţă de apă. Distanţa dintre cele două maluri este ℓ=20 m. Să se afle:
a. timpul necesar primului vâslaş ca să traverseze râul
b. timpul necesar celui de-al doilea vâslaş ca să traverseze râul
c. intervalul de timp care desparte sosirea vâslaşilor în punctul de pe malul opus

14. Un autoturism se mişcă cu viteza v_1=25 m/s în spatele unui autocamion care are viteza v_2=15 m/s. Când distanţa dintre autoturism şi autocamion devine d_1=20m conducătorul autoturismului se angajează în depăşirea autocamionului, dar observă în acelaşi timp un autobuz venind din sensul opus cu viteza v_3=20 m/s. Pentru a efectua în siguranţă manevra de depăşire, autoturismul trebuie să fie la distanţa d_2=30 m în faţa autocamionului. Să se afle:
a. distanţa minimă d_3 care trebuie asigurată între autobuz şi autoturism
b. timpul necesar depăşirii
c. distanţele parcurse de cele trei vehicule în timpul manevrei de depăşire

15. Un pescar merge cu barca în susul râului şi scapă în dreptul unui pod un colac în apă. După un timp Δt=1/2 h pescarul îşi dă seama că a scăpat colacul, se întoarce şi găseşte colacul la distanţa d=5 km mai departe de pod. Pescarul vâsleşte mereu cu aceeaşi viteză faţă de apă. Să se afle:
a. timpul după care pescarul recuperează colacul din momentul pierderii acestuia
b. viteza apei
c. viteza colacului faţă de maluri, dacă mişcarea acestuia este barată de un cablu rigid AB legat între cele două maluri şi care formează cu un mal un unghi $\alpha=60^0$

16. Două trenuri au lungimile ℓ_1=60 m şi respectiv ℓ_2=90 m. Cele două trenuri se deplasează pe direcţii paralele cu vitezele v_1=15 m/s şi respectiv v_2=25 m/s. Să se afle:
a. timpul cât durează trecerea unui tren prin dreptul celuilalt, dacă trenurile se deplasează în acelaşi sens
b. timpul cât durează trecerea unui tren prin dreptul celuilalt, dacă trenurile se deplasează în sensuri contrare
c. timpul cât vede un om aflat în primul tren trecând prin dreptul lui trenul al doilea, dacă trenurile se mişcă în acelaşi sens

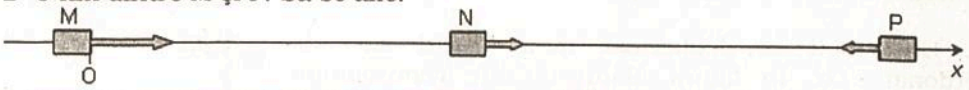
17. Un călător se află într-un tren care se deplasează cu viteza constantă v_1=50 km/h. La un moment dat începe să plouă şi călătorul observă că picăturile de ploaie lasă urme pe fereastra trenului înclinate cu unghiul α=30° faţă de verticală. Să se afle:

a. viteza picăturilor de ploaie

b. viteza celui de-al doilea tren, dacă în timpul t=30 s călătorul din primul tren vede trecând trenul al doilea cu lungimea ℓ=300 m în acelaşi sens pe o linie paralelă

c. timpul cât vede un om aflat în al doilea tren trecând prin dreptul lui primul tren cu lungimea ℓ_1=200 m, dacă trenurile se mişcă în sensuri contrare şi trenul al doilea are viteza v_2=30 km/h

18. Trei automobile, M, N şi P se deplasează uniform, cu vitezele $v_M=3v_N=2v_P$=108 km/h pe o autostradă dreaptă. La ora 11:58:55, N se află la mijlocul distanţei D=9 km dintre M şi P. Să se afle:



a. viteza v_1 cu care scade distanţa dintre M şi N

b. ora hh:mm:ss la care automobilul M va ajunge din urmă automobilul N

c. distanţa parcursă de fiecare automobil în intervalul de timp cuprins între ora 11:58:55 şi ora hh:mm:ss la care M l-a ajuns din urmă pe N

d. reprezentarea grafică a dependenţei de timp a coordonatei automobilului P, alegând axa Ox ca în figură, considerând originea timpului la ora 11:58:55 şi intervalul de timp dintre 11:58:55 şi ora la care P ajunge în originea O

19. Doi înotători parcurg un bazin de lungime ℓ=50 m, cu vitezele v_1=3,6 m/s şi respectiv, v_2=2,8 m/s. Cei doi înotători plecă în acelaşi moment de la acelaşi capăt al bazinului. Presupunând că întoarcerile de la capetele bazinului sunt considerate instantanee, să se afle:

a. momentul de timp la care se vor întâlni prima dată

b. distanţa unde se vor întâlni prima dată faţă de punctul de plecare

c. timpul după care primul înotător va parcurge mai mult decât al doilea o lungime de bazin

20. Mişcarea rectilinie şi uniformă a unui mobil este descrisă de ecuaţia de mişcare $x=3t-2$ (m), unde timpul este exprimat în secunde. Să se afle:

a. reprezentarea grafică a legii de mişcare

b. ce reprezintă punctele de intersecţie ale graficului cu axele de coordonate?

c. viteza mobilului

21. Un mobil execută o mişcare rectilinie uniformă cu viteza v=−2 m/s de-a lungul axei de coordonate Ox şi porneşte din punctul de coordonată x_0=4 m. Să se afle:

a. ecuaţia coordonatei a mobilului

b. momentul de timp când mobilul trece prin originea axei de coordonate

c. distanţa parcursă de mobil în primele 10 s de la începerea mişcării

22. Mişcările rectilinii a două mobile sunt descrise de legile de mişcare $x_1=3t$ şi $x_2=10-2t$, unde x este exprimat în metri şi t în secunde. Mobilele pornesc simultan la momentul t_0=0 s. Să se afle:

a. reprezentarea grafică în coordonate (x,t), a legilor de mişcare ale mobilelor

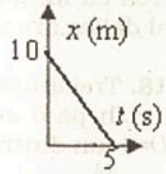
b. timpul după care se întâlnesc mobilele şi locul unde se întâlnesc

c. viteza cu care trec mobilele unul pe lângă celălalt în momentul întâlnirii

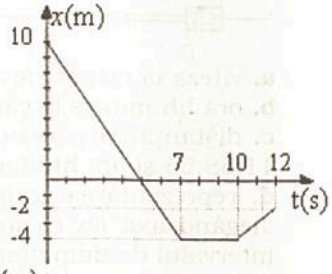
d. distanța dintre mobile după t=6 s de la începerea mișcărilor

23. Mișcările rectilinii a două mobile sunt descrise de legile: $x_1=2+2t$ (m) și $x_2=4-t$ (m) unde t este exprimat în secunde. Să se afle:
a. reprezentarea grafică a legii de mișcare a mobilului (2) în raport cu un sistem de referință legat de mobilul (1)
b. momentul întâlnirii celor două mobile
c. viteza relativă cu care trec mobilele unul pe lângă celălalt în momentul întâlnirii

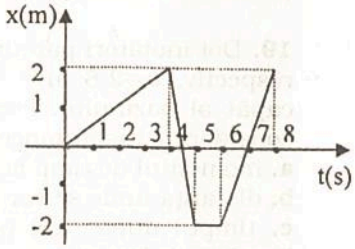
24. Reprezentarea grafică a legii de mișcare a unui mobil este redată în figura alăturată. Să se afle:
a. viteza mobilului
b. ecuația de mișcare a mobilului
c. coordonata la momentul t=3 s



25. Un mobil se deplasează de-a lungul axei de coordonate Ox. În figura alăturată este reprezentată grafic coordonata mobilului de timp. Să se afle:
a. viteza mobilului când $t \in (0,7)$s
b. caracterul mișcării mobilului când $t \in (7,10)$s
c. viteza medie a mobilului când $t \in (0,12)$s
d. momentul de timp în care mobilul trece prin originea axei de coordonate



26. În graficul din figură este reprezentată legea de mișcare a unui mobil care se deplasează rectiliniu. Să se afle:
a. vitezele de mișcare ale mobilului în cele patru etape distincte de mișcare
b. distanța totală parcursă
c. viteza medie pe întregul interval de timp



2.1.2. Mișcare rectilinie uniform variată a punctului material

1. Legea de mișcare a unui mobil este $x=-t^2+3t+4$ (m). Să se afle:
a. accelerația mobilului și viteza inițială a acestuia
b. coordonata la momentul t=1 s
c. momentul de timp la care mobilul trece prin originea axelor de coordonate

2. Legea de mișcare a unui mobil este $x=-2t^2+5t+3$ (m). Să se afle:
a. ecuația vitezei și să se reprezinte grafic
b. ce reprezintă fizic intersecțiile curbei vitezei cu axele de coordonate?
c. ce reprezintă fizic aria cuprinsă între curba vitezei, axa timpului și axa vitezei?

3. Un corp are o mișcare descrisă de ecuația de mișcare $x=3t+t^2$, unde x este exprimat în metri și t în secunde. Să se afle:
a. viteza corpului după 3 s de la începerea mișcării
b. distanța parcursă în a cincea-a secundă de la lansare
c. forța care acționează asupra corpului cu masa m=200 g

4. Un mobil se mişcă uniform variat din originea axei Ox cu viteza iniţială v_0=20 m/s la t_0=0 s. Prin punctul de abscisă x=150 m mobilul trece la momentul t cu viteza v=−10 m/s. Să se afle:
a. acceleraţia mobilului
b. momentul de timp la care mobilul trece prin punctul de coordonată x
c. viteza medie a mobilului în intervalul de timp $(0,t)$
d. distanţa parcursă de mobil în intervalul de timp $(0,t)$
e. viteza în modul medie a mobilului în intervalul de timp $(0,t)$

5. Un automobil pornind din repaus atinge, în mişcare uniform accelerată, viteza v_1=18 km/h, după ce a parcurs d_1=10 m. Să se afle:
a. timpul după care automobilul ajunge la v_1
b. distanţa parcursă din momentul pornirii până în momentul în care a atins viteza v_2=72 km/h
c. viteza medie a mobilului după ce acesta parcurge distanţa d_3=40 m

6. Un tren electric se mişcă cu viteza v_0=108 km/h. În urma unei pene de curent electric, trenul se opreşte într-un interval de timp Δt=30 s. Să se afle:
a. acceleraţia trenului
b. distanţa parcusă de tren până la oprire
c. viteza medie până la oprire

7. O sanie coboară liber, uniform accelerat, pe un deal cu lungimea ℓ=60 m într-un timp t=10 s. Să se afle:
a. acceleraţia cu care coboară sania dealul
b. viteza pe care o are sania la baza dealului
c. distanţa parcursă în virtutea inerţiei, dacă mişcarea saniei se continuă pe un plan orizontal cu acceleraţia a_1=−9 m/s²

8. Un mobil porneşte uniform accelerat cu viteza iniţială v_0=4 m/s şi ajunge în punctul de abscisă x=400 m după un timp t=40 s. Să se afle:
a. acceleraţia mobilului
b. viteza mobilului la momentul de timp t
c. viteza medie când mobilul se află în punctul de abscisă x_1=93,75 m

9. În urma străpungerii unui blindaj, viteza unui proiectil scade de la valoarea v_0=500 m/s la valoarea v=300 m/s, dacă grosimea stratului de blindaj este d=0,2 m. Să se afle:
a. acceleraţia cu care se mişcă proiectilul în blindaj
b. timpul în care proiectilul a străpuns blindajul
c. grosimea maximă a stratului de blindaj pe care-l poate străpunge proiectilul

10. Un corp frânează uniform cu acceleraţia a=0,5 m/s² pornind la momentul iniţial cu viteza v_0=10 m/s. Să se afle:
a. distanţa parcursă de corp până la oprire şi timpul după care se opreşte acesta
b. distanţa parcursă după t=5 s de la începerea mişcării
c. distanţa parcursă de corp în a patra secundă de la începerea mişcării

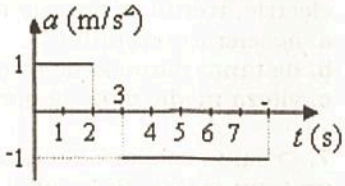
11. O maşină se mişcă uniform încetinit. După ce parcurge distanţa d_1=10 m faţă de punctul de plecare maşina are viteza v_1=12 m/s, iar după parcurgerea distanţei d_2=15 m faţă de acelaşi punct viteza maşinii este v_2=8 m/s. Să se afle:
a. viteza iniţială şi acceleraţia maşinii

b. timpul necesar maşinii să parcurgă distanţa dintre cele două puncte
c. timpul şi distanţa parcursă până la oprire

12. Un mobil parcurge prima jumătate din drumul său d=450 m în timpul t_1=25 s, iar cealaltă jumătate în t_2=20 s. Să se afle:
a. accelerația mobilului
b. viteza iniţială a mobilului
c. viteza medie a mobilului

13. Metroul parcurge distanţa dintre două staţii consecutive în t=2 min. Dacă accelerația iniţială este egală cu modulul accelerației finale, a=1 m/s² şi viteza maximă la care ajunge trenul este υ_m=108 km/h să se afle:
a. distanţa pe care accelerează metroul
b. distanţa parcursă de metrou în mod uniform
c. distanţa dintre cele două staţii.

14. Graficul din figura alăturată reprezintă dependenţa accelerației unui mobil care porneşte din repaus în funcţie de timp. Să se afle:
a. dependenţa vitezei în funcţie de timp pe parcursul întregii mişcări
b. coordonata finală a mobilului
c. distanţa parcursă de mobil în decursul mişcării



15. Două mobile se deplasează în lungul axei Ox după legile de mişcare $x_1=t^2-10t+8$ şi $x_2=2+4t-3t^2$, unde x este exprimat în metri şi t în secunde. Să se afle:
a. momentele de timp la care mobilele se întâlnesc şi să se interpreteze rezultatul
b. valorile coordonatelor în momentele întâlnirii
c. momentul de timp la care vitezele instantanee ale celor două mobile devin egale

16. O maşină porneşte de la stop cu accelerația a=1 m/s². În acelaşi moment în spatele stopului la d=8 m, se află o altă maşină în mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza υ=5 m/s. Să se afle:
a. momentele de timp la care se întâlnesc maşinile şi să se interpreteze rezultatul
b. distanţa măsurată de la stop la care se întâlnesc maşinile
c. valorea vitezei relative cu care se depăşesc maşinile

17. Două maşini trec prin dreptul unui stop în mişcare rectilinie astfel: prima uniform accelerat cu a=2 m/s² şi viteza iniţială υ_0=5 m/s, iar a doua uniform cu υ=15 m/s, dar cu o întârziere Δt=1 s faţă de prima. Să se afle:
a. momentele de timp la care se întâlnesc maşinile şi să se interpreteze rezultatul
b. distanţa măsurată de la stop la care se întâlnesc maşinile
c. după ce interval de timp trebuie să treacă prin dreptul stopului maşina a doua pentru a se întâlni o singură dată

18. Două mobile pornesc din două puncte aflate la distanţa d=426 m unul spre celălalt. Dintr-un punct se deplasează un mobil uniform accelerat cu accelerația a_1=2 m/s² şi cu viteza iniţială υ_{01}=40 m/s, iar din celălalt punct cu o întârziere

Δt=2 s, un mobil într-o mişcare uniform încetinită cu accelerația a_2=1 m/s² şi cu viteza inițială v_{02}=10 m/s. Să se afle:
a. momentul de timp la care se întâlnesc mobilele
b. vitezele în momentul întâlnirii
c. vitezele medii şi viteza relativă în momentul întâlnirii
d. distanța dintre mobile în momentul opririi celui de-al doilea mobil

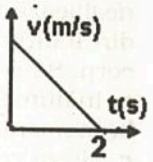
2.1.3. Mişcarea punctului material sub acțiunea greutății

1. O piatră cade liber de la înălțimea h=80 m. Să se afle:
a. timpul de coborâre
b. viteza cu care atinge piatra solul
c. spațiul parcurs în ultima secundă de cădere

2. Un corp cade liber de la înălțimea h=2000 m. Să se afle:
a. intervalul de timp în care sunt parcuşi ultimii h_1=720 m
b. spațiul parcurs în a doua secundă de cădere

3. Un mobil este aruncat vertical în sus de la sol cu viteza inițială v_0=35 m/s. Neglijăm forțele de frecare cu aerul. Să se afle:
a. înălțimea maximă la care urcă corpul
b. timpul după care corpul se întoarce pe Pământ
c. distanța parcursă de corp în secunda a patra de mişcare

4. Graficul redă dependența vitezei unui mobil care se mişcă fără frecare sub acțiunea greutății în funcție de timp. Neglijăm frecarea cu aerul. Să se afle:
a. viteza inițială a mobilului
b. înălțimea maximă la care se ridică mobilul
c. timpul de mişcare şi viteza cu care corpul revine în punctul de lansare



5. Un corp este aruncat vertical în sus de la sol şi revine pe Pământ după Δt=6 s din momentul aruncării. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:
a. viteza inițială a corpului
b. înălțimea maximă la care a urcat corpul

6. O minge este aruncată pe verticală de jos în sus cu viteza inițială v_0=10 m/s. Neglijăm forțele de frecare cu aerul. Să se afle:
a. momentele de timp la care mingea trece printr-un punct situat la jumătate din valoarea maximă a înălțimii şi să se interpreteze rezultatul obținut
b. vitezele mingii în momentele de timp calculate la punctul **a.**
c. viteza medie şi viteza în modul medie a mingii în intervalul de timp din momentul plecării până la întoarcerea prin punctul $h=h_{max}/2$

7. Un mobil este aruncat pe verticală în sus cu viteza inițială v_0=40 m/s. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:
a. momentul de timp la care viteza mobilului este jumătate din cea inițială
b. distanța parcursă de mobil până în momentul calculat la punctul **a.**
c. distanța parcursă de mobil în a treia secundă de lansare

8. Un om se află pe o platformă orizontală şi vede un corp întorcându-se prin fața lui după un timp Δt_1=2 s, măsurat din momentul urcării. Un al doilea om este situat mai jos decât primul, pe o altă platformă orizontală şi vede acelaşi

corp coborând prin fața lui după un timp Δt_2=6 s măsurat din momentul urcării. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:
a. viteză cu care trece corpul prin fața omului aflat pe platforma superioară
b. distanța dintre platforma inferioară și cea superioară

9. Din același punct cad succesiv două picături de apă. Se constată că viteza de deplasare a primei picături față de a doua este constantă și are valoarea υ_r=10 m/s. Neglijăm forțele de frecare cu aerul. Să se afle:
a. intervalul de timp care desparte lansările celor două picături
b. momentul de timp la care viteza primei picături de apă este dublul vitezei celei de-a doua picături
c. distanța care desparte picăturile în condițiile punctului **b.**

10. Un circar aruncă o bilă vertical în sus cu viteza υ_{01}=10 m/s. După un interval de timp egal cu Δt=1 s circarul aruncă din același punct o a doua bilă tot vertical în sus cu viteza υ_{02}=20 m/s. Neglijăm forțele de frecare cu aerul. Să se afle:
a. momentul de timp măsurat din momentul aruncării primei bile la care se întâlnesc bilele
b. distanța față de punctul de lansare la care se întâlnesc bilele
c. intervalul de timp care desparte sosirea bilelor în punctul de lansare
d. care sunt limitele permise ale intervalului de timp Δt pentru ca cele două bile să se întâlnească în aer deasupra punctului de lansare, dacă bila a doua este lansată cu υ_{02}=5 m/s

11. Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza inițială υ_0=40 m/s. Se neglijează forțele de frecare cu aerul. Concomitent de la o înălțime h egală cu 3/4 din înălțimea maximă la care poate ajunge primul corp se lasă liber un doilea corp. Să se afle:
a. înălțimea maximă la care poate ajunge primul corp și timpul de urcare
b. momentul de timp și înălțimea la care se întâlnesc corpurile
c. viteza relativă cu care trec corpurile unul pe lângă celălalt

12. Un corp cade liber de la înălțimea h=20 m, iar al doilea corp este lansat simultan pe verticală de la suprafața Pământului. Se neglijează frecarea cu aerul. Știind că cele două corpuri ajung simultan pe sol, să se afle:
a. viteza inițială cu care se aruncă corpul al doilea
b. înălțimea maximă atinsă de corpul al doilea
c. vitezele cu care sosesc corpurile la sol

13. Un corp cade liber dintr-un punct aflat la o înălțime h_1=50 m. Simultan dintr-un punct situat cu h_2=10 m mai jos de punctul de unde este lăsat liber primul corp este aruncat vertical în sus un al doilea corp. Să se afle:
a. timpul după care ajunge primul corp la sol
b. viteza inițială cu care a fost lansat corpul al doilea dacă cele două corpuri ajung simultan pe Pământ
c. vitezele cu care ajung corpurile la sol

14. De la înălțimea h=40 m față de sol se aruncă vertical în sus un corp cu viteza υ_0=10 m/s. Neglijăm forțele de frecare cu aerul. Să se afle:
a. timpul după care corpul ajunge la sol
b. intervalul de timp după care trebuie lăsat liber din același punct un al doilea corp astfel încât cele două corpuri să ajungă simultan la sol

c. vitezele cu care ajung cele două corpuri la sol

15. Se aruncă pe verticală în sus un corp de la sol cu viteza inițială v_{01}=45 m/s. Concomitent de la o înălțime h și de pe verticala punctului de lansare a primului corp, se aruncă vertical în jos un al doilea corp. Viteza inițială a celui de-al doilea corp este v_{02}=5 m/s. Să se afle:
a. înălțimea h de la care a fost aruncat al doilea corp dacă în momentul întâlnirii aceste corpuri aveau valorile vitezelor egale
b. intervalul de timp care desparte sosirea mobilelor pe sol
c. vitezele cu care cad corpurile pe sol

16. Un copil împinge cu viteza v_0=1 m/s, o carte aflată pe o masă cu înălțimea h=80 cm. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:
a. traiectoria corpului
b. timpul în care ajunge cartea la sol
c. distanța unde cade cartea pe podea față de marginea mesei

17. O piatră este aruncată pe orizontală cu viteza v_0=15 m/s de pe acoperișul unui bloc, cade pe sol sub unghiul $\alpha=60^0$ față de orizontală. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:
a. timpul de mișcare al pietrei și înălțimea blocului
b. viteza cu care ajunge piatra la sol
c. distanța față de bloc unde cade piatra

18. Dacă se aruncă orizontal din același punct aflat la înălțimea $h=2v_{01}^2/g$, două corpuri al doilea având viteza inițială $v_{02}=4v_{01}$, să se afle:
a. de câte ori se modifică timpul de cădere al corpului al doilea față de timpul de cădere al primului corp?
b. de câte ori se modifică bătaia corpului al doilea față de bătaia primului corp?
c. de câte ori se modifică viteza corpului al doilea față de viteza primului corp la sol?

19. Se aruncă de pe Pământ sub un unghi $\alpha=60^0$ un corp cu viteza $v_0=10\sqrt{3}$ m/s. Să se afle, dacă neglijăm efectul forțelor de frecare cu aerul:
a. traiectoria pietrei
b.distanța la care lovește piatra Pământul măsurată din punctul de aruncare
c. înălțimea maximă la care urcă piatra
d. valoarea vitezei pietrei la momentul t=1 s

20. Se aruncă oblic un proiectil cu viteza inițială $v_0=10\sqrt{17}$ m/s, astfel încât înălțimea maximă la care ajunge proiectilul să fie egală cu bătaia sa. Să se afle, dacă neglijăm efectul forțelor de frecare cu aerul:
a. cosinusul unghiul format de vectorul viteză inițială cu orizontala
b. înălțimea maximă la care urcă proiectilul
c. timpul de zbor

21. Doi copii cu înălțimea de h=1,2 m fiecare se joacă cu mingea arucând-o unul altuia. Știind că mingea zboară de la un copil la altul, să se afle, dacă neglijăm frecarea cu aerul:
a. înălțimea maximă măsurată față de sol atinsă de minge în timpul jocului, dacă mingea zboară de la un copil la altul timp de t=2 s

b. distanța maximă la care se pot afla copii, dacă viteza cu care este aruncată inițial mingea este v_0=10 m/s și unghiul sub care trebuie aruncată mingea
c. timpul de zbor al mingii în condițiile punctului **b.**

22. Dintr-un turn cu înălțimea h=10 m se aruncă deasupra orizontalei un corp cu viteza inițială v_0=20 m/s sub unghiul $\alpha=30^0$ față de orizontală. Să se afle, dacă neglijăm efectul forțelor de frecare cu aerul:
a. înălțimea maximă la care urcă corpul
b. timpul de zbor al corpului
c. distanța măsurată față de baza turnului la cade corpul
d. viteza cu care ajunge corpul la baza turnului și unghiul față de orizontală cu care lovește solul

23. Din vârful unui stâlp cu înălțimea h=10 m își ia zborul orizontal o pasăre cu viteza v_1=14,05 m/s. Concomitent un copil lansează din imediata vecinătate a solului o piatră spre pasăre cu viteza inițială v_2=30 m/s sub unghiul $\alpha=30^0$ față de orizontală. Piatra lovește pasărea. Să se afle:
a. momentele de timp după care piatra poate lovi pasărea
b. distanțele de la care trebuie aruncată piatra, măsurate de la baza stâlpului
c. vitezele pietrei când aceasta lovește pasărea

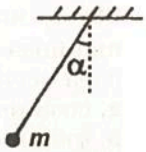
24. O pușcă este orientată către o țintă aflată la înălțimea h=50 m deasupra solului sub unghiul $\alpha=30^0$ față de orizontală, sub care pușcașul vede ținta. În momentul tragerii glontelui către țintă, aceasta se lasă liberă. Să se arate că glontele lovește întotdeauna ținta și să se afle după cât timp lovește glontele ținta dacă viteza acestuia este v_0=400 m/s.

2.2. Principiile mecanicii

1. Un corp cu masa m=2 kg este ridicat accelerat cu accelerația $a=2g$. Firul de susținere rezistă la o tensiune maximă T_{max}=80 N. Să se afle:
a. tensiunea în firul de susținere
b. accelerația maximă cu care trebuie ridicat accelerat corpul pentru ca firul să se rupă

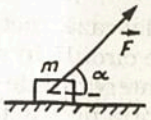
2. Într-un lift care urcă frânat cu accelerația a=1 m/s² se află un om cu masa m=100 kg. Să se afle:
a. valoarea forței cu care apasă omul pe podeaua liftului
b. valoarea maximă a accelerației cu care coboară liftul, astfel încât omul să mai apese pe podea

3. De un fir este prins un corp cu masa m=0,5 kg. Corpul și firul se află într-un vagon care pornește accelerat pe orizontală. Pendulul deviază față de verticală cu unghiul $\alpha=30^0$ ca în figură. Să se afle accelerația vagonului și tensiunea în fir în poziție finală.



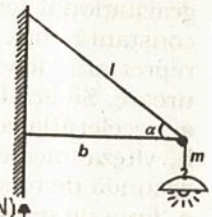
4. Un corp cu masa m=200 g este suspendat de un fir și se află într-un tren care se mișcă rectiliniu și uniform. Mecanicul trenului începe să frâneze cu accelerația $a=10/\sqrt{3}$ m/s². Să se afle unghiul cu care deviază pendulul și tensiunea din fir.

5. Asupra unui corp cu masa m=2 kg acționează sub unghiul α=60° o forță F ca în figură. Mișcarea corpului se face fără frecare cu accelerația a=1 m/s². Să se afle valoarea forței F și valoarea forței cu care corpul apasă pe plan.



6. De tavanul unei camere este suspendată o lustră cu masa M=4 kg. O pisică cu masa m=2 kg sare și se agață de lustră, dar în același moment lustra se desprinde și cade și atunci pisica se cațără pe lustră, astfel că rămâne la aceeași înălțime față de podea. Să se afle accelerația cu care cade lustra și forța cu care pisica împinge lustra în jos.

7. O lampă cu masa m=6 kg este suspendată ca în figură. Cunoscând lungimea cablului ℓ=0,5 m și lungimea tijei b=0,4 m să se afle tensiunile din cablu și din tijă.

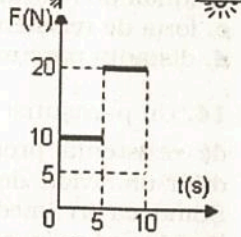


8. Asupra unui corp cu masa m=5 kg aflat inițial în repaus pe o suprafață orizontală se acționează cu o forță orizontală care variază cu timpul ca în figură. Corpul se mișcă fără frecare. Să se afle:

a. reprezentarea grafică a dependenței vitezei în raport cu timpul

b. distanța parcursă de corp în timpul t_1=5 s

c. viteza medie în intervalul (0,10)s



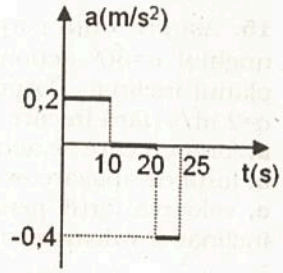
9. În figura alăturată este reprezentată dependența de timp a accelerației unui lift cu masa m=500 kg care este ridicat vertical, pornind din repaus, cu ajutorul unui cablu inextensibil și de masă neglijabilă. Mișcarea liftului se realizează în timpul de 25 s. Să se afle:

a. forța de tensiune din cablu în fiecare dintre cele trei intervale de mișcare

b. reprezentarea grafică a vitezei liftului în funcție de timp în intervalul $t \in$ (0;25)s

c. viteza liftului la momentul t=15 s

d. viteza medie a liftului în intervalul de timp $t \in$ (0;10)s

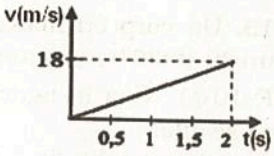


10. În figura alăturată este redată dependența de timp a vitezei unui corp cu masa m=100 g, care cade vertical de la o înălțime. Să se afle:

a. accelerația corpului

b. forța de rezistență întâmpinată de corp

c. distanța parcursă de corp între momentele de timp t_1=0,5 s și t_2=1,5 s

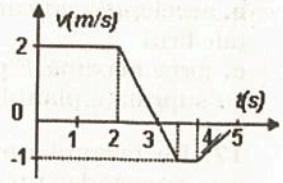


11. În figura alăturată este reprezentată dependența de timp a vitezei unui corp cu masa m=10 kg. Să se afle:

a. distanța parcursă de corp în primele t_1=3 s

b. viteza în modul medie a mobilului în Δt=5 s

c. reprezentarea grafică a forței rezultante care se exercită asupra corpului în primele 5 s



12. Un ciclist cu masa de M=80 kg pornește din repaus pe un drum orizontal și parcurge o distanță d cu accelerația a=0,25 m/s², atingând viteza v=18 km/h. Masa bicicletei este m=20 kg. Forța de tracțiune dezvoltată este de n=5 ori mai mare decât forța de rezistență la înaintare. După atingerea vitezei v, ciclistul se

deplasează rectiliniu uniform şi este depăşit de un camion de lungime ℓ=10 m care circulă în sens contrar, cu viteza v_c=54 km/h. Să se afle:

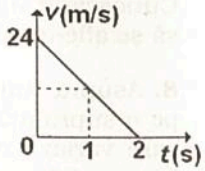
a. intervalul de timp necesar atingerii vitezei v

b. forţa de tracţiune dezvoltată de ciclist

c. graficul vitezei ciclistului în funcţie de timp în primele 25 s de mişcare

d. intervalul de timp Δt în care camionul depăşeşte ciclistul, dacă lungimea bicicletei este ℓ_1=2 m

13. Un corp cu masa m=100 g este aruncat pe verticală de jos în sus în câmp gravitaţional terestru. Corpul întâmpină din partea aerului o forţă de rezistenţă constantă orientată pe direcţia de mişcare a corpului. Graficul alăturat reprezintă dependenţa vitezei corpului, funcţie de timp, pentru porţiunea de urcare. Să se afle:



a. acceleraţia corpului

b. viteza medie de deplasare a corpului în prima jumătate de secundă de mişcare

c. forţa de rezistenţă întâmpinată de corp din partea aerului

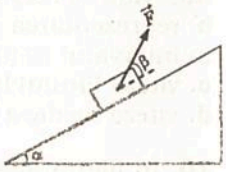
d. distanţa parcursă de corp la urcare

14. Un paraşutist cu masa m=80 kg întâmpină în cădere datorită aerului o forţă de rezistenţă proporţională cu viteza instantanee $\vec{F} = -k\vec{v}$. Paraşutistul sare dintr-un avion de la o înălţime foarte mare şi îşi deschide imediat paraşuta. Ştiind că în imediata vecinătate a Pământului paraşutistul cade cu o viteză limită v_0=4 m/s, să se afle:

a. constanta de proporţionalitate k

b. acceleraţia paraşutistului când viteza acestuia este v=2 m/s

15. Asupra unui corp cu masa m=1kg aflat în mişcare pe un plan înclinat cu unghiul α=30° acţionează o forţă F ca în figură sub un unghi β=45° faţă de planul înclinat. Corpul urcă pe planul înclinat cu acceleraţia a=2 m/s² fără frecare. Să se afle:

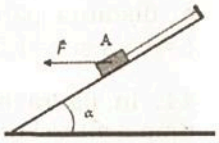


a. forţa cu care se acţionează asupra corpului

b. forţa de apăsare exercitată de corp asupra planului

c. valoarea forţei pentru care corpul nu mai apasă pe planul înclinat şi valoarea corespunzătoare a acceleraţiei

16. Un corp cu masa m=4 kg este menţinut în repaus pe un plan înclinat cu unghi α=30° cu ajutorul unui fir. Asupra corpului acţionează o forţă orizontală $F=10\sqrt{3}$ N ca în figură. Neglijând frecarea dintre corp şi plan, să se afle:

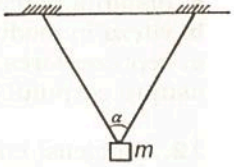


a. tensiunea din fir

b. acceleraţia cu care coboară corpul pe planul înclinat dacă se taie firul

c. forţa maximă F pentru care corpul mai rămâne în contact cu suprafaţa planului înclinat

17. De tavanul unui vagon care se mişcă în plan orizontal este suspendat un corp cu masa m=3 kg, prin intermediul a două fire de aceeaşi lungime aşezate simetric în planul vertical al mişcării ca în figura alăturată. Tensiunea de rupere a firelor este F=30 N. Unghiul dintre cele două fire este α=60°. Să se afle:



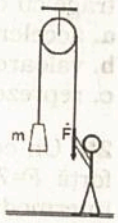
a. tensiunile din cele două fire când acceleraţia vagonului este a=1 m/s²

b. care fir se va rupe primul?
c. valoarea accelerației la care se rupe un fir

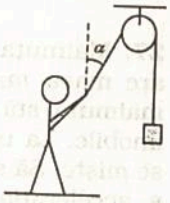
18. Un corp cu masa m=1 kg se află pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=45^0$, fără frecări. Se împinge accelerat planul înclinat pe orizontală cu accelerația a_0=2 m/s². Să se afle:
a. accelerația cu care va aluneca liber corpul de-a lungul planului înclinat, dacă planul este deplasat spre dreapta
b. accelerația cu care va aluneca liber corpul de-a lungul planului înclinat, dacă planul este deplasat spre stânga
c. valoarea maximă accelerației și sensul deplasării planului, dacă corpul nu mai apasă pe planul înclinat

19. Într-un lift care se mișcă cu o accelerație a_0=4 m/s² în sus se află pe podeaua acestuia un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$. Pe acest plan înclinat alunecă fără frecare un corp cu masa m=2 kg. Să se afle:
a. accelerația cu care va aluneca liber corpul de-a lungul planului înclinat
b. forța de apăsare exercitată de corp asupra planului înclinat
c. accelerația cu care va aluneca liber corpul de-a lungul planului înclinat și forța de apăsare exercitată de corp dacă accelerația liftului este în jos

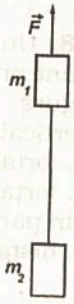
20. Un muncitor având greutatea G_1=1000 N ridică un sac de masă m=80 kg prin intermediul unui cablu trecut peste un scripete ca în figura alăturată. Muncitorul acționează asupra firului cu o forță constantă F=900 N. Să se afle:
a. accelerația sacului
b. forța de apăsare exercitată de om asupra planului orizontal
c. accelerația maximă cu care poate fi ridicat sacul fără ca muncitorul să se ridice de pe sol
d. forța de tensiune din cablu, știind că un alt sac cu masa m'=40 kg este ridicat cu aceeași accelerație ca la punctul **a.**



21. Un om cu masa M=80 kg susține un balot cu masa m=10 kg cu ajutorul unui fir inextensibil trecut peste un scripete fix ca în figura alăturată. Să se afle:
a. tensiunea în firul de susținere
b. forța de apăsare exercitată de acel om pe suprafața de sprijin, dacă firul este înclinat cu $\alpha=30^0$ față de verticală
c. forța exercitată de om asupra suprafeței de sprijin



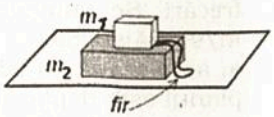
22. Pe o masa orizontală se află două corpuri cu masele M=4 kg și m=1kg legate prin intermediul unui fir inextensibil. Se trage corpul M cu o forță orizontală F=15 N, mișcarea corpurilor făcându-se fără frecare. Să se afle:
a. accelerația sistemului
b. tensiunea din fir
c. accelerația sistemului și tensiunea din fir, dacă forța F formează cu orizontala un unghi $\alpha=60^0$



23. Un corp cu masa m_1=1 kg este prins cu un fir de un alt doilea corp cu masa m_2=3 kg. Cele două corpuri sunt ridicate pe verticală în sus cu o accelerație a=2 m/s² de o forță F aplicată corpului 1 ca în figura alăturată. Să se afle:
a. forța necesară ridicării celor două corpuri
b. tensiunea în firul de susținere

c. forţa necesară ridicării celor două corpuri uniform
d. forţa maximă necesară ridicării celor două corpuri, dacă firul se rupe la valoarea tensiunii T_{max}=45 N

24. În figura alăturată sunt reprezentate două corpuri cu masele m_1=60 kg şi respectiv m_2, aşezate unul peste altul şi legate între ele cu un fir inextensibil şi de masă neglijabilă. Corpul 2 este aşezat pe suprafaţa orizontală a unei mese. De corpul 1 se trage vertical în sus cu o forţă F a cărei valoare poate fi modificată. Să se afle:

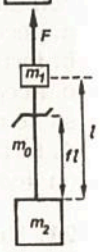


a. forţa de apăsare exercitată de corpul 1 asupra corpului 2 atunci când F=300N
b. forţa de apăsare exercitată de corpul 2 asupra suprafeţei în condiţiile punctului anterior dacă m_2=40 kg
c. masa corpului m_2 dacă accelerația sistemului este a=2 m/s² când asupra corpului 1 acţionează o forţă verticală, în sus, de valoare F=1,2 kN şi firul dintre corpuri este întins
d. forţa de tensiune din fir în condiţiile de la punctul **c.**

25. De un corp cu masa m=1 kg este legat cu un cablu care are masa m_0=0,6 kg şi lungimea ℓ=1 m. Masa cablului se consideră uniform distribuită de-a lungul acestuia. De capătul superior al cablului se trage cu o forţă F=20 N ca în figura alăturată. Să se afle:

a. accelerația cu care se mişcă sistemul
b. valoarea tensiunii într-un punct aflat la distanţa $x=\ell/3$
c. reprezentarea grafică a tensiunii din fir în funcţie de distanţa x

26. Un corp cu masa m_1=1 kg este tras în sus ca în figura alăturată cu o forţă F=72 N. De corpul m_1 este prins un corp cu masa m_2=3 kg prin intermediul unui lanţ cu masa m_0=2 kg şi cu lungimea ℓ. Să se afle:

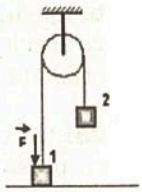


a. accelerația cu care se mişcă sistemul
b. tensiunea într-un punct aflat la distanţa $x=f\ell$, unde f=0,6
c. forţa pentru care sistemul coboară cu accelerația a=2 m/s²

27. Maimuţa din figură are masa m_1=60 kg, iar ciorchinele de banane are masa m_2=40 kg. Ciorchinele este legat de un capăt al firului, iar maimuţa stă nemişcată şi prinsă de fir. Firul şi scripetele sunt iniţial imobile. La un moment dat, scripetele se deblochează şi firul începe să se mişte. Să se afle:

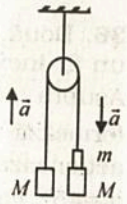
a. accelerația cu care se mişcă corpurile şi valoarea tensiunii din fir
b. forţa exercitată de scripete asupra tavanului de susţinere
c. viteza maimuţei după o secundă de la deblocarea firului
d. accelerația ciorchinelui, dacă maimuţa coboară de pe fir şi trage de acesta în jos cu greutatea ei

28. Un sistem mecanic este alcătuit dintr-un fir la capetele căruia sunt prinse două corpuri de mase m_1=100 g, respectiv m_2=300 g ca în figură. Pentru a menţine corpul 1 pe suprafaţa orizontală, apăsăm vertical în jos cu o forţă de valoare F=5 N. Să se afle:



a. forţa de reacţiune din axul scripetelui
b. forţa de reacţiune normală care acţionează asupra corpului 1 din partea suprafeţei
c. distanţa parcursă de corpuri în timpul t=1 s de la lăsarea liberă a sistemului

29. Peste un scripete ideal este trecut un fir inextensibil care susține două corpuri cu mase egale M=800 g ținute inițial în repaus. Se așază pe unul din cele două corpuri un mic corp cu masa m. Se lasă liber sistemul și se constată că sistemul se mișcă accelerat cu accelerația a=2 m/s². Să se afle:

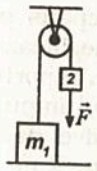


a. tensiunea în firul de susținere
b. masa corpului mic
c. forța cu care corpul m apasă pe corpul cu masa M

30. De tavanul unui lift este agățat un scripete ideal prin intermediul unui cablu. Peste scripete este trecut un fir cu două corpuri la capete m_1=500 g și m_2=300 g. Liftul urcă accelerat cu accelerația a=2 m/s². Să se afle:
a. accelerația cu care se mișcă corpurile față de lift
b. tensiunea în firul de susținere
c. forța din cablu

31. Un lanț de lungime ℓ=20 m și masă m=6 kg este trecut peste un scripete ideal. În momentul în care de o parte a scripetelui atârnă o lungime de lanț $\ell_0=f\ell$, cu f=80% să se afle:
a. accelerația lanțului în acest moment
b. tensiunea din mijlocul lanțului în condițiile punctului **a.**
c. reprezentarea grafică a accelerației lanțului în funcție de fracțiunea f a lanțului care atârnă

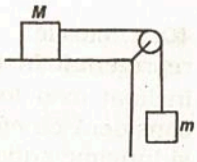
32. Fie sistemul din figură. Corpurile de la capetele firului au masele m_1=6 kg, m_2=2 kg și F=10 N. Să se afle:



a. forța normală de reacțiune din partea suprafeței orizontale
b. forța verticală cu care trebuie să se tragă de corpul m_2, astfel ca sistemul să se miște accelerat cu a=2 m/s²
c. forța cu care sistemul de corpuri acționează asupra sistemului de prindere în condițiile punctului **b.**

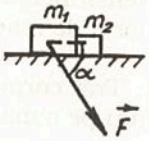
33. Pe un plan înclinat cu unghiul α=30° se află un corp cu masa m=500 g. Se lasă liber corpul. Se neglijează frecarea dintre corp și plan. Să se afle:
a. accelerația cu care coboară liber corpul pe plan și forța cu care acesta apasă pe plan
b. accelerația cu care trebuie împins planul înclinat astfel încât corpul să rămână în repaus față de plan
c. forța cu care corpul apasă pe plan în condițiile punctului **b.**

34. De un corp așezat pe o masă orizontală fără frecări și cu masa M=1 kg se prinde un fir inextensibil care trece peste un scripete ideal și susține un corp vertical cu masa m=2 kg ca în figură. Se lasă sistemul liber. Să se afle:



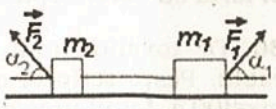
a. accelerația sistemului
b. tensiunea în firul de susținere
c. reacțiunea în axul scripetelui

35. Pe un plan orizontal fără frecare se află în contact două corpuri cu masele m_1=3 kg și m_2=1 kg. Se împinge sub un unghi α=60° față de orizontală corpul 1 cu o forță F=40 N ca în figură. Să se afle:



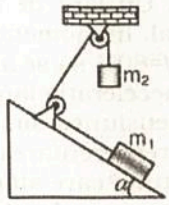
a. accelerația cu care se deplasează sistemul de corpuri
b. forța cu care apasă corpul 1 asupra planului
c. forța cu care corpul 1 împinge corpul 2

36. Două corpuri de mase m_1=12 kg respectiv m_2=8 kg sunt legate între ele cu un fir inextensibil de masă neglijabilă şi sunt aşezate pe o suprafaţă orizontală. Asupra corpului de masă m_1 acţionează forţa $F_1=20\sqrt{3}$ N a cărei direcţie formează cu orizontala unghiul $\alpha_1=30^0$, iar asupra corpului de masă m_2 acţionează forţa $F_2=20\sqrt{2}$ N a cărei direcţie formează cu orizontala unghiul $\alpha_2=45^0$, ca în figura alăturată. Frecarea dintre corpuri şi suprafaţa orizontală se neglijează. Să se afle:



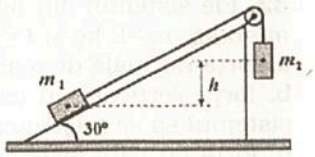
a. accelerația corpurilor
b. valoarea minimă a forţei F_1, pentru care apăsarea exercitată pe suprafaţa orizontală de corpul cu masa m_1 este nulă
c. raportul dintre valorile forţelor F_2 şi F_1 astfel încât sistemul de corpuri se deplasează orizontal cu viteză constantă

37. Fie sistemul din figură. Se cunosc masele m_1=1 kg, m_2=0,4 kg, unghiul planului înclinat fix $\alpha=30^0$ şi se neglijează frecarea. Se lasă libere cele două corpuri. Să se afle:



a. accelerația corpurilor
b. valorile masei m_2 pentru care accelerația sistemului este a=2 m/s²
c. masa m_1 pentru care sistemul rămâne în repaus

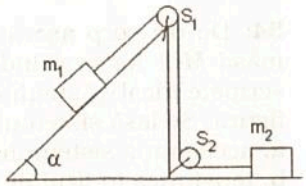
38. Corpurile cu masele m_1 şi m_2 se află iniţial în repaus pe un plan înclinat ca în figura alăturată. Se neglijează frecările. Să se afle:



a. raportul m_1/m_2
b. timpul după care cele două corpuri ajung la acelaşi nivel dacă corpurile pornesc din repaus, iar h=1,5 m şi $m_2=2m_1$
c. viteza sistemului la momentul de timp calculat la punctul **b.**

39. Se consideră dispozitivul din problema precedentă. Corpurile cu masele m_1 şi m_2 se află într-un raport astfel încât sistemul de corpuri se află în repaus. Se neglijează frecările. Se cunosc m_1=2 kg şi $\alpha=30^0$. Să se afle:
a. valoarea masei m_2 astfel încât sistemul de corpuri să rămână în echilibru
b. valoarea masei adiţionale adăugată pe corpul m_2 astfel încât acesta să se mişte în jos cu accelerația a=2 m/s²
c. forţa cu care apasă corpul adăugat pe corpul de masă m_2

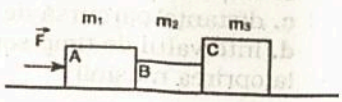
40. Masele corpurilor care alcătuiesc sistemul reprezentat în figură sunt m_1=6 kg şi m_2=2 kg. Planul înclinat fixat formează unghiul $\alpha=30^0$ cu orizontala. Se consideră că efectele frecării sunt neglijabile, firul ideal şi lungime suficientă, iar scripeţii sunt ideali. Iniţial corpurile sunt menţinute în repaus. Să se afle:



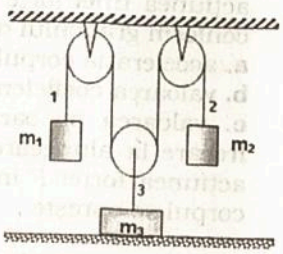
a. accelerația sistemului
b. tensiunea din fir
c. forţa de reacţiune din axul scripetelui S_2

41. Trei corpuri cu masele m_1=5 kg, m_2=3 kg şi m_3=2 kg sunt împinse ca în figură pe o masă orizontală netedă fără frecări de o forţă F=15 N. Să se afle:

a. accelerația sistemului de corpuri
b. forța cu care corpul cu masa m_2 împinge corpul cu masa m_3
c. forța cu care corpul cu masa m_1 împinge corpul cu masa m_2



42. Prin intermediul unui sistem de scripeți ideali sunt suspendate trei corpuri cu masele $m_1=m_2$ și $m_3=30$ kg ca în figura alăturată. Sistemul se află în repaus. Forța normală de reacțiune este $N=180$ N. Să se afle:
a. tensiunea din firul care susține corpul cu masa m_3
b. tensiunile din firele care susțin corpurile cu masele m_1 și m_2
c. masele corpurilor m_1 și m_2

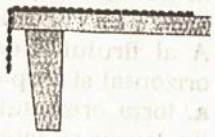


43. O locomotivă cu masa $M=40$ t tractează, pe o cale ferată rectilinie orizontală, trei vagoane de masă $m=20$ t fiecare. Forța de rezistență la înaintare care acționează asupra fiecărui vagon este de 2000 N, iar forța de rezistență la înaintare care acționează asupra locomotivei este de 5000 N. Aceste forțe de rezistență sunt considerate constante pe tot parcursul deplasării. Să se afle:
a. forța de tracțiune dezvoltate de motorul locomotivei pentru deplasarea trenului cu viteză constantă
b. accelerația trenului, dacă forța de tracțiune dezvoltată de motorul locomotivei are valoarea de 46 kN
c. forța de tensiune dezvoltată în cuplajul dintre ultimele două vagoane în situația specificată la punctul **b.**
d. viteza v, dacă în momentul în care viteza trenului este v, mecanicul oprește motorul iar trenul se oprește după un interval de timp $\Delta t=100$ s

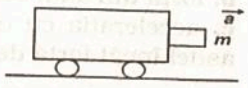
2.3. Forța de frecare

1. Coeficientul de frecare la alunecare a unui corp pe o suprafață orizontală este $\mu=0,1$. Corpul are masa $m=1$ kg, iar legea de mișcare este $x=4+2t+t^2$ (m). Să se afle valoarea forței de tracțiune.

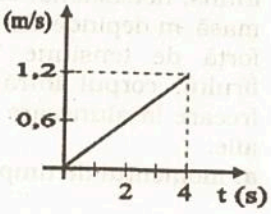
2. Un lanț omogen este așezat pe o masă, astfel încât o parte a sa atârnă liber ca în figură. Lanțul începe să alunece în momentul în care partea atârnată constituie o fracțiune $f=0,2$ din lungimea lanțului. Să se afle coeficientul de frecare la alunecare dintre lanț și suprafața orizontală.



3. Căruciorul din figura alăturată se deplasează cu accelerația $a=20$ m/s². Să se afle valoarea coeficientului de frecare al corpului aflat în contact cu căruciorul, dacă acest corp nu cade.

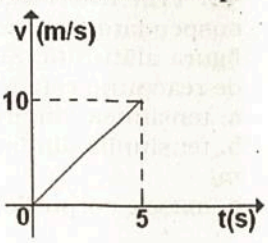


4. Pentru a pune în mișcare o mașină cu masa $m=800$ kg, care nu poate porni, acționează doi oameni care împing cu forțele paralel cu solul $F_1=330$ N și $F_2=410$ N un interval de timp $t=4$ s. Mașina întâmpină o forță de frecare cu solul care se consideră constantă. Variația vitezei mașinii în funcție de timp pe durata acestei operațiuni este redată în graficul alăturat. Să se afle:
a. accelerația mașinii



b. forţa de frecare
c. distanţa parcursă de maşină în timpul t=4 s
d. intervalul de timp scurs din momentul încetării acţiunii celor doi oameni până la oprirea maşinii

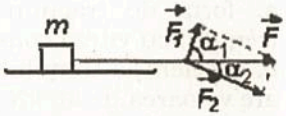
5. Un corp de masă m=2 kg se deplasează rectiliniu pe un plan orizontal sub acţiunea unei forţe F=10 N paralelă cu planul. Viteza corpului variază în timp conform graficului din figura alăturată. Să se afle:



a. accelerația corpului
b. valoarea coeficientului de frecare la alunecare
c. valoarea pe care ar trebui să o aibă coeficientul de frecare la alunecare începând din momentul t_1=5 s, când acţiunea forţei F încetează, ştiind că la momentul t_2=7 s, corpul se opreşte

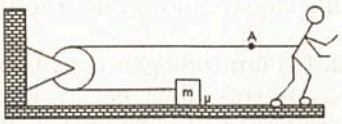
6. Un corp se mişcă pe o suprafaţă orizontală cu frecări, astfel că legea de mişcare este v=8-4t. Să se afle:
a. accelerația corpului
b. coeficientul de frecare dintre corp şi suprafaţă
c. distanţa parcursă de corp până la oprire

7. Un corp cu masa m=100 kg se deplasează pe un plan orizontal fiind tras de două forţe concurente F_1=150 N şi F_2 prin intermediul unui fir. Cele două forţe sunt orientate în plan vertical şi formează între ele un unghi de 90°, ca în figura alăturată. Rezultanta celor două forţe este paralelă cu planul orizontal. Sub acţiunea acestor forţe şi a forţei de frecare (μ=0,2), corpul are o mişcare uniform accelerată cu accelerația a=1m/s². Să se afle:



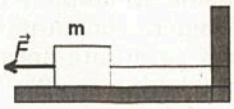
a. modulul rezultantei forţelor F_1 şi F_2
b. unghiurile α_1 şi α_2 formate de forţele F_1 şi respectiv F_2 cu orizontala şi valoarea forţei F_2
c. noua valoare a accelerației corpului, dacă la un moment dat acţiunea forţelor F_1 şi F_2 încetează iar corpul îşi continuă mişcarea pe planul orizontal

8. Pe un plan orizontal se află un corp cu masa m=20 kg legat de un fir trecut peste un scripete ideal ca în figura alăturată. Un om trage de capătul A al firului. Coeficientul de frecare dintre planul orizontal şi corp este μ=0,2. Să se afle:



a. forţa orizontală cu care trebuie să tragă omul de fir astfel încât corpul să se deplaseze cu viteză constantă
b. forţa din axul scripetelui în condițiile deplasării uniforme a omului
c. accelerația cu care se deplasează corpul de masă m dacă omul trage de fir astfel încât forţa de tensiune din acesta să devină T_1=60 N

9. Un corp de masă m=50 kg aflat inițial în repaus pe o suprafaţă orizontală fără frecare, este legat de un suport fix printr-un fir orizontal de masă neglijabilă, întins, netensionat ca în figura alăturată. Forţa ce acționează asupra corpului de masă m depinde de timp conform relației $F(t)$=10t+10 (N), iar firul se rupe la o forţă de tensiune T_{max}=100 N. Imediat după ruperea firului, corpul intră într-o zonă în care coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi plan este μ=0,2. Să se afle:

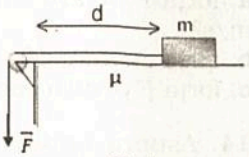


a. momentul de timp la care se rupe firul

b. reprezentarea grafică a forței de tensiune din fir în funcție de timp, în primele 9 s de la începutul acțiunii forței F

c. accelerația pe care o are corpul la momentul t=10 s

10. Un corp cu masa m=100 g aflat inițial în repaus pe o suprafață orizontală, la distanța d=1m față de marginea suprafeței, este legat de capătul unui fir ideal trecut peste un scripete, ca în figura alăturată. Se acționează cu o forță F=0,2 N asupra capătului liber al firului un timp Δt_1=1s, după care acțiunea ei încetează. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și suprafața orizontală este μ=0,1. Să se afle:



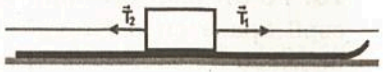
a. forța care apasă asupra axului scripetelui în intervalul de timp Δt_1

b. accelerația corpului în intervalul de timp Δt_1

c. viteza corpului la sfârșitul intervalului de timp Δt_1

d. durata totală a mișcării corpului pe suprafața orizontală

11. Performanțele realizate în probele de schi alpin sunt influențate și de caracteristicile tehnice ale echipamentului folosit. Pentru alegerea materialelor corespunzătoare este necesară măsurarea coeficientului de frecare la alunecare. În acest scop se folosește un dispozitiv fixat pe schiuri, care înregistrează atât valorile forțelor de tensiune din cablurile cu care se acționează asupra sistemului (dispozitiv și schiuri), cât și accelerația sistemului. Schiurile se află pe suprafața orizontală a zăpezii, ca în figura alăturată. În tabel este prezentat unul dintre seturile de date înregistrate.



T_1(N)	T_2(N)	a(m/s²)
165	120	0,5

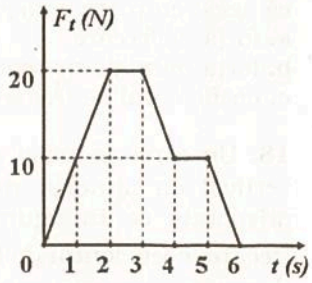
Masa totală a sistemului este m=50 kg, iar deplasarea are loc în sensul forței T_1. Să se afle:

a. coeficientul de frecare la alunecare între schiuri și zăpadă

b. valoarea vitezei atinse după t=2 s de la plecarea din repaus, dacă accelerația se menține constantă la valoarea indicată în tabel

c. viteza pe care ar atinge-o pe aceste schiuri un sportiv care coboară o pantă acoperită de zăpadă, înclinată cu $\alpha=30^0$ față de orizontală cu același coeficient de frecare de la punctul **a.**, după parcurgerea unei diferențe de nivel h=30 m față de punctul din care a plecat din repaus

12. Un bloc de beton de masă m=10 kg, aflat inițial în repaus pe o suprafață plană și orizontală, este supus unei forțe de tracțiune paralelă cu suprafața orizontală. Forța de tracțiune își păstrează direcția, iar modulul ei se modifică în timp conform graficului din figura alăturată. Coeficientul de frecare dintre blocul de beton și suprafața plană este μ=0,1. Să se afle:



a. viteza blocului de beton în intervalul de timp $t\in$ [0;1]s

b. accelerația blocului de beton în intervalul de timp $t\in$ [2;3]s

c. forța de frecare dintre blocul de beton și suprafața orizontală în intervalul de timp $t\in$ [1;6]s și la momentul t=0,3 s

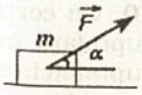
d. forța rezultantă ce acționează asupra blocului în intervalul de timp $t\in$ [4;5]s

13. Pentru a pune în mişcare un corp cu masa m=3 kg aflat pe o suprafaţă orizontală trebuie să tragem cu o forţă F care face cu orizontala un unghi $\alpha=60^0$ ca în figura alăturată. Cunoscând coeficientul de frecare μ=0,1, să se afle:

a. forţa F pentru care corpul se mişcă accelerat cu acceleraţia a=2 m/s²

b. forţa cu care corpul apasă pe suprafaţă

c. forţa F pentru care corpul se mişcă uniform



14. Asupra unui corp de masă m=2 kg, aflat iniţial în repaus pe o suprafaţă orizontală, acţionează o forţă constantă F=13,56 N care face unghiul $\alpha=60^0$ cu orizontala un timp t=15 s, ca în figura precedentă. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi suprafaţa orizontală este $\mu=1/\sqrt{3}$. Să se afle:

a. acceleraţia corpului:

b. viteza corpului imediat după încetarea acţiunii forţei

c. intervalul de timp Δt_{op}, măsurat după încetarea acţiunii forţei F, în care corpul se opreşte

15. Pe un plan orizontal se află o sanie cu masa m=2 kg. Asupra acesteia un copil apasă cu o forţă F sub un unghi $\alpha=60^0$ cu orizontala astfel că sania se mişcă cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,1. Să se afle:

a. forţa F, dacă sania se mişcă accelerat cu acceleraţia a=1 m/s²

b. forţa cu care apasă sania pe planul orizontal

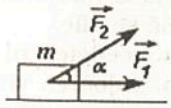
c. forţa F, cu care trage copilul sania sub unghiul $\alpha=60^0$ cu orizontala, astfel încât sania să nu apese asupra planului

16. Un corp cu masa m=6 kg se află pe un plan orizontal pe care se poate deplasa cu frecare. Asupra corpului acţionează simultan ca în figură forţele F_1=20 N şi $F_2=10\sqrt{3}$ N şi $\alpha=30^0$. Să se afle:

a. forţa de apăsare normală

b. valoarea minimă a coeficientului de frecare dintre corp şi planul orizontal pentru care corpul mai rămâne în repaus

c. acceleraţia corpului dacă coeficientul de frecare are valoarea μ=0,34

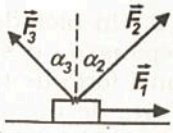


17. Asupra unui corp cu masa m=2 kg acţionează trei forţe F_1=12 N, $F_2=4\sqrt{3}$ N $F_3=8\sqrt{2}$ N ca în figură. Cunoscând valoarea unghiului $\alpha_2=30^0$ şi $\alpha_3=45^0$ şi ştiind că acest corp are o mişcare accelerată cu a=2 m/s², să se afle:

a. forţa de frecare

b. forţa normală de reacţiune din partea suprafeţei

c. coeficientul de frecare la alunecare

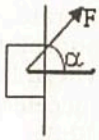


18. Un corp cu masa m=3 kg este menţinut în repaus pe un perete vertical cu ajutorul unei forţe care formează un unghi $\alpha=30^0$ cu orizontala ca în figura alăturată. Dacă între corp şi plan există frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=1/(2\sqrt{3})$, să se afle:

a. valoarea minimă a acestei forţe

b. forţa de apăsare exercitată de corp asupra peretelui

c. valoarea forţei pentru care corpul urcă accelerat cu acceleraţia a=1 m/s²

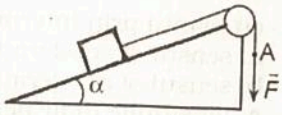


19. Un snowmobil cu masa m=800 kg având iniţial viteza v_0=10 m/s coboară pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$ şi atinge viteza v=25 m/s după un interval de timp egal cu t=5 s. Să se afle:

a. accelerația snowmobilului
b. forța de frecare
c. coeficientul de frecare

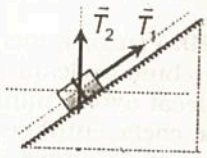
20. Pe o scândură orizontală se află un corp cu masa m=500 g. Scândura începe să se încline și când unghiul făcut de scândură cu orizontala este de $\alpha=30^0$, corpul începe să alunece uniform. Apoi scândura se înclină cu unghiul $\beta=60^0$. Să se afle:
a. valoarea coeficientul de frecare dintre corp și scândură
b. forța paralelă cu planul astfel încât corpul să urce accelerat cu accelerația a=2 m/s² când $\beta=60^0$
c. distanța parcursă de corp în Δt=2 s sub acțiunea forței de la punctul **b.**, dacă corpul pornește din repaus

21. Sub acțiunea forței F=15,2 N, care are punctul de aplicație în A, corpul de masă m=2 kg este ridicat uniform pe planul înclinat față de orizontală cu un unghi α, pentru care $\sin\alpha$=0,6 ca în figura alăturată. Să se afle:



a. coeficientul de frecare la alunecarea corpului pe planul înclinat
b. accelerația cu care coboară corpul dacă forța are valoarea F=8 N
c. viteza corpului la baza planului înclinat dacă durata coborârii este Δt=2 s în condițiile punctului **b.** dacă corpul pornește din repaus

22. O ladă cu masa totală m=2500 kg este urcată uniform la înălțimea h=3 m pe un plan înclinat cu lungimea ℓ=5 m, cu ajutorul a două cabluri: unul menținut mereu paralel cu planul înclinat și altul menținut mereu vertical, ca în figură. Tensiunile în cabluri au valorile: T_1=16 kN, respectiv T_2=5 kN. Apoi, după ce este golită, lada este lăsată să alunece liber pe planul înclinat. Să se afle:

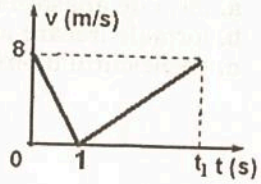


a. forța de frecare
b. coeficientul de frecare la alunecare
c. accelerația cu care coboară lada goală pe planul înclinat

23. Pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=60^0$ cu orizontala se aruncă de jos în sus de-a lungul planului un corp cu viteza inițială υ_0=9,9 m/s. Mișcarea corpului se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,25. Să se afle:
a. accelerația cu care urcă corpul pe planul înclinat
b. timpul după care se oprește corpul
c. distanța parcursă de corp până la oprire

24. Un corp cu masa m=2 kg se lasă liber pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$. Corpul se mișcă cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,25. Planul înclinat se continuă cu un plan orizontal pe care mișcarea corpului se face cu același coeficient de frecare. Să se afle:
a. accelerația cu care coboară corpul pe planul înclinat
b. accelerația cu care se mișcă corpul pe planul orizontal
c. forța paralelă cu planul înclinat cu care se acționează asupra corpului pentru ca acesta să urce uniform pe plan

25. Pe un plan înclinat cu unghiul α ($\sin\alpha$=0,6) este lansat dintr-un punct de-a lungul planului un corp. Reprezentarea grafică a vitezei corpului în funcție de timp este redată în figura alăturată. Să se afle:



a. distanța parcursă de corp până la oprire
b. coeficientul de frecare
c. valoarea t_1 după care corpul revine la coborâre la valoarea inițială a vitezei
d. distanța totală parcursă de corp până când viteza revine la valoarea inițială

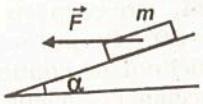
26. Pe o pârtie înclinată cu unghiul $\alpha=30^0$ un copil trage în sus o sanie cu masa m=2 kg din repaus și cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 1/\sqrt{3}$ un timp t=6 s, acționând cu o forță de-a lungul pârtiei F=21 N. Apoi acțiunea forței F încetează. Să se afle:
a. accelerația saniei când acționează forța F
b. distanța parcursă de sanie până când forța F încetează să acționeze
c. distanța parcursă de sanie până la oprire după încetarea acțiunii forței F

27. De un corp cu masa m=1 kg, care se află pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$ mișcându-se cu frecare cu coeficientul $\mu = 1/(2\sqrt{3})$, se trage în sus paralel cu planul prin intermediul unui fir. Să se afle:
a. sensul și accelerația cu care se mișcă corpul dacă tensiunea este T=15 N
b. sensul și accelerația cu care se mișcă corpul dacă tensiunea este T=2 N
c. tensiunile în fir pentru ca acest corp să urce, respectiv să coboare uniform

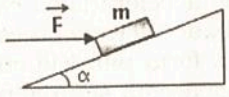
28. Pentru a menține în repaus un corp pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=45^0$ trebuie aplicată o forță minimă în sus de-a lungul planului F_1=5 N, iar pentru a-l trage uniform în sus de-a lungul planului trebuie aplicată o forță în sus de-a lungul planului F_2=15 N. Să se afle:
a. masa corpului
b. coeficientul de frecare
c. tangenta unghiului de frecare

29. Pentru a menține în echilibru un corp pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=45^0$ trebuie aplicată corpului o forță minimă normală pe plan de n=3 ori mai mare decât o forță minimă orizontală. Să se afle:
a. coeficientul de frecare
b. viteza atinsă de corp după un interval de timp t=2 s, dacă acesta este lăsat liber
c. distanța parcursă de corp în condițiile punctului **b.**

30. Asupra unui corp cu masa m=2 kg aflat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$ se trage orizontal cu o forță F=2 N ca în figura alăturată. Mișcarea corpului se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 1/(4\sqrt{3})$. Să se afle:
a. accelerația cu care coboară corpul pe planul înclinat
b. forța cu care apasă corpul pe plan
c. forța F pentru care corpul nu mai apasă pe plan



31. Sub acțiunea unei forțe orizontale $F=30\sqrt{3}$ N, un corp de masă m=4 kg coboară uniform cu frecare pe un plan înclinat fix de unghi $\alpha=60^0$, ca în figura alăturată. Să se afle:
a. forța de apăsare normală la suprafața planului înclinat
b. forța de frecare la alunecare dintre corp și plan
c. coeficientul de frecare la alunecare



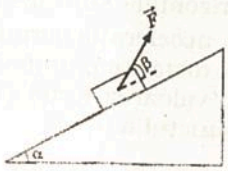
32. Asupra unui corp cu masa m=2 kg aflat pe un plan înclinat cu unghiul α=30° acționează o forță orizontală F=30 N, ca în figura de la problema precedentă. Coeficientul de frecare pe planul înclinat este $\mu = 1/(2\sqrt{3})$. Să se afle:

a. accelerația corpului pe plan

b. forța pentru care corpul urcă uniform

c. accelerația minimă orizontală cu care trebuie împins planul înclinat pentru ca acest corp să înceapă să urce uniform pe plan în lipsa forței F

33. Un corp cu masa m=1 kg este așezat pe un plan înclinat cu unghiul α=30° și este tras cu o forță F care formează unghiul β=45° cu planul înclinat ca în figură. Acest corp se mișcă uniform de-a lungul planului în sus, cu frecare. Cunoscând coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = 1/\sqrt{3}$, să se afle:



a. forța F

b. forța de apăsare normală

c. forța F și forța de apăsare normală dacă corpul se mișcă accelerat în sus de-a lungul planului cu accelerația a=1 m/s²

d. valoarea forței F, astfel încât corpul să nu mai apese pe planul înclinat

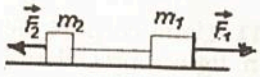
34. Două corpuri cu masele m_1=2 kg și m_2=0,5 kg sunt așezate pe un plan orizontal cu frecare și sunt legate între ele printr-un fir inextensibil. De corpul cu masă m_1 se trage orizontal cu forța F=10 N. Coeficientul de frecare la alunecare are valoarea μ=0,2. Să se afle:

a. accelerația cu care se mișcă corpurile

b. tensiunea din firul de legătură

c. viteza și distanța parcursă de corp în primele t=4 secunde de mișcare

35. Asupra sistemului din figura alăturată format din corpurile cu masele m_1=8 kg, m_2=12 kg încep să acționeze simultan forțele F_1=70 N, F_2=20 N. Inițial sistemul se afla în repaus. Mișcarea corpurilor decurge cu frecare, μ=0,2. După un interval de timp forța F_2 încetează să acționeze. Să se afle:

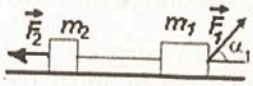


a. accelerația cu care se mișcă inițial corpurile

b. tensiunea din firul de legătură când acționează ambele forțe

c. tensiunea din firul de legătură imediat când F_1 încetează să acționeze

36. Fie sistemul de corpuri din figura alăturată. Se cunosc m_1=4 kg, m_2=2 kg, F_1=30 N, F_2=10,95 N, α=30° și μ=0,2. Să se afle:

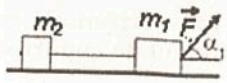


a. accelerația cu care se mișcă corpurile

b. tensiunea din firul de legătură

c. forța F_1 pentru care sistemul se mișcă uniform spre dreapta

37. Corpurile de mase m_1=2 kg și m_2=1 kg se află pe o suprafață orizontală cu frecare și sunt legate printr-un fir inextensibil, ca în figură. Coeficientul de frecare este același pentru ambele corpuri și are valoarea μ=0,6. Asupra corpului m_1 acționează o forță F=20 N a cărei direcție formează cu orizontala unghiul α. Dacă forțele normale de apăsare exercitate de cele două corpuri asupra suprafeței de contact sunt egale, să se afle:



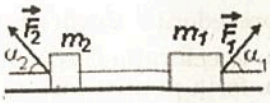
a. unghiul α

b. forțele de frecare care acționează asupra corpurilor

c. accelerația sistemului format din cele două corpuri

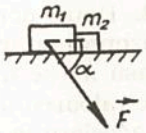
d. forța de tensiune din firul de legătură

38. Două corpuri de mase m_1=6 kg respectiv m_2=4 kg sunt legate între ele cu un fir inextensibil de masă neglijabilă și sunt așezate pe o suprafață orizontală. Asupra corpului de masă m_1 acționează forța $F_1=30\sqrt{2}$ N a cărei direcție formează cu orizontala unghiul α_1=45°, iar asupra corpului de masă m_2 acționează forța F_2=5 N a cărei direcție formează cu orizontala unghiul α_2=30°, ca în figura alăturată. Coeficienții de frecare dintre corpuri și suprafața orizontală sunt $\mu_1=1/(2\sqrt{2})$ și $\mu_2=1/(5\sqrt{3})$. Să se afle:



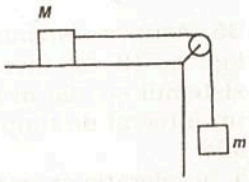
a. accelerația corpurilor
b. distanța parcursă de cele două corpuri în intervalul de timp t=10 s
c. valoarea forței F_1 astfel ca sistemul să se miște uniform în același sens ca la punctul **a.**

39. Două corpuri cu masele m_1=300 g și m_2=200 g sunt așezate pe un plan orizontal și se află în contact. Se împinge în jos asupra corpului cu masa m_1 cu o forță F=5 N sub un unghi α=30° cu orizontala ca în figură. Corpurile se pot deplasa cu frecare, coeficientul de frecare fiind același μ=0,2. Să se afle:



a. accelerația cu care se deplasează sistemul de corpuri
b. forța cu care m_1 acționează asupra corpului m_2
c. forța de apăsare normală exercitată de corpul 1 asupra planului orizontal

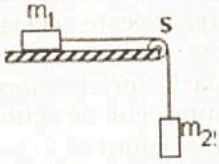
40. Un corp cu masa M=3 kg este așezat pe un plan orizontal. De acest corp este legat un fir ideal trecut peste un scripete ideal și având la capăt un corp cu masa m=2 kg ca în figură. Coeficientul de frecare la alunecare are valoarea μ=0,2. Să se afle:



a. accelerația cu care se mișcă corpurile
b. tensiunea din firul de legătură
c. reacțiunea în axul scripetelui

41. Două corpuri identice cu masa m=2 kg sunt așezate ca în figura precedentă. Lăsat liber sistemul din repaus corpurile se mișcă cu accelerația a=2 m/s². Pe masa orizontală mișcarea se efectuează cu frecare. Să se afle:
a. coeficientul de frecare la alunecare
b. forța orizontală care trebuie să acționeze asupra corpului de pe plan, dacă sistemul se mișcă în sens contrar cu aceeași accelerație
c. tensiunea din firul de legătură în cazul **b.**

42. Un corp cu masa m_1 este așezat pe un plan orizontal. De acest corp este legat un fir ideal trecut peste un scripete și având la capăt un corp cu masa $m_2=4m_1$=4 kg. Coeficientul de frecare la alunecare are valoarea μ=0,1. Sistemul se mișcă accelerat cu accelerația a_1. Dacă se schimbă corpurile între ele, sistemul se mișcă cu accelerația a_2, în condițiile în care coeficientul de frecare dintre corpul m_2 și plan are aceeași valoare. Să se afle:



a. raportul accelerațiilor corpurilor
b. masa suplimentară care trebuie așezată deasupra corpului de masă m_1, în situația din figură, pentru ca sistemul de corpuri să se deplaseze cu viteză constantă
c. forța orizontală care trage de corpul cu masă m_1 astfel ca sistemul de copuri să se miște accelerat cu accelerația a=1 m/s² iar m_2 să urce

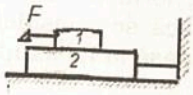
d. accelerația sistemului în timpul urcării corpului de masă m_2, dacă printr-un impuls, se imprimă corpului de masă m_1 o viteză mică v orizontal spre stânga

43. Un elev transportă pe o săniuță cu masa M=10 kg un colet cu masa m=5kg. Sfoara care trage de săniuță formează cu orizontala un unghi $\alpha=30^0$. Săniuța pornește din repaus și se deplasează cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=1/\sqrt{3}$. Săniuța parcurge distanța d=400 m într-un interval de timp t=20s. Să se afle:

a. accelerația săniuței
b. forța de frecare dintre colet și sanie
c. forța de tracțiune exercitată de elev

44. Se trage orizontal cu forța F constantă de corpul 1 cu masa m_1=10 kg ca în figură. Coeficientul de frecare dintre corpuri este μ=0,75 și se neglijează frecarea între corpul 2 cu masa m_2=20 kg și suportul orizontal. Firul care leagă corpul 2 de suportul vertical suportă o tensiune maximă T_{max}=80 N. Să se afle:

a. forța F necesară deplasării corpului 1 față de corpul 2
b. tensiunea în fir în condițiile punctului **a.**
c. dacă firul rezistă la solicitare și justificarea acestui fapt



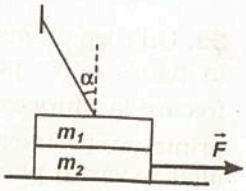
45. Pe o scândură aflată pe un plan orizontal cu masa m_1=2,5 kg este așezat un corp cu masa m_2=0,5 kg. Coeficientul de frecare dintre corp și scândură este μ_2=0,2, iar coeficientul de frecare la alunecare între plan și scândură este μ_1=0,1. Să se afle care este valoarea minimă a forței cu care se trage de scândură pentru ca acel corp aflat pe ea să înceapă să alunece.

46. Un corp cu masa m_1=1 kg se află pe o scândură suficient de lungă cu masa m_2=4 kg, care la rândul ei se află pe o masă orizontală fără frecări. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și scândură este μ=0,2. Asupra scândurii se exercită o forță orizontală $F=c\cdot t$, unde c=5 N/s, iar t este timpul. Să se afle:

a. accelerația cu care se mișcă corpurile împreună în funcție de timp
b. momentul de timp la care corpurile încep să se miște independent
c. accelerațiile cu care se mișcă corpurile după ce acestea încep să se miște independent

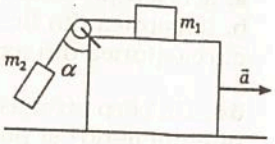
47. Pe un plan orizontal se află două cărămizi, cea inferioară are masa m_2=2 kg, iar cea superioară are masa m_1=1 kg. Cărămida superioară este legată de un perete vertical cu un cablu care formează cu verticala unghiul $\alpha=45^0$ ca în figură. Între cărămizi există frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind μ=0,2. Se neglijează frecarea dintre cărămida inferioară și plan. Cărămida inferioară este trasă de o forță F pentru a o scoate de sub cea superioară. Să se afle:

a. tensiunea în fir
b. forța minimă F cu care trebuie trasă cărămida inferioară
c. forța cu care apasă cărămida inferioară pe planul orizontal

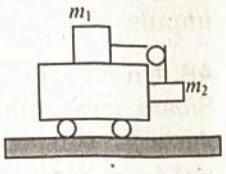


48. Un corp cu masa m_1=500 g se află pe o platformă care se poate deplasa fără frecare în plan orizontal cu accelerația a=4 m/s². Corpul cu masa m_1 este legat printr-un fir trecut peste un scripete de corpul m_2=100g ca în figură Corpurile nu se deplasează față de platformă. Să se afle:

a. tensiunea în firul care leagă cele două corpuri
b. cosinusul unghiul cu care deviază corpul m_2 față de verticală
c. coeficientul de frecare dintre corpul m_1 și platformă

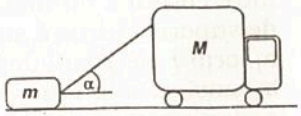


49. Corpurile din figură sunt legate printr-un fir ideal şi au masele m_1=10 kg şi m_2=2,5 kg. Ele sunt în repaus pe căruciorul aflat în mişcare rectilinie şi uniformă. Să se afle:



a. tensiunea în firul de legătură
b. valoarea coeficientului de frecare μ
c.accelerația care trebuie imprimată căruciorului, astfel încât dacă schimbăm locul corpurilor între ele, acestea să rămână în echilibru pe cărucior, dacă coeficientul de frecare μ este acelaşi pentru ambele corpuri

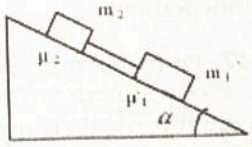
50. O maşină cu masa M=1500 kg se deplasează rectiliniu şi uniform pe un drum orizontal tractând o ladă cu masa m=100 kg prin intermediul unui cablu orientat la un unghi α=60° față de orizontală ca în figură. Coeficientul de frecare dintre ladă şi şosea este μ_1=0,8. Să se afle:



a. tensiunea din cablu
b. coeficientul de frecare dintre roțile maşinii şi asfalt
c. forța de frecare care se exercită asupra fiecărei roții, dacă se consideră că toate roțile sunt motoare şi toate apasă la fel asupra şoselei

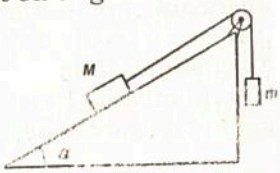
51. Un autocamion cu masa M=4 t de care este legată, printr-o bară rigidă, o remorcă cu masa m=1 t, se deplasează uniform cu viteza inițială υ_0=16 m/s. La un moment dat este acționată frâna care blochează numai roțile autocamionului, odată cu încetarea acțiunii forței de tracțiune dezvoltată de motor. Coeficientul de frecare la alunecare este μ=0,8. Să se afle:
a. accelerația cu care se mişcă autocamionul şi remorca, după ce încetează forța de tracțiune dezvoltată de motor
b. forța cu care este împins autocamionul de remorcă în timpul frânării
c. spațiul parcurs de corpuri până la oprire din momentul acționării frânei

52. Două corpuri cu masele m_1=4 kg şi m_2=8 kg legate printr-o tijă rigidă, alunecă liber pe un plan înclinat cu unghiul α=30° față de orizontală. Mişcarea se efectuează cu frecare, coeficientul de frecare fiind pentru primul corp $\mu_1 = 1/(2\sqrt{3})$, iar pentru al doilea $\mu_2 = 1/(5\sqrt{3})$. Să se afle:



a. accelerația sistemului de corpuri
b. tensiunea din tijă
c. tensiunea din tijă în absența frecării între corpuri şi suprafața planului înclinat

53. Un corp cu masa M=3 kg este aşezat pe un plan înclinat cu unghiul α=30° ca în figură şi se poate mişca cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = 1/(5\sqrt{3})$. De corp este legat printr-un fir inextensibil trecut peste un scripete ideal aflat în vârful planului înclinat un alt corp cu masa m=1 kg. Să se afle:



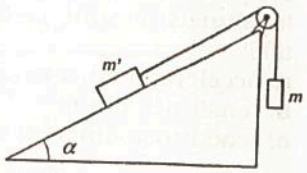
a. accelerația cu care se mişcă sistemul
b. tensiunea din fir
c. reacțiunea din axul scripetelui

54. Un corp cu masa M=1 kg este aşezat pe un plan înclinat suficient de ling, cu unghiul α=60° şi poate mişca cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare este μ=0,2. De corp este legat printr-un fir inextensibil trecut peste un scripete ideal

aflat în vârful planului înclinat un alt corp cu masa m=5 kg ca în figura precedentă. Sistemul porneşte din repaus. Să se afle:
a. accelerația cu care se mişcă sistemul
b. tensiunea din fir
c. distanța parcursă de sistemul de corpuri în timpul t=2 s
d. masa m pentru care corpul M urcă uniform pe planul înclinat

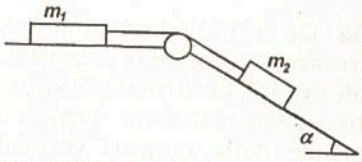
55. Pe un plan înclinat cu lungimea ℓ=10 m şi înălțimea h=6 m se află un corp cu masa m legat printr-un fir inextensibil de un taler cu masă neglijabilă. Corpul rămâne în echilibru pe planul înclinat dacă pe taler se aşază mase cuprinse între m_1=10 kg şi m_2=20 kg. Să se afle:
a. masa corpului m
b. coeficientul de frecare dintre corp şi plan
c. accelerația cu care coboară corpul cu masa m, dacă se dezleagă corpul cu masa m_1 şi se trage cu o forță egală cu jumătate din greutatea acestui corp

56. În sistemul reprezentat în figura alăturată unghiul planului înclinat este α=30°. Valoarea masei corpului atârnat pentru care corpul de pe plan coboară cu viteză constantă pe plan este m_1=0,35 kg. Dacă masa corpului atârnat este m_2=0,65 kg, celălalt corp aflat pe plan urcă uniform pe acesta. Să se afle:



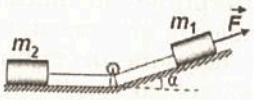
a. forța de reacțiune care acționează asupra axului scripetelui în timpul coborârii uniforme a corpului aflat pe planul înclinat
b. masa corpului de pe planul înclinat
c. coeficientul de frecare la alunecare dintre corpul aflat pe plan şi planul înclinat

57. Pe un plan orizontal se află un corp cu masa m_1=100 g care se poate mişca cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind μ=0,2. De acest corp este prins printr-un fir ideal ce trece peste un scripete ideal un al doilea corp cu masa m_2=400 g aflat pe un plan înclinat cu unghiul α=30° ca în figură. Mişcarea corpului al doilea se face cu acelaşi coeficient de frecare. Să se afle:

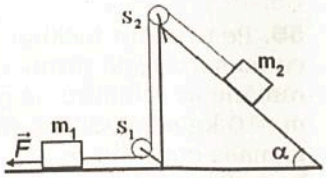


a. accelerația cu care se mişcă sistemul
b. tensiunea din fir
c. reacțiunea din axul scripetelui
d. masa corpului m_1 pentru care sistemul se mişcă uniform

58. Sistemul din figură, format din corpuri identice având masele m_1=m_2=2 kg, sub acțiunea forței constante F=27,2 N, orientată paralel cu suprafața planului înclinat. Deplasarea corpului de masă m_1 are loc în sensul forței F. Corpurile sunt legate prin intermediul unui fir inextensibil şi de masă neglijabilă. Unghiul format de planul înclinat cu orizontala este $\alpha \approx 37°$($\sin\alpha$=0,6). iar coeficientul de frecare la alunecare dintre corpuri şi suprafețe este acelaşi, având valoarea μ=0,2. Să se afle:
pentru ca în timpul mişcării corpul de masă m_2 să nu atingă scripetele.
a. accelerația sistemului de corpuri
b. tensiunea din fir
c. reacțiunea în axul scripetelui
d. intervalul de timp necesar sistemului de corpuri pentru a parcurge distanța d=1,44 m

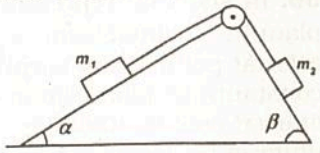


59. Un sistem format din două corpuri de mase m_1=2 kg şi m_2=0,5 kg, legate printr-un fir inextensibil şi de masă neglijabilă, se poate deplasa cu frecare sub acţiunea forţei de tracţiune F=10 N, paralelă cu suprafaţa orizontală, ca în figură. Coeficienţii de frecare la alunecare ai celor două corpuri cu suprafaţa orizontală, respectiv cu suprafaţa planului înclinat au aceeaşi valoare, μ=0,2. Unghiul planului înclinat este α=45°. Să se afle:



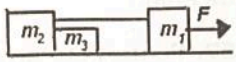
a. accelerația sistemului
b. forța de tensiune din fir
c. forța exercitată asupra axului scripetelui S_1
d. forța F astfel ca sistemul să se deplaseze uniform în acelaşi sens ca la punctul **a.**

60. Pe două plane înclinate cu unghiurile α=60° şi β=30° se află două corpuri cu masele m_1=1 kg şi m_2=7 kg legate printr-un fir inextensibil trecut peste un scripete ideal fixat în vârful planelor comune ca în figură. Coeficienţii de frecare la alunecare sunt μ_1=0,1 şi respectiv μ_2=0,2. Să se afle:



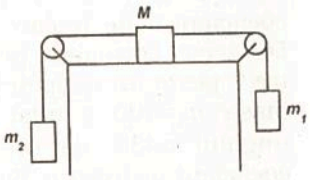
a. accelerația cu care se mişcă sistemul
b. tensiunea din fir
c. reacțiunea din axul scripetelui

61. Corpurile au masele m_1=5 kg, m_2=1 kg şi m_3=2 kg. De corpul m_1 se trage cu o forță F=28 N ca în figură. Între toate corpurile şi suprafața orizontală coeficientul de frecare are aceeaşi valoare μ=0,25. Să se afle:



a. accelerația fiecărui corp
b. tensiunea din firul ce leagă corpurile
c. forța cu care corpul m_2 împinge corpul m_3

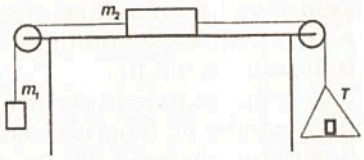
62. De corpul cu masa M=4 kg care se poate deplasa cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare la alunecare fiind μ=0,25 sunt prinse două fire ideale ce trec peste câte un scripete ideal. De aceste fire sunt prinse două corpuri verticale cu masele m_1=5 kg şi m_2=1 kg ca în figură. Să se afle:



a. accelerația cu care se mişcă sistemul
b. tensiunile din cele două fire de legătură
c. masa m_1 pentru care sistemul se mişcă uniform în acelaşi sens ca la punctul

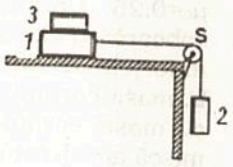
63. Corpul cu masa M=4 kg este legat prin intermediul a două fire ideale ca în figura precedentă de corpurile cu masele m_1 şi m_2=2 kg. Corpul cu masa M se deplasează cu frecare, iar coeficientul de frecare este μ=0,25. Ansamblul de corpuri porneşte din repaus. Sistemul se deplasează spre dreapta cu accelerația a=2 m/s². Să se afle:
a. masa m_1
b. raportul tensiunilor din cele două fire în condițiile punctului **a.**
c. coeficientul de frecare, dacă m_1=4 kg şi sistemul se deplasează spre dreapta cu accelerația a_1=1,2 m/s²

64. Un elev realizează dispozitivul din figură. Corpurile au masele m_1=3 kg şi m_2=8 kg iar talerul are masa neglijabilă. Elevul observă că dacă pune un cubuleț pe taler, corpul m_1 începe să coboare uniform, iar dacă mai adaugă încă 4

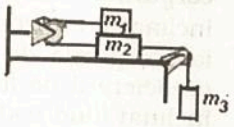


cubulețe identice pe taler, corpul m_1 începe să urce uniform. Să se afle:
a. coeficientul de frecare la alunecare dintre corpul m_2 și suprafața plană
b. masa unui cubuleț
c. accelerația sistemului dacă pe taler elevul așază 3 cubulețe identice fiecare cu masa m=200 g

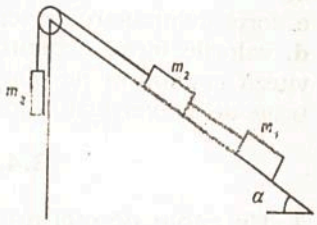
65. În sistemul reprezentat în figura alăturată, de corpul 1 de masă m_1=800 g este prins un corp 2 cu masa m_2=200 g. Peste corpul 1 este așezat corpul 3 cu masa m_3=200 g. Sistemul se deplasează cu viteză constantă, iar corpul 3 rămâne în repaus față de corpul 1. Să se afle:
a. coeficientul de frecare la alunecare dintre corpul 1 și planul orizontal
b. accelerația sistemului nou format dacă corpul 3 este luat de pe corpul 1 și legat de corpul 2
c. forța de apăsare în scripetele S în condițiile punctului anterior
d. tensiunea din firul care leagă corpurile 2 și 3



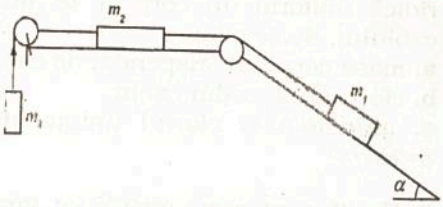
66. Fie copurile cu masele m_1=2 kg, m_2=3 kg și m_3=10 kg din desenul alăturat. Între cele două corpuri aflate pe suprafața orizontală este frecare cu μ_1=0,2 și între corp și masă este frecare cu μ_2=0,1. Să se afle:
a. accelerația sistemului de corpuri
b. tensiunile din fire
c. masa m_3 care determină deplasarea uniformă a sistemului în același sens



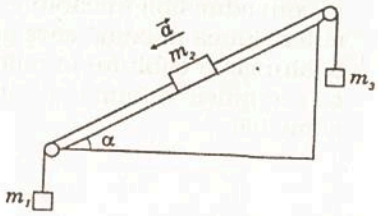
67. Un plan înclinat formează cu orizontala un unghi α=60°. Trei corpuri cu masele m_1=1 kg, m_2=2 kg și m_3=5 kg sunt legate între ele cu ajutorul unor fire ideale ca în figură. Corpurile aflate pe planul înclinat se deplasează cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind același μ=0,2. Să se afle:
a. accelerația cu care se mișcă sistemul
b. tensiunea din firul ce leagă corpul 3 de corpul 2
c. tensiunea din firul ce leagă corpul 2 de corpul 1



68. Pe un plan orizontal se află un corp cu masa m_2=2 kg care se poate deplasa cu frecare, cu coeficientul de frecare la alunecare fiind μ_2=0,2. De acest corp sunt prinse două fire, unul de un corp aflat pe verticală cu masa m_3=1 kg trecut peste un scripete ideal și celălalt de un corp cu masa m_1=5 kg aflat pe un plan înclinat cu un unghiul α=30° tot cu ajutorul altui scripete ca în figură. Corpul cu masa m_1 se deplasează cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind μ_1=0,1. Să se afle:
a. accelerația cu care se mișcă sistemul
b. tensiunile din cele două fire de legătură



69. La capetele unui plan înclinat cu unghiul α=30° se află doi scripeți peste care este trecut câte un fir iar la extremitățile acestor fire sunt atârnate corpurile cu masele m_1=4 kg și m_3=2 kg ca în figură. Pe plan se află un corp cu masa m_2=2 kg care se



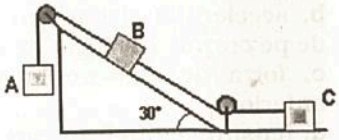
poate deplasa cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind μ=0,2. Să se afle:

a. accelerația cu care se mișcă sistemul

b. tensiunile din cele două fire de legătură

c. accelerația sistemului de corpuri m_1 și m_2 dacă se rupe firul care leagă corpul m_3 de corpul m_2

70. Corpurile *A*, *B* și *C* sunt plasate ca în figură și legate prin fire care trec peste doi scripeți ideali. Atât pe planul înclinat cât și pe cel orizontal mișcarea se efectuează cu frecare, coeficienții de frecare la alunecare fiind $\mu_B=1/(2\sqrt{3})$ și μ_C=0,25. Corpurile *B* și *C* au fiecare greutatea egală cu 40 N, iar corpul *A* coboară cu viteză constantă. Să se afle:

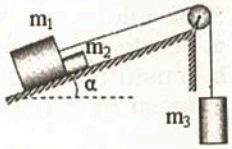


a. forțele de tensiune din fire

b. masa corpului *A*

c. masa corpului *A* pentru care tot sistemul se mișcă accelerat cu accelerația a=2 m/s²

71. În sistemul de corpuri reprezentat schematic în figura alăturată, masele corpurilor sunt $m_1=m_2$=1 kg, respectiv m_3=3 kg. Unghiul format de planul înclinat cu orizontala este $\alpha \approx 37^0$(sinα=0,6). Sistemul este lăsat liber din repaus, iar corpurile de mase m_1 și m_2 se deplasează cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare dintre acestea si planul înclinat fiind μ=0,5. Să se afle:



a. accelerația sistemului de corpuri

b. forța cu care corpul de masă m_1 împinge corpul de masă m_2

c. forța de apăsare pe scripete

d. valorile forței *F* pentru care sistemul de corpuri m_1 și m_2 se deplasează cu viteză constantă pe planul înclinat, dacă se dezleagă corpul de masă m_3 și se trage de fir, vertical în jos, cu forța *F*

2.4. Legea lui Hooke. Forța elastică

1. Un cablu de oțel are lungimea nedeformată ℓ_0=20 m și diametrul d=1 mm. Modulul de elasticitate al lui Young pentru acest oțel $E=2{,}15\cdot10^{11}$ N/m². Cablul ridică uniform un corp și se alungește cu $\Delta\ell$=1,77 mm. Se neglijează masa cablului. Să se afle:

a. masa corpului suspendat de cablu

b. efortul unitar din cablu

c. alungirea și efortul unitar, dacă cablul se ridică vertical cu accelerația a=2m/s²

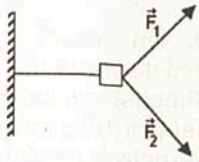
2. Un lift cântărește m=976 kg, iar cablul său de acționare, din oțel, cu lungimea maximă verticală ℓ=30 m și secțiunea S=3 cm² cântărește pe fiecare metru m_0=1,6 kg. La pornirea accelerată de la parter accelerația este a=1,5 m/s². Pentru oțel modulul de elasticitate al lui Young $E=2\cdot10^{11}$ N/m², iar efortul unitar maxim admisibil în cablu este $\sigma=5{,}75\cdot10^7$ N/m². Să se afle:

a. tensiunea maximă care apare în cablu la pornirea accelerată a liftului

b. alungirea cablului în momentul pornirii

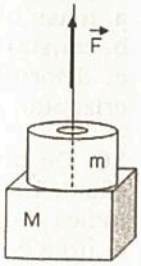
c. secțiunea minimă a cablului pentru a nu se depăși efortul unitar maxim admisibil

3. Două forțe de valori egale $F_1=F_2=2\sqrt{2}$ N având direcții perpendiculare într-un plan orizontal, acționează asupra unui corp cu masa m=2 kg, legat printr-un fir de lungime ℓ_0=0,5 m și secțiune S=1 mm² de un perete fix. La un moment dat se taie firul, corpul deplasându-se fără frecare pe planul orizontal sub acțiunea rezultantei forțelor. Să se afle:



a. rezultanta celor două forțe
b. modulul de elasticitate al firului, știind că alungirea sa sub acțiunea forței rezultante este $\Delta\ell$=20 μm
c. viteza corpului după t=2 s de la tăierea firului

4. Un bloc de lemn cu masa M=5 kg este suspendat de un fir de oțel. Peste bloc este așezat un manșon de fier cu masa m=3 kg. De firul de oțel, care traversează manșonul de-a lungul axei acestuia, fără să-l atingă, se trage vertical în sus cu o forță constantă F=96 N. Să se afle:



a. forța cu care blocul împinge manșonul
b. intervalul de timp în care viteza sistemului variază cu $\Delta\upsilon$=6 m/s
c. efortul unitar din fir, dacă secțiunea acestuia are diametrul $d=1/\pi$ mm

5. Un corp cu masa m=20 kg este tras uniform pe o suprafață plană și orizontală, având coeficientul de frecare la alunecare, $\mu=\sqrt{3}/4$, prin intermediul unui cablu elastic, de masă neglijabilă, ce formează unghiul $\alpha=30^0$ cu orizontala. Diametrul cablului este $d=\sqrt{2/\pi}$ mm, iar alungirea relativă a acestuia este ε=2%. Să se afle:
a. forța de tracțiune
b. modulul de elasticitate longitudinală al materialului cablului
c. forța de reacțiune normală la suprafață

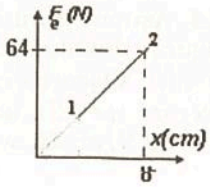
6. Două cabluri metalice de oțel cu secțiunile egale S=1 cm² sunt fixate de câte un zid, iar capetele libere ale lor se prind împreună în prelungire. Distanța dintre ziduri este ℓ=15 m, iar lungimile cablurilor nedeformate sunt ℓ_1=7,25 m și ℓ_2=7,55 m. Cunoscând modulul de elasticitate al lui Young $E=2\cdot10^{11}$ N/m², să se afle:
a. tensiunile din cele două cabluri
b. alungirile absolute ale cablurilor
c. eforturile unitare la care sunt supuse cablurile

7. Datele din tabelul atașat au fost obținute într-un experiment de studiere a deformării unei corzi elastice. Coarda a fost utilizată pentru a trage uniform și orizontal, pe o suprafață orizontală, un corp de masă m=2,5 kg cu frecare, (μ=0,2). Se neglijează greutatea corzii. Să se afle:

F(N)	0	5	10	15	20	25	30
ℓ(cm)	340	340,6	341,2	341,8	342,4	343,1	344,1

a. domeniul de valori pentru care este valabilă legea lui Hooke
b. constanta elastică a corzii
c. alungirea absolută a corzii în timpul deplasării uniforme a corpului

8. Graficul din figura alăturată indică dependența forței elastice de alungirea resortului. Un corp cu masa m=200 g este suspendat la capătul inferior al resortului elastic vertical fixat la capătul superior. Să se afle:



a. constanta elastică a resortului

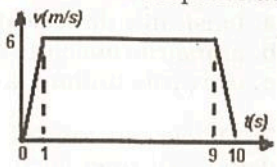
b. alungirea absolută a resortului în situația în care corpul suspendat la capătul resortului este în echilibru
c. alungirea resortului, dacă se fixează capătul superior al resortului de tavanul unui cărucior care se deplasează orizontal cu accelerația a=4,582 m/s²

9. Un resort suspendat vertical are masa neglijabilă și lungimea în stare nedeformată ℓ_0=20 cm. Prinzând de capătul liber al resortului o bilă de mici dimensiuni, la echilibru, lungimea acestuia crește cu f=5%. Dacă se acționează asupra bilei prinse de resort cu o forță verticală de modul F_1=5 N, la echilibru, alungirea resortului se dublează. Să se afle:
a. masa bilei
b. constanta elastică a resortului
c. deformarea resortului, dacă forța F_1 este înlocuită de o altă forță orientată orizontal, de modul F_2=3,32 N

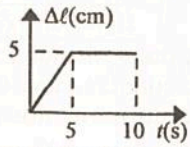
10. De tavanul unui lift este suspendat un dinamometru (resort) cu constanta elastică k=200 N/m de care atârnă un corp cu masa m=1 kg. Să se afle ce forță indică dinamometrul dacă liftul:
a. urcă cu accelerația a=0,8 m/s²
b. coboară accelerat cu accelerația a=0,8 m/s²
c. se deplasează uniform

11. Când un copil se cântărește pe un cântar resortul cântarului se deformează cu x=2 cm, iar acul indică m=30 kg. Apoi pe cântar se urcă un adult cu masa M=90 kg. Să se afle:
a. constanta elastică a resortului cântarului
b. deformația resortului dacă în locul copilului pe cântar se urcă adultul
c. masa indicată de acul cântarului când adultul se află pe acesta și cântarul se află într-un lift care coboară frânat cu accelerația a=0,6 m/s²

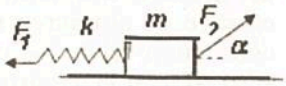
12. De tavanul unui ascensor este suspendat prin intermediul unui resort un corp de iluminat cu masa m=500 g. Lungimea nedeformată a resortului este ℓ_0=20 cm. Graficul alăturat reprezintă viteza ascensorului în timpul mișcării de la parter până la ultimul etaj. Să se afle:
a. constanta elastică a resortului dacă deformarea datorată atârnării corpului de iluminat este $\Delta\ell$=1 cm când $t\in(1,9)$ s
b. lungimea deformată a resortului în cea de-a treia etapă a mișcării
c. numărul de nivele ale clădirii dacă distanța dintre două etaje succesive este h_0=3 m



13. Un corp cu masa m=5 kg este tras cu frecare pe o suprafață orizontală, prin intermediul unui resort cu constanta elastică k=200 N/m, paralel cu suprafața. Deformarea resortului în funcție de timp este reprezentată în figura alăturată. Să se afle:
a. forța elastică la momentul t=3 s
b. forța de frecare când $\Delta\ell$=2 cm
c. coeficientul de frecare la alunecare



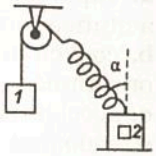
14. Asupra unui corp de masă m=1 kg se exercită forțele F_1=7 N și F_2=4 N ca în figură. Unghiul dintre direcția forței F_2 și orizontală este α=30°. Mișcarea corpului pe planul orizontal se face cu frecare (μ=0,2), iar constanta elastică a resortului este k=100 N/m. Să se afle:



a. alungirea resortului
b. valoarea accelerației corpului
c. valoarea minimă a forței F_2 pentru care corpul aflat în situația de mai sus nu mai apasă pe planul orizontal, dacă menține nemodificat unghiul α făcut cu suprafața orizontală

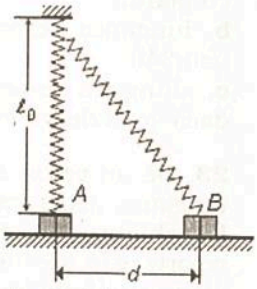
15. Un corp cu masă m=500 g aflat pe un plan orizontal este pus în mişcare rectilinie uniformă prin tragere cu ajutorul unui resort orizontal care are constanta elastică k=50 N/m şi este întins cu x_0=1 cm. Să se afle:
a. coeficientul de frecare
b. accelerația corpului când alungirea resortului este $x=3x_0$
c. alungirea resortului, dacă corpul este tras accelerat pe acelaşi plan orizontal cu accelerația a_1=0,83 m/s^2 cu ajutorul resortului care formează cu orizontala un unghi $\alpha=30^0$

16. Fie sistemul din figură. Se cunosc m_1=3 kg, $\alpha=60^0$ şi k=500 N/m. Corpul 2 este un cub cu densitatea ρ=8000 kg/m^3 şi latura ℓ=10 cm are un gol de formă cubică cu latura ℓ_1=4 cm. Să se afle:
a. alungirea resortului
b. forța cu care cubul apasă pe suprafața plană
c. coeficientul de frecare minim dintre corpul 2 şi suprafața orizontală, dacă acesta nu alunecă pe suprafață



17. Un corp cu masa m=50 g este suspendat de un resort cu constanta elastică k=100 N/m. Să se afle:
a. alungirea resortului
b. alungirea resortului şi valoarea forței F, dacă se trage de corp cu o forță orizontală F până când resortul formează cu verticala un unghi $\alpha=60^0$
c. alungirea resortului dacă se trage de corp cu forța cu valoarea de la punctul **b.**, până când resortul devine orizontal şi sinusul unghiului format de forța F cu orizontala

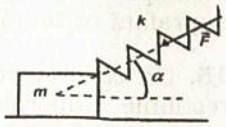
18. Un corp cu masa m=1,115 kg este aşezat pe o scândură orizontală şi în acelaşi timp suspendat printr-un resort vertical nedeformat de lungime ℓ_0=10 cm şi constantă elastică k=50 N/m (poziția A). Scândura este suficient de lungă şi este trasă orizontal, iar când resortul deviază cu unghiul $\alpha=60^0$ față de verticală (poziția B) corpul începe să se deplaseze. Să se afle:
a. coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi scândură
b. forța cu care corpul apasă asupra scândurii când resortul este deviat
c. accelerația corpului în momentul trecerii acestuia prin poziția A, dacă scândura este trasă mult iar corpul alunecă spre A depăşind această poziție



19. Un corp de masă m=1 kg este aşezat pe o suprafață orizontală şi este în acelaşi timp legat de un resort cu masa neglijabilă, vertical, de lungime nedeformată ℓ_0=12 cm şi de constantă elastică k=260 N/m, ca în poziția A din figura precedentă în care resortul este nedeformat. Corpul este adus în poziția B din figură ($AB=d$=9 cm), de o forță orizontală, după care este eliberat. Între corp şi suprafața orizontală există frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind μ=0,1. Să se afle:
a. valoarea forței elastice care acționează asupra corpului în poziția B
b. forta orizontală care ține corpul în repaus în punctul B

c. accelerația corpului în momentul în care este eliberat în poziția B

20. Un corp cu masa m=300 g, așezat pe un plan orizontal, este împins uniform ca în figură de un resort cu constanta elastică k=30 N/m. Axa resortului comprimat formează cu orizontala un unghi $\alpha=45^0$. Coeficientul de frecare dintre corp și plan este μ=0,2. Să se afle:



a. valoarea comprimării resortului

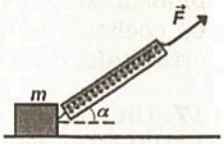
b. forța elastică dacă comprimarea resortului crește de $\sqrt{2}$ ori

c. accelerația corpului în condițiile punctului **b.**

21. Un corp de masă m=0,5 kg se poate deplasa cu frecare pe o suprafață orizontală, sub acțiunea unei forțe orientate sub unghiul $\alpha=45^0$ față de orizontală, ca în figura alăturată. Când dinamometrul indică forța $F_1=\sqrt{2}$ N corpul se deplasează uniform, iar când dinamometrul indică forța $F_2=1,2\sqrt{2}$ N corpul se deplasează accelerat. Să se afle:

a. raportul dintre alungirea resortului dinamometrului în cazul mișcării sub acțiunea forței F_2 și alungirea resortului în cazul mișcării sub acțiunea forței F_1

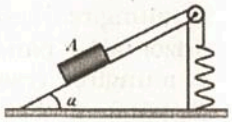
b. coeficientul de frecare la aluncare dintre corp și suprafața orizontală



c. accelerația a

d. valoarea minimă a forței F_3 indicate de dinamometru în cazul în care corpul nu mai apasă pe suprafață

22. Corpul A cu masa m=2 kg este așezat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$ față de orizontală. De corp este prins un fir ideal care la celălalt capăt este legat de un resort ca în figură. Resortul are lungimea nedeformată ℓ_0=80 cm și constanta elastică k=100 N/m. Să se afle:



a. lungimea resortului, dacă se neglijează frecarea corpului cu planul

b. lungimea resortului, dacă coeficientul de frecare dintre corp și plan este μ=0,346

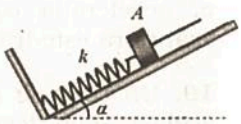
c. alungirea resortului astfel încât corpul să urce uniform cu frecare μ=0,346, dacă se dezleagă capătul resortului legat de planul orizontal și se trage de acesta

23. De un resort elastic ideal, suspendat vertical, având constanta elastică k și lungimea nedeformată ℓ_0=12 cm, se atașează un corp solid A de masă m=100 g. La echilibru, lungimea resortului este ℓ_1=13 cm. Corpul solid A, atașat de același resort, este apoi așezat de-a lungul unui plan înclinat de unghi α, ca în figura alăturată. Lungimea resortului în noua poziție de echilibru este ℓ_2=11,5 cm. Se neglijează forțele de frecare. Să se afle:

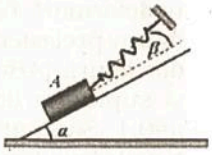
a. constanta elastică a resortului k

b. forța elastică din resort când corpul este pe plan

c. valoarea unghiului α



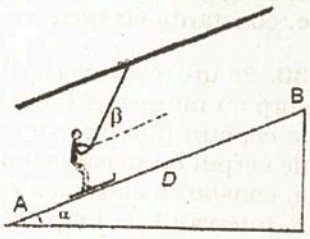
24. Un corp A cu masa m=300 g este menținut în echilibru pe un plan înclinat care formează unghiul $\alpha=45^0$ cu orizontala cu ajutorul unui resort elastic ca în figura alăturată. Se cunosc $\beta=30^0$, constanta elastică a resortului k=100 N/m și coeficientul de frecare μ=0,141. Să se afle:



a. forța care apare în resort

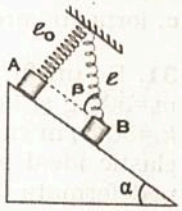
b. alungirea resortului
c. forţa de apăsare normală

25. Un schior cu masa m=80 kg urcă cu o viteză constantă v=2 m/s pe o pârtie AB acoperită cu zăpadă pe fiind tractat de un cablu elastic cu constanta elastică k=6970 N/m conectat la cablul de teleschii ca în figură. Cunoscând unghiul pârtiei α (sinα=0,6), unghiul dintre cablu şi direcţia pârtiei β=45°, coeficientul de frecare la alunecare dintre schiuri şi pârtie μ=0,1 şi lungimea pârtiei D=41,6 m, să se afle:



a. alungirea cablului elastic
b. apăsarea schiorului asupra pârtiei la urcare
c. timpul necesar urcării pârtiei
d. alungirea cablului elastic dacă pe pârtie teleschiul se opreşte datorită unei defecţiuni

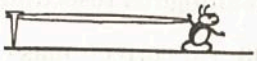
26. Un corp cu masa m=400 g este atârnat de un resort cu masa neglijabilă, fiind menţinut în repaus în poziţia A, ca în figura alăturată. În poziţia A resortul este nedeformat, are lungimea ℓ_0=0,4 m şi este perpendicular pe planul înclinat. Corpul este lăsat să alunece pe plan. În momentul în care corpul trece, în timpul coborârii, prin punctul B, accelerația acestuia este nulă. În poziţia B resortul formează unghiul β=45° cu direcţia planului înclinat. Coeficientul de frecare dintre corp şi suprafaţa planului este egal cu μ=0,2, iar unghiul de înclinare al planului este α (sinα=0,6). Să se afle:



a. alungirea resortului în momentul trecerii corpului prin poziţia B
b. forţa elastică exercitată asupra resortului în poziţia B
c. constanta elastică a resortului
d. forţa de apăsare exercitată de corp în poziţia B

27. Două resorturi cu aceeaşi lungime iniţială au constantele elastice k_1=10 N/m şi k_2=30 N/m. Să se afle:
a. constanta resortului echivalent, dacă resorturile se leagă în serie
b. constanta resortului echivalent, dacă resorturile se leagă în paralel
c. reprezentarea grafică a constantei elastice k, a sistemului format prin legarea a n părţi identice în paralel, dacă aceste părţi provin din tăierea primului resort în n părţi identice, în funcţie de numărul părţilor tăiate n

28. Un gândăcel se află pe o masă orizontală şi trage paralel cu masa de un ineluş elastic foarte fin, agăţat de un cui înfipt în masă. Din momentul în care ineluşul



începe să opună rezistenţă, gândăcelul mai face n_1=10 paşi până când începe să alunece pe masă. Dacă trage din nou dar având şi un bob de orez în braţe cu masa m_0=0,05 g se poate deplasa n_2=14 paşi până când începe să alunece. Dacă gândăcelul se lasă să atârne la marginea mesei suspendat de cui prin intermediul ineluşului, acesta se deformează elastic pe o distanţă echivalentă cu n_0=25 de paşi ai gândăcelului. Să se afle:
a. masa gândăcelului
b. coeficientul de frecare dintre gândăcel şi masă
c. numărul de paşi făcuţi de gândăcel din momentul tensionării firului elastic până la începerea alunecării, dacă ineluşul elastic este tăiat într-un punct şi rămâne fixat de cui ca în figură

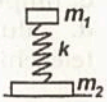
29. Două discuri de mase m_1=100 g şi m_2=300 g sunt prinse între ele cu un resort de masă neglijabilă. Suspendând de un fir sistemul de discul superior, de masă m_2, resortul are lungimea ℓ_1=40 cm. Aşezând sistemul vertical pe o masă cu discul cu masa m_1 în partea inferioară, lungimea resortului devine ℓ_2=20 cm. Să se afle:

a. tensiunea din firul de care este prins discul m_2

b. lungimea resortului nedeformat

c. constanta elastică a resortului

30. Pe un resort vertical aşezat ca în figură se află prins la capătul superior un corp cu masa m_1=250 g care comprimă resortul cu x=1 cm. Masa corpului prins la capătul inferior este m_2=500 g. La un anumit moment se trage vertical în sus de corpul cu masă m_1 cu viteza constantă v=2 mm/s. Să se afle:

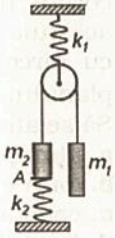


a. constanta elastică a resortului

b. intervalul de timp măsurat din momentul tragerii după care corpul inferior se desprinde de suprafaţă

c. forţa cu care se trage vertical la momentul t=10 s

31. De un fir trecut peste un scripete ideal sunt legate două corpuri cu masele m_1=300 g şi m_2=100 g prin intermediul unui resort ideal şi cu constanta elastică k_1=50 N/m ca în figură. Corpul de masă m_2 este legat, în punctul A, de un resort elastic ideal prins de un suport fix cu lungimea resortului în stare nedeformată ℓ_0=25 cm şi constanta elastică de k_2=100 N/m. În aceste condiţii, sistemul este în echilibru. Se desface apoi legătura din punctul A dintre resort şi corpul m_2 şi se lasă sistemul liber. Să se afle:



a. lungimea resortului prins în punctul A în starea de echilibru

b. acceleraţia sistemului de corpuri după ce sistemul se lasă liber

c. tensiunea din fir după ce sistemul se lasă liber

d. alungirea resortului cu constanta k_1 după ce sistemul se lasă liber

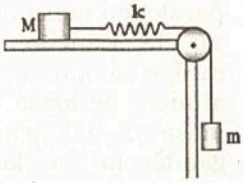
32. Pe o suprafaţă orizontală se află două corpuri cu masele m_1=200 g şi m_2=400 g legate cu ajutorul unui resort cu constanta elastică k=100 N/m. Coeficientul de frecare dintre cele două corpuri şi planul orizontal este μ=0,4. Corpul 2 este prins de un perete vertical cu ajutorul unui fir orizontal care poate rezista la o forţă de rupere F=2 N. Să se afle:

a. forţa minimă orizontală care acţionând asupra primului corp rupe firul

b. forţa minimă orizontală care acţionând asupra primului corp asigură deplasarea uniformă a sistemului de corpuri după ruperea firului

c. alungirea resortului în condiţiile punctului **b.**

33. Un corp cu masa M=2 kg se află pe un plan orizontal pe care se poate mişca cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,2. Corpul este prins de un fir cu un alt corp cu masa m=4 kg, care este trecut peste un scripete şi atârnă vertical. Dacă în fir este inserat un resort cu constanta elastică k=500 N/m. Să se afle:



a. acceleraţia sistemului de corpuri

b. alungirea resortului

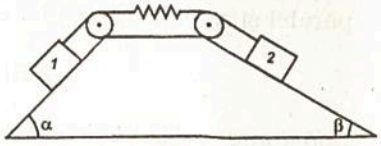
c. reacţiunea în axul scripetelui

34. Fie sistemul din figură. Se cunosc m_1=1 kg, lungimea resortului nedeformat ℓ_0=80 cm, constanta elastică a resortului k=100 N/m, α=45°, β=30° şi se neglijează frecările. Să se afle:

a. masa corpului 2, astfel ca sistemul să se afle în echilibru

b. lungimea finală a resortului

c. lungimile finale ale resortului, astfel ca sistemul să se afle în echilibru dacă coeficientul de frecare este acelaşi μ=0,2 iar masa corpului 2 este aleasă convenabil în fiecare caz

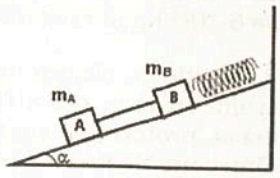


35. Două corpuri *A* şi *B* cu masele m_A=2 kg şi m_B=1 kg, legate între ele printr-un fir inextensibil şi de masă neglijabilă, se află pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$ faţă de orizontală, ca în figura alăturată. Corpurile sunt prinse de un perete vertical prin intermediul unui resort fără masă, cu constanta de elasticitate k=150 N/m. Între corpuri şi suprafaţa planului există frecări (μ=0,173), iar sistemul se află în echilibru. Să se afle:

a. forţa de tensiune din firul care leagă corpurile

b. alungirea resortului care susţine sistemul de corpuri

c. dacă alungirea resortului se modifică în situaţia în care se schimbă între ele poziţiile celor două corpuri. Justificaţi răspunsul.

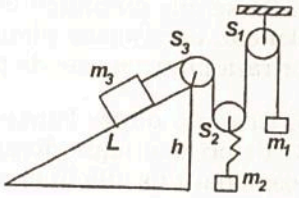


36. Fie sistemul mecanic din figură. Lungimea planului înclinat este L=4 m şi înălţimea planului înclinat este h=2 m. Forţa de frecare dintre corpul m_3 şi plan este F_f=2 N. Să se afle:

a. valorile minime ale maselor m_1 şi m_2 pentru care sistemul se află în echilibru, dacă m_3=3 kg

b. constanta elastică a resortului dacă acesta se alungeşte cu $\Delta\ell$=1,3 cm

c. valorile maselor m_1 şi m_2 pentru care corpul m_3=3 kg urcă uniform pe plan

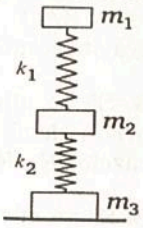


37. Un corp cu masa m_3=500 g se sprijină pe o suprafaţă plană. De acest corp este prins un resort vertical (2) cu constanta elastică k_2=60 N/m peste care se află un alt corp cu masa m_2=300 g. De corpul al doilea este prins un al doilea resort vertical (1) cu constanta elastică k_1=20 N/m, pe care se aşază un corp cu masa m_1=200 g ca în figură. Să se afle:

a. raportul comprimărilor $\Delta\ell_1/\Delta\ell_2$

b. valoarea forţei cu care trebuie apăsat vertical corpul superior m_1 pentru ca acest raport să devină egal cu 2

c. valoarea forţei de apăsare exercitată de corpul m_3 asupra suprafeţei de sprijin în condiţiile de la punctul precedent



38. Trei discuri identice fiecare cu masa m=3 kg sunt legate cu două resorturi elastice identice şi se află pe o suprafaţă orizontală ca în figura precedentă. Lungimile resorturilor sunt ℓ_1=12 cm şi respectiv ℓ_2=18 cm. Să se afle:

a. lungimea nedeformată a unui resort

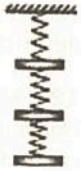
b. constanta elastică a unui resort

c. valoarea forţei de reacţiune normală cu care suprafaţa orizontală acţionează asupra discului inferior

39. Trei corpuri identice sunt agăţate de trei resorturi elastice identice ideale cu constantele elastice k=200 N/m, ca în figura alăturată. Suma alungirilor celor trei resorturi este $\Delta\ell$=12 cm. Să se afle:

a. alungirea resortului inferior

b. forţa elastică care se exercită în resortul din mijloc



c. constanta elastică a resortului echivalent, dacă două resorturi se leagă în paralel şi apoi gruparea lor se leagă în serie cu al treilea

2.5. Legea atracţiei universale

Constante utilizate: constanta atracţiei universale $k=6,67\cdot10^{-11}$ Nm^2/kg^2, raza medie a Pământului $R_P=6370$ km şi accelerația gravitațională medie la suprafața Pământului $g_0=9,8$ m/s^2.

1. Să se afle valoarea forţei de atracţie dintre două corpuri cu masele $m_1=m_2=80$ kg, dacă distanţa dintre centrele lor este $r=1$ m.

2. Să se calculeze forţa de atracţie gravitaţională exercitată asupra Pământului de către Soare, dacă masa Soarelui este $M=2\cdot10^{30}$ kg, masa Pământului este $m=6\cdot10^{24}$ kg şi raza medie a orbitei Pământului faţă de Soare este $R_{P\text{-}S}=1,5\cdot10^{11}$m.

3. Se ştie că electronul se roteşte în atomul de hidrogen în jurul protonului pe o orbită cu raza $r=5,3\cdot10^{-10}$ m. Se cunosc masa electronului $m_e=9,1\cdot10^{-31}$ kg şi iar masa protonului $m=1840m_e$. Să se calculeze forţa de atracţie gravitaţională dintre un electron şi proton.

4. Să se afle greutatea unui cosmonaut care pe Pământ are masa $m=80$ kg pe o planetă, dacă masa planetei este de nouă ori mai mică decât masa Pământului iar raza planetei este de patru ori mai mică decât raza Pământului.

5. Distanţa dintre Pământ şi Lună este $d=3,8\cdot10^5$ km. Masa Pământului este de 81 de ori mai mare decât a Lunii. Să se afle distanţa faţă de Pământ la care un cosmonaut de află în imponderabilitate.

6. Să se afle altitudinea faţă de suprafaţa Pământului la care accelerația gravitaţională se reduce la jumătate din valoarea de la suprafaţa Pamântului.

7. Masa Lunii este de 81 ori mai mică decât masa Pământului. Diametrul Lunii este 3/11 din diametrul mediu al Pământului. Să se afle accelerația gravitaţională medie de la nivelul Lunii.

8. Să se afle raportul accelerațiilor gravitaţionale la suprafeţele a două planete g_1/g_2, dacă raportul maselor celor două planete este $M_1/M_2=1/8$, iar raportul razelor $R_1/R_2=1/2$.

9. Să se afle densitatea medie a Pământului.

10. Dacă accelerația gravitaţională medie la suprafaţa unei planete depărtate este de 2,5 ori mai mare decât accelerația gravitaţională medie de la suprafaţa Pământului, să se afle raportul dintre densitatea medie a planetei şi cea a Pământului, ştiind că planeta are un diametru de trei ori mai mare decât diametrul Pământului.

11*. Ştiind că pe o planetă accelerația gravitaţională la suprafaţa planetei este de 15 ori ori mai mică decât la suprafaţa Pământului, de câte ori este mai înaltă o detentă a aceluiaşi om pe planetă decât pe Pământ?

12*. Să se afle masa Soarelui, dacă viteza liniară de rotaţie a Pământului în jurul Soarelui este $v=30$ km/s, constanta atracţiei universale $k=6,67\cdot10^{-11}$ Nm^2/kg^2 iar raza orbitei Pământului este $R=1,5\cdot10^{11}$ km.

13*. Să se afle valoarea vitezei pe o orbită cu raza $r=2R_P$ a unei nave cosmice care se roteşte în jurul Pământului. Se cunosc raza medie a Pământului $R_P=6400$ km şi accelerația gravitațională medie la suprafața Pământului $g_0=9{,}8$ m/s².

14*. Să se afle la ce distanță de centrul Pământului trebuie plasat un satelit geostaționar, care se mişcă pe o traiectorie circulară în planul ecuatorial al Pământului, dacă se cunosc accelerația gravitațională la suprafața Pământului $g_0=9{,}81$ m/s², raza Pământului $R_P=6370$ km, perioada de rotație a Pământului $T=24$ h şi constanta atracției universale $k=6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm²/kg².

2.6. Mişcarea circular uniformă. Forța centripetă*

1. O curea de transmisie de la bicicletă antrenează două roți. O roată mare are raza $R_1=30$ cm, iar cealaltă $R_2=5$ cm. Roata mică este pusă în mişcare de rotație de pedalele bicicletei, cu viteza unghiulară $\omega_2=30$ rad/s. Să se afle viteza unghiulară a roții mari.

2. Pământul se roteşte în jurul propriei axe într-un interval de timp $T=24$ h. Cunoscând raza medie a Pământului $R_P=6400$ km, să se afle viteza unghiulară de rotație a Pământului şi viteza periferică a acestuia.

3. La un spectacol aeronautic, un avion execută un „loop" (un cerc în plan vertical), cu raza $R=1$ km. Viteza avionului este $v=800$ m/s. Să se afle viteza unghiulară a avionului şi distanța parcursă de acesta la un „loop" total.

4. Un polizor are raza $R=25$ cm. Polizorul se roteşte cu viteza liniară maximă $v=7{,}85$ m/s. Să se afle frecvența maximă cu care se poate roti polizorul.

5. Să se afle viteza unghiulară a unei roți de maşină care efectuează $N=100$ rotații într-un timp $t=50$ s.

6. Un minutar are lungimea $\ell=4$ cm. Să se afle cu cât s-a deplasat într-un sfert de minut.

7. Un avion zboară deasupra ecuatorului spre vest la înălțimea $h=30$ km față de suprafața Pământului. Să se afle viteza cu care trebuie să zboare acest avion pentru a vedea Soarele staționar, dacă raza medie a Pământului este $R_P=6370$ km.

8. Să se afle viteza maximă cu care poate să efectueze o maşină un viraj cu raza $R=100$ m pentru ca aceasta să nu derapeze, dacă coeficientul de frecare dintre şosea şi anvelope este $\mu=0{,}25$.

9. Să se afle unghiul față de verticală cu care trebuie să se încline un motociclist la o curbă cu raza $R=69{,}2$ m, pentru a nu cădea, dacă acesta intră în curbă cu viteza $v=72$ km/h.

10. Într-un vagon care execută o curbă cu raza $R=50$ m, în plan orizontal, cu viteza $v=54$ km/h este cântărit un corp. Să se afle cu cât la sută este mai mare greutatea aparentă decât greutatea reală.

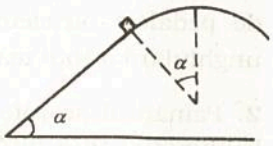
11. Pentru determinarea vitezei unui glonț se ulilizează două discuri de carton, care se aşază pe acelaşi ax la distanța $d=25$ cm între ele. Se pune sistemul în rotație cu turația $n=800$ rot/min şi se trage glontele paralel cu axul. Ştiind că

orificiul din al doilea disc este deplasat cu $\alpha=4^0$ față de orificiul din primul disc, să se afle viteza glontelui.

12. Pe un disc orizontal care se roteşte în jurul axului central este legat de ax, prin intermediul unui resort, un corp. Lungimea nedeformată a resortului este $\ell_0=25$ cm. Discul se roteşte cu viteza unghiulară $\omega=4$ rad/s. Să se afle raportul alungirilor resortului în cazul când între disc şi corp nu există frecare şi în cazul în care există, dacă coeficientul de frecare la alunecare în acest ultim caz este $\mu=0,1$.

13. Un camion cu masa $m=5$ t merge cu viteza $v=54$ km/h peste un pod curbat cu raza $R=100$ m. Să se afle apăsarea exercitată de camion asupra drumului în punctul superior, dacă podul este convex şi în punctul inferior, dacă podul este concav.

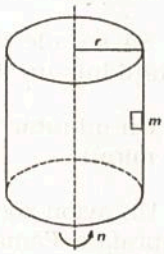
14. O bandă rulantă urcă nişte seminţe sub unghiul $\alpha=60^0$ ca în figură. Să se afle cu ce viteză maximă trebuie să urce banda rulantă astfel încât seminţele să nu se desprindă de bandă în punctul de contact al bandei cu tamburul superior cu raza $R=20$ cm.



15. Un pilot cu masa $m=80$ kg execută un „loop" cu raza $R=800$ m în plan vertical cu viteza $v=720$ km/h. Să se afle forţele cu care apasă pilotul asupra scaunului în punctul inferior şi în punctul superior al traiectoriei.

16. La periferia unei platforme orizontale rotunde cu raza $R=5$ m, care se roteşte cu turaţia $n=10$ rot/min, merge un motociclist cu viteza $u=3,6$ km/h faţă de platformă. Să se afle valoarea coeficientul de frecare la alunecare, pentru ca motociclistul să nu alunece.

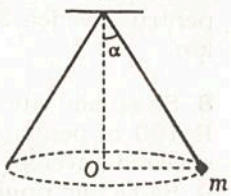
17. Să se afle frecvenţa cu care trebuie rotit un cilindrul din figură cu raza $r=50$ cm în jurul axei sale verticale, pentru ca un corp aşezat pe peretele interior al cilindrului să rămână în repaus faţă de cilindru, dacă coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi cilindru este $\mu=0,5$.



18. Un corp punctiform cu masa $m=100$ g este suspendat de un fir cu lungimea $\ell=30$ cm. Corpul este pus să descrie un cerc în plan orizontal ca în figură, unghiul făcut de fir cu verticala în timpul mişcării este $\alpha=60^0$. Să se afle:

a. perioada de rotaţie a corpului

b. tensiunea din fir



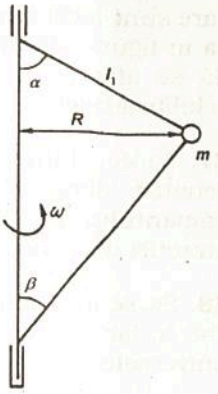
19. Un copil roteşte o găleată cu apă cu masa totală $m=4$ kg prinsă de o sfoară cu lungimea $\ell=50$ cm în plan vertical. Să se afle:

a. frecvenţa minimă de rotaţie pentru ca apa să nu curgă

b. tensiunea din sfoară în punctul inferior al traiectoriei în condiţiile punctului anterior

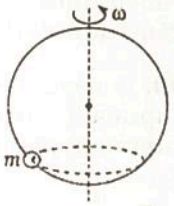
c. tensiunea în sfoară în punctul superior al traiectoriei, dacă frecvenţa cu care se roteşte sistemul se dublează

20. De o tijă verticală cu sunt pinse două cabluri care susțin un corp cu masa m=200 g. Primul cablu are lungimea ℓ_1=30 cm. Se pune sistemul într-o mișcare de rotație ca în figura alăturată cu viteza unghiulară ω=10 rad/s, astfel încât cablul superior formează cu tija un unghi α=60° iar cablul inferior formează cu tija un unghi β=30°. Să se afle tensiunile în cele două cabluri.

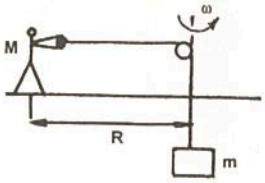


21. De un fir elastic cu lungimea nedeformată ℓ_0=40 cm și constanta elastică k=20 N/m este prins un corp cu masa m=100 g. Să se afle viteza unghiulară a sistemului, dacă pus în mișcare de rotație firul elastic deviază cu un unghi α=60° față de verticală.

22. Pe un inel de sârmă cu raza R=80 cm aflat în plan vertical ca în figura alăturată, poate aluneca fără frecare o bilă. Inelul este pus în mișcare de rotație în jurul axei sale verticale cu viteza unghiulară constantă ω=5 rad/s. Să se afle unghiul pe care îl face în timpul mișcării axa de rotație cu direcția obținută prin unirea centrului inelului cu bila.

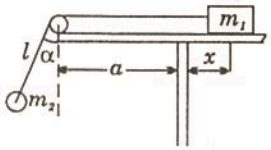


23. Un om cu masa M=80 kg se află pe o platformă care se roteşte cu viteza unghiulară ω=2 rad/s, în jurul unui ax, la distanța R=50 cm de axa de rotație. Omul ridică o masă m=4 kg cu ajutorul unei frânghii care trece peste un scripete fix ca în figură. Coeficientul de frecare la alunecare dintre om şi platformă este μ=0,1. Să se afle între ce limite poate să varieze accelerația cu care omul ridică masa m, pentru ca el să rămână în repaus față de platformă.



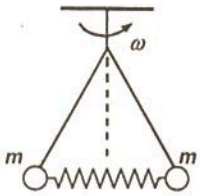
24. Pe un „zid al morții" înclinat față de orizontală cu unghiul α=45° se roteşte un motociclist descriind un cerc în plan orizontal cu raza R=2 m. Ştiind că mișcarea se face cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare este μ=0,2, să se afle viteza unghiulară de rotație a motociclistului şi accelerația centripetă a acestuia.

25. Pe o tijă verticală care se roteşte este aşezată o scândură orizontală pe care se află la distanța x de axa de rotație un corp cu masa m_1=200 g. Coeficientul de frecare la alunecare al corpului m_1 față de scândură este μ=0,2. De corp este prins un fir ideal trecut peste un scripete aflat la distanța a=20 cm de axa de rotație. De capătul celălalt al firului este prins un corp cu masa m_2=100 g. În timpul rotației firul care susține corpul cu masa m_2 formează cu verticala un unghi α=60° ca în figură. Lungimea firului este ℓ=40 cm. Să se afle:



a. tensiunea în fir şi reacțiunea în axul scripetelui
b. viteza unghiulară
c. limitele între care poate fi cuprinsă valoarea x, astfel ca sistemul să se afle în echilibru

26. Două bare verticale care formează între ele un unghi 2α=60° sunt situate simetric față de verticală şi se rotesc în jurul verticalei cu viteza unghiulară ω=30 rad/s. Pe fiecare bară alunecă fără frecare două bile identice găurite cu masa m=50 g



care sunt legate între ele cu ajutorul unui resort cu constanta elastică k=50 N/m ca în figura alăturată. Lungimea inițială a resortului nedeformat este ℓ_0=40 cm. Să se afle la ce înălțime măsurată față de punctul de prindere, se află în echilibru bilele.

27. La ce altitudine deasupra unui pol greutatea unui corp este aceeaşi ca la ecuator, dacă se cunosc raza medie a Pământului R_P=6370 km, densitatea Pământului ρ=5,5 g/cm^3, perioada proprie de rotație T=24 h şi constanta atracției universale k=6,67·10^{-11} Nm^2/kg^2.

28. Să se afle densitatea unui asteroid, dacă perioada de rotație a acestuia este T=3 h, iar la ecuatorul asteoidului corpurile nu au greutate. Constanta atracției universale este k=6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2.

29. Să se afle prima viteză cosmică a unui satelit care se roteşte la suprafața Pământului, dacă se cunosc accelerația gravitațională medie la suprafața Pământului g=9,81 m/s^2 şi raza medie a Pământului R_P=6370 km.

30. O navă cosmică se mişcă cu viteza v=10 km/s la altitudinea h=1000 km de suprafața unei planete. Să se afle ce valoare are accelerația gravitațională la suprafața planetei, dacă raza ei este R=8000 km.

3. Teoreme de variaţie şi legi de conservare în mecanică
3.1. Lucrul mecanic şi puterea mecanică

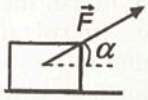
1. O maşină de spălat cu masa m=80 kg se deplasează orizontal cu frecare, coeficientul de frecare μ=0,1, pe distanţa d=30 m sub acţiunea unei forţe orizontale de împingere. Să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate a maşinii
b. lucrul mecanic efectuat de forţa de împingere
c. lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare şi să se compare cu lucrul mecanic efectuat de forţa de împingere

2. Un corp cu masa m=500 g se deplasează cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare μ=0,1 sub acţiunea unei forţe constante F=2,5 N paralelă cu planul un timp t=2 s. Corpul porneşte din repaus. Să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de forţa F
b. lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare
c. puterea mecanică instantanee a forţei F la momentul t_1=2 s

3. Două corpuri cu masele m_1 şi $m_2=2m_1$ sunt lăsate să cadă liber. Primul corp se află în cădere un timp t_1, iar al doilea corp $t_2=2t_1$. Să se afle:
a. raportul lucrurilor mecanice L_1/L_2, efectuate de greutăţile celor două corpuri în timpul căderilor lor
b. raportul puterilor mecanice medii ale celor două greutăţi P_{m1}/P_{m2}
c. lucrul mecanic total al greutăţii corpului care acţionează asupra corpului m_1, dacă în urma contactul cu suprafaţa acesta se întoarce în punctul de unde a plecat

4. Un lift cu masa maximă m=320 kg prins cu un cablu se mişcă vertical în sus cu acceleraţia a=1 m/s^2 de la parter până la etajul 5. Înălţimea medie a unui etaj este de h=2,5 m. Să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de tensiunea din cablul care prinde cabina liftului
b. lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate a liftului
c. puterea medie a tensiunii

5. Un corp cu masa m=1 kg se deplasează cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare fiind μ=0,1 sub acţiunea unei forţe constante F care formează cu orizontala un unghi α=30^0 ca în figura alăturată, astfel încât corpul va avea acceleraţia a=1 m/s^2. Să se afle:
a. lucrul mecanic al forţei F pe distanţa d_1=5 m
b. lucrul mecanic al normalei pe distanţa d_2=2 m
c. lucrul mecanic al forţei de frecare pe distanţa d_3=3 m



6. Asupra unui corp cu masa m=4 kg aflat pe o suprafaţă orizontală acţionează o forţă F=60 N care îşi deplasează punctul de aplicaţie pe distanţa d=4 m, astfel că unghiul făcut de forţă cu direcţia de deplasare este α=30^0 (figura precedentă). Corpul porneşte din repaus şi se deplasează cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,2. Să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de forţa F
b. lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare pe aceeaşi distanţă
c. puterea medie dezvoltată de forţa F

7. Un corp cu masa m=500 g este aruncat pe un plan înclinat sub un unghi α=30^0 cu o viteză iniţială de jos în sus. Mişcarea corpului se face cu frecare

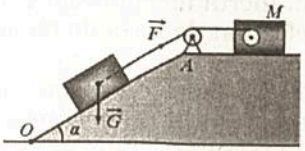
coeficientul de frecare fiind descrescător în mod uniform de la valoarea μ_1=0,3 până la valoarea μ_2=0,1 când corpul se oprește la o distanță d=10 m de punctul de lansare. Să se afle:

a. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare

b. lucrul mecanic efectuat de forța de greutate

c. lucrul mecanic efectuat de forța de apăsare

8. Un bloc de piatră de greutate G=3000 N este tras uniform, cu viteza constantă v=5 m/s, pe panta OA de unghi α=30°, cu ajutorul unui cablu acționat de motorul M, ca în figura alăturată. Cablul exercită asupra blocului forța F=4000 N, a cărei direcție de acțiune este paralelă cu planul înclinat format de pantă. Să se afle:



a. puterea furnizată de motor

b. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare în timpul deplasării blocului de piatră cu d=8 m de-a lungul pantei

c. lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra blocului pe distanța OA

9. Un corp cu masa m=1 kg se găsește la baza unui plan înclinat care formează unghiul α=30° cu orizontala. Înălțimea planului înclinat este h=50 cm iar coeficientul de frecare la alunecare este $\mu=\sqrt{3}/6$. Să se afle:

a. puterea necesară ridicării corpului de-a lungul planului, cu viteza constantă v=30 m/min

b. lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la ridicarea corpului până în vârful planului înclinat

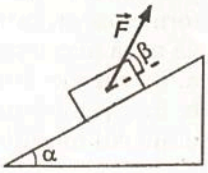
c. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare la urcarea corpului până în vârful planului înclinat

10. Un corp de masă m=2 kg se află la baza unui plan înclinat de unghi α=30°. Sub acțiunea unei forțe constante F orientată sub unghiul β=30° ca în figură față de planul înclinat, corpul este ridicat uniform pe plan pe distanța d=0,2 m. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și planul înclinat este $\mu=1/(2\sqrt{3})$. Să se afle:

a. lucrul mecanic efectuat de forța F

b. lucrul mecanic efectuat de greutate

c. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare pe aceeași distanță, în situația în care corpul urcă sub acțiunea unei forțe de tracțiune paralelă cu planul



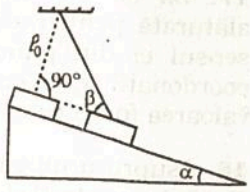
11. Un corp cu masa m=2 kg se deplasează cu frecare pe un plan înclinat cu unghiul α=30°, coeficientul de frecare fiind μ=0,1 sub acțiunea unei forțe constante F care formează cu planul un unghi β=45° ca în figura anterioară. Corpul se deplasează accelerat cu accelerația a=2 m/s² pe distanța d=5 m în sus. Să se afle:

a. lucrul mecanic al forței de tracțiune F

b. lucrul mecanic al normalei

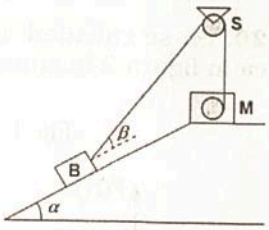
c. lucrul mecanic al forței de frecare

12. Un corp cu masa m=1 kg este menţinut în vârful unui plan înclinat cu unghiul α=30°, poziţie în care firul elastic de susţinere este nealungit, iar lungimea lui este ℓ_0=0,5 m. Corpul alunecă spre baza planului, oprindu-se atunci când firul formează unghiul β=45° cu direcţia planului. Cunoscând constanta elastică a resortului k=20 N/m, să se afle:



a. alungirea firului în poziţia de echilibru
b. lucrul mecanic al greutăţii corpului
c.reacţiunea normală a planului când corpul se opreşte
d. coeficientul de frecare

13. Un bloc de beton B cu masa m=300 kg este ridicat cu viteza constantă υ=0,4 m/s de-a lungul unei rampe ce formează unghiul $\alpha \approx 37^0$(sinα=0,6).) cu orizontala. Forţa de tracţiune este exercitată asupra blocului de beton prin intermediul unui cablu inextensibil acţionat de către un motor M, fixat în vârful rampei. Cablul este trecut peste un scripete fix, ca în figura alăturată. La un moment t_1 cablul formează cu suprafaţa rampei unghiul $\alpha=\beta$, iar forţa de tracţiune are valoarea F=2,5 kN. Să se afle:

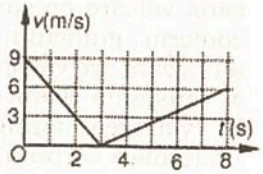


a. forţa de apăsare a blocului de beton pe suprafaţa rampei la momentul t_1
b. coeficientul de frecare la alunecare dintre blocul de beton şi rampă
c. puterea dezvoltată de motor la momentul t_1

14. Pe o rampă înclinată cu unghiul α=30° faţă de orizontală şi având lungimea ℓ=5 m, este ridicată uniform într-un interval de timp Δt=20 s cu ajutorul unei forţe paralele cu planul, o ladă de masă m=100 kg. Coeficientul de frecare la alunecare dintre ladă şi rampă este $\mu=1/(2\sqrt{3})$. Să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare la ridicarea lăzii pe rampă
b. randamentul rampei
c. puterea medie necesară ridicării uniforme a lăzii pe rampă

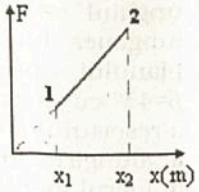
15. Lucrul mecanic util pentru urcarea uniformă a unui corp de masă m=10 kg pe planul înclinat din punctul cel mai de jos în punctul cel mai de sus, este L_u=2000 J, iar lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare este L_f=−500J. Să se afle:
a. lucrul mecanic consumat
b. randamentul η al planului înclinat
c. înălţimea la care urcă corpul pe planul înclinat

16. Un corp cu masa m=100 g este lansat dintr-un punct al planului de-a lungul acestui plan înclinat, alunecă pe acesta mai întâi spre vârful acestuia şi apoi revine la baza planului înclinat. Dependenţa de timp a modulului vitezei corpului în primele 8 secunde este redată în figura alăturată. Să se afle:



a. sinusul unghiului format de plan cu orizontala
b. coeficientul de frecare
c. lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare în intervalul de timp $t \in$ (0s, 8s)

17. Să se afle lucrul mecanic efectuat de forța din figura alăturată pentru a-și deplasa punctul de aplicație în direcția și sensul ei din punctul de coordonată x_1=1 cm în punctul de coordonată x_2=5 cm, dacă în punctul de coordonată x_1=1 cm valoarea forței este F_1=10 N.



18. Asupra unui corp acționează o forță care depinde de coordonată după legea F=10-2x, unde F și x sunt exprimate în S.I. Să se afle lucrul mecanic al acestei forțe când acest corp își deplasează punctul de aplicație în direcția și sensul forței de la x_1=1 m până în punctul x_2=4 m.

19. Să se afle lucrul mecanic total efectuat de o forță care depinde de coordonată conform graficului din figura 1 când coordonata ia valori de la 0 la 5 m.

20. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de o forță $F=f(x)$ reprezentată grafic ca în figura 2 în situația în care coordonata ia valori de la 0 la 4 m.

Fig. 1

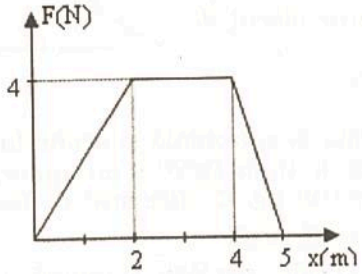
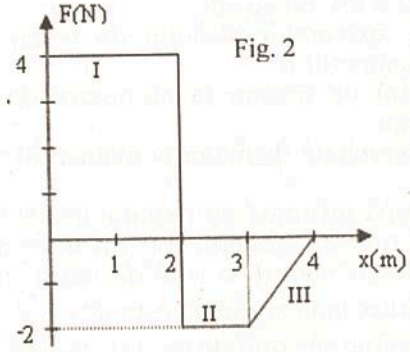


Fig. 2



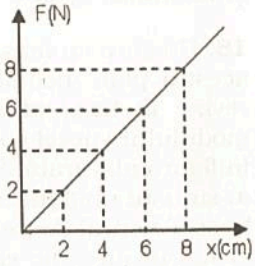
21. O scândură omogenă, de masă m=500 g și lungime ℓ=18 cm, este deplasată orizontal, pe gheață (μ_g=0), de către un elev. La un moment dat scândura pătrunde pe asfalt, unde coeficientul de frecare este μ=0,6. Din acest moment, elevul deplasează uniform scândura cu ajutorul unei forțe orizontale. Să se afle lucrul mecanic efectuat de elev din momentul în care scândura atinge asfaltul și până când pătrunde:

a. pe o treime din asfalt

b. în întregime pe asfalt

c. pe o lungime 2ℓ pe asfalt

22. Un corp de masă m=2 kg se află inițial în repaus pe o suprafață orizontală. Asupra corpului se aplică, prin intermediul unui resort orizontal, o forță de tracțiune F, a cărei valoare crește lent și determină alungirea resortului conform graficului alăturat. Coeficientul de frecare la alunecare are valoarea μ=0,2. Să se afle:



a. constanta elastică a resortului

b. valoarea alungirii resortului în timpul deplasării uniforme a corpului

c. lucrul mecanic efectuat de forța F care trage de resort, în timpul deformării resortului de la x_1=2 cm la x_2=4 cm

23. Să se afle de câte ori este mai mic lucrul mecanic efectuat la alungirea unui resort pe prima treime din alungire față de lucrul mecanic efectuat pentru alungirea cu restul de două treimi din alungire.

24. Să se afle ce lucrul mecanic suplimentar trebuie efectuat pentru a mări alungirea unui resort de la $\Delta\ell=1$ cm la $3\Delta\ell$, dacă pentru a alungi resortul cu $\Delta\ell$ se acționează cu o forță $F=2$ N.

25. Un autoturism cu masa $m=1$ t se deplasează pe un drum rectiliniu și orizontal. Puterea dezvoltată de forța de tracțiune este constantă, având valoarea $P=60$ kW. Când viteza autoturismului este $\upsilon_1=36$ km/h, rezultanta forțelor care se opun mișcării are valoarea $R_1=1$ kN. Când viteza autoturismului are valoarea $\upsilon_2=54$ km/h accelerația autoturismului este $a_2=2$ m/s², iar când viteza autoturismului atinge valoarea maximă υ_3, rezultanta forțelor care se opun mișcării devine $R_3=3$ kN. Să se afle:

a. accelerația a_1 a autoturismului când viteza are valoarea υ_1

b. rezultanta R_2 a forțelor care se opun mișcării când viteza autoturismului este υ_2

c. valoarea υ_3 a vitezei maxime a autoturismului

26. Un camion având greutatea G se deplasează pe o șosea cu viteza menținută tot timpul constantă υ_0. Rezistența la înaintare R depinde numai de viteza camionului. Când camionul urcă pe un drum de pantă $p=\sin\alpha$ (unde α este unghiul făcut de drum cu planul orizontal), puterea camionului este $P_1=124$ kW. Când camionul coboară pe același drum, puterea camionului este $P_2=112$ kW. Să se afle:

a. relația dintre rezistența la înaintare R, puterea P_0 și viteza υ_0 în cazul în care drumul este orizontal

b. relația dintre rezistența la înaintare R, puterea P_1, greutatea G, panta p și viteza υ_0 în cazul în care camionul urcă drumul de pantă p

c. relația dintre rezistența la înaintare R, puterea P_2, greutatea G, panta p și viteza υ_0 în cazul în care camionul coboară drumul de pantă p

d. puterea camionului pe drum orizontal

27. La aceeași putere P dezvoltată de un motor, o mașină urcă și coboară o pantă cu unghiul foarte mic, cu vitezele constante $\upsilon_1=10$ m/s și respectiv $\upsilon_2=15$ m/s și se deplasează pe orizontală cu viteza υ_3. Considerând că pe tot parcursul mișcării coeficientul de frecare este același, să se afle:

a. relația dintre puterea mașinii P, masa ei m, viteza υ_1, unghiul pantei α și coeficientul de frecare μ la urcarea pantei

b. relația dintre puterea mașinii P, masa ei m, viteza υ_2, unghiul pantei α și coeficientul de frecare μ la coborârea pantei

c. viteza cu care se mișcă mașina pe orizontală

28. Un camion tractează pe un drum orizontal o remorcă de masă $m=1000$ kg cu viteza constantă $\upsilon=36$ km/h. Forța de tensiune care apare în sistemul de cuplaj are valoarea $T=600$ N. La un moment dat, menținându-și aceeași viteză, camionul începe să urce o pantă înclinată față de orizontală cu unghiul α pentru care $\sin\alpha=0,1$. Să se afle:

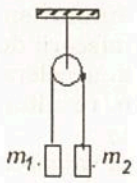
a. puterea necesară pentru a tracta remorca pe drumul orizontal

b. lucrul mecanic efectuat de forța de rezistență care acționează asupra remorcii în timpul deplasării pe o distanță $d=10$ m pe porțiunea orizontală

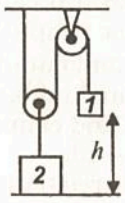
c. puterea necesară pentru a tracta remorca pe pantă considerând că forța de rezistență la înaintare are aceeași valoare ca și la deplasarea pe drumul orizontal

29. Un cal trage o sanie cu masa m=10 kg uniform cu viteza υ=4 m/s pe un plan înclinat cu unghiul α=45°, cu o forță de tracțiune F paralelă cu planul înclinat și coeficientul de frecare la alunecare μ=0,2. Să se afle:
a. puterea activă dezvoltată de cal
b. bilanțul puterilor
c. cât reprezintă puterea consumată pentru învingerea frecărilor la ridicarea saniei din puterea activă?

30. Peste un scripete ideal este trecut un fir inextensibil care susține două corpuri cu mase m_1=2 kg și m_2=4 kg ținute inițial în repaus la aceeași înălțime față de sol H=0,6 m ca în figură. Se lasă liber sistemul. Să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de tensiunea din firul care susține corpul cu masa m_1, când sistemul se deplasează pe distanța h=0,3 m
b. lucrul mecanic total al greutăților corpurilor când corpul mai greu ajunge la sol, dacă se consideră firul suficient de lung, astfel încât corpul 1 să nu ajungă la scripete
c. puterea mecanică totală medie a sistemului de corpuri calculată între momentul plecării și cel ajungerii pe sol a lui m_2



31. Fie sistemul de corpuri din figură cu masele m_2=100 kg și m_1=30 kg aflat inițial în echilibru. Primul corp se află față de sol la înălțimea h=2 m. Se acționează vertical în jos asupra corpului 1 cu o forță F, astfel că sistemul se mișcă uniform. Coborârea uniformă a corpului 1 până la sol se realizează într-un timp t=20 s. Să se afle:
a. forța verticală care acționează asupra corpului 1
b. puterea dezvoltată de forța F
c. viteza cu care coboară corpul 1



3.2. Energia cinetică și potențială*

1. Un sportiv cu masa m_1 aleargă de două ori mai încet decât un alt sportiv a cărui masă este m_2. Să se afle relația dintre masele celor doi sportivi dacă energiile lor cinetice sunt egale.

2. Un corp are la un anumit moment viteza υ_0=20 m/s și în același moment energia cinetică a corpului este E_c=800 J. Să se afle masa corpului.

3. O săgeată cu masa m=40 g este lansată dintr-un arc cu viteza υ_0=20 m/s, pe verticală în sus. Să se afle energia cinetică a săgeții după o secundă de la lansare.

4. Un corp cu masa m=1 kg se mișcă uniform accelerat fără viteză inițială parcurgând în prima secundă distanța d_1=1 m. Să se afle energia cinetică a corpului după două secunde.

5. Un corp cu masa m=500 g este lansat pe o suprafață orizontală cu viteza inițială υ_0=20 m/s. Corpul se mișcă cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,05. Să se afle energia cinetică după t=4 s de la lansare.

6. Dacă un corp cu masa m=100 g cade liber de la înălțimea h=20 m. Să se afle energia potențială gravitațională la o pătrime din distanța față de sol, dacă la sol E_P=0.

7. De la aceeași înălțime se lasă să cadă două corpuri cu masele m_1 și m_2=4m_1. Să se afle raportul energiilor potențiale ale celor două corpuri E_{P2}/E_{P1}.

8. Dintr-un punct se aruncă pe verticală în sus un corp cu masa m=200 g cu o viteză inițială v_0=20 m/s. Să se afle la jumătatea înălțimii maxime valoarea energiei potențiale gravitaționale a corpului, dacă în punctul de aruncare E_P=0.

9. În graficul din figura 1 este reprezentată energia potențială gravitațională a unui corp în funcție de înălțimea la care se află acesta. Să se afle masa corpului.

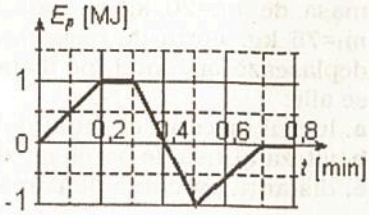
10. Un camion cu masa m=10 t se deplasează cu viteza constantă v_0=45 km/h pe un drum dintr-o regiune deluroasă. În graficul alăturat este reprezentată energia potențială E_p a sistemului format din camion și Pământ, în funcție de durata mișcării în intervalul de timp [0; 0,8]min. Să se afle:

a. intervalele de timp în care drumul este orizontal

b. diferența de nivel dintre punctul din care a plecat camionul și punctul din care acesta începe să coboare

c. reprezentarea grafică a energiei potențiale E_p a camionului, în funcție de distanța parcursă d

d. variația energiei potențiale a camionului din momentul plecării și până în momentul în care se află la 375 m de punctul de pornire



11*. Un resort este comprimat cu x=5 cm fiind menținut în această stare de o forță F=20 N. Să se afle energia potențială a sistemului corp-resort.

12*. În graficul din figura 2 este reprezentată energia potențială elastică în funcție de pătratul deformației. Să se afle ce reprezintă panta graficului din figură.

Fig..1

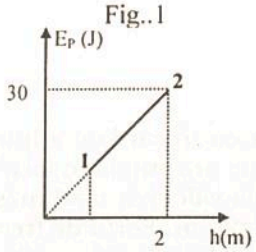


Fig.2

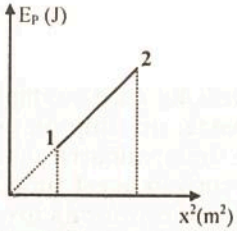
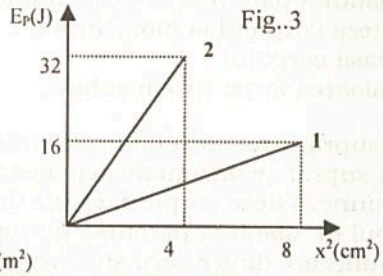


Fig..3



13*. Două resorturi cu constantele elastice k_1=40 N/m și, respectiv, k_2=80 N/m legate în serie susțin un corp. Să se afle raportul energiilor potențiale de deformare ale resorturilor E_{P1}/E_{P2}.

14*. Două resorturi cu aceeași lungime inițială se leagă în paralel și sunt alungite de o forță F. Știind că cele două constante elastice ale celor două resorturi sunt k_1=20 N/m și k_2=60 N/m să se afle raportul energiilor potențiale elastice E_{P1}/E_{P2}.

15*. În graficul din figura 3 este reprezentată energia potențială de deformare a unui resort în funcție de x^2, unde x reprezintă deformația resortului. Să se afle:

a. constantele elastice ale resorturilor

b. alungirea resortul 2, dacă resorturile se leagă în serie și se alungesc cu x=20 cm

3.3. Teorema de variaţie a energiei cinetice

1. O maşină cu masa m=500 kg se deplasează pe un drum orizontal cu viteza v=20 m/s. După începerea frânării în mod uniform, maşina se opreşte în timpul Δt=20 s. Să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de forţa de frânare până la oprirea maşinii
b. forţa de frânare
c. distanţa parcursă de maşină până la oprire

2. Un pescar împinge o barcă aflată iniţial în repaus cu o forţă orizontală de valoare F=180 N. În barcă se află un prieten cu masa de m_1=90 kg, fetiţa sa cu masa de m_2=20 kg şi soţia cu masa de m_3=65 kg. Masa bărcii goale este de m_4=75 kg. Forţa de rezistenţă întâmpinată de barcă este de F_r=80 N. Barca se deplasează orizontal, pe distanţa d=1 m, după care acţiunea forţei încetează. Să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de pescar pe distanţa d
b. viteza atinsă de barcă imediat după încetarea acţiunii forţei
c. distanţa parcursă de barcă până la oprire, după încetarea acţiunii forţei F

3. Asupra unui corp, aflat iniţial în repaus pe un plan orizontal pe care se poate mişca fără frecare, acţionează pe direcţie orizontală o forţă constantă F=4 N. După un timp Δt=2 s, energia cinetică a corpului are valoarea E_c=8 J. La momentul t=2 s asupra corpului începe să acţioneze o forţă orizontală suplimentară care determină oprirea corpului. Din momentul aplicării forţei şi până la oprire corpul parcurge distanţa D=0,5 m. Să se afle:
a. distanţa parcursă de corp în intervalul de timp Δt
b. viteza corpului la momentul t=2 s
c. masa corpului
d. valoarea forţei suplimentare

4. Asupra unui corp de masă m=2 kg care se deplasează cu frecare de-a lungul unei suprafeţe orizontale acţionează, un timp Δt, pe direcţie orizontală, o forţă de tracţiune. Viteza corpului creşte de la valoarea v_1=2 m/s la valoarea v_2=6 m/s în timpul Δt, distanţa parcursă de corp în acest timp fiind d=20 m. Forţa de frecare la alunecare dintre corp şi suprafaţa orizontală are valoarea F_f=2 N. Să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat forţa de tracţiune în timpul Δt
b. puterea medie dezvoltată de forţa de tracţiune şi intervalul de timp Δt
c. coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi suprafaţa orizontală

5. Un autoturism având masa m=800 kg se deplasează cu viteza constantă v=54 km/h pe o şosea orizontală, dezvoltând o putere P=15 kW. La un moment dat motorul se opreşte şi autoturismul îşi continuă deplasarea cu motorul oprit, fără a frâna. Considerând că forţele de rezistenţă la înaintare sunt constante să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de forţele de rezistenţă la înaintare din momentul opririi motorului până la oprirea autoturismului
b. distanţa parcursă din momentul opririi motorului până la oprirea autoturismului
c. intervalul de timp în care autoturismul se opreşte

6. Un tren de masă totală m=200 t se deplasează orizontal cu viteză constantă. Puterea mecanică dezvoltată de locomotivă este P=400 kW iar forţele de

rezistență care acționează asupra trenului reprezintă o fracțiune f=0,01 din greutatea acestuia. Să se afle:

a. lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență la deplasarea trenului pe distanța d=1200 m

b. viteza trenului și lucrul mecanic efectuat de locomotivă într-un interval de timp Δt=2 min

c. distanța parcursă de vagon din momentul desprinderii până în momentul opririi, dacă la un moment dat este decuplat ultimul vagon și se consideră că forțele de rezistență care acționează asupra acestuia reprezintă o fracțiune f=0,01 din greutatea acestuia.

7. Un automobil cu masa m=1000 kg pornește din repaus și se deplasează pe o șosea orizontală. Asupra automobilului acționează o forță de rezistență la înaintare direct proporțională cu greutatea acestuia. Coeficientul de proporționalitate are valoarea f=0,1. Puterea dezvoltată de motorul automobilului este constantă, având valoarea P=35 kW. Să se afle:

a. forța de tracțiune exercitată asupra automobilului, în momentul în care viteza sa este v=7m/s·

b. accelerația imprimată automobilului în condițiile de la punctul anterior

c. viteza maximă pe care o poate atinge automobilul

d. variația energiei cinetice a automobilului, de la plecare până la atingerea vitezei maxime

8. Un tren cu masa M=210 t se deplasează uniform, pe o linie orizontală, cu viteza v=108 km/h, sub acțiunea unei forțe de tracțiune constante F=42 kN. La un moment dat, ultimul vagon de masă m=10t este decuplat, trenul continuându-și mișcarea sub acțiunea aceleiași forțe de tracțiune. Se consideră că toate forțele de rezistență sunt direct proporționale cu greutățile: $Fr=k\ G$. Să se afle:

a. puterea mecanică dezvoltată de tren în timpul mișcării sale uniforme

b. energia cinetică a trenului înainte de decuplarea vagonului

c. accelerația cu care se va mișca trenul după decuplarea ultimului vagon

d. distanța parcursă de vagonul desprins, din momentul desprinderii până în momentul opririi acestuia

9. O camionetă de masă m=1,6 t se deplasează pe un drum orizontal, astfel încât viteza acesteia crește liniar în timp. La momentul t_1 viteza sa este v_1=18 km/h, iar la un moment ulterior t_2, devine v_2=20 m/s. În intervalul de timp $\Delta t=t_2-t_1$, forța de tracțiune produsă de motorul camionetei efectuează un lucru mecanic L=375 kJ, dezvoltând o putere medie P=75 kW. Să se afle:

a. lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență în intervalul de timp Δt

b. forța de tracțiune dezvoltată de motor și forța de rezistență

c. distanța parcursă de camionetă în intervalul de timp Δt

10. Un tren electric cu masa m=100 t care se deplasează cu viteza v_0=108 km/h se apropie de o stație în care urmează să se oprească. Mecanicul mai întâi oprește alimentarea cu energia electrică la distanța d=900 m de stație, apoi este pus în funcțiune sistemul de frânare. Rezistența la înaintare opusă de-a lungul drumului este permanent f_1=1/100 din greutatea trenului, iar forța de frânare este f_2=1/8 din greutatea trenului. Să se afle:

a. distanța față de stație de la care începe frânarea

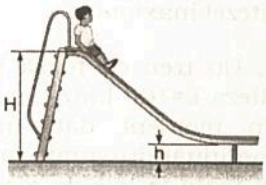
b. lucrul mecanic efectuat de forța de frânare din momentul punerii în acțiune a sistemului de frânâre până la oprire

c. viteza trenului după ce acesta parcurge distanța d_1=800 m după oprirea alimentării cu energia electrică

11. Un corp având masa m=20 g este lansat pe suprafața orizontală a gheții cu viteza inițială v_0=7,2 km/h. Sub acțiunea forței de frecare, el se oprește după un interval de timp t_{op}=10 s. Să se afle:
a. energia cinetică a corpului în momentul lansării
b. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare până la oprirea corpului
c. distanța parcursă de corp până la oprire
d. modulul forței de frecare

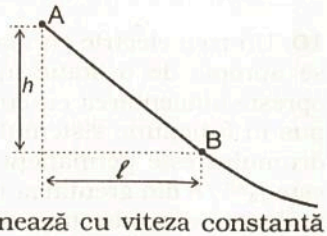
12. Un corp având masa m=2 kg este lansat pe o suprafață orizontală și sub acțiunea forței de frecare, el se oprește după un interval de timp t_{op}=10 s. Știind că lucrul mecanic al forței de frecare în procesul de oprire este L=−400 J, să se afle:
a. viteza inițială a corpului
b. coeficientul de frecare dintre corp și suprafața orizontală
c. spațiul de oprire al corpului
d. energia cinetică a corpului după t_1=3 s din momentul lansării

13. Un copil cu masa m=36 kg, aflat inițial la baza scărilor unui tobogan, urcă până în vârful acestuia, la înălțimea H=2,5 m, în timpul Δt=10 s. După alunecare, copilul iese de pe tobogan cu viteza v=3 m/s, la înălțimea h=0,5 m față de sol, ca în figura alăturată. Considerând că alunecarea a avut loc fără viteză inițială, să se afle:



a. energia mecanică a copilului la ieșirea de pe tobogan, dacă se consideră la baza scărilor valoarea nulă pentru energia potențială
b. lucrul mecanic efectuat de copil pentru a urca până în vârful toboganului cu viteză constantă
c. puterea medie dezvoltată de copil în timpul urcării toboganului
d. lucrul mecanic efectuat de forțele de frecare ce acționează asupra copilului în timpul alunecării pe tobogan

14. Porțiunea superioară a unei trambuline pentru sărituri cu schiurile poate fi considerată un plan înclinat cu înălțimea h=47 m, a cărui proiecție în plan orizontal are lungimea ℓ=50 m, ca în figura alăturată. Un schior cu masa m=80 kg pornește din repaus din vârful A al trambulinei și trece prin punctul B aflat la baza porțiunii de trambulină considerate cu viteza v=108 km/h. Energia potențială gravitațională este considerată nulă în punctul B. Să se afle:
a. energia mecanică a schiorului aflat în vârful A al trambulinei
b. energia cinetică a schiorului în momentul trecerii prin punctul B
c. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare în timpul coborârii porțiunii de trambulină considerate
d. coeficientul de frecare la alunecare între schiuri și zăpadă



15. Un avion de masă m=2,5 t, cu motorul oprit, planează cu viteza constantă v=144 km/h într-o atmosferă liniștită și coboară de la înălțimea h_1=2 km până la înălțimea h_2=1 km, între două puncte A și B aflate la distanța d=AB=10 km unul de altul. Să se afle:

a. lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență în timpul planării
b. lucrul mecanic dezvoltat de motor la întoarcerea avionului pe același drum cu aceeași viteză, dacă lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență are valoarea de la punctul **a.**
c. puterea dezvoltată de motor în situația descrisă la punctul **b.**

16. O jucărie-elicopter telecomandată, cu masa m=50 g, poate dezvolta, datorită motorașului electric, o forță de tracțiune verticală constantă F=1 N. La înălțimea H=9 m față de nivelul solului se suspendă de aceasta o altă jucărie cu masa M=150 g, iar sistemul nou format va începe să zboare vertical, pornind din repaus. După un astfel de zbor pe distanța h=4 m, jucăria-elicopter scapă obiectul suspendat. Să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de greutatea jucăriei suspendate pe toată durata mișcării ei până la căderea pe sol
b. viteza pe care o are elicopterul în momentul în care scapă jucăria suspendată
c. energia potențială minimă a elicopterului, dacă se consideră la nivelul solului energia potențială nulă

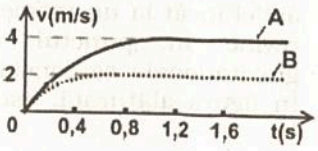
17. Un glonț cu masa m=50 g se trage dintr-o armă cu viteza inițială υ_0=500 m/s. Glonțul străbate un bloc cubic de lemn cu lungimea ℓ=2 m și întâmpină o forță de frecare F_f=1124,5 N. Să se afle viteza cu care iese glonțul:
a. dacă glonțul este tras pe verticală de jos în sus
b. dacă glonțul este tras pe verticală de sus în jos
c. dacă glonțul este tras pe orizontală

18. Asupra unei bile de masă m=400 g, aflată inițial în repaus la înălțimea h_0=1 m deasupra solului, acționează o forță constantă F orientată vertical în sus. Acțiunea forței încetează în momentul în care bila atinge viteza υ=4 m/s. Știind că forța F efectuează un lucru mecanic L=16 J, să se afle:
a. înălțimea la care se află bila față de sol în momentul în care încetează acțiunea forței F
b. înălțimea maximă față de sol la care ajunge bila
c. viteza cu care trece bila în cădere prin punctul în care s-a aflat inițial

19. Două corpuri cu masele m_1=2 kg, respectiv m_2=4 kg se află la momentul inițial deasupra solului la înălțimile h_1=10 m, respectiv h_2=5 m. Corpurile sunt lăsate să cadă simultan fără viteză inițială. Presupunând că frecarea cu aerul este neglijabilă, să se afle:
a. variația energiei potențiale a corpului 2 la căderea corpului de la înălțimea h_2 până la atingerea solului
b. raportul υ_1/υ_2 al vitezelor cu care cele două corpuri ating solul
c. raportul $\Delta t_1/\Delta t_2$ al intervalelor de timp după care cele două corpuri ating solul

20. Dintr-un turn cu înălțimea H=100 m este lăsat să cadă vertical, fără viteză inițială, un corp cu masa m=3 kg. Energia mecanică totală pe care o are corpul imediat înaintea impactului cu solul reprezintă o fracțiune f=90% din energia mecanică inițială. Să se afle:
a. lucrul mecanic al forței de rezistență la înaintare în timpul căderii corpului
b. viteza corpului la atingerea solului
c. forța medie de rezistență la înaintare întâmpinată de corp în timpul căderii

21. Într-un experiment s-a studiat căderea a două corpuri în câmpul gravitațional terestru. Cele două corpuri au aceeași formă și aceleași dimensiuni, dar au



mase diferite. Masa corpului A este m_A=50 g. Pe baza datelor obținute de la un senzor de mișcare a fost trasat graficul alăturat, în care este redată dependența de timp a vitezei corpului A, respectiv B. Această dependență a vitezei de timp poate fi explicată dacă admitem că forța de rezistență la înaintare este direct proporțională cu viteza $F_r=kv$. Valoarea coeficientului de proporționalitate k depinde doar de forma și dimensiunile corpului. Să se afle:

a. viteza maximă v_{max} atinsă de corpul A în timpul căderii

b. valoarea coeficientului de proporționalitate k

c. masa corpului B

d. lucrul mecanic efectuat de forța de rezistență la înaintare asupra corpului A în timpul t=1,4 s în care corpul a căzut, pornind din repaus, pe distanța d=4 m

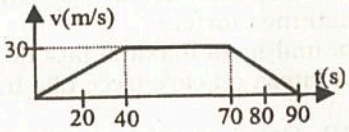
22. Într-un sport olimpic de iarnă un bloc de piatră cu masa m=10 kg este lansat, pe suprafața gheții, cu scopul parcurgerii unei anumite distanțe până la o țintă. Suprafața gheții este plană și orizontală. Jucătorii perie suprafața gheții din fața blocului de piatră în scopul micșorării frecărilor. Un astfel de bloc, de dimensiuni neglijabile, este lansat către o țintă situată la distanța d=20 m, de locul lansării. Prin perierea suprafeței gheții coeficientul de frecare la alunecare dintre blocul de piatră și suprafața gheții, scade liniar de la valoarea μ_1=0,06 în locul de lansare la valoarea μ_2=0,02 lângă țintă. Să se afle:

a. lucrul mecanic al forței de frecare la alunecare, dintre blocul de piatră și suprafața gheții, pe distanța d

b. viteza cu care trebuie lansat blocul de piatră pentru a se opri la țintă

c. viteza pe care o are blocul la distanța d_1=5 m de punctul de lansare, dacă viteza de lansare este cea de la punctul precedent

23. Un corp cu masa m=10 kg se mișcă rectiliniu sub acțiunea unei forțe aplicată pe direcția de mișcare. Viteza sa la diferite momente de timp este redată în graficul din figura alăturată. Să se afle:

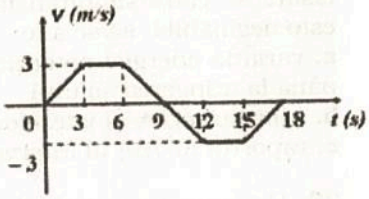


a. lucrul mecanic total efectuat asupra corpului pe durata primelor 40 s

b. forța rezultantă medie care se exercită asupra corpului în primele 40 s

c. lucrul mecanic total efectuat asupra corpului pe durata celor 90 s

24. Un corp cu masa m=100 g pornește din originea axei Ox și descrie o mișcare rectilinie, astfel că viteza acestuia depinde de timp ca în figură. Să se afle:

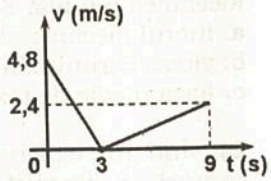


a. reprezentarea grafică a accelerației corpului pe durata întregii mișcări

b. distanța parcursă de corp pe durata întregii mișcări

c. lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă ce acționează asupra corpului pe direcția axei Ox în intervalul de timp $t \in (3, 9)$s

25. De la baza unui plan înclinat suficient de lung, se lansează în lungul planului un corp cu masa m=1 kg. Mișcarea corpului pe planul înclinat se face cu frecare, astfel încât la un moment dat corpul se oprește, după care revine în punctul de lansare. Energia potențială gravitațională se consideră nulă la baza planului înclinat.



În figura alăturată, este reprezentată grafic dependența de timp a modulului

vitezei corpului de la începutul mişcării sale şi până în momentul în care corpul revine în punctul de lansare. Să se afle:

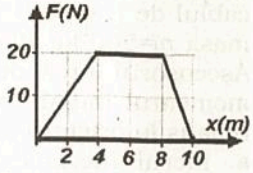
a. energia cinetică iniţială a corpului

b. lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare în intervalul de timp dintre momentele t_0=0 s şi t_1=9 s

c. modulul forţei de frecare la alunecare pe planul înclinat

d. energia mecanică la momentul t=3 s

26. Un corp cu masa m=2 kg se află în repaus în originea axei Ox, orientate în lungul unui plan orizontal fără frecări. Asupra punctului material acţionează, pe direcţia axei Ox, o forţă orizontală variabilă conform graficului alăturat. Să se afle:



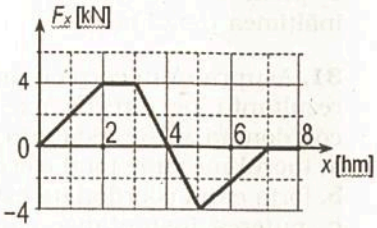
a. lucrul mecanic efectuat de forţa F pe primii 10 m

b. forţa medie pe primii 10 m

c. viteza corpului în punctul de coordonată x_1=4 m

d. intervalul de timp necesar deplasării corpului din punctul x_1=4 m în punctul x_2=8 m

27. Un automobil cu masa m=1000 kg porneşte din repaus şi se deplasează rectiliniu pe o autostradă orizontală. În graficul alăturat este reprezentată proiecţia forţei rezultante care se exercită asupra automobilului pe direcţia mişcării, F_x în funcţie de coordonata x. Să se afle:



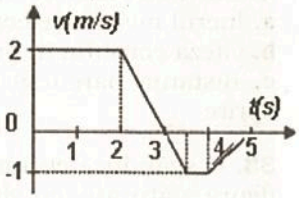
a. reprezentarea grafică a proiecţiei accelerației a_x pe direcţia mişcării automobilului, în funcţie de coordonata x, pentru primii 200 m

b. coordonata x_m a automobilului în momentul în care viteza sa a atins valoarea maximă şi justificaţi răspunsul

c. lucrul mecanic efectuat de forţa rezultantă în timpul în care automobilul parcurge primii 300 m

d. valoarea v_1 a vitezei automobilului în momentul în care acesta se află în punctul de coordonată x_1=300 m

28. În figură este reprezentată variaţia dependenţei de timp a vitezei unui corp cu masa m=10 kg. Să se afle:

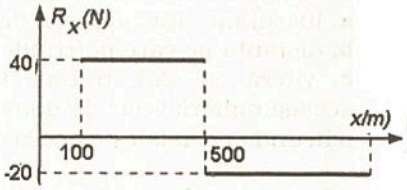


a. viteza medie în intervalul $t \in (0,5)$s

b. reprezentarea grafică a accelerației în funcţie de timp în intervalul $t \in (0,6)$s

c. lucrul mecanic al rezultantei forţelor ce au acţionat, pe direcţia de mişcare, asupra corpului între momentele de timp t_1=2 s şi t_2=3,5 s

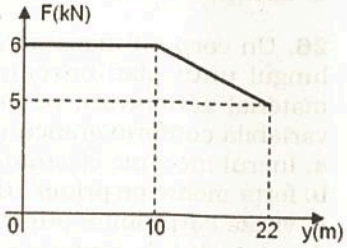
29. Un corp cu masa m=5 kg, aflat iniţial în repaus, începe să alunece cu frecare de-a lungul axei Ox, din punctul de coordonată x_0=100 m, sub acţiunea unei forţe de tracţiune orientate în lungul acestei axe. Când corpul ajunge în punctul de coordonată x_1=500 m, forţa de tracţiune îşi încetează acţiunea. Forţa de frecare este constantă în tot cursul mişcării. În figura alăturată este reprezentată dependenţa de coordonata x a rezultantei R_x a forţelor ce acţionează pe direcţia mişcării. Să se afle:



a. forţa de tracţiune dezvoltată de motor

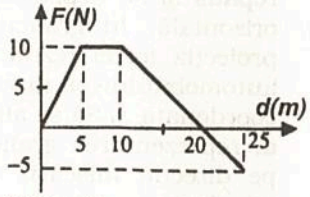
b. viteza v_1 a corpului în momentul încetării acțiunii forței de tracțiune
c. puterea medie dezvoltată de motor
d. durata acțiunii forței de tracțiune
e. viteza v_2 a corpului în momentul în care acesta se află în punctul de coordonată x_2=850 m

30. În figura alăturată este reprezentată dependența de înălțime a modulului forței cu care acționează cablul de tracțiune asupra cabinei unui ascensor cu masa m=500 kg aflat într-o clădire de înălțime mare. Ascensorul urcă de-a lungul axei verticale Oy. La momentul inițial t_0=0 cabina ascensorului se afla în repaus în originea axei Oy. Să se afle:



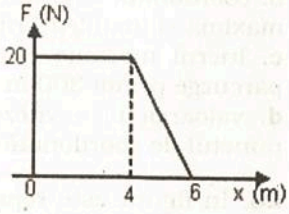
a. lucrul mecanic cheltuit de motorul care ridică ascensorul până când acesta atinge înălțimea y_1=10 m
b. viteza cabinei ascensorului când ascensorul se află la y_1=10 m
c. puterea instantanee a motorului în momentul în care ascensorul se află la înălțimea y_2=22 m

31. Asupra unui corp cu masa m=2 kg acționează o forță rezultantă pe direcția axei Ox, a cărei dependență de coordonata x este redată în graficul alăturat. Să se afle:



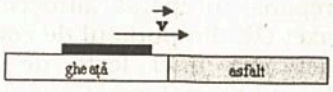
a. lucrul mecanic total efectuat de forță când $x \in$ (0,25m)
b. forța când coordonata este x_1=12 m
c. puterea instantanee când coordonata este x_1=12 m, dacă în punctul de coordonată x_0=0, corpul are viteza v_0=2,645 m/s

32. Un corp de masă m=5 kg pornește din repaus și se deplasează cu frecare, pe o suprafață orizontală, sub acțiunea unei forțe de tracțiune orizontale F. Dependența valorii forței F de coordonata corpului este reprezentată în graficul alăturat. Coeficientul de frecare la alunecare fiind μ=0,2, să se afle:

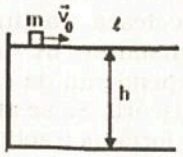


a. lucrul mecanic efectuat de forța F pe distanța de 6m
b. viteza corpului în punctul de coordonată x=6 m
c. distanța parcursă de corp din momentul încetării acțiunii forței F până la oprire

33. O scândură cu lungimea ℓ=1 m și masa m=2 kg este lansată pe asfalt, ca în figura alăturată, cu viteza v_0=1 m/s orientată pe lungimea ei, de pe gheață unde frecarea este neglijabilă, astfel că pătrunde parțial pe asfalt, oprindu-se din cauza frecării. Coeficientul de frecare pe asfalt este μ=0,4. Să se afle:
a. lucrul mecanic al forței de frecare la pătrunderea pe asfalt
b. distanța pe care pătrunde scândura pe asfalt
c. viteza cu care trebuie lansată o scândură din același material dar de două ori mai lungă, pentru a pătrunde pe asfalt pe aceeași distanță ca și prima

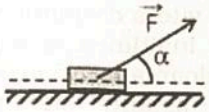


34. Un corp de masă m=4 kg, este așezat la o distanță ℓ=1,1 m de capătul liber al unei platforme orizontale fixe, aflată la înălțimea h=1,2 m față de sol. Corpului i se imprimă o viteza inițială orizontală v_0=6 m/s, orientată către capătul liber al platformei, ca în figura alăturată. Coeficientul de frecare la

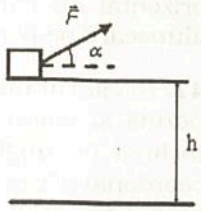


alunecare dintre corp şi platformă este μ=0,5. Să se afle:
a. energia cinetică a corpului în momentul iniţial
b. viteza corpului în momentul în care se află la capătul liber al platformei
c. viteza corpului în momentul în care acesta atinge solul

35. Pe un plan orizontal se află iniţial în repaus un corp cu masa m=2 kg supus acţiunii unei forţe F=15 N, care acţionează ca în figură sub un unghi α=30°. Mişcarea se face cu frecare coeficientul de frecare fiind μ=0,2. Să se afle, după parcurgerea distanţei d=2 m:
a. viteza corpului
b. energia cinetică a corpului în condiţiile punctului **a.**
c. puterea medie dezvoltată de forţă în timpul mişcării



36. Asupra unui corp cu masa m=2 kg, care se află iniţial în repaus pe o masă orizontală la înălţimea h=1 m faţă de podea, începe să acţioneze o forţă constantă $F=10\sqrt{2}$ N, care face un unghi α=45° cu direcţia mişcării, ca în figura alăturată. Corpul se deplasează cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,2, iar când ajunge la capătul mesei acţiunea forţei încetează şi corpul cade de la înălţimea h. Pentru a deplasa corpul pe toată lungimea mesei, forţa efectuează lucrul mecanic L=20 J. Să se afle:



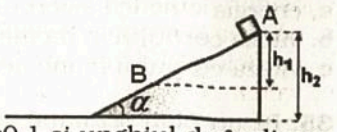
a. distanţa parcursă de corp pe suprafaţa mesei
b. lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare pe durata mişcării
c. puterea medie dezvoltată de forţa F şi intervalul de timp cât se deplasează corpul pe masă
d. energia cinetică a corpului când acesta ajunge la suprafaţa Pământului

37. Un corp este lansat pe un plan înclinat cu unghiul α=30° cu o viteză iniţială v_0. Acest corp urcă cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 1/(3\sqrt{3})$, astfel încât corpul se opreşte după ce parcurge pe plan o lungime ℓ=15 m. Să se afle:
a. viteza iniţială v_0 cu care porneşte corpul de la baza planului înclinat
b. viteza cu care revine corpul la baza planului înclinat
c. distanţa parcursă de corp până la oprire pe un plan orizontal cu care se continuă planul înclinat, dacă se consideră că mişcarea se efectuează pe planul orizontal cu coeficientul de frecare μ'=0,1

38. O sanie cu masa m=4 kg coboară liber pe o pârtie înclinată cu unghiul α=14° ($tg\alpha \approx 0{,}25$) şi îşi continuă apoi drumul pe un plan orizontal până la oprire. Înălţimea pârtiei este h=10 m, iar proiecţia pe orizontală a întregii traiectorii a saniei este d=50 m. Coeficientul de frecare la alunecare are aceeaşi valoare pe tot parcursul mişcării. Să se afle:
a. coeficientul de frecare la alunecare
b. viteza saniei la baza pârtiei
c. puterea medie a forţei de frecare la coborârea saniei pe pârtie

39. O cărămidă cu masa m=2 kg alunecă accelerat pe o scândură înclinată faţă de planul orizontal cu unghiul α=45°. Dacă cărămida este lansată de jos în sus de-a lungul scândurii cu viteza v_0=4 m/s, aceasta urcă cu o accelerţie dublă în modul. Să se afle:
a. coeficientul de frecare la alunecare
b. spaţiul parcurs de cărămidă până la oprirea pe scândură
c. randamentul scândurii înclinate

40. Un corp cu masa m=1 kg, aflat în vârful A al unui plan înclinat alunecă fără viteză inițială spre baza planului. Se cunosc: diferența de nivel dintre punctele A și B, h_1=2 m, coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și suprafața planului înclinat μ=0,1 și unghiul de înclinare a suprafeței planului față de orizontală α=45°. Să se afle:



a. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare pe distanța AB

b. viteza corpului în momentul în care acesta trece prin punctul B

c. înălțimea h_2 a planului înclinat, dacă viteza corpului la baza planului are valoarea v=7,5 m/s

d. distanța totală parcursă de corp de la pornire și până la oprirea sa pe planul orizontal cu care se continuă planul înclinat, dacă coeficientul de frecare la alunecare pe planul orizontal este μ_1=0,25

41. În cadrul unui experiment se determină, cu ajutorul unui senzor de mișcare, poziția și viteza unui corp la diferite momente în timpul coborârii pe un plan înclinat cu unghiul α=30° față de orizontală. Poziția este indicată cu ajutorul coordonatei x măsurată față de punctul din care începe coborârea corpului, de-a lungul planului înclinat. Datele experimentale culese sunt prezentate în tabelul alăturat. Masa corpului este m=0,50 kg, iar coeficientul de frecare la alunecare este μ. Să se afle:

a. dependența energiei cinetice E_C de coordonata la care se găsește corpul, $E_C=f(x)$ folosind teorema variației energiei cinetice

b. graficul $E_C=f(x)$ pentru $x\in[0\text{ m};1\text{ m}]$ folosind rezultatele experimentale

c. coeficientul de frecare la alunecare între corp și planul înclinat

x(m)	0	0,25	0,5	0,75	1
v(m/s)	0	1	1,41	1,73	2

42. Un corp, lansat în sus de la baza unui plan înclinat cu unghiul α=14° ($tg\alpha\approx$0,25) față de orizontală, are în momentul lansării energia cinetică E_{C0}=500J. După ce parcurge o anumită distanță pe planul înclinat, corpul se oprește și apoi revine la baza planului. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și suprafața planului este μ=0,15. Considerând că energia potențială gravitațională a sistemului corp-Pământ este nulă în punctul din care este lansat corpul, să se afle:

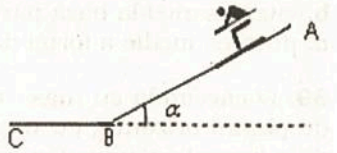
a. lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului de la lansarea corpului până la revenirea acestuia în locul de lansare

b. energia potențială gravitațională a sistemului corp-Pământ în momentul opririi corpului pe planul înclinat

c. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare la alunecare între momentul lansării și momentul opririi corpului pe planul înclinat

d. energia cinetică pe care o are corpul în momentul revenirii sale în poziția din care a fost lansat

43. O pistă de schi, reprezentată în figura alăturată, se compune dintr-o pantă AB continuată cu o porțiune orizontală BC. Un schior, a cărui masă totală este m=70 kg, coboară, fără viteză inițială, din vârful A al pantei. Panta AB are lungimea ℓ=100 m și formează cu orizontala unghiul α ($\sin\alpha$=0,6). Din punctul B, situat la baza pantei, schiorul își continuă mișcarea pe porțiunea orizontală oprindu-se într-un punct C situat la distanța $BC=d$=80 m de baza pantei. Coeficientul de frecare la alunecare are aceeași



valoare pe pantă şi pe porţiunea orizontală. Energia potenţială gravitaţională se consideră nulă la baza pantei. Să se afle:

a. energia mecanică a schiorului în vârful A al pantei

b. coeficientul de frecare la alunecare dintre schior şi pistă

c. valoarea vitezei schiorului la baza pantei

d. puterea dezvoltată de motorul unui teleschi pentru a deplasa schiorul pe pistă, cu viteză constantă, din C în A, într-un interval de timp Δt=4 min, dacă se consideră că forţa de tracţiune care acţionează asupra schiorului este paralelă permanent cu direcţia deplasării schiorului

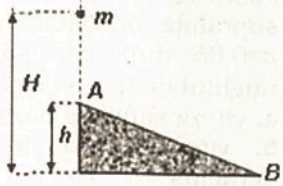
44. De la înălţimea H=10 m cade liber un corp de masă m=2 kg, ca în figura alăturată. La înălţimea h=2 m faţă de sol corpul ciocneşte un plan înclinat de lungime $\ell=AB$=4 m, de-a lungul căruia alunecă, fără să se desprindă de acesta. În urma ciocnirii, corpul pierde f=75% din energia cinetică pe care o avea înainte de ciocnire. Forţa de frecare la alunecarea pe planul înclinat este F_f=4 N. Se consideră nulă energia potenţială la baza planului. Să se afle:

a. energia cinetică a corpului imediat înainte de ciocnirea cu planul înclinat

b. energia mecanică totală a corpului la înălţimea h, imediat după ciocnirea acestuia cu planul înclinat

c. viteza corpului în punctul B

d. coeficientul de frecare



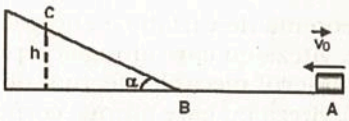
45. Un corp de masă m=5 kg este lansat cu viteza iniţială v_0=10 m/s din punctul A, pe o suprafaţă orizontală, ca în figura alăturată. După ce parcurge distanţa $AB=d$=5 m pe planul orizontal, corpul intră pe un plan înclinat care face unghiul $\alpha=30^0$ cu orizontala şi urcă pe acesta până în punctul C, unde se opreşte. Atât pe planul orizontal cât şi pe cel înclinat mişcarea are loc cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ_1=0,5 pe planul orizontal şi $\mu_2=1/\sqrt{3}$ pe planul înclinat. Să se afle:

a. lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare pe distanţa AB

b. energia cinetică în punctul B

c. înălţimea maximă la care ajunge corpul pe planul înclinat

d. randamentul planului înclinat



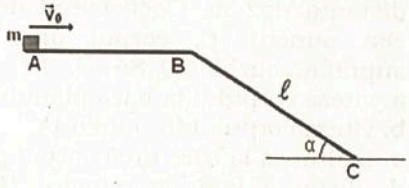
46. Pe o suprafaţă orizontală AB se lansează din punctul A, cu viteza iniţială v_0=20 m/s, un corp cu masa m=2 kg (vezi figura). Corpul ajunge în punctul B cu o viteză egală cu jumătate din valoarea vitezei iniţiale, după care începe să coboare pe o pantă de lungime $\ell=BC$=30 m, care formează un unghi α ($\sin\alpha$=0,6) cu orizontala. Corpul ajunge la baza pantei cu viteza v_0, egală cu viteza iniţială. Pe toată distanţa mişcarea se face cu frecare, coeficientul de frecare având aceeaşi valoare peste tot. Să se afle:

a. lucrul mecanic efectuat de forţele de frecare pe toată durata deplasării, între punctul de lansare şi baza pantei

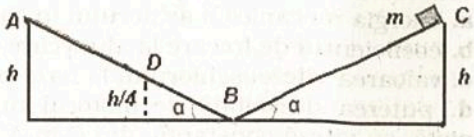
b. coeficientul de frecare

c. lungimea porţiunii AB

d. variaţia energiei mecanice totale a corpului între punctele B şi C. Justificaţi valoarea.



47. Un corp cu masa m=2 kg este lansat din punctul C de-a lungul planului în jos cu o viteză inițială de la înălțimea h=4 m pe un plan înclinat cu unghiul α=30° ca în figură. Știind că deplasarea corpului se realizează cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=\sqrt{3}/10$ peste tot iar planele sunt identice, să se afle:

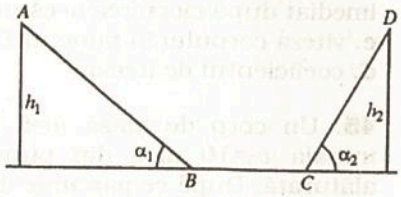


a. lucrul mecanic al forțelor de frecare la deplasarea corpului din C în A

b. viteza minimă a corpului în punctul C astfel încât acesta să ajungă la aceeași înălțime pe al doilea plan înclinat

c. variația energiei mecanice a corpului între punctele A și D, dacă punctul D este situat la înălțimea $h/4$

48. O sanie alunecă liber din vârful unui derdeluș de înălțime h_1=7,2 m. Mișcarea pe primul derdeluș se face fără frecare. Sania parcurge apoi o suprafață orizontală cu lungimea ℓ=23 m pe care se deplasează cu frecare, μ=0,05, după care sania urcă până la înălțime h_2=5 m pe un alt derdeluș cu unghiul α=45°. Să se afle:



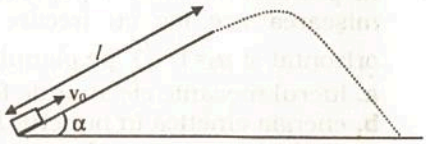
a. viteza saniei la baza primului derdeluș

b. viteza saniei la baza celui de-al doilea derdeluș

c. coeficientul de frecare pe al doilea derdeluș

d. viteza cu care revine la baza primului derdeluș

49. Un corp cu masa m=2 kg este aruncat de la sol pe un plan înclinat cu unghiul α=30° și lungimea ℓ=3 m, cu viteza inițială v_0=10 m/s. Mișcarea se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=1/(5\sqrt{3})$. Să se afle, utilizând teorema de variație a energiei cinetice:



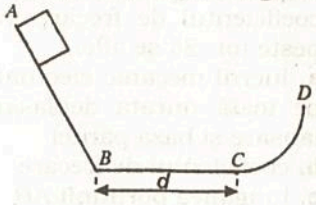
a. viteza cu care ajunge corpul în vârful planului înclinat

b. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare pe planul înclinat

c. viteza cu care ajunge corpul în planul orizontal al punctului de lansare

d. lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului de la lansare până la atingerea solului

50. Un corp cu masa m=2 kg coboară fără frecare pe un plan înclinat cu înălțimea h=1 m ca în figura alăturată. Ajugând la baza planului, corpul se deplasează cu frecare pe o suprafață plană până într-un punct C parcurgând distanța d=2 m. Coeficientul de frecare este μ=0,3. Din punctul C, corpul urcă fără frecare pe o suprafață curbă CD. Să se afle:



a. viteza corpului la baza planului înclinat

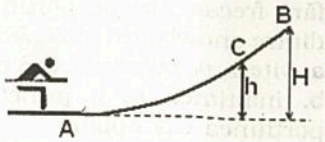
b. viteza corpului în punctul C

c. înălțimea la care urcă corpul pe suprafața CD

d. distanța față de punctul B la care se oprește corpul pe porțiunea BC

51. La o competiție de schi, sportivul aflat în poziția A trebuie să aibă o viteză minimă pentru a putea ajunge până în poziția B (vezi figura alăturată) situată la

înălțimea H=3,2 m față de porțiunea orizontală a pistei. Masa sistemului sportiv-schiuri este M=90 kg. Să se afle:

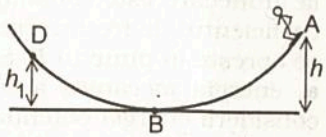


a. viteza minimă pe care trebuie să o aibă sportivul în punctul A pentru a ajunge în B, dacă s-ar neglija forțele de rezistență la înaintare

b. înălțimea h la care se află punctul C în care sportivul se oprește, dacă viteza sportivului în punctul A este v_A=8 m/s iar lucrul mecanic efectuat de rezultanta forțelor de rezistență întâmpinate de sportiv în deplasarea sa reprezintă o fracțiune f=10% din lucrul mecanic al greutății sportiv-schiuri la deplasarea din A în C

c. lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență până când sportivul ajunge la înălțimea h_D=2 m, unde viteza sa devine v_D=4 m/s dacă sportivul are în punctul A viteza v_A=8 m/s

52. În figura alăturată este reprezentată o pistă de skateboard pe care se află un sportiv având masa m=80 kg. Pornind din repaus din punctul A situat la înălțimea h=2 m față de baza pistei, sportivul trece prin punctul B al pistei cu viteza $v \approx 5{,}66$ m/s și se oprește prima dată în punctul D situat la înălțimea h_1=1,5 m față de baza pistei. Să se afle:



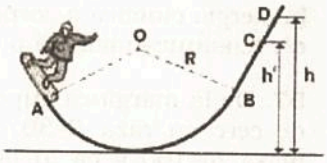
a. lucrul mecanic efectuat de greutate din punctul A până în punctul D

b. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare pe toată durata mișcării din punctul A până în punctul D

c. viteza cu care trebuie lansat sportivul în punctul A pentru a ajunge la aceeași înălțime h pe porțiunea BD dacă forța de frecare pe porțiunea AB este egală cu cea pe porțiunea BC, C fiind punctul unde se oprește corpul

d. puterea medie a forței de greutate de la punctul A la punctul B, dacă sportivul coboară între cele două puncte în intervalul de timp Δt=0,5 s

53. Pe o pistă de snowboard se află un sportiv cu masa M=70 kg care are o placă cu masa m=5 kg. În partea inferioară arcul AB este egal cu 1/3 dintr-un cerc cu raza R=4 m. Să se afle:

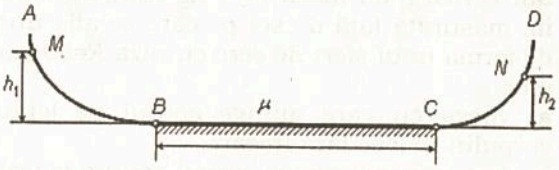


a. viteza minimă pe care trebuie să o aibă sportivul în punctul A pentru a putea ajunge în punctul D situat la înălțimea h=3 m dacă mișcarea decurge fără frecare

b. viteza minimă pe care trebuie să o aibă sportivul în punctul A pentru a putea ajunge în punctul B aflat la aceeași înălțime, dacă lucrul mecanic al forței de frecare este L_{Ff}=−2400 J

c. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare dintre talpa snowboardului și zăpadă la deplasarea din punctul A până în punctul C, dacă în punctul A sportivul are viteza inițială v_0=8 m/s și se oprește într-un punct C situat la înălțimea h'=2,5 m

54. O pistă de snowboard are forma din figură: două porțiuni curbe AB și CD, separate de o porțiune orizontală BC=d=12 m. Un sportiv cu masa m=70 kg coboară liber pe un snowboard, din punctul M al porțiunii curbe AB a pistei, punctul M aflându-se la înălțimea h_1=2,45 m. Admițând că mișcarea pe cele două porțiuni curbe AB și CD se face



fără frecare, că pe porțiunea orizontală BC coeficientul de frecare la alunecare dintre snowboard și zăpadă este μ=0,1. Să se afle:

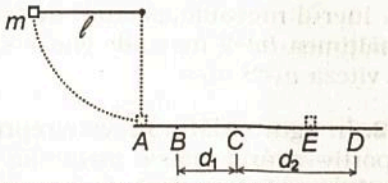
a. viteza v_C cu care trece prima dată sportivul prin punctul C

b. înălțimea h_2 a punctului N în care se oprește prima dată sportivul pe porțiunea CD a pistei

c. lucrul mecanic efectuat de forțele de frecare de la începutul mișcării sportivului și până la oprirea sa definitivă

d. distanța dintre punctul B și punctul în care se va opri definitiv sportivul

55. Un corp cu masa m=80 g este legat de un fir și lungimea ℓ=0,8 m. În poziția inițială firul este întins și orizontal, ca în figura alăturată. Corpul este lăsat liber. Când ajunge în poziție verticală, firul se rupe și corpul își continuă mișcarea pe suprafața orizontală. Pe porțiunea AB mișcarea are loc fără frecare, pe porțiunea $BC=d_1$=1 m coeficientul de frecare la alunecare este constant și are valoarea μ_1=0,3, iar pe porțiunea $CD=d_2$=5 m coeficientul de frecare crește liniar de la valoarea μ=0 în C la μ_2=0,8 în D. Corpul se oprește în punctul E. Să se afle:



a. energia mecanică a corpului în momentul în care este lăsat liber, dacă se consideră energia potențială gravitațională nulă la nivelul suprafeței orizontale

b. viteza corpului când firul ajunge în poziție verticală

c. viteza corpului în punctul C

d. distanța CE parcursă de corp până la oprire

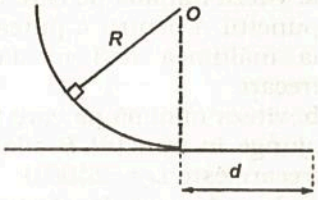
56. Un corp cu masa m=200 g se prinde de un fir inextensibil de lungime ℓ=40 cm. Se scoate corpul din poziția de echilibru până când firul formează un unghi $\alpha=60^0$ cu verticala și se lasă liber corpul. Să se afle:

a. viteza cu care trece corpul prin poziția verticală

b.energia cinetică a corpului când firul formează un unghi $\beta=30^0$ cu verticala

c*. tensiunea maximă pe care o suportă firul, dacă acesta nu se rupe

57. De la marginea superioară a unui jgheab circular vertical de forma uni sfert de cerc cu raza R=30 cm se lasă liber un corp cu masa m=100 g ca în figură. Pe jgheab mișcarea se face cu frecare iar lucrul mecanic total al acestor forțe de frecare este L_{Ff}=−0,1 J. Mișcarea corpului continuă pe un plan orizontal cu frecare, coeficientul de frecare fiind pe plabul orizontal μ=0,1. Să se afle:

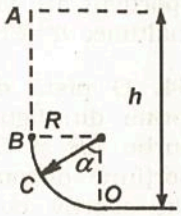


a. viteza corpului la marginea inferioară a jgheabului

b*.forța cu care apasă corpul pe jgheab în poziția inferioară a traiectoriei

c. distanța parcursă de corp pe planul orizontal până la oprire

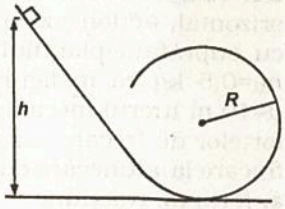
58. Un corp cu masa m=1 kg cade liber de la înălțimea h=1,5 m, măsurată față de sol pe care se află un jgheab circular BO de forma unui sfert de cerc cu raza R=50 cm ca în figură. Să se afle:



a. viteza cu care ajunge corpul pe jgheab, dacă mișcarea corpului se face fără frecare

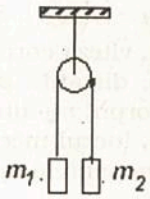
b*. forța cu care apasă corpul asupra jgheabului când poziția corpului formează unghiul $\alpha=60^0$ cu verticala și valoarea maximă a foței de apăsare, dacă mișcarea corpului pe jgheab se face fără frecare

c. lucrul mecanic al forței de frecare pe jgheab, astfel că în punctul O al jgheabului corpul se oprește

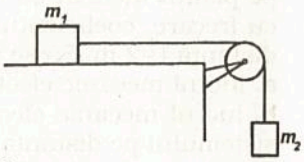


59*. Se lasă liber un corp cu masa m=200 g pe un jgeab ca în figură. Se neglijează efectul forțelor de frecare. Bucla circulară are raza R=50 cm.Să se afle:
a. viteza corpului în punctul cel mai de sus al buclei, dacă acesta nu apasă asupra jgheabului
b. înălțimea minimă de unde trebuie lăsat liber corpul pentru a putea descrie bucla
c. lucrul mecanic al unor forțe de frecare dacă corpul se lasă liber de la înălțimea H=2,5 m, iar în punctul superior corpul nu apasă asupra jgheabului

60. Un corp cu masa m=800 kg se deplasează fără frecare sub acțiunea unei forțe F, orientată pe direcția și în sensul vitezei inițiale υ_0=10 m/s a corpului. Puterea dezvoltată de forța F rămâne constantă, egală cu P=4 kW. Să se afle:
a. timpul t după care viteza corpului crește de n=4 ori
b. valoarea forței F la momentul t
c. reprezentările grafice ale dependențelor forței de viteză, respectiv a vitezei de timp



61. Două corpuri cu masele m_1=400 g și m_2=600 g se află la aceeași înălțime h=1 m față de sol fiind prinse cu un fir inextensibil cu lunginea ℓ=2,5 m trecut peste un scripete ca în figură. Se lasă sistemul de corpuri liber. Să se afle:
a. energia cinetică a sistemului de corpuri, dacă sistemul se mișcă pe distanța h_1=40 cm
b. viteza cu care corpul de masă m_2 lovește solul
c. înălțimea maximă măsurată față de sol la care ajunge corpul cu masa m_1



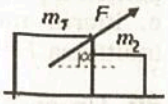
62. Pe o suprafață orizontală se deplasează cu frecare (μ=0,2) un corp cu masa m_1=5 kg. Corpul cu masă m_1 se leagă printr-un fir inextensibil trecut peste un scripete ca în figură de un corp cu masă m_2=3 kg. Cele două corpuri se mișcă împreună pornind din repaus pe distanța d=0,5 m și apoi firul care le leagă se rupe. Să se afle:
a. viteza sistemului înainte de ruperea firului
b. distanța parcursă până la oprire de corpul m_1 măsurată din momentul pornirii, dacă distanța de la el până la scripete este suficient de mare
c. viteza cu care ajunge la sol corpul m_2, dacă în momentul ruperii firului, acesta se află la înălțimea h=1,2 m față de sol

63. Fie sistemul din figura anterioară. Dacă se imprimă o viteză sistemului de corpuri printr-un impuls aplicat corpului cu masa m_2=20 g în jos, acesta coboară pe distanța h_1=25 cm. Dacă imprimăm sistemului aceeași viteză, imprimând un impuls corpului cu masa m_1=100 g spre stânga, corpul cu masa m_2 urcă pe distanța h_2=5 cm. Să se afle:
a. coeficientul de frecare la alunecare
b. raportul lucrurilor mecanice ale forțelor de frecare
c. spațiul până la oprire, dacă viteza inițială imprimată sistemului este υ_0=5m/s iar m_1 se mișcă spre stânga

64. Asupra unui corp cu masa m_1=2 kg aflat inițial în repaus, pe un plan orizontal, acționează o forță constantă F, a cărei direcție formează unghiul $\alpha=30^0$ cu suprafața planului. Corpul este în contact cu un al doilea corp, de masă m_2=0,5 kg ca în figura alăturată. Pentru deplasarea sistemului pe o distanță d=10 m lucrul mecanic efectuat de forța de tracțiune este de L_F=173 J, iar cel al forțelor de frecare este egal cu L_{Ff}=−15J. Ambele corpuri au același coeficient de frecare la alunecare cu planul orizontal. Să se afle:

a. forța de tracțiune

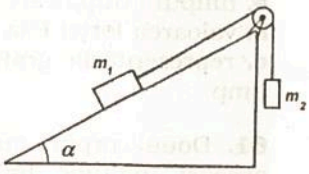
b. coeficientul de frecare la alunecare dintre corpuri și suprafața orizontală



c. puterea medie disipată prin frecare de corpul cu masa m_2 pe distanța d

d. viteza sistemului de corpuri după parcurgerea unei distanțe D=20 m din momentul aplicării forței F

65. Fie sistemul de corpuri cu masele m_1=2 kg și m_2=4 kg din figură. Inițial corpul m_2 se află la înălțimea h=60 cm de sol, iar planul cu unghiul $\alpha=30^0$ se consideră suficient de lung. Corpurile pornesc din repaus, mișcarea corpului m_1 făcându-se cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 1/\left(3\sqrt{3}\right)$. Să se afle:



a. viteza corpurilor când corpul m_2 ajunge la sol

b. distanța parcursă până la oprire de corpul aflat pe planul înclinat după ce corpul m_2 ajunge pe sol măsurată față de punctul de pornire

c. lucrul mecanic total efectuat de forța de frecare ce acționează asupra corpului m_1 până la oprire

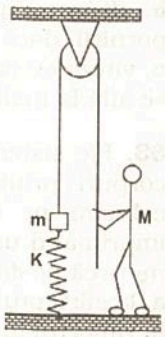
66. Fie sistemul de corpuri cu masele m_1=4 kg și m_2=2 kg aflat inițial în repaus pe planul înclinat cu unghiul $\alpha=60^0$ ca în figura precedentă. Corpul m_1 se mișcă cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,2. Lăsat liber sistemul se mișcă pe o distanță ℓ=2 m. Să se afle:

a. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare

b. lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a corpului m_2 în timpul mișcării sistemului pe distanța ℓ

c. viteza corpurilor după parcurgerea distanței ℓ

67. Un om cu masa M=80 kg menține în repaus o ladă cu masa m=20 kg prin intermediul unui fir ideal trecut peste un scripete fix, ca în figură. Între ladă și podeaua pe care stă omul este legat un resort nedeformat având constanta de elasticitate k=200 N/m. Omul trage de sfoară în jos cu scopul de a ridica lada cât mai sus. Să se afle:



a. variația energiei potențiale gravitaționale a sistemului ladă-Pământ când aceasta este ridicată pe verticală pe o distanță h=0,5 m

b. lucrul mecanic efectuat de forța elastică la alungirea resortului cu h

c. lucrul mecanic efectuat de om pentru a ridica lada legată de resort, cu viteză constantă, pe distanța h=0,5 m

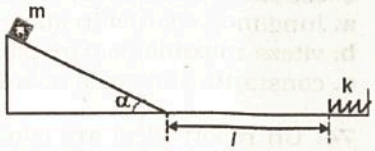
d. deformarea maximă a resortului considerând că lada este ridicată cu viteză constantă foarte mică, omul nu se desprinde de sol și scripetele se află suficient de sus, iar deformațiile se consideră elastice. Interpretați rezultatul practic.

68. Un corp de masă m=1 kg, aflat inițial în repaus, alunecă fără frecare din vârful unui plan înclinat de unghi α=30° și lungime d=10 m. Mișcarea se continuă cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare fiind μ=0,25. După ce corpul parcurge distanța ℓ=10 m, lovește un resort de constantă de elasticitate k=5000 N/m pe care îl comprimă și se oprește. Să se afle:

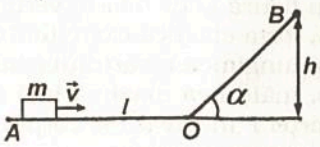
a. energia cinetică a corpului la baza planului înclinat

b. viteza corpului imediat înainte ca acesta să atingă resortul

c. comprimarea maximă a resortului, neglijând frecarea pe timpul comprimării



69. Un resort cu constanta elastică k=4 kN/m comprimat cu x=5 cm se decomprimă și lansează un corp cu masa m=100 g. Corpul își continuă mișcarea pe un plan orizontal cu lungimea ℓ=3 m și apoi pe un plan înclinat cu unghiul α=30°. Mișcarea se face cu frecare după decomprimarea resortului, coeficientul de frecare fiind peste tot μ=0,6. Să se afle:



a. viteza cu care pornește corpul după decomprimarea resortului

b. înălțimea la care urcă corpul pe planul înclinat

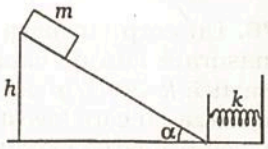
c. lucrul mecanic total al forței de frecare

70. Pe un plan înclinat cu un unghi α=30° față de orizontală alunecă liber un corp cu masa m=200 g, de la o înălțime h=2 m față de sol. Mișcarea corpului pe planul înclinat se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 1/(2\sqrt{3})$ și fără frecare pe planul orizontal La baza planului înclinat se află un resort, inițial nedeformat. cu constanta elastică k=400 N/m. Să se afle:

a. viteza corpului la baza planului înclinat

b. comprimarea maximă a resortului

c. lucrul mecanic al forței elastice



71. Un vagon de masă m=5 t se desprinde de trenul care mergea cu viteza v_0=4 m/s. După un anumit timp el se ciocnește cu tamponul unui opritor al cărui resort se comprimă cu x=10 cm. Cunoscând constanta elastică k=2 MN/m a resortului și coeficientul de frecare între șine și roțile vagonului μ=0,01, să se afle:

a. distanța totală parcursă de vagon de la desprindere până la oprire

b. viteza corpului imediat înaintea ciocnirii resortului

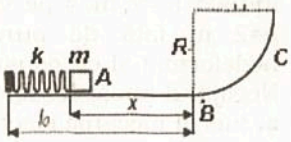
c. viteza imprimată vagonului după decomprimarea resortului

72. Un resort elastic orizontal cu constanta elastică k=100 N/m este comprimat cu x=20 cm de corpul cu masa m=2 kg ca în figura alăturată. Se lasă liber sistemul și se neglijează toate frecările. Suprafața sferică are raza R=20 cm. Să se afle:

a. viteza imprimată corpului când resortul se destinde complet

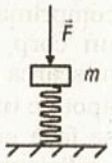
b. unghiul format cu verticala de raza construită în punctul până la care urcă corpul pe suprafața sferică

c. valoarea coeficientului de frecare cu suprafața orizontală, dacă corpul urcă fără frecare numai pe suprafața sferică pe înălțimea h=5 cm



73. De pe podul de peste un râu un adept al sporturilor extreme cade liber de la înălțimea H=30 m, fiind legat de picioare cu o coardă elastică care are celălalt capăt fixat de pod. Sportivul își alege coarda elastică astfel încât viteza lui să fie nulă la înălțimea h_1=2 m deasupra apei și să fie în echilibru după amortizarea oscilațiilor la înălțimea h=10 m. Să se afle:
a. lungimea coardei în stare nedeformată
b. viteza maximă pe care o atinge sportivul
c. constanta elastică a coardei, dacă sportivul are masa m=60 kg

74. Un resort ideal are constanta elastică k=500 N/m și lungimea nedeformată ℓ_0=1 m. Resortul este comprimat de un corp cu masa m=1 kg așezat peste el ca în figură și de o forță verticală F=30 N. Să se afle:
a. forța elastică exercitată în resort
b. lungimea resortului comprimat
c. înălțimea maximă față de sol la care va urca corpul dacă acțiunea forței F încetează și corpul este aruncat din poziția în care resortul nu mai este deformat

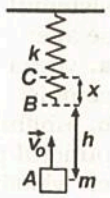


75. O bilă cu masa m=200 g se află pe un resort vertical ca în figura de la problema precedentă. Resortul este comprimat cu x=2 cm. Dacă se apasă resortul cu o forță verticală F comprimarea resortului devine de două ori mai mare decât la început. Să se afle:
a. constanta elastică a resortului
b. valoarea forței F
c. înălțimea la care se va ridica bila după încetarea acțiunii forței F față de poziția cea mai joasă

76. Un corp cu masa m=100 g se lasă să cadă liber de la o înălțime h=40 cm măsurată față de capătul superior al unui resort vertical și ideal cu constanta elastică k=30 N/m așezat pe o masă. Să se afle:
a. viteza cu care lovește corpul resortul
b. comprimarea maximă a resortului
c. lucrul mecanic al forței elastice

77. O bilă cu masa m=100 g este prinsă la un capăt al unui fir elastic cu lungimea nedeformată ℓ_0=40 cm și constanta elastică k=100 N/m. Celălalt capăt al firului este prins într-un punct A. Bila este ridicată în punctul A și i se dă drumul să cadă la momentul t_0=0 s. Să se afle:
a. intervalul de timp după care firul începe să se alungească
b. alungirea maximă atinsă de firul elastic în timpul căderii bilei
c. reprezentarea grafică a dependenței modulului forței elastice din fir de alungirea acestuia până când firul se alungește la maximum

78. Un corp cu masa m=1 kg este aruncat din punctul A cu viteza inițială v_0=7 m/s pe verticală în sus. În punctul B aflat la înălțimea h=2 m față de punctul A, corpul ciocnește un resort elastic, nedeformat și cu constanta elastică k=200 N/m, pe care îl comprimă. Neglijând frecările, să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului pe distanța AB
b. timpul în care corpul a străbătut distanța AB
c. comprimarea maximă a resortului în urma ciocnirii



3.4. Conservarea energiei mecanice

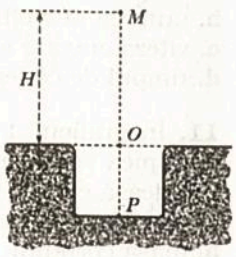
1. Un lanț de lungime ℓ=96 cm și cu masa m=2 kg se află ținut pe o masă orizontală, astfel că o pătrime din lungimea lui atârnă. Să se afle, dacă se lasă liber lanțul și se neglijează frecările lanțului cu masa:
a. viteza cu care părăsește lanțul masa
b. lucrul mecanic necesar urcării porțiunii de lanț care atârnă

2. Un corp cade liber fără frecare de la înălțimea h=100 m. Să se afle:
a. înălțimea la care energia sa cinetică este de patru ori mai mică decât energia potențială a corpului în punctul respectiv
b. viteza corpului când acesta se află la înălțimea h_C=20 m
c. înălțimea la care se ridică din nou corpul, dacă imediat după ciocnirea cu solul, energia cinetică a corpului reprezintă o fracțiune f=40% din valoarea energiei cinetice imediat înainte de ciocnire

3. O minge cu masa m=500 g aruncată vertical în sus de la sol, ajunge la înălțimea maximă h=1 m. Se neglijează efectul forțelor de frecare. Să se afle:
a. viteza inițială a mingii
b. energia mecanică a mingii la 1/4 din înălțimea maximă h, dacă la sol E_P=0
c. cu cât se va ridica mai mult mingea, dacă viteza sa inițială crește de 2 ori?

4. Un copil aruncă pe verticală, de jos în sus cu viteza inițială υ_0=4 m/s o minge cu masa m=100 g de la înălțimea h=5 m. Se neglijează efectul forțelor de frecare. Considerând că energia potențială gravitațională este nulă la nivelul solului, să se afle:
a. înălțimea maximă măsurată față de sol la care se ridică mingea
b. valoarea energiei cinetice a corpului la o pătrime din înălțimea maximă la care se ridică corpul
c. viteza cu care corpul ajunge pe sol

5. O piatră de masă m=200 g, lansată vertical în sus din punctul O aflat la nivelul solului, atinge în punctul M înălțimea maximă H=20 m, iar apoi cade într-o groapă de adâncime h=10 m, ca în figura alăturată. Frecările cu aerul se neglijează. Considerând că la nivelul solului (în punctul O) energia potențială gravitațională este nulă, să se afle:
a. viteza pietrei în momentul lansării
b. viteza pietrei atunci când piatra atinge punctul P
c. lucrul mecanic efectuat de forța de greutate pe toată durata deplasării pietrei



6. Un corp de masă m=0,5 kg este lansat de la nivelul solului, vertical în sus, cu viteza inițială υ_0=8 m/s fără frecare cu aerul. Energia potențială gravitațională este considerată nulă la nivelul solului. Să se afle:
a. înălțimea maximă măsurată față de sol atinsă de corp
b. viteza corpului în momentul în care energia sa cinetică este de trei ori mai mică decât cea potențială în punctul respectiv
c. dacă viteza cu care corpul ar atinge solul la coborâre ar fi mai mare, mai mică, sau egală cu viteza inițială υ_0, dacă frecarea cu aerul nu ar fi neglijabilă și să se justifice răspunsul

7. Un om aruncă unui copil un ghiozdan cu masa m=4 kg de la înălțimea h=7 m pe verticală de sus în jos cu viteza inițială v_0=2 m/s. Neglijând frecarea cu aerul și considerând la sol E_p=0, să se afle:
a. energia mecanică a ghiozdanului
b. viteza cu care ajunge ghiozdanul la sol
c. înălțimea de la care ar trebui să fie lăsat liber ghiozdanul dacă ajunge la sol cu aceeași viteză

8. Din vârful unui turn cu înălțimea h=75 m este aruncat în sus un corp cu masa m=2 kg și cu viteza inițială v_0=10 m/s. Considerând nivelul de referință al sistemului corp-Pământ pe sol și neglijând efectul forțelor de frecare, să se afle:
a. energia potențială corespunzătoare înălțimii maxime
b. înălțimea la care energia cinetică a corpului este de 3 ori mai mare decât energia sa potențială în punctul respectiv
c. viteza cu care corpul va atinge solul

9. Un elicopter zboară deasupra solului la înălțimea h=160 m cu viteza orizontală v_0=20 m/s. Din elicopter se lasă să cadă vertical un pachet cu masa m=1 kg. Se neglijează efectul forțelor de frecare. Să se afle:
a. reprezentarea grafică a dependenței energiei potențiale gravitaționale a pachetului în funcție de înălțimea h, dacă la sol E_p=0
b. viteza cu care lovește pachetul solul
c. viteza cu care lovește pachetul solul, dacă pachetul se aruncă oblic în jos sub unghiul $\alpha=30^0$ față de orizontală

10. În timpul construirii unei clădiri, o macara ridică un colet cu materiale având masa m=1 t de la nivelul solului până la înălțimea h=10 m, cu viteza constantă v=0,2 m/s. Ulterior, din coletul aflat în repaus se desprinde o piesă care cade pe sol de la înălțimea h. Să se afle:
a. timpul în care este ridicat coletul, de pe sol până la înălțimea h
b. puterea dezvoltată de macara pentru ridicarea coletului cu materiale
c. viteza cu care ajunge pe sol piesa desprinsă din colet
d. timpul de cădere a piesei desprinse din colet

11. În graficul 1 este reprezentată energia cinetică a unui corp în funcție de înălțimea corpului lansat pe verticală de la sol de jos în sus. Să se afle, dacă se neglijează efectul forțelor de frecare:
a. energia potențială maximă a corpului
b. masa corpului
c. viteza corpului la înălțimea de h_1=5,2 m

12. În graficul 2 este reprezentată energia potențială a unui corp în funcție de înălțimea corpului lansat pe verticală de la sol de jos în sus. Să se afle, dacă se neglijează efectul forțelor de frecare:
a. valoarea energiei cinetice la sol
b. înălțimea la care energia cinetică este o treime din valoarea energiei potențiale în acel punct
c. viteza corpului la înălțimea de la punctul **b.**

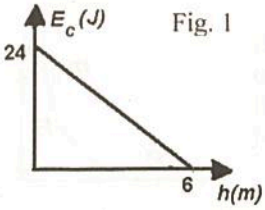


Fig. 1

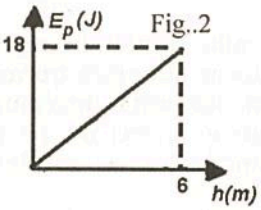


Fig..2

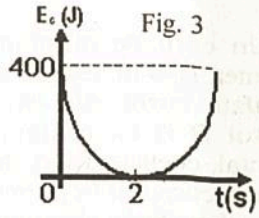


Fig. 3

13. Un corp de masă m este lansat vertical în câmp gravitațional, de jos în sus, de la nivelul solului. Energia sa cinetică variază în timp conform graficului din figura 3. Energia potențială gravitațională se consideră nulă la nivelul solului. Să se afle în lipsa frecărilor cu aerul:

a. viteza inițială a corpului

b. masa corpului

c. înălțimea maximă la care urcă corpul

d. viteza la care energia cinetică a corpului reprezintă o fracțiune f=20% din energia sa potențială în punctul respectiv

14. O bilă cu masa m=400 g este lăsat să cadă fără viteza inițială de la o înălțime h_0=1 m. Neglijăm frecările cu aerul. La ciocnirea cu o suprafață plană de oțel bila pierde f=10% din energia sa mecanică. Să se afle:

a. înălțimea h_1 la care se ridică bila după prima ciocnire

b. viteza υ_2 a bilei imediat după cea de-a doua ciocnire

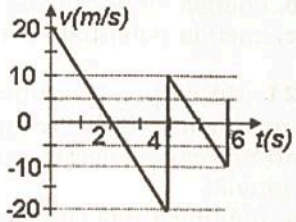
c. energia mecanică după cea de-a treia ciocnire

15. În figura alăturată este reprezentată grafic viteza unui corp cu masa m=200 g aruncat vertical de jos în sus în funcție de timp. La revenire corpul ciocnește o suprafață. Se neglijează frecările cu aerul. Să se afle:

a. înălțimea la care ajunge corpul prima dată

b. fracțiunea din energia mecanică pierdută după prima ciocnire

c. pierderea de energie mecanică după cea de-a de-a doua ciocnire

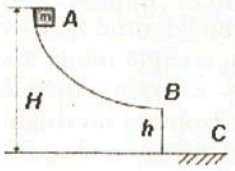


16. Pe un jgheab lucios este lăsat liber de la înălțimea H=8 m un corp cu masa m=2 kg ca în figură. În punctul cel mai coborât al jgheabului corpul părășește jgheabul la înălțimea h=3 m. Să se afle:

a. viteza corpului în punctul cel mai coborât al jgheabului

b. viteza corpului la sol

c. viteza corpului la o înălțime egală cu f=20% din înălțimea H

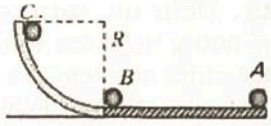


17. O bilă cu masa m=200 g este lansată din punctul A cu viteza inițială υ_0=6 m/s pe o pistă ca în figura alăturată. Pe porțiunea orizontală AB=ℓ=3 m mișcarea decurge cu frecare, μ=0,1. Pe porțiunea circulară BC cu raza R=50 cm mișcarea se face fără frecare. Să se afle:

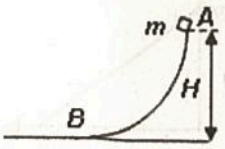
a. viteza bilei în punctul B

b. viteza cu care bila ajunge în punctul C

c. înălțimea măsurată față de punctul B la care se ridică bila



18. Un corp de masă m=1 kg, aflat inițial în repaus la înălțimea H=5 m, este lăsat să alunece liber fără frecare pe o suprafață curbă AB, ca în figura alăturată. Începând din punctul B el își continuă mișcarea cu frecare pe planul orizontal, coeficientul de frecare fiind μ=0,2. Să se afle:



a. viteza corpului în punctul B
b. lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la mișcarea între punctele A și B
c. distanța BC, astfel încât în punctul de pe suprafața orizontală C energia mecanică totală a acestuia este egală cu un sfert din energia mecanică totală inițială

19. Un corp se aruncă de la sol sub un unghi $\alpha=30^0$ cu viteza inițială υ_0=10 m/s. Să se afle:
a. componentele vectorului viteză pe axele de coordonate Ox (orizontală) și Oy (verticală)
b. înălțimea maximă la care poate ajunge corpul
c. viteza corpului în punctul cel mai înalt al traiectoriei
d. lucrul mecanic al forței de greutate din momentul lansării și până când corpul atinge solul

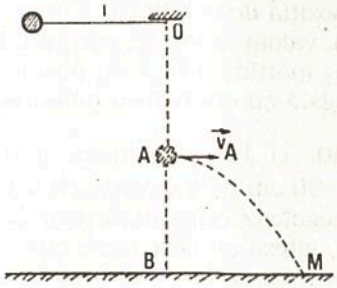
20. O minge este aruncată sub unghiul $\alpha=45^0$ și are energia cinetică în punctul cel mai înalt al traiectoriei E_C=45 J. Neglijând efectul forțelor de frecare cu aerul, să se afle:
a. energia cinetică în punctul de lansare
b. energia cinetică când mingea formează cu orizontala un unghi $\beta=30^0$
c. energia potențială când mingea formează cu orizontala un unghi $\beta=30^0$

21. Un corp este aruncat în câmp gravitațional cu viteza inițială υ_0=6 m/s sub un unghi $\alpha=60^0$. Presupunând că mișcarea se produce fără frecare, să se afle atunci când energia cinetică reprezintă fracțiunea f=0,64 din energia cinetică inițială:
a. înălțimea A la care se află corpul
b. cosinusul unghiului β făcut de vectorul viteză cu orizontala în punctul A
c. energia potențială maximă, dacă masa corpului este m=500 g

22. De la înălțimea h=30 m se aruncă orizontal un corp cu masa m=200 g și viteza inițială υ_0=10 m/s. Neglijând efectul forțelor de frecare cu aerul și considerând la sol valoarea zero pentru energia potențială, să se afle:
a. energia totală a corpului
b. energia cinetică și energia potențială când viteza corpului formează cu orizontala un unghi $\alpha=60^0$
c. viteza cu care corpul lovește solul

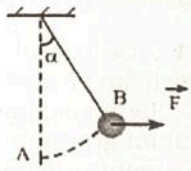
23. Dintr-un turn cu înălțimea h=15 m se lansează un corp cu masa m=500 g și viteza inițială υ_0=10 m/s sub un unghi $\alpha=30^0$ față de orizontală și deasupra acesteia. Să se afle, dacă neglijăm efectul forțelor de frecare cu aerul și dacă se consideră la sol valoarea zero pentru energia potențială:
a. energia totală a corpului
b. înălțimea maximă la care urcă corpul
c. viteza cu care corpul lovește solul
d. cosinusul unghiului format de vectorul viteză și orizontală când corpul ajunge la sol

24. Un corp cu masa m=1 kg este legat de un fir inextensibil cu lungimea ℓ=80 cm şi deviat faţă de verticală cu un unghi α=90° ca în figură, după care se lasă liber. Se neglijează efectul forţelor de frecare. Punctul de suspensie a firului se află la înălţimea h=1,8 m faţă de sol. În momentul trecerii prin poziţia verticală OA firul se rupe. Să se afle, dacă se consideră că la sol corpul nu are energie potenţială:



a. energia mecanică a corpului
b. energia cinetică la trecerea prin poziţia verticală
c. viteza cu care loveşte corpul solul
d*. tensiunea de rupere

25. La capătul unui fir inextensibil de lungime ℓ=20 cm este fixată o bilă cu masa m=50 g. Se acţionează asupra bilei cu o forţă F orizontală, astfel încât bila este adusă din poziţia A, în poziţia B conform figurii alăturate. În poziţia B bila este în repaus iar firul formează cu verticala unghiul α=60°. Să se afle:



a. forţa F necesară menţinerii bilei în poziţia B
b. tensiunea din firul de care este legată bila în poziţia B
c. viteza cu care trece bila prin poziţia A, după ce este lăsată liber din poziţia B

26. De un fir inextensibil cu lungimea ℓ=45 cm este prins un corp cu masa m=200 g care se află iniţial în poziţie verticală. Se imprimă corpului o viteză perpendiculară pe fir v_0=5 m/s. Neglijând efectul forţelor de frecare, să se afle:
a. viteza avută de corp când firul devine orizontal
b. înălţimea la care se ridică corpul dacă firul se rupe când firul devine orizontal, măsurată faţă de poziţia iniţială
c. lucrul mecanic efectuat de forţa de tensiune şi de forţa de greutate în timpul mişcării corpului

27. Un corp cu masa m=100 g este suspendat de un fir cu lungimea ℓ=40 cm şi deviat faţă de verticală cu un unghi α=60°. I se imprimă corpului în acel punct o viteză perpendiculară pe fir astfel încât corpul să se poată ridica până în dreptul punctului de suspensie. Neglijând efectul forţelor de frecare, să se afle:
a. viteza imprimată corpului iniţial
b. viteza cu care trece corpul prin poziţia verticală
c. energia iniţială a corpului

28. Un corp punctiform cu masa m=100 g este suspendat de un fir inextensibil cu lungimea ℓ=40 cm. Firul este menţinut deviat faţă de verticală cu unghiul α=60°. Pe verticala de susţinere se aşază o piedică. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:
a. înălţimea măsurată faţă de punctul de susţinere la care trebuie pusă piedica, pentru ca atunci când se eliberează corpul, firul să poată să devină orizontal
b. viteza cu care trece corpul prin poziţia verticală
c. lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate pe parcursul mişcării corpului

29. Un corp cu masa m=1 kg, aflat iniţial în repaus, este suspendat de un fir inextensibil şi de masă neglijabilă având lungimea ℓ=1 m. Firul este scos din poziţia de echilibru şi adus sub un unghi α=60° faţă de verticală, după care este lăsat liber. Se consideră că energia potenţială gravitaţională este nulă în poziţia de echilibru. Să se afle:

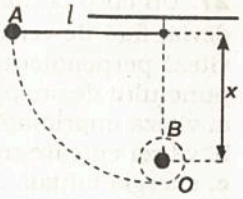
a. lucrul mecanic efectuat de forța de greutate în timpul revenirii corpului în poziția de echilibru
b. valoarea vitezei corpului la trecerea prin poziția de echilibru
c. înălțimea față de poziția de echilibru la care energia cinetică a corpului este egală cu energia sa potențială gravitațională

30. O bilă cu masa m=100 g suspendată pe un fir vertical cu lungimea ℓ=90 cm este deviată cu un unghi $\alpha=60^0$ față de verticală. Se lasă liberă bila și se neglijează efectul forțelor de frecare. Să se afle:
a. viteza cu care trece bila prin poziția de echilibru
b. viteza bilei când firul formează cu verticala unghiul $\beta=30^0$
c*. tensiunea în fir atunci când firul formează cu verticala unghiul β și să se particularizeze pentru $\beta=60^0$, 30^0 și 0^0

31*. De cablul unei macarale se află suspendat un corp cu masa m=20 kg. Neglijăm efectul forțelor de frecare. Dacă începe să bată vântul, să se afle:
a. viteza maximă a corpului în poziția verticală, dacă tensiunea de rupere este dublul greutății corpului și lungimea cablului este ℓ=10 m
b. unghiul maxim format de cablul care susține corpul cu verticala în condițiile punctului **a.**
c. tensiunea minimă în cablul de susținere când firul trece prin poziția de echilibru, dacă corpul reușește să realizeze o mișcare circulară în planul vertical

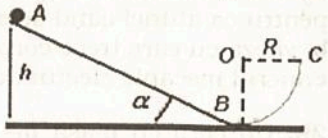
32. Unui fir cu lungimea ℓ=50 cm aflat în poziție verticală de care este suspendat un corp cu masa m=200 g i se imprimă perpendicular pe fir o viteză v_0=10 m/s. Corpul este capabil să descrie un cerc în plan vertical. Se neglijează frecarea cu aerul și se consideră nulă energia potențială în poziția inițială. Să se afle:
a. energia inițială a corpului
b. viteza corpului în poziția verticală superioară a traiectoriei
c*. tensiunea în fir în poziția superioară a traiectoriei

33*. Un corp de masă m=1 kg este suspendat de un fir inextensibil de lungime ℓ=45 cm. Se scoate corpul din poziția de echilibru și se aduce firul orizontal ca în figura alăturată. Apoi se lasă liber corpul. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:



a. viteza cu care corpul trece prin poziția verticală
b. la ce distanță x, măsurată pe verticală față de punctul de suspensie, trebuie imobilizat firul, astfel încât corpul să fie capabil să descrie un cerc cu raza ℓ-x în plan vertical
c. lucrul mecanic efectuat de forța de greutate din punctul de plecare până când corpul ajunge în punctul superior al traiectoriei circulare

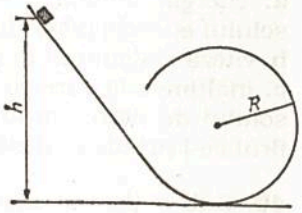
34. Un corp de masă m=500 g parcurge traseul din figura alăturată, format dintr-o porțiune rectilinie AB, înclinată față de orizontală sub un unghi $\alpha=45^0$, racordată lin cu o porțiune circulară BC de rază R=1 m. Corpul pornește din repaus, mișcarea are loc fără frecare, lungimea porțiunii liniare este $AB=4\sqrt{2}$ m, iar porțiunea circulară are forma unui sfert de cerc. Energia potențială gravitațională se consideră nulă în punctul B. Să se afle:



a. viteza v_B a corpului în punctul B

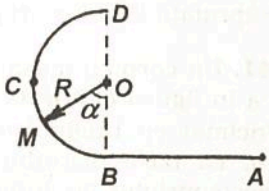
b. lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la deplasarea acestuia între punctele *A* şi *C*
c. energia cinetică a corpului când acesta ajunge în punctul *C*
d. înălţimea, măsurată faţă de punctul *B*, la care energia cinetică este egală cu energia potenţială

35*. Un montagne-rousse cu masa m=820 kg ajunge în vârful unui dâmb. De acolo coboară fără frecare pe un jgheab şi descrie o buclă în plan vertical cu raza R=4 m mişcându-se fără frecare ca în figură. Să se afle:



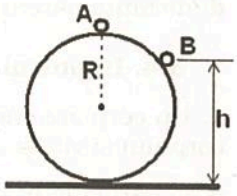
a. înălţimea minimă de la care trebuie să coboare corpul pentru ca să poată să descrie jgeabul
b. viteza montagne-rousse-ului în punctul cel mai înalt al traiectoriei circulare, dacă în vârful dâmbului viteza acestuia este v=3 m/s
c. apăsarea exercitată de montagne-rousse în punctul superior al traiectoriei circulare, în condiţiile punctului **b.**

36*. Un jgheab orizontal se continuă cu un alt jgheab semicircular vertical *BCD* de rază R=50 cm, situat în plan vertical. Se trimite din punctul *A*, ca în figura alăturată, în direcţie orizontală un corp de masă m=200 g. Mişcarea se face fără frecare. Să se afle:



a. viteza pe care trebuie să o aibă corpul în *A* pentru a fi capabil să descrie semicercul *BCD*
b. forţa de apăsare exercitată de corp asupra jgheabului într-un punct în care poziţia corpului formează unghiul $\alpha=60^0$ cu verticala
c. viteza cu care loveşte corpul jgheabul orizontal după desprinderea de jgheabul semicircular
d. cosinusul unghiului pe care vectorul viteză îl formează cu orizontala când corpul loveşte jgheabul orizontal

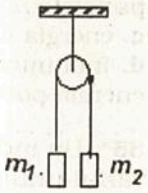
37. Un corp de mici dimensiuni, cu masa m=20 g, este lăsat să alunece liber, din punctul cel mai înalt *A* al unei sfere fixe cu raza de R=48 cm, ca în figura alăturată. În punctul *B*, situat la înălţimea h=80 cm faţă de sol, corpul încetează să mai apese asupra sferei şi îşi continuă căderea spre suprafaţa solului. Energia potenţială gravitaţională se consideră nulă la nivelul solului. Neglijând frecările, să se afle:



a. lucrul mecanic efectuat de greutate la deplasarea corpului din *A* în *B*
b. viteza corpului în momentul desprinderii de sferă
c. viteza corpului în momentul în care acesta atinge solul
d. energia totală a corpului când acesta se află faţă de sol la o înălţime egală cu raza sferei

38*. Din vârful unei sfere care se sprijină pe sol, cu raza R=1,2 m se lasă liber un corp de mici dimensiuni care alunecă pe sferă fără frecare ca în figura precedentă. La un moment dat corpul se desprinde de pe sferă. Să se afle:
a. viteza corpului în momentul desprinderii de pe sferă
b. înălţimea faţă de suprafaţa de sprijin a sferei la care se desprinde corpul
c. viteza corpului în momentul în care acesta atinge solul

39. Peste un scripete ideal este trecut un fir inextensibil care susține două corpuri cu masele m_1=4 kg și m_2=6 kg ținute inițial în repaus la aceeași înălțime față de sol H=1 m ca în figură. Se lasă liber sistemul și se consideră firul suficient de lung, astfel încât corpul 1 să nu ajungă la scripete. Să se afle:



a. energia inițială a sistemului dacă se consideră că la nivelul solului energia potențială este nulă

b. viteza sistemului în momentul când corpul mai greu atinge solul

c. înălțimea la care se oprește corpul 1 față de sol, dacă din momentul atingerii solului de către corpul 2, corpul 1 își continuă mișcarea pe verticală după ce firul ce-l prinde se desface

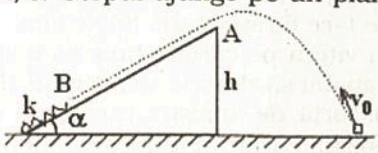
40. Sub acțiunea unei forțe elastice F_1=50 N un resort se comprimă cu x_1=10 cm. Să se afle:

a. constanta elastică a resortului

b. lucrul mecanic efectuat de forța elastică în procesul comprimării cu x_1

c. viteza unui corp cu masa m=50 g, dacă acest corp este pus în mișcare pe o suprafață fără frecări prin destinderea completă a resortului

41. Un corp cu masa m=100 g este lansat de pe un plan orizontal sub un unghi ca în figura alăturată și cu viteza inițială v_0=10 m/s. Corpul ajunge pe un plan înclinat cu unghiul α=30° și cu înălțimea h=3 m. La baza planului se află un resort inițial necomprimat cu lungimea inițială ℓ_0=1,2 m și cu constanta elastică k=1 kN/m care oprește corpul. Mișcarea corpului pe planul înclinat se efectuează cu frecare până când corpul lovește resortul, coeficientul de frecare fiind $\mu=1/(2\sqrt{3})$, și apoi se efectuează fără frecare. Să se afle:



a. viteza corpului în punctul A

b. viteza corpului în punctul B în care corpul lovește resortul

c. lungimea resortului comprimat

d. distanța parcursă de corp pe planul înclinat după destinderea resortului

3.4. Impulsul punctului material. Teorema de variație a impulsului

1. Un corp are energia cinetică este E_c=8 J și impulsul p=1,6 Ns. Să se afle masa corpului și viteza acestuia.

2. O particulă în mișcare are impulsul p și energia cinetică E_C. Să se afle de câte ori crește energia cinetică a particulei dacă se triplează impulsul particulei.

3. Viteza unui corp cu masa m=500 g depinde de timp după legea v=20-5t, unde timpul t este în secunde și viteza v în m/s. Să se afle după t_1=2 s de la începerea mișcării impulsul corpului și variația corespunzătoare a impulsului acestuia.

4. Legea de mișcare a unui corp cu masa m=1 kg este x(m)=4−8t+6t^2, iar t în secunde. Să se afle variația impulsului după t=2 s de la începerea mișcării.

5. Un corp cu masa m=200 g pornește cu viteza inițială v_0=2 m/s într-o mișcare uniform accelerată cu accceleraţia a=2 m/s². Să se afle impulsul corpului după t=4 s de la începerea mișcării.

6. O minge cu masa m=400 g cade liber de la înălțimea h=5 m. Să se afle impulsul cu care lovește mingea solul. Se neglijează frecarea cu aerul.

7. O minge de ping-pong cu masa m=14,1 g este lansată vertical în sus cu viteza inițială υ_0=17,3 m/s. Să se afle impulsul mingii la 1/3 din înălțimea maximă la care poate ajunge aceasta. Se neglijează frecarea cu aerul.

8. De pe o masă orizontală cade un pahar cu masa m=200 g împins de un copil cu viteza υ_0=2 m/s. Să se afle impulsul corpului după t=0,1 s de la desprinderea de masă.

9. O ventuză jucărie cu masa m=50 g este lansată sub un unghi α=60° față de orizontală de la sol cu viteza inițială υ_0=10 m/s. Să se afle impulsul ventuzei după trecerea unei secunde de la începerea mișcării.

10. Un atlet cu masa m=80kg aleargă cu viteza υ=8 m/s pe o pistă circulară. Să se afle variația impulsului său între două puncte diametral opuse ale pistei și între două puncte după ce atletul a parcurs un sfert de pistă.

11. Asupra unui corp cu masa m=1 kg aflat pe o suprafață pe care se poate mișca fără frecare, acționează o forță care depinde de timp conform graficului din figura 1. Să se afle viteza corpului la sfârșitul celei de-a patra secunde de la începerea mișcării dacă corpul pornește din repaus.

12. În graficul din figura 2 forța depinde de timp. Această forță acționează asupra unui corp cu masa m=2 kg și care are viteza inițială υ_0=5 m/s pe direcția și în sensul vitezei. Să se afle valoarea finală a vitezei după trecerea timpului t=5s.

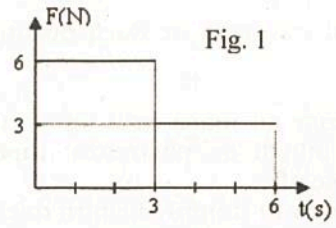


Fig. 1

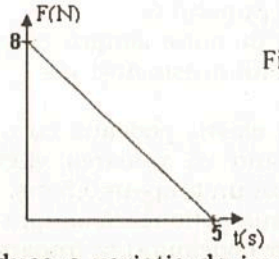


Fig. 2

13. Asupra unui corp se produce o variație de impuls de Δp=800 kgm/s sub acțiunea unei forțe F=50 N. Să se afle timpul în care trebuie să acționeze această forță pentru a se produce această variație de impuls.

14. O minge aflată inițial în repaus, cu masa m=1 kg are după lovire o viteză υ=10 m/s. Să se afle forța medie de lovire, dacă durata lovirii este Δt=0,1 s.

15. Un glonte cu masa m=50 g se trage dintr-o armă cu viteza inițială υ_0=400 m/s. Să se afle forța medie de rezistență întâmpinată de glonte, dacă glontele străbate substanța pe orizontală și iese cu viteza υ=100 m/s după un timp t=20ms.

16. Să se afle forța de frânare ce trebuie aplicată unui tren cu masa m=800t, care se mișcă cu viteza υ_0=54 km/h pentru a-l opri în timpul Δt=60 s.

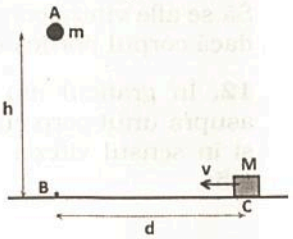
17. O mașină cu masa m=800 kg frânează într-un interval de timp Δt=20 s, pornind de la viteza inițială υ_0=108 km/h și ajungând la viteza υ=36 km/h pentru a intra într-o curbă. Să se afle valoarea medie a forței de frânare.

18. Un corp cu masa m=400 g este lansat pe un plan orizontal cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,1, cu viteza inițială v_0=10 m/s. Să se afle impulsul corpului după t=6 s de la începerea mișcării.

19. Un corp cu masa m=100 g cade liber un sfert de minut de la o înălțime convenabilă. Să se afle variația impulsului corpului.

21. Asupra unui corp care se deplasează cu viteza constantă v_0=1 m/s pe un plan orizontal fără frecare începe să acționeze pe direcția vitezei și în sensul mișcării forța constantă F=1 N. După intervalul de timp Δt=2 s energia cinetică a corpului crește cu ΔE_c=4 J. Să se afle:
a. viteza corpului după Δt de la începerea mișcării
b. masa corpului
c. variația impulsului corpului în intervalul de timp Δt după începerea acțiunii forței

22. Doi elevi efectuează un experiment. Unul dintre ei lasă să cadă liber din punctul A, aflat la o înălțimea h=20 m deasupra punctului B, aflat pe sol, o bilă cu masa m=0,2 kg. Celălalt imprimă unei cutii aflate pe sol în punctul C, la distanța d=4 m de punctul B, o viteză orizontală astfel încât cutia să se deplaseze pe suprafața solului, să se oprească în punctul B, iar bila să cadă în cutie. Masa cutiei este M=1 kg iar coeficientul de frecare la alunecare între cutie și sol este μ=0,2. Să se afle:

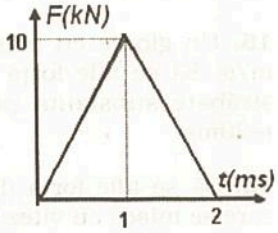


a. viteza cu care ajunge bila la nivelul solului
b. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare care acționează asupra cutiei din punctul C până în punctul B
c. viteza imprimată cutiei în punctul C
d. modulul forței exercitate de cutie asupra corpului cu masa m, dacă durata interacțiunii până la oprirea lui m este Δt=1 ms

23. Un copil lovește perfect elastic podeaua cu o minge cu masa m=2 kg și cu viteza v_0=5 m/s. Considerând că valoarea vitezei mingii se păstrează după ciocnire, iar ciocnirea durează un timp Δt=0,5 ms, să se afle:
a. forța medie cu care podeaua acționează asupra mingii în timpul ciocnirii dacă mingea lovește perpendicular podeaua și se întoarce pe aceeași direcție
b. forța medie cu care podeaua acționează asupra mingii în timpul ciocnirii, dacă mingea lovește oblic podeaua sub un unghi α=30° față de ea și ricoșează sub același unghi

3.6. Ciocniri plastice și elastice

1. Un corp cu masa m=1 kg și viteza v=15 m/s lovește un corp cu masa M=5 kg aflat inițial în repaus. Ciocnirea este unidimensională, iar forța de interacțiune dintre corpuri este reprezentată în figura alăturată. Să se afle:



a. energia cinetică inițială a sistemului
b. vitezele corpurilor imediat după ciocnire
c. piederea de energie cinetică a sistemului

2. Două corpuri cu masele m_1=4 kg și m_2=2 kg se mișcă unul spre celălalt cu vitezele imediat înainte de ciocnire v_1=4 m/s și v_2=2 m/s. După ciocnire

8. Dintr-un punct se aruncă pe verticală în sus un corp cu masa m=200 g cu o viteză inițială v_0=20 m/s. Să se afle la jumătatea înălțimii maxime valoarea energiei potențiale gravitaționale a corpului, dacă în punctul de aruncare E_P=0.

9. În graficul din figura 1 este reprezentată energia potențială gravitațională a unui corp în funcție de înălțimea la care se află acesta. Să se afle masa corpului.

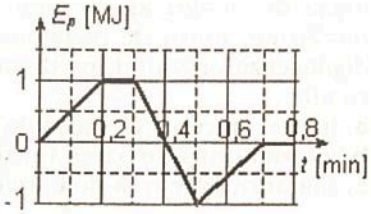
10. Un camion cu masa m=10 t se deplasează cu viteza constantă v_0=45 km/h pe un drum dintr-o regiune deluroasă. În graficul alăturat este reprezentată energia potențială E_p a sistemului format din camion și Pământ, în funcție de durata mișcării în intervalul de timp [0; 0,8]min. Să se afle:

a. intervalele de timp în care drumul este orizontal

b. diferența de nivel dintre punctul din care a plecat camionul și punctul din care acesta începe să coboare

c. reprezentarea grafică a energiei potențiale E_p a camionului, în funcție de distanța parcursă d

d. variația energiei potențiale a camionului din momentul plecării și până în momentul în care se află la 375 m de punctul de pornire



11*. Un resort este comprimat cu x=5 cm fiind menținut în această stare de o forță F=20 N. Să se afle energia potențială a sistemului corp-resort.

12*. În graficul din figura 2 este reprezentată energia potențială elastică în funcție de pătratul deformației. Să se afle ce reprezintă panta graficului din figură.

Fig..1

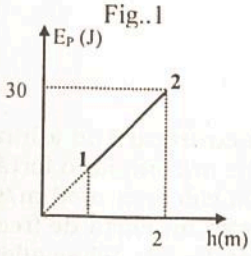


Fig.2

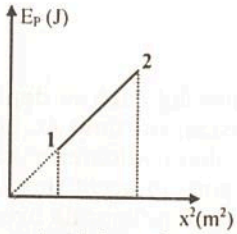
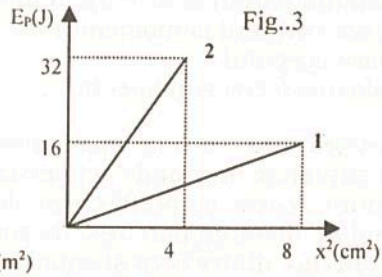


Fig..3



13*. Două resorturi cu constantele elastice k_1=40 N/m și, respectiv, k_2=80 N/m legate în serie susțin un corp. Să se afle raportul energiilor potențiale de deformare ale resorturilor E_{P1}/E_{P2}.

14*. Două resorturi cu aceeași lungime inițială se leagă în paralel și sunt alungite de o forță F. Știind că cele două constante elastice ale celor două resorturi sunt k_1=20 N/m și k_2=60 N/m să se afle raportul energiilor potențiale elastice E_{P1}/E_{P2}.

15*. În graficul din figura 3 este reprezentată energia potențială de deformare a unui resort în funcție de x^2, unde x reprezintă deformația resortului. Să se afle:

a. constantele elastice ale resorturilor

b. alungirea resortul 2, dacă resorturile se leagă în serie și se alungesc cu x=20 cm

3.3. Teorema de variaţie a energiei cinetice

1. O maşină cu masa m=500 kg se deplasează pe un drum orizontal cu viteza v=20 m/s. După începerea frânării în mod uniform, maşina se opreşte în timpul Δt=20 s. Să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de forţa de frânare până la oprirea maşinii
b. forţa de frânare
c. distanţa parcursă de maşină până la oprire

2. Un pescar împinge o barcă aflată iniţial în repaus cu o forţă orizontală de valoare F=180 N. În barcă se află un prieten cu masa de m_1=90 kg, fetiţa sa cu masa de m_2=20 kg şi soţia cu masa de m_3=65 kg. Masa bărcii goale este de m_4=75 kg. Forţa de rezistenţă întâmpinată de barcă este de F_r=80 N. Barca se deplasează orizontal, pe distanţa d=1 m, după care acţiunea forţei încetează. Să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de pescar pe distanţa d
b. viteza atinsă de barcă imediat după încetarea acţiunii forţei
c. distanţa parcursă de barcă până la oprire, după încetarea acţiunii forţei F

3. Asupra unui corp, aflat iniţial în repaus pe un plan orizontal pe care se poate mişca fără frecare, acţionează pe direcţie orizontală o forţă constantă F=4 N. După un timp Δt=2 s, energia cinetică a corpului are valoarea E_c=8 J. La momentul t=2 s asupra corpului începe să acţioneze o forţă orizontală suplimentară care determină oprirea corpului. Din momentul aplicării forţei şi până la oprire corpul parcurge distanţa D=0,5 m. Să se afle:
a. distanţa parcursă de corp în intervalul de timp Δt
b. viteza corpului la momentul t=2 s
c. masa corpului
d. valoarea forţei suplimentare

4. Asupra unui corp de masă m=2 kg care se deplasează cu frecare de-a lungul unei suprafeţe orizontale acţionează, un timp Δt, pe direcţie orizontală, o forţă de tracţiune. Viteza corpului creşte de la valoarea v_1=2 m/s la valoarea v_2=6 m/s în timpul Δt, distanţa parcursă de corp în acest timp fiind d=20 m. Forţa de frecare la alunecare dintre corp şi suprafaţa orizontală are valoarea F_f=2 N. Să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat forţa de tracţiune în timpul Δt
b. puterea medie dezvoltată de forţa de tracţiune şi intervalul de timp Δt
c. coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi suprafaţa orizontală

5. Un autoturism având masa m=800 kg se deplasează cu viteza constantă v=54 km/h pe o şosea orizontală, dezvoltând o putere P=15 kW. La un moment dat motorul se opreşte şi autoturismul îşi continuă deplasarea cu motorul oprit, fără a frâna. Considerând că forţele de rezistenţă la înaintare sunt constante să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de forţele de rezistenţă la înaintare din momentul opririi motorului până la oprirea autoturismului
b. distanţa parcursă din momentul opririi motorului până la oprirea autoturismului
c. intervalul de timp în care autoturismul se opreşte

6. Un tren de masă totală m=200 t se deplasează orizontal cu viteză constantă. Puterea mecanică dezvoltată de locomotivă este P=400 kW iar forţele de

rezistenţă care acţionează asupra trenului reprezintă o fracţiune f=0,01 din greutatea acestuia. Să se afle:

a. lucrul mecanic efectuat de forţele de rezistenţă la deplasarea trenului pe distanţa d=1200 m

b. viteza trenului şi lucrul mecanic efectuat de locomotivă într-un interval de timp Δt=2 min

c. distanţa parcursă de vagon din momentul desprinderii până în momentul opririi, dacă la un moment dat este decuplat ultimul vagon şi se consideră că forţele de rezistenţă care acţionează asupra acestuia reprezintă o fracţiune f=0,01 din greutatea acestuia.

7. Un automobil cu masa m=1000 kg porneşte din repaus şi se deplasează pe o şosea orizontală. Asupra automobilului acţionează o forţă de rezistenţă la înaintare direct proporţională cu greutatea acestuia. Coeficientul de proporţionalitate are valoarea f=0,1. Puterea dezvoltată de motorul automobilului este constantă, având valoarea P=35 kW. Să se afle:

a. forţa de tracţiune exercitată asupra automobilului, în momentul în care viteza sa este v=7m/s·

b. accelerația imprimată automobilului în condiţiile de la punctul anterior

c. viteza maximă pe care o poate atinge automobilul

d. variaţia energiei cinetice a automobilului, de la plecare până la atingerea vitezei maxime

8. Un tren cu masa M=210 t se deplasează uniform, pe o linie orizontală, cu viteza v=108 km/h, sub acţiunea unei forţe de tracţiune constante F=42 kN. La un moment dat, ultimul vagon de masă m=10t este decuplat, trenul continuându-şi mişcarea sub acţiunea aceleiaşi forţe de tracţiune. Se consideră că toate forţele de rezistenţă sunt direct proporţionale cu greutăţile: $Fr=k\ G$. Să se afle:

a. puterea mecanică dezvoltată de tren în timpul mişcării sale uniforme

b. energia cinetică a trenului înainte de decuplarea vagonului

c. accelerația cu care se va mişca trenul după decuplarea ultimului vagon

d. distanţa parcursă de vagonul desprins, din momentul desprinderii până în momentul opririi acestuia

9. O camionetă de masă m=1,6 t se deplasează pe un drum orizontal, astfel încât viteza acesteia creşte liniar în timp. La momentul t_1 viteza sa este v_1=18 km/h, iar la un moment ulterior t_2, devine v_2=20 m/s. În intervalul de timp $\Delta t=t_2-t_1$, forţa de tracţiune produsă de motorul camionetei efectuează un lucru mecanic L=375 kJ, dezvoltând o putere medie P=75 kW. Să se afle:

a. lucrul mecanic efectuat de forţele de rezistenţă în intervalul de timp Δt

b. forţa de tracţiune dezvoltată de motor şi forţa de rezistenţă

c. distanţa parcursă de camionetă în intervalul de timp Δt

10. Un tren electric cu masa m=100 t care se deplasează cu viteza v_0=108 km/h se apropie de o staţie în care urmează să se oprească. Mecanicul mai întâi opreşte alimentarea cu energia electrică la distanţa d=900 m de staţie, apoi este pus în funcţiune sistemul de frânare. Rezistenţa la înaintare opusă de-a lungul drumului este permanent f_1=1/100 din greutatea trenului, iar forţa de frânare este f_2=1/8 din greutatea trenului. Să se afle:

a. distanţa faţă de staţie de la care începe frânarea

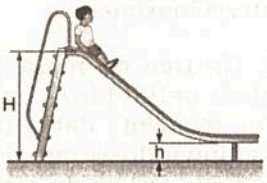
b. lucrul mecanic efectuat de forţa de frânare din momentul punerii în acţiune a sistemului de frânare până la oprire

c. viteza trenului după ce acesta parcurge distanța d_1=800 m după oprirea alimentării cu energia electrică

11. Un corp având masa m=20 g este lansat pe suprafața orizontală a gheții cu viteza inițială v_0=7,2 km/h. Sub acțiunea forței de frecare, el se oprește după un interval de timp t_{op}=10 s. Să se afle:
a. energia cinetică a corpului în momentul lansării
b. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare până la oprirea corpului
c. distanța parcursă de corp până la oprire
d. modulul forței de frecare

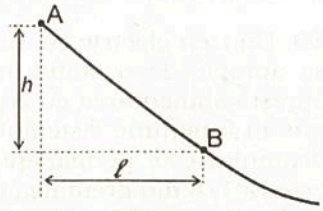
12. Un corp având masa m=2 kg este lansat pe o suprafață orizontală și sub acțiunea forței de frecare, el se oprește după un interval de timp t_{op}=10 s. Știind că lucrul mecanic al forței de frecare în procesul de oprire este L=−400 J, să se afle:
a. viteza inițială a corpului
b. coeficientul de frecare dintre corp și suprafața orizontală
c. spațiul de oprire al corpului
d. energia cinetică a corpului după t_1=3 s din momentul lansării

13. Un copil cu masa m=36 kg, aflat inițial la baza scărilor unui tobogan, urcă până în vârful acestuia, la înălțimea H=2,5 m, în timpul Δt=10 s. După alunecare, copilul iese de pe tobogan cu viteza v=3 m/s, la înălțimea h=0,5 m față de sol, ca în figura alăturată. Considerând că alunecarea a avut loc fără viteză inițială, să se afle:



a. energia mecanică a copilului la ieșirea de pe tobogan, dacă se consideră la baza scărilor valoarea nulă pentru energia potențială
b. lucrul mecanic efectuat de copil pentru a urca până în vârful toboganului cu viteză constantă
c. puterea medie dezvoltată de copil în timpul urcării toboganului
d. lucrul mecanic efectuat de forțele de frecare ce acționează asupra copilului în timpul alunecării pe tobogan

14. Porțiunea superioară a unei trambuline pentru sărituri cu schiurile poate fi considerată un plan înclinat cu înălțimea h=47 m, a cărui proiecție în plan orizontal are lungimea ℓ=50 m, ca în figura alăturată. Un schior cu masa m=80 kg pornește din repaus din vârful A al trambulinei și trece prin punctul B aflat la baza porțiunii de trambulină considerate cu viteza v=108 km/h. Energia potențială gravitațională este considerată nulă în punctul B. Să se afle:
a. energia mecanică a schiorului aflat în vârful A al trambulinei
b. energia cinetică a schiorului în momentul trecerii prin punctul B
c. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare în timpul coborârii porțiunii de trambulină considerate
d. coeficientul de frecare la alunecare între schiuri și zăpadă



15. Un avion de masă m=2,5 t, cu motorul oprit, planează cu viteza constantă v=144 km/h într-o atmosferă liniștită și coboară de la înălțimea h_1=2 km până la înălțimea h_2=1 km, între două puncte A și B aflate la distanța d=AB=10 km unul de altul. Să se afle:

a. lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență în timpul planării
b. lucrul mecanic dezvoltat de motor la întoarcerea avionului pe același drum cu aceeași viteză, dacă lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență are valoarea de la punctul **a.**
c. puterea dezvoltată de motor în situația descrisă la punctul **b.**

16. O jucărie-elicopter telecomandată, cu masa m=50 g, poate dezvolta, datorită motorașului electric, o forță de tracțiune verticală constantă F=1 N. La înălțimea H=9 m față de nivelul solului se suspendă de aceasta o altă jucărie cu masa M=150 g, iar sistemul nou format va începe să zboare vertical, pornind din repaus. După un astfel de zbor pe distanța h=4 m, jucăria-elicopter scapă obiectul suspendat. Să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de greutatea jucăriei suspendate pe toată durata mișcării ei până la căderea pe sol
b. viteza pe care o are elicopterul în momentul în care scapă jucăria suspendată
c. energia potențială minimă a elicopterului, dacă se consideră la nivelul solului energia potențială nulă

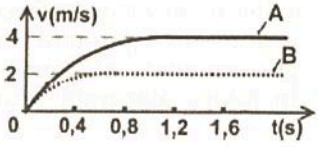
17. Un glonț cu masa m=50 g se trage dintr-o armă cu viteza inițială v_0=500 m/s. Glonțul străbate un bloc cubic de lemn cu lungimea ℓ=2 m și întâmpină o forță de frecare F_f=1124,5 N. Să se afle viteza cu care iese glonțul:
a. dacă glonțul este tras pe verticală de jos în sus
b. dacă glonțul este tras pe verticală de sus în jos
c. dacă glonțul este tras pe orizontală

18. Asupra unei bile de masă m=400 g, aflată inițial în repaus la înălțimea h_0=1 m deasupra solului, acționează o forță constantă F orientată vertical în sus. Acțiunea forței încetează în momentul în care bila atinge viteza v=4 m/s. Știind că forța F efectuează un lucru mecanic L=16 J, să se afle:
a. înălțimea la care se află bila față de sol în momentul în care încetează acțiunea forței F
b. înălțimea maximă față de sol la care ajunge bila
c. viteza cu care trece bila în cădere prin punctul în care s-a aflat inițial

19. Două corpuri cu masele m_1=2 kg, respectiv m_2=4 kg se află la momentul inițial deasupra solului la înălțimile h_1=10 m, respectiv h_2=5 m. Corpurile sunt lăsate să cadă simultan fără viteză inițială. Presupunând că frecarea cu aerul este neglijabilă, să se afle:
a. variația energiei potențiale a corpului 2 la căderea corpului de la înălțimea h_2 până la atingerea solului
b. raportul v_1/v_2 al vitezelor cu care cele două corpuri ating solul
c. raportul $\Delta t_1/\Delta t_2$ al intervalelor de timp după care cele două corpuri ating solul

20. Dintr-un turn cu înălțimea H=100 m este lăsat să cadă vertical, fără viteză inițială, un corp cu masa m=3 kg. Energia mecanică totală pe care o are corpul imediat înaintea impactului cu solul reprezintă o fracțiune f=90% din energia mecanică inițială. Să se afle:
a. lucrul mecanic al forței de rezistență la înaintare în timpul căderii corpului
b. viteza corpului la atingerea solului
c. forța medie de rezistență la înaintare întâmpinată de corp în timpul căderii

21. Într-un experiment s-a studiat căderea a două corpuri în câmpul gravitațional terestru. Cele două corpuri au aceeași formă și aceleași dimensiuni, dar au



mase diferite. Masa corpului A este m_A=50 g. Pe baza datelor obținute de la un senzor de mișcare a fost trasat graficul alăturat, în care este redată dependența de timp a vitezei corpului A, respectiv B. Această dependență a vitezei de timp poate fi explicată dacă admitem că forța de rezistență la înaintare este direct proporțională cu viteza $F_r=kv$. Valoarea coeficientului de proporționalitate k depinde doar de forma și dimensiunile corpului. Să se afle:

a. viteza maximă v_{max} atinsă de corpul A în timpul căderii

b. valoarea coeficientului de proporționalitate k

c. masa corpului B

d. lucrul mecanic efectuat de forța de rezistență la înaintare asupra corpului A în timpul t=1,4 s în care corpul a căzut, pornind din repaus, pe distanța d=4 m

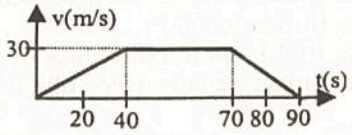
22. Într-un sport olimpic de iarnă un bloc de piatră cu masa m=10 kg este lansat, pe suprafața gheții, cu scopul parcurgerii unei anumite distanțe până la o țintă. Suprafața gheții este plană și orizontală. Jucătorii perie suprafața gheții din fața blocului de piatră în scopul micșorării frecărilor. Un astfel de bloc, de dimensiuni neglijabile, este lansat către o țintă situată la distanța d=20 m, de locul lansării. Prin perierea suprafeței gheții coeficientul de frecare la alunecare dintre blocul de piatră și suprafața gheții, scade liniar de la valoarea μ_1=0,06 în locul de lansare la valoarea μ_2=0,02 lângă țintă. Să se afle:

a. lucrul mecanic al forței de frecare la alunecare, dintre blocul de piatră și suprafața gheții, pe distanța d

b. viteza cu care trebuie lansat blocul de piatră pentru a se opri la țintă

c. viteza pe care o are blocul la distanța d_1=5 m de punctul de lansare, dacă viteza de lansare este cea de la punctul precedent

23. Un corp cu masa m=10 kg se mișcă rectiliniu sub acțiunea unei forțe aplicată pe direcția de mișcare. Viteza sa la diferite momente de timp este redată în graficul din figura alăturată. Să se afle:

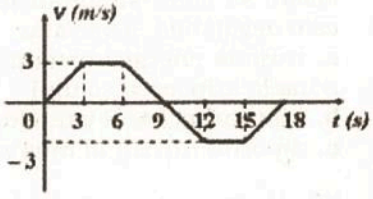


a. lucrul mecanic total efectuat asupra corpului pe durata primelor 40 s

b. forța rezultantă medie care se exercită asupra corpului în primele 40 s

c. lucrul mecanic total efectuat asupra corpului pe durata celor 90 s

24. Un corp cu masa m=100 g pornește din originea axei Ox și descrie o mișcare rectilinie, astfel că viteza acestuia depinde de timp ca în figură. Să se afle:

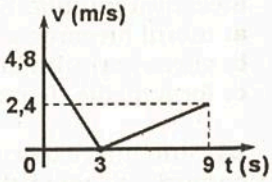


a. reprezentarea grafică a accelerației corpului pe durata întregii mișcări

b. distanța parcursă de corp pe durata întregii mișcări

c. lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă ce acționează asupra corpului pe direcția axei Ox în intervalul de timp $t \in (3, 9)$s

25. De la baza unui plan înclinat suficient de lung, se lansează în lungul planului un corp cu masa m=1 kg. Mișcarea corpului pe planul înclinat se face cu frecare, astfel încât la un moment dat corpul se oprește, după care revine în punctul de lansare. Energia potențială gravitațională se consideră nulă la baza planului înclinat.



În figura alăturată, este reprezentată grafic dependența de timp a modulului

vitezei corpului de la începutul mişcării sale şi până în momentul în care corpul revine în punctul de lansare. Să se afle:

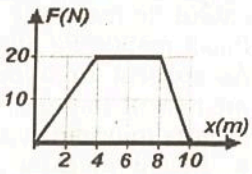
a. energia cinetică iniţială a corpului

b. lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare în intervalul de timp dintre momentele t_0=0 s şi t_1=9 s

c. modulul forţei de frecare la alunecare pe planul înclinat

d. energia mecanică la momentul t=3 s

26. Un corp cu masa m=2 kg se află în repaus în originea axei Ox, orientate în lungul unui plan orizontal fără frecări. Asupra punctului material acţionează, pe direcţia axei Ox, o forţă orizontală variabilă conform graficului alăturat. Să se afle:



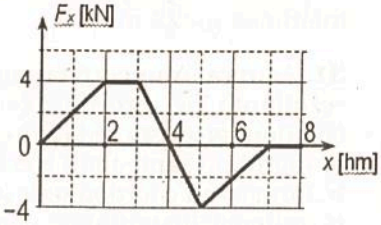
a. lucrul mecanic efectuat de forţa F pe primii 10 m

b. forţa medie pe primii 10 m

c. viteza corpului în punctul de coordonată x_1=4 m

d. intervalul de timp necesar deplasării corpului din punctul x_1=4 m în punctul x_2=8 m

27. Un automobil cu masa m=1000 kg porneşte din repaus şi se deplasează rectiliniu pe o autostradă orizontală. În graficul alăturat este reprezentată proiecţia forţei rezultante care se exercită asupra automobilului pe direcţia mişcării, F_x în funcţie de coordonata x. Să se afle:



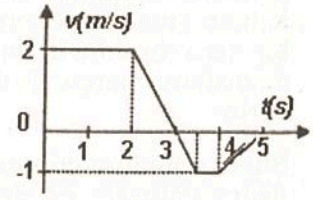
a. reprezentarea grafică a proiecţiei accelerației a_x pe direcţia mişcării automobilului, în funcţie de coordonata x, pentru primii 200 m

b. coordonata x_m a automobilului în momentul în care viteza sa a atins valoarea maximă şi justificaţi răspunsul

c. lucrul mecanic efectuat de forţa rezultantă în timpul în care automobilul parcurge primii 300 m

d. valoarea v_1 a vitezei automobilului în momentul în care acesta se află în punctul de coordonată x_1=300 m

28. În figură este reprezentată variaţia dependenţei de timp a vitezei unui corp cu masa m=10 kg. Să se afle:

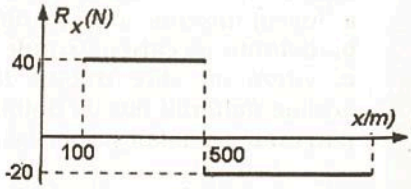


a. viteza medie în intervalul $t \in (0,5)$s

b. reprezentarea grafică a accelerației în funcţie de timp în intervalul $t \in (0,6)$s

c. lucrul mecanic al rezultantei forţelor ce au acţionat, pe direcţia de mişcare, asupra corpului între momentele de timp t_1=2 s şi t_2=3,5 s

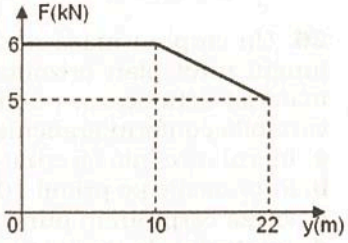
29. Un corp cu masa m=5 kg, aflat iniţial în repaus, începe să alunece cu frecare de-a lungul axei Ox, din punctul de coordonată x_0=100 m, sub acţiunea unei forţe de tracţiune orientate în lungul acestei axe. Când corpul ajunge în punctul de coordonată x_1=500 m, forţa de tracţiune îşi încetează acţiunea. Forţa de frecare este constantă în tot cursul mişcării. În figura alăturată este reprezentată dependenţa de coordonata x a rezultantei R_x a forţelor ce acţionează pe direcţia mişcării. Să se afle:



a. forţa de tracţiune dezvoltată de motor

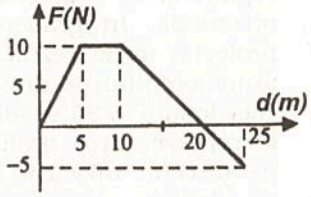
b. viteza v_1 a corpului în momentul încetării acțiunii forței de tracțiune
c. puterea medie dezvoltată de motor
d. durata acțiunii forței de tracțiune
e. viteza v_2 a corpului în momentul în care acesta se află în punctul de coordonată x_2=850 m

30. În figura alăturată este reprezentată dependența de înălțime a modulului forței cu care acționează cablul de tracțiune asupra cabinei unui ascensor cu masa m=500 kg aflat într-o clădire de înălțime mare. Ascensorul urcă de-a lungul axei verticale Oy. La momentul inițial t_0=0 cabina ascensorului se afla în repaus în originea axei Oy. Să se afle:



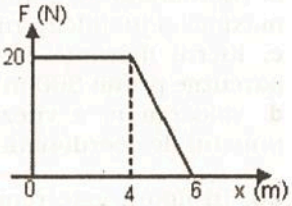
a. lucrul mecanic cheltuit de motorul care ridică ascensorul până când acesta atinge înălțimea y_1=10 m
b. viteza cabinei ascensorului când ascensorul se află la y_1=10 m
c. puterea instantanee a motorului în momentul în care ascensorul se află la înălțimea y_2=22 m

31. Asupra unui corp cu masa m=2 kg acționează o forță rezultantă pe direcția axei Ox, a cărei dependență de coordonata x este redată în graficul alăturat. Să se afle:



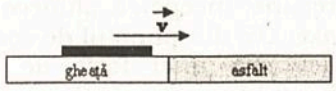
a. lucrul mecanic total efectuat de forță când $x \in$ (0,25m)
b. forța când coordonata este x_1=12 m
c. puterea instantanee când coordonata este x_1=12 m, dacă în punctul de coordonată x_0=0, corpul are viteza v_0=2,645 m/s

32. Un corp de masă m=5 kg pornește din repaus și se deplasează cu frecare, pe o suprafață orizontală, sub acțiunea unei forțe de tracțiune orizontale F. Dependența valorii forței F de coordonata corpului este reprezentată în graficul alăturat. Coeficientul de frecare la alunecare fiind μ=0,2, să se afle:

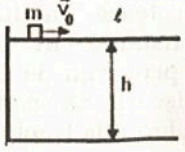


a. lucrul mecanic efectuat de forța F pe distanța de 6m
b. viteza corpului în punctul de coordonată x=6 m
c. distanța parcursă de corp din momentul încetării acțiunii forței F până la oprire

33. O scândură cu lungimea ℓ=1 m și masa m=2 kg este lansată pe asfalt, ca în figura alăturată, cu viteza v_0=1 m/s orientată pe lungimea ei, de pe gheață unde frecarea este neglijabilă, astfel că pătrunde parțial pe asfalt, oprindu-se din cauza frecării. Coeficientul de frecare pe asfalt este μ=0,4. Să se afle:
a. lucrul mecanic al forței de frecare la pătrunderea pe asfalt
b. distanța pe care pătrunde scândura pe asfalt
c. viteza cu care trebuie lansată o scândură din același material dar de două ori mai lungă, pentru a pătrunde pe asfalt pe aceeași distanță ca și prima

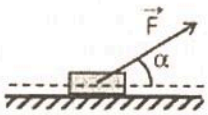


34. Un corp de masă m=4 kg, este așezat la o distanță ℓ=1,1 m de capătul liber al unei platforme orizontale fixe, aflată la înălțimea h=1,2 m față de sol. Corpului i se imprimă o viteza inițială orizontală v_0=6 m/s, orientată către capătul liber al platformei, ca în figura alăturată. Coeficientul de frecare la

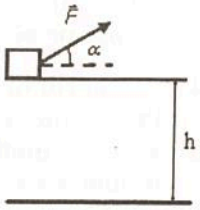


alunecare dintre corp şi platformă este μ=0,5. Să se afle:
a. energia cinetică a corpului în momentul iniţial
b. viteza corpului în momentul în care se află la capătul liber al platformei
c. viteza corpului în momentul în care acesta atinge solul

35. Pe un plan orizontal se află iniţial în repaus un corp cu masa m=2 kg supus acţiunii unei forţe F=15 N, care acţionează ca în figură sub un unghi α=30°. Mişcarea se face cu frecare coeficientul de frecare fiind μ=0,2. Să se afle, după parcurgerea distanţei d=2 m:
a. viteza corpului
b. energia cinetică a corpului în condiţiile punctului **a.**
c. puterea medie dezvoltată de forţă în timpul mişcării



36. Asupra unui corp cu masa m=2 kg, care se află iniţial în repaus pe o masă orizontală la înălţimea h=1 m faţă de podea, începe să acţioneze o forţă constantă $F=10\sqrt{2}$ N, care face un unghi α=45° cu direcţia mişcării, ca în figura alăturată. Corpul se deplasează cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,2, iar când ajunge la capătul mesei acţiunea forţei încetează şi corpul cade de la înălţimea h. Pentru a deplasa corpul pe toată lungimea mesei, forţa efectuează lucrul mecanic L=20 J. Să se afle:



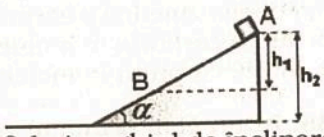
a. distanţa parcursă de corp pe suprafaţa mesei
b. lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare pe durata mişcării
c. puterea medie dezvoltată de forţa F şi intervalul de timp cât se deplasează corpul pe masă
d. energia cinetică a corpului când acesta ajunge la suprafaţa Pământului

37. Un corp este lansat pe un plan înclinat cu unghiul α=30° cu o viteză iniţială v_0. Acest corp urcă cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 1/(3\sqrt{3})$, astfel încât corpul se opreşte după ce parcurge pe plan o lungime ℓ=15 m. Să se afle:
a. viteza iniţială v_0 cu care porneşte corpul de la baza planului înclinat
b. viteza cu care revine corpul la baza planului înclinat
c. distanţa parcursă de corp până la oprire pe un plan orizontal cu care se continuă planul înclinat, dacă se consideră că mişcarea se efectuează pe planul orizontal cu coeficientul de frecare μ'=0,1

38. O sanie cu masa m=4 kg coboară liber pe o pârtie înclinată cu unghiul α=14° ($tg\alpha \approx 0{,}25$) şi îşi continuă apoi drumul pe un plan orizontal până la oprire. Înălţimea pârtiei este h=10 m, iar proiecţia pe orizontală a întregii traiectorii a saniei este d=50 m. Coeficientul de frecare la alunecare are aceeaşi valoare pe tot parcursul mişcării. Să se afle:
a. coeficientul de frecare la alunecare
b. viteza saniei la baza pârtiei
c. puterea medie a forţei de frecare la coborârea saniei pe pârtie

39. O cărămidă cu masa m=2 kg alunecă accelerat pe o scândură înclinată faţă de planul orizontal cu unghiul α=45°. Dacă cărămida este lansată de jos în sus de-a lungul scândurii cu viteza v_0=4 m/s, aceasta urcă cu o accelerţie dublă în modul. Să se afle:
a. coeficientul de frecare la alunecare
b. spaţiul parcurs de cărămidă până la oprirea pe scândură
c. randamentul scândurii înclinate

40. Un corp cu masa m=1 kg, aflat în vârful A al unui plan înclinat alunecă fără viteză inițială spre baza planului. Se cunosc: diferența de nivel dintre punctele A și B, h_1=2 m, coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și suprafața planului înclinat μ=0,1 și unghiul de înclinare a suprafeței planului față de orizontală α=45°. Să se afle:



a. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare pe distanța AB

b. viteza corpului în momentul în care acesta trece prin punctul B

c. înălțimea h_2 a planului înclinat, dacă viteza corpului la baza planului are valoarea v=7,5 m/s

d. distanța totală parcursă de corp de la pornire și până la oprirea sa pe planul orizontal cu care se continuă planul înclinat, dacă coeficientul de frecare la alunecare pe planul orizontal este μ_1=0,25

41. În cadrul unui experiment se determină, cu ajutorul unui senzor de mișcare, poziția și viteza unui corp la diferite momente în timpul coborârii pe un plan înclinat cu unghiul α=30° față de orizontală. Poziția este indicată cu ajutorul coordonatei x măsurată față de punctul din care începe coborârea corpului, de-a lungul planului înclinat. Datele experimentale culese sunt prezentate în tabelul alăturat. Masa corpului este m=0,50 kg, iar coeficientul de frecare la alunecare este μ. Să se afle:

a. dependența energiei cinetice E_C de coordonata la care se găsește corpul, $E_C=f(x)$ folosind teorema variației energiei cinetice

b. graficul $E_C=f(x)$ pentru $x\in[0\text{ m};1\text{ m}]$ folosind rezultatele experimentale

c. coeficientul de frecare la alunecare între corp și planul înclinat

x(m)	0	0,25	0,5	0,75	1
v(m/s)	0	1	1,41	1,73	2

42. Un corp, lansat în sus de la baza unui plan înclinat cu unghiul α=14° ($tg\alpha\approx$0,25) față de orizontală, are în momentul lansării energia cinetică E_{C0}=500J. După ce parcurge o anumită distanță pe planul înclinat, corpul se oprește și apoi revine la baza planului. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și suprafața planului este μ=0,15. Considerând că energia potențială gravitațională a sistemului corp-Pământ este nulă în punctul din care este lansat corpul, să se afle:

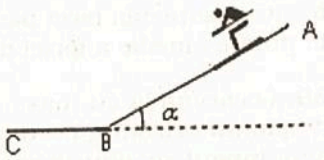
a. lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului de la lansarea corpului până la revenirea acestuia în locul de lansare

b. energia potențială gravitațională a sistemului corp-Pământ în momentul opririi corpului pe planul înclinat

c. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare la alunecare între momentul lansării și momentul opririi corpului pe planul înclinat

d. energia cinetică pe care o are corpul în momentul revenirii sale în poziția din care a fost lansat

43. O pistă de schi, reprezentată în figura alăturată, se compune dintr-o pantă AB continuată cu o porțiune orizontală BC. Un schior, a cărui masă totală este m=70 kg, coboară, fără viteză inițială, din vârful A al pantei. Panta AB are lungimea ℓ=100 m și formează cu orizontala unghiul α ($\sin\alpha$=0,6). Din punctul B, situat la baza pantei, schiorul își continuă mișcarea pe porțiunea orizontală oprindu-se într-un punct C situat la distanța $BC=d$=80 m de baza pantei. Coeficientul de frecare la alunecare are aceeași



valoare pe pantă şi pe porţiunea orizontală. Energia potenţială gravitaţională se consideră nulă la baza pantei. Să se afle:

a. energia mecanică a schiorului în vârful A al pantei

b. coeficientul de frecare la alunecare dintre schior şi pistă

c. valoarea vitezei schiorului la baza pantei

d. puterea dezvoltată de motorul unui teleschi pentru a deplasa schiorul pe pistă, cu viteză constantă, din C în A, într-un interval de timp Δt=4 min, dacă se consideră că forţa de tracţiune care acţionează asupra schiorului este paralelă permanent cu direcţia deplasării schiorului

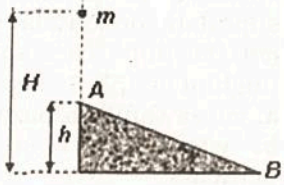
44. De la înălţimea H=10 m cade liber un corp de masă m=2 kg, ca în figura alăturată. La înălţimea h=2 m faţă de sol corpul ciocneşte un plan înclinat de lungime ℓ=AB=4 m, de-a lungul căruia alunecă, fără să se desprindă de acesta. În urma ciocnirii, corpul pierde f=75% din energia cinetică pe care o avea înainte de ciocnire. Forţa de frecare la alunecarea pe planul înclinat este F_f=4 N. Se consideră nulă energia potenţială la baza planului. Să se afle:

a. energia cinetică a corpului imediat înainte de ciocnirea cu planul înclinat

b. energia mecanică totală a corpului la înălţimea h, imediat după ciocnirea acestuia cu planul înclinat

c. viteza corpului în punctul B

d. coeficientul de frecare



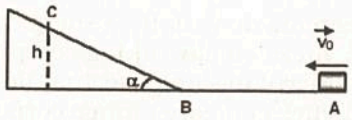
45. Un corp de masă m=5 kg este lansat cu viteza iniţială v_0=10 m/s din punctul A, pe o suprafaţă orizontală, ca în figura alăturată. După ce parcurge distanţa AB=d=5 m pe planul orizontal, corpul intră pe un plan înclinat care face unghiul α=30° cu orizontala şi urcă pe acesta până în punctul C, unde se opreşte. Atât pe planul orizontal cât şi pe cel înclinat mişcarea are loc cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ_1=0,5 pe planul orizontal şi $\mu_2=1/\sqrt{3}$ pe planul înclinat. Să se afle:

a. lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare pe distanţa AB

b. energia cinetică în punctul B

c. înălţimea maximă la care ajunge corpul pe planul înclinat

d. randamentul planului înclinat



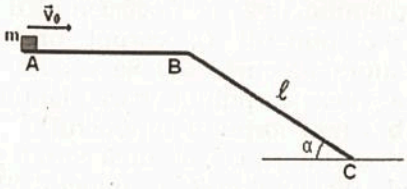
46. Pe o suprafaţă orizontală AB se lansează din punctul A, cu viteza iniţială v_0=20 m/s, un corp cu masa m=2 kg (vezi figura). Corpul ajunge în punctul B cu o viteză egală cu jumătate din valoarea vitezei iniţiale, după care începe să coboare pe o pantă de lungime ℓ=BC=30 m, care formează un unghi α (sinα=0,6) cu orizontala. Corpul ajunge la baza pantei cu viteza v_0, egală cu viteza iniţială. Pe toată distanţa mişcarea se face cu frecare, coeficientul de frecare având aceeaşi valoare peste tot. Să se afle:

a. lucrul mecanic efectuat de forţele de frecare pe toată durata deplasării, între punctul de lansare şi baza pantei

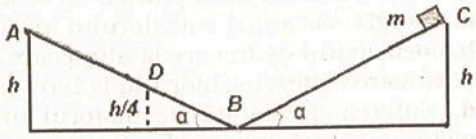
b. coeficientul de frecare

c. lungimea porţiunii AB

d. variaţia energiei mecanice totale a corpului între punctele B şi C. Justificaţi valoarea.



47. Un corp cu masa m=2 kg este lansat din punctul C de-a lungul planului în jos cu o viteză inițială de la înălțimea h=4 m pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$ ca în figură. Știind că deplasarea corpului se realizează cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=\sqrt{3}/10$ peste tot iar planele sunt identice, să se afle:

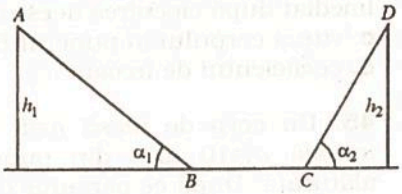


a. lucrul mecanic al forțelor de frecare la deplasarea corpului din C în A

b. viteza minimă a corpului în punctul C astfel încât acesta să ajungă la aceeași înălțime pe al doilea plan înclinat

c. variația energiei mecanice a corpului între punctele A și D, dacă punctul D este situat la înălțimea $h/4$

48. O sanie alunecă liber din vârful unui derdeluș de înălțime h_1=7,2 m. Mișcarea pe primul derdeluș se face fără frecare. Sania parcurge apoi o suprafață orizontală cu lungimea ℓ=23 m pe care se deplasează cu frecare, μ=0,05, după care sania urcă până la înălțime h_2=5 m pe un alt derdeluș cu unghiul $\alpha=45^0$. Să se afle:



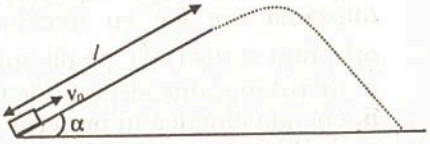
a. viteza saniei la baza primului derdeluș

b. viteza saniei la baza celui de-al doilea derdeluș

c. coeficientul de frecare pe al doilea derdeluș

d. viteza cu care revine la baza primului derdeluș

49. Un corp cu masa m=2 kg este aruncat de la sol pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$ și lungimea ℓ=3 m, cu viteza inițială v_0=10 m/s. Mișcarea se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=1/(5\sqrt{3})$. Să se afle, utilizând teorema de variație a energiei cinetice:



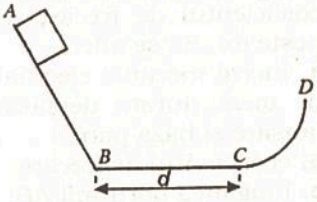
a. viteza cu care ajunge corpul în vârful planului înclinat

b. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare pe planul înclinat

c. viteza cu care ajunge corpul în planul orizontal al punctului de lansare

d. lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului de la lansare până la atingerea solului

50. Un corp cu masa m=2 kg coboară fără frecare pe un plan înclinat cu înălțimea h=1 m ca în figura alăturată. Ajugând la baza planului, corpul se deplasează cu frecare pe o suprafață plană până într-un punct C parcurgând distanța d=2 m. Coeficientul de frecare este μ=0,3. Din punctul C, corpul urcă fără frecare pe o suprafață curbă CD. Să se afle:



a. viteza corpului la baza planului înclinat

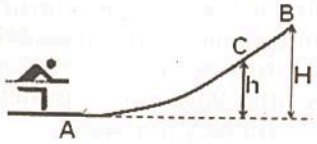
b. viteza corpului în punctul C

c. înălțimea la care urcă corpul pe suprafața CD

d. distanța față de punctul B la care se oprește corpul pe porțiunea BC

51. La o competiție de schi, sportivul aflat în poziția A trebuie să aibă o viteză minimă pentru a putea ajunge până în poziția B (vezi figura alăturată) situată la

înălțimea H=3,2 m față de porțiunea orizontală a pistei. Masa sistemului sportiv-schiuri este M=90 kg. Să se afle:

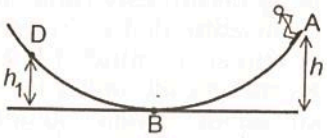


a. viteza minimă pe care trebuie să o aibă sportivul în punctul A pentru a ajunge în B, dacă s-ar neglija forțele de rezistență la înaintare

b. înălțimea h la care se află punctul C în care sportivul se oprește, dacă viteza sportivului în punctul A este v_A=8 m/s iar lucrul mecanic efectuat de rezultanta forțelor de rezistență întâmpinate de sportiv în deplasarea sa reprezintă o fracțiune f=10% din lucrul mecanic al greutății sportiv-schiuri la deplasarea din A în C

c. lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență până când sportivul ajunge la înălțimea h_D=2 m, unde viteza sa devine v_D=4 m/s dacă sportivul are în punctul A viteza v_A=8 m/s

52. În figura alăturată este reprezentată o pistă de skateboard pe care se află un sportiv având masa m=80 kg. Pornind din repaus din punctul A situat la înălțimea h=2 m față de baza pistei, sportivul trece prin punctul B al pistei cu viteza $v \approx 5{,}66$ m/s și se oprește prima dată în punctul D situat la înălțimea h_1=1,5 m față de baza pistei. Să se afle:



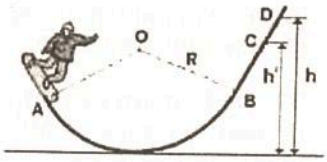
a. lucrul mecanic efectuat de greutate din punctul A până în punctul D

b. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare pe toată durata mișcării din punctul A până în punctul D

c. viteza cu care trebuie lansat sportivul în punctul A pentru a ajunge la aceeași înălțime h pe porțiunea BD dacă forța de frecare pe porțiunea AB este egală cu cea pe porțiunea BC, C fiind punctul unde se oprește corpul

d. puterea medie a forței de greutate de la punctul A la punctul B, dacă sportivul coboară între cele două puncte în intervalul de timp Δt=0,5 s

53. Pe o pistă de snowboard se află un sportiv cu masa M=70 kg care are o placă cu masa m=5 kg. În partea inferioară arcul AB este egal cu 1/3 dintr-un cerc cu raza R=4 m. Să se afle:

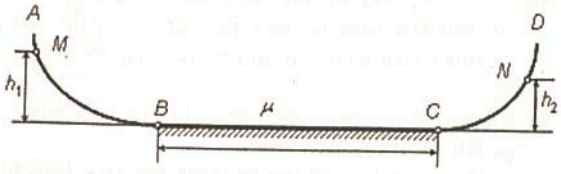


a. viteza minimă pe care trebuie să o aibă sportivul în punctul A pentru a putea ajunge în punctul D situat la înălțimea h=3 m dacă mișcarea decurge fără frecare

b. viteza minimă pe care trebuie să o aibă sportivul în punctul A pentru a putea ajunge în punctul B aflat la aceeași înălțime, dacă lucrul mecanic al forței de frecare este L_{Ff}=−2400 J

c. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare dintre talpa snowboardului și zăpadă la deplasarea din punctul A până în punctul C, dacă în punctul A sportivul are viteza inițială v_0=8 m/s și se oprește într-un punct C situat la înălțimea h'=2,5 m

54. O pistă de snowboard are forma din figură: două porțiuni curbe AB și CD, separate de o porțiune orizontală BC=d=12 m. Un sportiv cu masa m=70 kg coboară liber pe un snowboard, din punctul M al porțiunii curbe AB a pistei, punctul M aflându-se la înălțimea h_1=2,45 m. Admițând că mișcarea pe cele două porțiuni curbe AB și CD se face



fără frecare, că pe porțiunea orizontală BC coeficientul de frecare la alunecare dintre snowboard și zăpadă este μ=0,1. Să se afle:

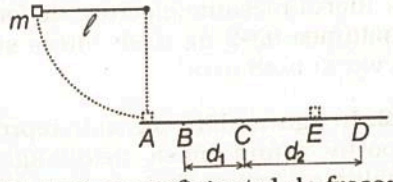
a. viteza v_C cu care trece prima dată sportivul prin punctul C

b. înălțimea h_2 a punctului N în care se oprește prima dată sportivul pe porțiunea CD a pistei

c. lucrul mecanic efectuat de forțele de frecare de la începutul mișcării sportivului și până la oprirea sa definitivă

d. distanța dintre punctul B și punctul în care se va opri definitiv sportivul

55. Un corp cu masa m=80 g este legat de un fir și lungimea ℓ=0,8 m. În poziția inițială firul este întins și orizontal, ca în figura alăturată. Corpul este lăsat liber. Când ajunge în poziție verticală, firul se rupe și corpul își continuă mișcarea pe suprafața orizontală. Pe porțiunea AB mișcarea are loc fără frecare, pe porțiunea $BC=d_1$=1 m coeficientul de frecare la alunecare este constant și are valoarea μ_1=0,3, iar pe porțiunea $CD=d_2$=5 m coeficientul de frecare crește liniar de la valoarea μ=0 în C la μ_2=0,8 în D. Corpul se oprește în punctul E. Să se afle:



a. energia mecanică a corpului în momentul în care este lăsat liber, dacă se consideră energia potențială gravitațională nulă la nivelul suprafeței orizontale

b. viteza corpului când firul ajunge în poziție verticală

c. viteza corpului în punctul C

d. distanța CE parcursă de corp până la oprire

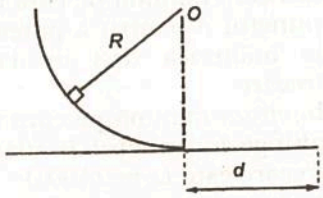
56. Un corp cu masa m=200 g se prinde de un fir inextensibil de lungime ℓ=40 cm. Se scoate corpul din poziția de echilibru până când firul formează un unghi $\alpha=60^0$ cu verticala și se lasă liber corpul. Să se afle:

a. viteza cu care trece corpul prin poziția verticală

b.energia cinetică a corpului când firul formează un unghi $\beta=30^0$ cu verticala

c*. tensiunea maximă pe care o suportă firul, dacă acesta nu se rupe

57. De la marginea superioară a unui jgheab circular vertical de forma uni sfert de cerc cu raza R=30 cm se lasă liber un corp cu masa m=100 g ca în figură. Pe jgheab mișcarea se face cu frecare iar lucrul mecanic total al acestor forțe de frecare este L_{Ff}=−0,1 J. Mișcarea corpului continuă pe un plan orizontal cu frecare, coeficientul de frecare fiind pe plabul orizontal μ=0,1. Să se afle:

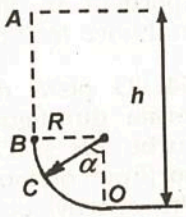


a. viteza corpului la marginea inferioară a jgheabului

b*.forța cu care apasă corpul pe jgheab în poziția inferioară a traiectoriei

c. distanța parcursă de corp pe planul orizontal până la oprire

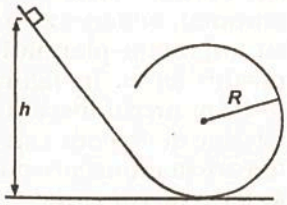
58. Un corp cu masa m=1 kg cade liber de la înălțimea h=1,5 m, măsurată față de sol pe care se află un jgheab circular BO de forma unui sfert de cerc cu raza R=50 cm ca în figură. Să se afle:



a. viteza cu care ajunge corpul pe jgheab, dacă mișcarea corpului se face fără frecare

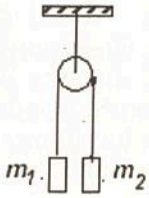
b*. forța cu care apasă corpul asupra jgheabului când poziția corpului formează unghiul $\alpha=60^0$ cu verticala și valoarea maximă a foței de apăsare, dacă mișcarea corpului pe jgheab se face fără frecare

c. lucrul mecanic al forței de frecare pe jgheab, astfel că în punctul O al jgheabului corpul se oprește

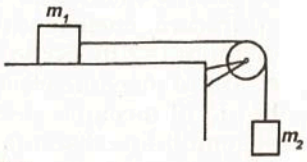


59*. Se lasă liber un corp cu masa m=200 g pe un jgeab ca în figură. Se neglijează efectul forțelor de frecare. Bucla circulară are raza R=50 cm.Să se afle:
a. viteza corpului în punctul cel mai de sus al buclei, dacă acesta nu apasă asupra jgheabului
b. înălțimea minimă de unde trebuie lăsat liber corpul pentru a putea descrie bucla
c. lucrul mecanic al unor forțe de frecare dacă corpul se lasă liber de la înălțimea H=2,5 m, iar în punctul superior corpul nu apasă asupra jgheabului

60. Un corp cu masa m=800 kg se deplasează fără frecare sub acțiunea unei forțe F, orientată pe direcția și în sensul vitezei inițiale υ_0=10 m/s a corpului. Puterea dezvoltată de forța F rămâne constantă, egală cu P=4 kW. Să se afle:
a. timpul t după care viteza corpului crește de n=4 ori
b. valoarea forței F la momentul t
c. reprezentările grafice ale dependențelor forței de viteză, respectiv a vitezei de timp



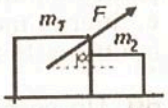
61. Două corpuri cu masele m_1=400 g și m_2=600 g se află la aceeași înălțime h=1 m față de sol fiind prinse cu un fir inextensibil cu lunginea ℓ=2,5 m trecut peste un scripete ca în figură. Se lasă sistemul de corpuri liber. Să se afle:
a. energia cinetică a sistemului de corpuri, dacă sistemul se mișcă pe distanța h_1=40 cm
b. viteza cu care corpul de masă m_2 lovește solul
c. înălțimea maximă măsurată față de sol la care ajunge corpul cu masa m_1



62. Pe o suprafață orizontală se deplasează cu frecare (μ=0,2) un corp cu masa m_1=5 kg. Corpul cu masă m_1 se leagă printr-un fir inextensibil trecut peste un scripete ca în figură de un corp cu masă m_2=3 kg. Cele două corpuri se mișcă împreună pornind din repaus pe distanța d=0,5 m și apoi firul care le leagă se rupe. Să se afle:
a. viteza sistemului înainte de ruperea firului
b. distanța parcursă până la oprire de corpul m_1 măsurată din momentul pornirii, dacă distanța de la el până la scripete este suficient de mare
c. viteza cu care ajunge la sol corpul m_2, dacă în momentul ruperii firului, acesta se află la înălțimea h=1,2 m față de sol

63. Fie sistemul din figura anterioară. Dacă se imprimă o viteză sistemului de corpuri printr-un impuls aplicat corpului cu masa m_2=20 g în jos, acesta coboară pe distanța h_1=25 cm. Dacă imprimăm sistemului aceeași viteză, imprimând un impuls corpului cu masa m_1=100 g spre stânga, corpul cu masa m_2 urcă pe distanța h_2=5 cm. Să se afle:
a. coeficientul de frecare la alunecare
b. raportul lucrurilor mecanice ale forțelor de frecare
c. spațiul până la oprire, dacă viteza inițială imprimată sistemului este υ_0=5m/s iar m_1 se mișcă spre stânga

64. Asupra unui corp cu masa m_1=2 kg aflat inițial în repaus, pe un plan orizontal, acționează o forță constantă F, a cărei direcție formează unghiul $\alpha=30^0$ cu suprafața planului. Corpul este în contact cu un al doilea corp, de masă m_2=0,5 kg ca în figura alăturată. Pentru deplasarea sistemului pe o distanță d=10 m lucrul mecanic efectuat de forța de tracțiune este de L_F=173 J, iar cel al forțelor de frecare este egal cu L_{Ff}=−15J. Ambele corpuri au același coeficient de frecare la alunecare cu planul orizontal. Să se afle:



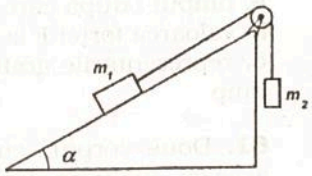
a. forța de tracțiune

b. coeficientul de frecare la alunecare dintre corpuri și suprafața orizontală

c. puterea medie disipată prin frecare de corpul cu masa m_2 pe distanța d

d. viteza sistemului de corpuri după parcurgerea unei distanțe D=20 m din momentul aplicării forței F

65. Fie sistemul de corpuri cu masele m_1=2 kg și m_2=4 kg din figură. Inițial corpul m_2 se află la înălțimea h=60 cm de sol, iar planul cu unghiul $\alpha=30^0$ se consideră suficient de lung. Corpurile pornesc din repaus, mișcarea corpului m_1 făcându-se cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 1/(3\sqrt{3})$. Să se afle:



a. viteza corpurilor când corpul m_2 ajunge la sol

b. distanța parcursă până la oprire de corpul aflat pe planul înclinat după ce corpul m_2 ajunge pe sol măsurată față de punctul de pornire

c. lucrul mecanic total efectuat de forța de frecare ce acționează asupra corpului m_1 până la oprire

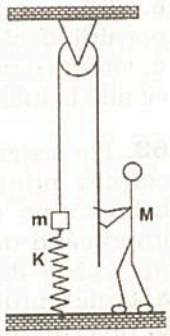
66. Fie sistemul de corpuri cu masele m_1=4 kg și m_2=2 kg aflat inițial în repaus pe planul înclinat cu unghiul $\alpha=60^0$ ca în figura precedentă. Corpul m_1 se mișcă cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,2. Lăsat liber sistemul se mișcă pe o distanță ℓ=2 m. Să se afle:

a. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare

b. lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a corpului m_2 în timpul mișcării sistemului pe distanța ℓ

c. viteza corpurilor după parcurgerea distanței ℓ

67. Un om cu masa M=80 kg menține în repaus o ladă cu masa m=20 kg prin intermediul unui fir ideal trecut peste un scripete fix, ca în figură. Între ladă și podeaua pe care stă omul este legat un resort nedeformat având constanta de elasticitate k=200 N/m. Omul trage de sfoară în jos cu scopul de a ridica lada cât mai sus. Să se afle:



a. variația energiei potențiale gravitaționale a sistemului ladă-Pământ când aceasta este ridicată pe verticală pe o distanță h=0,5 m

b. lucrul mecanic efectuat de forța elastică la alungirea resortului cu h

c. lucrul mecanic efectuat de om pentru a ridica lada legată de resort, cu viteză constantă, pe distanța h=0,5 m

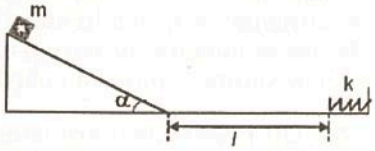
d. deformarea maximă a resortului considerând că lada este ridicată cu viteză constantă foarte mică, omul nu se desprinde de sol și scripetele se află suficient de sus, iar deformațiile se consideră elastice. Interpretați rezultatul practic.

68. Un corp de masă m=1 kg, aflat inițial în repaus, alunecă fără frecare din vârful unui plan înclinat de unghi α=30° și lungime d=10 m. Mișcarea se continuă cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare fiind μ=0,25. După ce corpul parcurge distanța ℓ=10 m, lovește un resort de constantă de elasticitate k=5000 N/m pe care îl comprimă și se oprește. Să se afle:

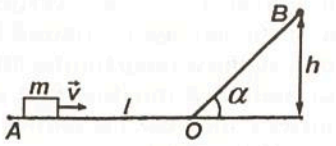
a. energia cinetică a corpului la baza planului înclinat

b. viteza corpului imediat înainte ca acesta să atingă resortul

c. comprimarea maximă a resortului, neglijând frecarea pe timpul comprimării



69. Un resort cu constanta elastică k=4 kN/m comprimat cu x=5 cm se decomprimă și lansează un corp cu masa m=100 g. Corpul își continuă mișcarea pe un plan orizontal cu lungimea ℓ=3 m și apoi pe un plan înclinat cu unghiul α=30°. Mișcarea se face cu frecare după decomprimarea resortului, coeficientul de frecare fiind peste tot μ=0,6. Să se afle:



a. viteza cu care pornește corpul după decomprimarea resortului

b. înălțimea la care urcă corpul pe planul înclinat

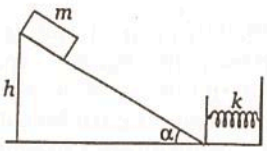
c. lucrul mecanic total al forței de frecare

70. Pe un plan înclinat cu un unghi α=30° față de orizontală alunecă liber un corp cu masa m=200 g, de la o înălțime h=2 m față de sol. Mișcarea corpului pe planul înclinat se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 1/(2\sqrt{3})$ și fără frecare pe planul orizontal La baza planului înclinat se află un resort, inițial nedeformat. cu constanta elastică k=400 N/m. Să se afle:

a. viteza corpului la baza planului înclinat

b. comprimarea maximă a resortului

c. lucrul mecanic al forței elastice



71. Un vagon de masă m=5 t se desprinde de trenul care mergea cu viteza v_0=4 m/s. După un anumit timp el se ciocnește cu tamponul unui opritor al cărui resort se comprimă cu x=10 cm. Cunoscând constanta elastică k=2 MN/m a resortului și coeficientul de frecare între șine și roțile vagonului μ=0,01, să se afle:

a. distanța totală parcursă de vagon de la desprindere până la oprire

b. viteza corpului imediat înaintea ciocnirii resortului

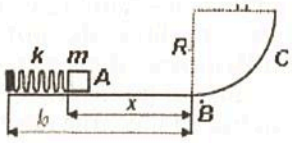
c. viteza imprimată vagonului după decomprimarea resortului

72. Un resort elastic orizontal cu constanta elastică k=100 N/m este comprimat cu x=20 cm de corpul cu masa m=2 kg ca în figura alăturată. Se lasă liber sistemul și se neglijează toate frecările. Suprafața sferică are raza R=20 cm. Să se afle:

a. viteza imprimată corpului când resortul se destinde complet

b. unghiul format cu verticala de raza construită în punctul până la care urcă corpul pe suprafața sferică

c. valoarea coeficientului de frecare cu suprafața orizontală, dacă corpul urcă fără frecare numai pe suprafața sferică pe înălțimea h=5 cm



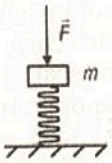
73. De pe podul de peste un râu un adept al sporturilor extreme cade liber de la înălțimea H=30 m, fiind legat de picioare cu o coardă elastică care are celălalt capăt fixat de pod. Sportivul își alege coarda elastică astfel încât viteza lui să fie nulă la înălțimea h_1=2 m deasupra apei și să fie în echilibru după amortizarea oscilațiilor la înălțimea h=10 m. Să se afle:

a. lungimea coardei în stare nedeformată

b. viteza maximă pe care o atinge sportivul

c. constanta elastică a coardei, dacă sportivul are masa m=60 kg

74. Un resort ideal are constanta elastică k=500 N/m și lungimea nedeformată ℓ_0=1 m. Resortul este comprimat de un corp cu masa m=1 kg așezat peste el ca în figură și de o forță verticală F=30 N. Să se afle:



a. forța elastică exercitată în resort

b. lungimea resortului comprimat

c. înălțimea maximă față de sol la care va urca corpul dacă acțiunea forței F încetează și corpul este aruncat din poziția în care resortul nu mai este deformat

75. O bilă cu masa m=200 g se află pe un resort vertical ca în figura de la problema precedentă. Resortul este comprimat cu x=2 cm. Dacă se apasă resortul cu o forță verticală F comprimarea resortului devine de două ori mai mare decât la început. Să se afle:

a. constanta elastică a resortului

b. valoarea forței F

c. înălțimea la care se va ridica bila după încetarea acțiunii forței F față de poziția cea mai joasă

76. Un corp cu masa m=100 g se lasă să cadă liber de la o înălțime h=40 cm măsurată față de capătul superior al unui resort vertical și ideal cu constanta elastică k=30 N/m așezat pe o masă. Să se afle:

a. viteza cu care lovește corpul resortul

b. comprimarea maximă a resortului

c. lucrul mecanic al forței elastice

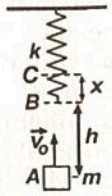
77. O bilă cu masa m=100 g este prinsă la un capăt al unui fir elastic cu lungimea nedeformată ℓ_0=40 cm și constanta elastică k=100 N/m. Celălalt capăt al firului este prins într-un punct A. Bila este ridicată în punctul A și i se dă drumul să cadă la momentul t_0=0 s. Să se afle:

a. intervalul de timp după care firul începe să se alungească

b. alungirea maximă atinsă de firul elastic în timpul căderii bilei

c. reprezentarea grafică a dependenței modulului forței elastice din fir de alungirea acestuia până când firul se alungește la maximum

78. Un corp cu masa m=1 kg este aruncat din punctul A cu viteza inițială v_0=7 m/s pe verticală în sus. În punctul B aflat la înălțimea h=2 m față de punctul A, corpul ciocnește un resort elastic, nedeformat și cu constanta elastică k=200 N/m, pe care îl comprimă. Neglijând frecările, să se afle:



a. lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului pe distanța AB

b. timpul în care corpul a străbătut distanța AB

c. comprimarea maximă a resortului în urma ciocnirii

3.4. Conservarea energiei mecanice

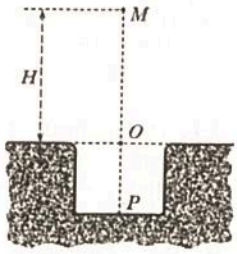
1. Un lanț de lungime ℓ=96 cm și cu masa m=2 kg se află ținut pe o masă orizontală, astfel că o pătrime din lungimea lui atârnă. Să se afle, dacă se lasă liber lanțul și se neglijează frecările lanțului cu masa:
a. viteza cu care părăsește lanțul masa
b. lucrul mecanic necesar urcării porțiunii de lanț care atârnă

2. Un corp cade liber fără frecare de la înălțimea h=100 m. Să se afle:
a. înălțimea la care energia sa cinetică este de patru ori mai mică decât energia potențială a corpului în punctul respectiv
b. viteza corpului când acesta se află la înălțimea h_C=20 m
c. înălțimea la care se ridică din nou corpul, dacă imediat după ciocnirea cu solul, energia cinetică a corpului reprezintă o fracțiune f=40% din valoarea energiei cinetice imediat înainte de ciocnire

3. O minge cu masa m=500 g aruncată vertical în sus de la sol, ajunge la înălțimea maximă h=1 m. Se neglijează efectul forțelor de frecare. Să se afle:
a. viteza inițială a mingii
b. energia mecanică a mingii la 1/4 din înălțimea maximă h, dacă la sol E_P=0
c. cu cât se va ridica mai mult mingea, dacă viteza sa inițială crește de 2 ori?

4. Un copil aruncă pe verticală, de jos în sus cu viteza inițială υ_0=4 m/s o minge cu masa m=100 g de la înălțimea h=5 m. Se neglijează efectul forțelor de frecare. Considerând că energia potențială gravitațională este nulă la nivelul solului, să se afle:
a. înălțimea maximă măsurată față de sol la care se ridică mingea
b. valoarea energiei cinetice a corpului la o pătrime din înălțimea maximă la care se ridică corpul
c. viteza cu care corpul ajunge pe sol

5. O piatră de masă m=200 g, lansată vertical în sus din punctul O aflat la nivelul solului, atinge în punctul M înălțimea maximă H=20 m, iar apoi cade într-o groapă de adâncime h=10 m, ca în figura alăturată. Frecările cu aerul se neglijează. Considerând că la nivelul solului (în punctul O) energia potențială gravitațională este nulă, să se afle:
a. viteza pietrei în momentul lansării
b. viteza pietrei atunci când piatra atinge punctul P
c. lucrul mecanic efectuat de forța de greutate pe toată durata deplasării pietrei



6. Un corp de masă m=0,5 kg este lansat de la nivelul solului, vertical în sus, cu viteza inițială υ_0=8 m/s fără frecare cu aerul. Energia potențială gravitațională este considerată nulă la nivelul solului. Să se afle:
a. înălțimea maximă măsurată față de sol atinsă de corp
b. viteza corpului în momentul în care energia sa cinetică este de trei ori mai mică decât cea potențială în punctul respectiv
c. dacă viteza cu care corpul ar atinge solul la coborâre ar fi mai mare, mai mică, sau egală cu viteza inițială υ_0, dacă frecarea cu aerul nu ar fi neglijabilă și să se justifice răspunsul

7. Un om aruncă unui copil un ghiozdan cu masa m=4 kg de la înălțimea h=7 m pe verticală de sus în jos cu viteza inițială v_0=2 m/s. Neglijând frecarea cu aerul și considerând la sol E_p=0, să se afle:
a. energia mecanică a ghiozdanului
b. viteza cu care ajunge ghiozdanul la sol
c. înălțimea de la care ar trebui să fie lăsat liber ghiozdanul dacă ajunge la sol cu aceeași viteză

8. Din vârful unui turn cu înălțimea h=75 m este aruncat în sus un corp cu masa m=2 kg și cu viteza inițială v_0=10 m/s. Considerând nivelul de referință al sistemului corp-Pământ pe sol și neglijând efectul forțelor de frecare, să se afle:
a. energia potențială corespunzătoare înălțimii maxime
b. înălțimea la care energia cinetică a corpului este de 3 ori mai mare decât energia sa potențială în punctul respectiv
c. viteza cu care corpul va atinge solul

9. Un elicopter zboară deasupra solului la înălțimea h=160 m cu viteza orizontală v_0=20 m/s. Din elicopter se lasă să cadă vertical un pachet cu masa m=1 kg. Se neglijează efectul forțelor de frecare. Să se afle:
a. reprezentarea grafică a dependenței energiei potențiale gravitaționale a pachetului în funcție de înălțimea h, dacă la sol E_p=0
b. viteza cu care lovește pachetul solul
c. viteza cu care lovește pachetul solul, dacă pachetul se aruncă oblic în jos sub unghiul α=30° față de orizontală

10. În timpul construirii unei clădiri, o macara ridică un colet cu materiale având masa m=1 t de la nivelul solului până la înălțimea h=10 m, cu viteza constantă v=0,2 m/s. Ulterior, din coletul aflat în repaus se desprinde o piesă care cade pe sol de la înălțimea h. Să se afle:
a. timpul în care este ridicat coletul, de pe sol până la înălțimea h
b. puterea dezvoltată de macara pentru ridicarea coletului cu materiale
c. viteza cu care ajunge pe sol piesa desprinsă din colet
d. timpul de cădere a piesei desprinse din colet

11. În graficul 1 este reprezentată energia cinetică a unui corp în funcție de înălțimea corpului lansat pe verticală de la sol de jos în sus. Să se afle, dacă se neglijează efectul forțelor de frecare:
a. energia potențială maximă a corpului
b. masa corpului
c. viteza corpului la înălțimea de h_1=5,2 m

12. În graficul 2 este reprezentată energia potențială a unui corp în funcție de înălțimea corpului lansat pe verticală de la sol de jos în sus. Să se afle, dacă se neglijează efectul forțelor de frecare:
a. valoarea energiei cinetice la sol
b. înălțimea la care energia cinetică este o treime din valoarea energiei potențiale în acel punct
c. viteza corpului la înălțimea de la punctul **b.**

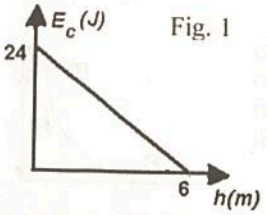


Fig. 1

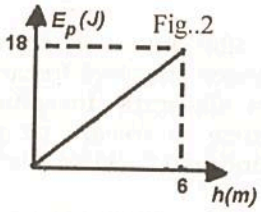


Fig..2

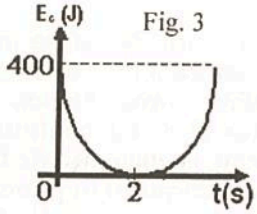


Fig. 3

13. Un corp de masă m este lansat vertical în câmp gravitațional, de jos în sus, de la nivelul solului. Energia sa cinetică variază în timp conform graficului din figura 3. Energia potențială gravitațională se consideră nulă la nivelul solului. Să se afle în lipsa frecărilor cu aerul:

a. viteza inițială a corpului

b. masa corpului

c. înălțimea maximă la care urcă corpul

d. viteza la care energia cinetică a corpului reprezintă o fracțiune f=20% din energia sa potențială în punctul respectiv

14. O bilă cu masa m=400 g este lăsat să cadă fără viteza inițială de la o înălțime h_0=1 m. Neglijăm frecările cu aerul. La ciocnirea cu o suprafață plană de oțel bila pierde f=10% din energia sa mecanică. Să se afle:

a. înălțimea h_1 la care se ridică bila după prima ciocnire

b. viteza υ_2 a bilei imediat după cea de-a doua ciocnire

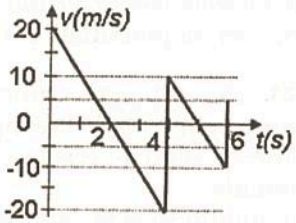
c. energia mecanică după cea de-a treia ciocnire

15. În figura alăturată este reprezentată grafic viteza unui corp cu masa m=200 g aruncat vertical de jos în sus în funcție de timp. La revenire corpul ciocnește o suprafață. Se neglijează frecările cu aerul. Să se afle:

a. înălțimea la care ajunge corpul prima dată

b. fracțiunea din energia mecanică pierdută după prima ciocnire

c. pierderea de energie mecanică după cea de-a de-a doua ciocnire

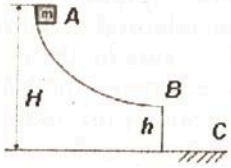


16. Pe un jgheab lucios este lăsat liber de la înălțimea H=8 m un corp cu masa m=2 kg ca în figură. În punctul cel mai coborât al jgheabului corpul părăsește jgheabul la înălțimea h=3 m. Să se afle:

a. viteza corpului în punctul cel mai coborât al jgheabului

b. viteza corpului la sol

c. viteza corpului la o înălțime egală cu f=20% din înălțimea H

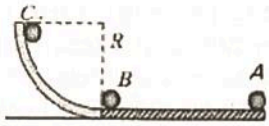


17. O bilă cu masa m=200 g este lansată din punctul A cu viteza inițială υ_0=6 m/s pe o pistă ca în figura alăturată. Pe porțiunea orizontală AB=ℓ=3 m mișcarea decurge cu frecare, μ=0,1. Pe porțiunea circulară BC cu raza R=50 cm mișcarea se face fără frecare. Să se afle:

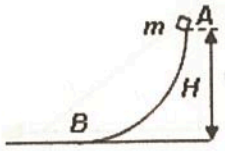
a. viteza bilei în punctul B

b. viteza cu care bila ajunge în punctul C

c. înălțimea măsurată față de punctul B la care se ridică bila



18. Un corp de masă m=1 kg, aflat inițial în repaus la înălțimea H=5 m, este lăsat să alunece liber fără frecare pe o suprafață curbă AB, ca în figura alăturată. Începând din punctul B el își continuă mișcarea cu frecare pe planul orizontal, coeficientul de frecare fiind μ=0,2. Să se afle:



a. viteza corpului în punctul B
b. lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la mișcarea între punctele A și B
c. distanța BC, astfel încât în punctul de pe suprafața orizontală C energia mecanică totală a acestuia este egală cu un sfert din energia mecanică totală inițială

19. Un corp se aruncă de la sol sub un unghi $\alpha=30^0$ cu viteza inițială v_0=10 m/s. Să se afle:
a. componentele vectorului viteză pe axele de coordonate Ox (orizontală) și Oy (verticală)
b. înălțimea maximă la care poate ajunge corpul
c. viteza corpului în punctul cel mai înalt al traiectoriei
d. lucrul mecanic al forței de greutate din momentul lansării și până când corpul atinge solul

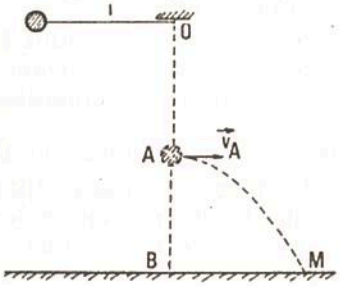
20. O minge este aruncată sub unghiul $\alpha=45^0$ și are energia cinetică în punctul cel mai înalt al traiectoriei E_C=45 J. Neglijând efectul forțelor de frecare cu aerul, să se afle:
a. energia cinetică în punctul de lansare
b. energia cinetică când mingea formează cu orizontala un unghi $\beta=30^0$
c. energia potențială când mingea formează cu orizontala un unghi $\beta=30^0$

21. Un corp este aruncat în câmp gravitațional cu viteza inițială v_0=6 m/s sub un unghi $\alpha=60^0$. Presupunând că mișcarea se produce fără frecare, să se afle atunci când energia cinetică reprezintă fracțiunea f=0,64 din energia cinetică inițială:
a. înălțimea A la care se află corpul
b. cosinusul unghiului β făcut de vectorul viteză cu orizontala în punctul A
c. energia potențială maximă, dacă masa corpului este m=500 g

22. De la înălțimea h=30 m se aruncă orizontal un corp cu masa m=200 g și viteza inițială v_0=10 m/s. Neglijând efectul forțelor de frecare cu aerul și considerând la sol valoarea zero pentru energia potențială, să se afle:
a. energia totală a corpului
b. energia cinetică și energia potențială când viteza corpului formează cu orizontala un unghi $\alpha=60^0$
c. viteza cu care corpul lovește solul

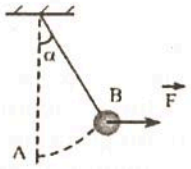
23. Dintr-un turn cu înălțimea h=15 m se lansează un corp cu masa m=500 g și viteza inițială v_0=10 m/s sub un unghi $\alpha=30^0$ față de orizontală și deasupra acesteia. Să se afle, dacă neglijăm efectul forțelor de frecare cu aerul și dacă se consideră la sol valoarea zero pentru energia potențială:
a. energia totală a corpului
b. înălțimea maximă la care urcă corpul
c. viteza cu care corpul lovește solul
d. cosinusul unghiului format de vectorul viteză și orizontală când corpul ajunge la sol

24. Un corp cu masa m=1 kg este legat de un fir inextensibil cu lungimea ℓ=80 cm şi deviat faţă de verticală cu un unghi α=90° ca în figură, după care se lasă liber. Se neglijează efectul forţelor de frecare. Punctul de suspensie a firului se află la înălţimea h=1,8 m faţă de sol. În momentul trecerii prin poziţia verticală OA firul se rupe. Să se afle, dacă se consideră că la sol corpul nu are energie potenţială:



a. energia mecanică a corpului
b. energia cinetică la trecerea prin poziţia verticală
c. viteza cu care loveşte corpul solul
d*. tensiunea de rupere

25. La capătul unui fir inextensibil de lungime ℓ=20 cm este fixată o bilă cu masa m=50 g. Se acţionează asupra bilei cu o forţă F orizontală, astfel încât bila este adusă din poziţia A, în poziţia B conform figurii alăturate. În poziţia B bila este în repaus iar firul formează cu verticala unghiul α=60°. Să se afle:



a. forţa F necesară menţinerii bilei în poziţia B
b. tensiunea din firul de care este legată bila în poziţia B
c. viteza cu care trece bila prin poziţia A, după ce este lăsată liber din poziţia B

26. De un fir inextensibil cu lungimea ℓ=45 cm este prins un corp cu masa m=200 g care se află iniţial în poziţie verticală. Se imprimă corpului o viteză perpendiculară pe fir v_0=5 m/s. Neglijând efectul forţelor de frecare, să se afle:
a. viteza avută de corp când firul devine orizontal
b. înălţimea la care se ridică corpul dacă firul se rupe când firul devine orizontal, măsurată faţă de poziţia iniţială
c. lucrul mecanic efectuat de forţa de tensiune şi de forţa de greutate în timpul mişcării corpului

27. Un corp cu masa m=100 g este suspendat de un fir cu lungimea ℓ=40 cm şi deviat faţă de verticală cu un unghi α=60°. I se imprimă corpului în acel punct o viteză perpendiculară pe fir astfel încât corpul să se poată ridica până în dreptul punctului de suspensie. Neglijând efectul forţelor de frecare, să se afle:
a. viteza imprimată corpului iniţial
b. viteza cu care trece corpul prin poziţia verticală
c. energia iniţială a corpului

28. Un corp punctiform cu masa m=100 g este suspendat de un fir inextensibil cu lungimea ℓ=40 cm. Firul este menţinut deviat faţă de verticală cu unghiul α=60°. Pe verticala de susţinere se aşază o piedică. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:
a. înălţimea măsurată faţă de punctul de susţinere la care trebuie pusă piedica, pentru ca atunci când se eliberează corpul, firul să poată să devină orizontal
b. viteza cu care trece corpul prin poziţia verticală
c.lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate pe parcursul mişcării corpului

29. Un corp cu masa m=1 kg, aflat iniţial în repaus, este suspendat de un fir inextensibil şi de masă neglijabilă având lungimea ℓ=1 m. Firul este scos din poziţia de echilibru şi adus sub un unghi α=60° faţă de verticală, după care este lăsat liber. Se consideră că energia potenţială gravitaţională este nulă în poziţia de echilibru. Să se afle:

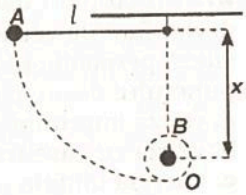
a. lucrul mecanic efectuat de forța de greutate în timpul revenirii corpului în poziția de echilibru
b. valoarea vitezei corpului la trecerea prin poziția de echilibru
c. înălțimea față de poziția de echilibru la care energia cinetică a corpului este egală cu energia sa potențială gravitațională

30. O bilă cu masa m=100 g suspendată pe un fir vertical cu lungimea ℓ=90 cm este deviată cu un unghi $\alpha=60^0$ față de verticală. Se lasă liberă bila și se neglijează efectul forțelor de frecare. Să se afle:
a. viteza cu care trece bila prin poziția de echilibru
b. viteza bilei când firul formează cu verticala unghiul $\beta=30^0$
c*. tensiunea în fir atunci când firul formează cu verticala unghiul β și să se particularizeze pentru $\beta=60^0$, 30^0 și 0^0

31*. De cablul unei macarale se află suspendat un corp cu masa m=20 kg. Neglijăm efectul forțelor de frecare. Dacă începe să bată vântul, să se afle:
a. viteza maximă a corpului în poziția verticală, dacă tensiunea de rupere este dublul greutății corpului și lungimea cablului este ℓ=10 m
b. unghiul maxim format de cablul care susține corpul cu verticala în condițiile punctului **a.**
c. tensiunea minimă în cablul de susținere când firul trece prin poziția de echilibru, dacă corpul reușește să realizeze o mișcare circulară în planul vertical

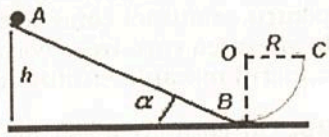
32. Unui fir cu lungimea ℓ=50 cm aflat în poziție verticală de care este suspendat un corp cu masa m=200 g i se imprimă perpendicular pe fir o viteză v_0=10 m/s. Corpul este capabil să descrie un cerc în plan vertical. Se neglijează frecarea cu aerul și se consideră nulă energia potențială în poziția inițială. Să se afle:
a. energia inițială a corpului
b. viteza corpului în poziția verticală superioară a traiectoriei
c*. tensiunea în fir în poziția superioară a traiectoriei

33*. Un corp de masă m=1 kg este suspendat de un fir inextensibil de lungime ℓ=45 cm. Se scoate corpul din poziția de echilibru și se aduce firul orizontal ca în figura alăturată. Apoi se lasă liber corpul. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:



a. viteza cu care corpul trece prin poziția verticală
b. la ce distanță x, măsurată pe verticală față de punctul de suspensie, trebuie imobilizat firul, astfel încât corpul să fie capabil să descrie un cerc cu raza ℓ-x în plan vertical
c. lucrul mecanic efectuat de forța de greutate din punctul de plecare până când corpul ajunge în punctul superior al traiectoriei circulare

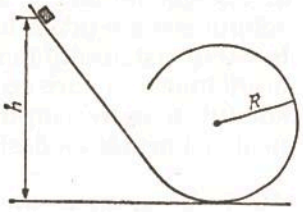
34. Un corp de masă m=500 g parcurge traseul din figura alăturată, format dintr-o porțiune rectilinie AB, înclinată față de orizontală sub un unghi $\alpha=45^0$, racordată lin cu o porțiune circulară BC de rază R=1 m. Corpul pornește din repaus, mișcarea are loc fără frecare, lungimea porțiunii liniare este $AB=4\sqrt{2}$ m, iar porțiunea circulară are forma unui sfert de cerc. Energia potențială gravitațională se consideră nulă în punctul B. Să se afle:



a. viteza v_B a corpului în punctul B

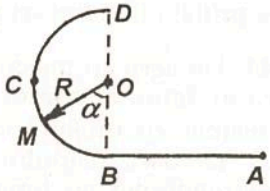
b. lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la deplasarea acestuia între punctele *A* şi *C*
c. energia cinetică a corpului când acesta ajunge în punctul *C*
d. înălţimea, măsurată faţă de punctul *B*, la care energia cinetică este egală cu energia potenţială

35*. Un montagne-rousse cu masa m=820 kg ajunge în vârful unui dâmb. De acolo coboară fără frecare pe un jgheab şi descrie o buclă în plan vertical cu raza R=4 m mişcându-se fără frecare ca în figură. Să se afle:



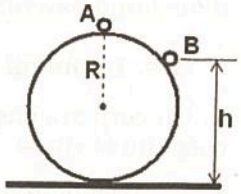
a. înălţimea minimă de la care trebuie să coboare corpul pentru ca să poată să descrie jgeabul
b. viteza montagne-rousse-ului în punctul cel mai înalt al traiectoriei circulare, dacă în vârful dâmbului viteza acestuia este v=3 m/s
c. apăsarea exercitată de montagne-rousse în punctul superior al traiectoriei circulare, în condiţiile punctului **b.**

36*. Un jgheab orizontal se continuă cu un alt jgheab semicircular vertical *BCD* de rază R=50 cm, situat în plan vertical. Se trimite din punctul *A*, ca în figura alăturată, în direcţie orizontală un corp de masă m=200 g. Mişcarea se face fără frecare. Să se afle:



a. viteza pe care trebuie să o aibă corpul în *A* pentru a fi capabil să descrie semicercul *BCD*
b. forţa de apăsare exercitată de corp asupra jgheabului într-un punct în care poziţia corpului formează unghiul $\alpha=60^0$ cu verticala
c. viteza cu care loveşte corpul jgheabul orizontal după desprinderea de jgheabul semicircular
d. cosinusul unghiului pe care vectorul viteză îl formează cu orizontala când corpul loveşte jgheabul orizontal

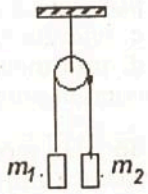
37. Un corp de mici dimensiuni, cu masa m=20 g, este lăsat să alunece liber, din punctul cel mai înalt *A* al unei sfere fixe cu raza de R=48 cm, ca în figura alăturată. În punctul *B*, situat la înălţimea h=80 cm faţă de sol, corpul încetează să mai apese asupra sferei şi îşi continuă căderea spre suprafaţa solului. Energia potenţială gravitaţională se consideră nulă la nivelul solului. Neglijând frecările, să se afle:



a. lucrul mecanic efectuat de greutate la deplasarea corpului din *A* în *B*
b. viteza corpului în momentul desprinderii de sferă
c. viteza corpului în momentul în care acesta atinge solul
d. energia totală a corpului când acesta se află faţă de sol la o înălţime egală cu raza sferei

38*. Din vârful unei sfere care se sprijină pe sol, cu raza R=1,2 m se lasă liber un corp de mici dimensiuni care alunecă pe sferă fără frecare ca în figura precedentă. La un moment dat corpul se desprinde de pe sferă. Să se afle:
a. viteza corpului în momentul desprinderii de pe sferă
b. înălţimea faţă de suprafaţa de sprijin a sferei la care se desprinde corpul
c. viteza corpului în momentul în care acesta atinge solul

39. Peste un scripete ideal este trecut un fir inextensibil care susține două corpuri cu masele m_1=4 kg și m_2=6 kg ținute inițial în repaus la aceeași înălțime față de sol H=1 m ca în figură. Se lasă liber sistemul și se consideră firul suficient de lung, astfel încât corpul 1 să nu ajungă la scripete. Să se afle:



a. energia inițială a sistemului dacă se consideră că la nivelul solului energia potențială este nulă

b. viteza sistemului în momentul când corpul mai greu atinge solul

c. înălțimea la care se oprește corpul 1 față de sol, dacă din momentul atingerii solului de către corpul 2, corpul 1 își continuă mișcarea pe verticală după ce firul ce-l prinde se desface

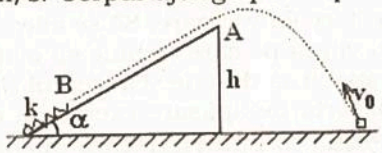
40. Sub acțiunea unei forțe elastice F_1=50 N un resort se comprimă cu x_1=10 cm. Să se afle:

a. constanta elastică a resortului

b. lucrul mecanic efectuat de forța elastică în procesul comprimării cu x_1

c. viteza unui corp cu masa m=50 g, dacă acest corp este pus în mișcare pe o suprafață fără frecări prin destinderea completă a resortului

41. Un corp cu masa m=100 g este lansat de pe un plan orizontal sub un unghi ca în figura alăturată și cu viteza inițială v_0=10 m/s. Corpul ajunge pe un plan înclinat cu unghiul α=30° și cu înălțimea h=3 m. La baza planului se află un resort inițial necomprimat cu lungimea inițială ℓ_0=1,2 m și cu constanta elastică k=1 kN/m care oprește corpul. Mișcarea corpului pe planul înclinat se efectuează cu frecare până când corpul lovește resortul, coeficientul de frecare fiind $\mu=1/(2\sqrt{3})$, și apoi se efectuează fără frecare. Să se afle:



a. viteza corpului în punctul A

b. viteza corpului în punctul B în care corpul lovește resortul

c. lungimea resortului comprimat

d. distanța parcursă de corp pe planul înclinat după destinderea resortului

3.4. Impulsul punctului material. Teorema de variație a impulsului

1. Un corp are energia cinetică este E_c=8 J și impulsul p=1,6 Ns. Să se afle masa corpului și viteza acestuia.

2. O particulă în mișcare are impulsul p și energia cinetică E_C. Să se afle de câte ori crește energia cinetică a particulei dacă se triplează impulsul particulei.

3. Viteza unui corp cu masa m=500 g depinde de timp după legea v=20-5t, unde timpul t este în secunde și viteza v în m/s. Să se afle după t_1=2 s de la începerea mișcării impulsul corpului și variația corespunzătoare a impulsului acestuia.

4. Legea de mișcare a unui corp cu masa m=1 kg este x(m)=4−8t+6t^2, iar t în secunde. Să se afle variația impulsului după t=2 s de la începerea mișcării.

5. Un corp cu masa m=200 g pornește cu viteza inițială v_0=2 m/s într-o mișcare uniform accelerată cu accelerația a=2 m/s². Să se afle impulsul corpului după t=4 s de la începerea mișcării.

6. O minge cu masa m=400 g cade liber de la înălțimea h=5 m. Să se afle impulsul cu care loveşte mingea solul. Se neglijează frecarea cu aerul.

7. O minge de ping-pong cu masa m=14,1 g este lansată vertical în sus cu viteza inițială υ_0=17,3 m/s. Să se afle impulsul mingii la 1/3 din înălțimea maximă la care poate ajunge aceasta. Se neglijează frecarea cu aerul.

8. De pe o masă orizontală cade un pahar cu masa m=200 g împins de un copil cu viteza υ_0=2 m/s. Să se afle impulsul corpului după t=0,1 s de la desprinderea de masă.

9. O ventuză jucărie cu masa m=50 g este lansată sub un unghi α=60^0 față de orizontală de la sol cu viteza inițială υ_0=10 m/s. Să se afle impulsul ventuzei după trecerea unei secunde de la începerea mişcării.

10. Un atlet cu masa m=80kg aleargă cu viteza υ=8 m/s pe o pistă circulară. Să se afle variația impulsului său între două puncte diametral opuse ale pistei şi între două puncte după ce atletul a parcurs un sfert de pistă.

11. Asupra unui corp cu masa m=1 kg aflat pe o suprafață pe care se poate mişca fără frecare, acționează o forță care depinde de timp conform graficului din figura 1. Să se afle viteza corpului la sfârşitul celei de-a patra secunde de la începerea mişcării dacă corpul porneşte din repaus.

12. În graficul din figura 2 forța depinde de timp. Această forță acționează asupra unui corp cu masa m=2 kg şi care are viteza inițială υ_0=5 m/s pe direcția şi în sensul vitezei. Să se afle valoarea finală a vitezei după trecerea timpului t=5s.

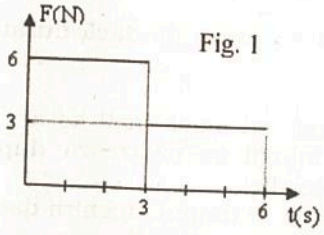


Fig. 1

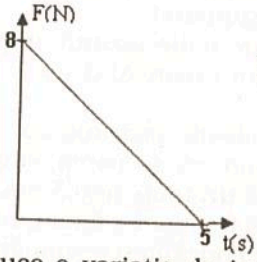


Fig. 2

13. Asupra unui corp se produce o variație de impuls de Δp=800 kgm/s sub acțiunea unei forțe F=50 N. Să se afle timpul în care trebuie să acționeze această forță pentru a se produce această variație de impuls.

14. O minge aflată inițial în repaus, cu masa m=1 kg are după lovire o viteză υ=10 m/s. Să se afle forța medie de lovire, dacă durata lovirii este Δt=0,1 s.

15. Un glonte cu masa m=50 g se trage dintr-o armă cu viteza inițială υ_0=400 m/s. Să se afle forța medie de rezistență întâmpinată de glonte, dacă glontele străbate substanța pe orizontală şi iese cu viteza υ=100 m/s după un timp t=20ms.

16. Să se afle forța de frânare ce trebuie aplicată unui tren cu masa m=800t, care se mişcă cu viteza υ_0=54 km/h pentru a-l opri în timpul Δt=60 s.

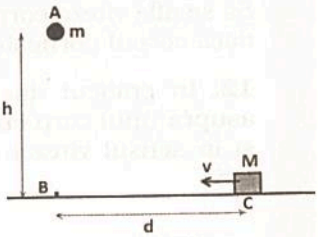
17. O maşină cu masa m=800 kg frânează într-un interval de timp Δt=20 s, pornind de la viteza inițială υ_0=108 km/h şi ajungând la viteza υ=36 km/h pentru a intra într-o curbă. Să se afle valoarea medie a forței de frânare.

18. Un corp cu masa m=400 g este lansat pe un plan orizontal cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,1, cu viteza inițială v_0=10 m/s. Să se afle impulsul corpului după t=6 s de la începerea mișcării.

19. Un corp cu masa m=100 g cade liber un sfert de minut de la o înălțime convenabilă. Să se afle variația impulsului corpului.

21. Asupra unui corp care se deplasează cu viteza constantă v_0=1 m/s pe un plan orizontal fără frecare începe să acționeze pe direcția vitezei și în sensul mișcării forța constantă F=1 N. După intervalul de timp Δt=2 s energia cinetică a corpului crește cu ΔE_c=4 J. Să se afle:
a. viteza corpului după Δt de la începerea mișcării
b. masa corpului
c. variația impulsului corpului în intervalul de timp Δt după începerea acțiunii forței

22. Doi elevi efectuează un experiment. Unul dintre ei lasă să cadă liber din punctul A, aflat la o înălțimea h=20 m deasupra punctului B, aflat pe sol, o bilă cu masa m=0,2 kg. Celălalt imprimă unei cutii aflate pe sol în punctul C, la distanța d=4 m de punctul B, o viteză orizontală astfel încât cutia să se deplaseze pe suprafața solului, să se oprească în punctul B, iar bila să cadă în cutie. Masa cutiei este M=1 kg iar coeficientul de frecare la alunecare între cutie și sol este μ=0,2. Să se afle:

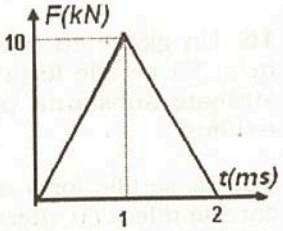


a. viteza cu care ajunge bila la nivelul solului
b. lucrul mecanic efectuat de forța de frecare care acționează asupra cutiei din punctul C până în punctul B
c. viteza imprimată cutiei în punctul C
d. modulul forței exercitate de cutie asupra corpului cu masa m, dacă durata interacțiunii până la oprirea lui m este Δt=1 ms

23. Un copil lovește perfect elastic podeaua cu o minge cu masa m=2 kg și cu viteza v_0=5 m/s. Considerând că valoarea vitezei mingii se păstrează după ciocnire, iar ciocnirea durează un timp Δt=0,5 ms, să se afle:
a. forța medie cu care podeaua acționează asupra mingii în timpul ciocnirii dacă mingea lovește perpendicular podeaua și se întoarce pe aceeași direcție
b. forța medie cu care podeaua acționează asupra mingii în timpul ciocnirii, dacă mingea lovește oblic podeaua sub un unghi α=30° față de ea și ricoșează sub același unghi

3.6. Ciocniri plastice și elastice

1. Un corp cu masa m=1 kg și viteza v=15 m/s lovește un corp cu masa M=5 kg aflat inițial în repaus. Ciocnirea este unidimensională, iar forța de interacțiune dintre corpuri este reprezentată în figura alăturată. Să se afle:



a. energia cinetică inițială a sistemului
b. vitezele corpurilor imediat după ciocnire
c. pierderea de energie cinetică a sistemului

2. Două corpuri cu masele m_1=4 kg și m_2=2 kg se mișcă unul spre celălalt cu vitezele imediat înainte de ciocnire v_1=4 m/s și v_2=2 m/s. După ciocnire

corpurile se mişcă împreună până la oprire, mişcarea făcându-se cu frecare (μ=0,1). Să se afle:
a. viteza corpului format imediat după ciocnire
b. căldura degajată în ciocnirea plastică
c. timpul de deplasare până la oprire măsurat din momentul formării corpului

3. Două corpuri cu mase egale m=4 kg se deplasează de-a lungul aceleaşi drepte orizontale unul spre celălalt cu viteze egale. Energia cinetică totală a mişcării lor relative este E_{Crel}=100 J. Corpurile se ciocnesc plastic. Să se afle:
a. viteza comună a corpului nou format după ciocnire
b. vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire
c. căldura degajată la ciocnirea corpurilor

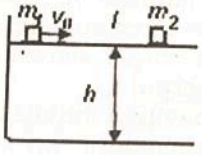
4. Un glonte cu masa m=10 g care se deplasează pe orizontală cu viteza υ_0=200 m/s intră şi rămâne într-un bloc de lemn cu masa M=990 g aflat iniţial în repaus. Coeficientul de frecare dintre bloc şi suprafaţa orizontală este μ=0,1. Să se afle:
a. viteza sistemului imediat după ciocnire
b. căldura degajată în urma ciocnirii
c. distanţa parcursă de sistem până la oprire

5. Un proiectil cu masa m_1=2 g deplasându-se pe orizontală cu viteza υ_1=500 m/s stăbate un bloc de lemn cu masa m_2=1 kg aflat iniţial în repaus pe o suprafaţă orizontală şi iese din acesta cu viteza v'_1=100 m/s. Considerând neglijabilă deplasarea blocului în timpul interacţiunii cu proiectilul şi ştiind că blocul alunecă până la oprire pe distanţa d=20 cm, să se afle:
a. coeficientul de frecare dintre bloc şi suprafaţă
b. energia cinetică pierdută de proiectil
c. energia cinetică a blocului imediat după trecerea proiectilului

6. Un vagon cu masa m_1=10 t se deplasează pe o cale ferată orizontală cu viteza iniţială υ_0=7 m/s. După un timp Δt=10 s, vagonul se ciocneşte şi se cuplează cu un al doilea vagon cu masa m_2=20 t, aflat în repaus. În timpul mişcării, atât inainte cât şi după ciocnire, asupra vagoanelor se exercită forţe de frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,01. Să se afle:
a. viteza primului vagon imediat înainte de ciocnire
b. viteza comună a vagoanelor după cuplare şi căldura degajată prin ciocnire
c. spaţiul parcurs de vagoane până la oprire

7. Două corpuri cu masele m_1=8 kg şi m_2=2 kg se află la distanţa d=112,5m unul de celălalt. Corpurile se deplasează unul spre celălalt pe o suprafaţă orizontală, cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,2. Se imprimă corpurilor simultan vitezele υ_{01}=20 m/s şi υ_{02}=30 m/s. Să se afle:
a. timpul după care se ciocnesc
b. distanţa parcursă de corpul nou format, dacă ciocnirea corpurilor a fost plastică
c. variaţia energiei cinetice produsă la ciocnirea corpurilor

8. Două corpuri cu masele m_1=1 kg şi m_2=250 g sunt aşezate la o distanţă ℓ=2,4 m unul de altul pe o platformă fixă, aflată la înălţimea h=ℓ de suprafaţa Pământului. Corpul cu masa m_2 se află exact la marginea platformei ca în figura alăturată. Primul corp porneşte cu viteza iniţială υ_0=7 m/s spre corpul aflat la marginea platformei şi îl ciocneşte plastic. Coeficientul



de frecare la alunecare dintre corpul 1 şi platformă este μ=0,5. Să se afle:
a. viteza primului corp imediat înainte de ciocnire
b. viteza corpului nou format prin ciocnire
c. impulsul noului corpul în momentul în care acesta atinge suprafaţa pământului

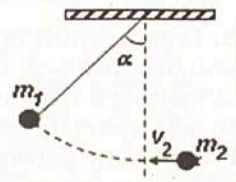
9. Un elev aflat într-un turn, la înălţimea h=20m faţă de sol, aruncă vertical în sus, cu viteza υ_0=10m/s, un corp cu masa m=200 g. Energia potenţială gravitaţională a sistemului corp-Pământ se consideră nulă la nivelul solului. Să se afle:
a. momentul de timp la care impulsul corpului se anulează
b. lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului din momentul aruncării acestuia şi până la anularea impulsului
c. energia potenţială gravitaţională în momentul în care viteza corpului are valoarea υ_1=20m/s
d. variaţia impulsului corpului din momentul aruncării şi până la atingerea vitezei υ_1

10. O broască cu masa m=200 g stă pe o scândură cu masa M=800 g care pluteşte pe un lac liniştit. La un moment dat broasca sare cu viteza υ_0=10 m/s sub un unghi α=30^0 faţă de orizontală. Să se afle:
a. forţa cu care apasă broasca pe scândură atunci când broasca sare, dacă durata săriturii broaştei este Δt=1 ms
b. viteza scândură imediat după ce sare broasca
c. energia cinetică a sistemului imediat după ce sare broasca

11. Mişcările rectilinii a două corpuri de mase m_1=1 kg şi m_2=3 kg sunt descrise de legile $x_1=2+t$ şi $x_2=4-3t$, unde coordonata x este exprimată în metri şi timpul t este în secunde. Considerând că în momentul întâlnirii celor două corpuri acestea suferă o ciocnire plastică, să se afle:
a. vitezele corpurilor în momentul întâlnirii
b. energia cinetică a sistemului imediat după ciocnire
c. legea de mişcare a corpului nou format, timpul fiind măsurat din momentul formării corpului

12. Legile de mişcare rectilinii a două corpuri cu masele $m_1=m_2=m$=500 g sunt $x_1=10+2t$ şi $x_2=-10+2t+5t^2$. Ştiind că cele două corpuri se ciocnesc plastic, să se afle:
a. vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire
b. viteza corpului nou format imediat după ciocnire
c. căldura degajată în ciocnire

13. Una din metodele utilizate în practică de măsurare a vitezei proiectilelor constă în folosirea unui pendul balistic. Acesta este un corp de lemn cu masa M suspendat cu ajutorul unui fir lung şi inextensibil. Iniţial pendulul se află în repaus. Un proiectil cu masa m loveşte orizontal corpul din lemn şi rămâne încastrat, făcând ca pendulul şi proiectilul să se ridice la înălţimea h. Dacă M=2 kg, m=10 g, h=20 cm şi negijăm frecarea cu aerul, să se afle:

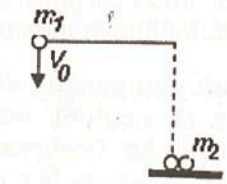


a. viteza sistemului imediat după ciocnirea proiectilului cu corpul
b. viteza iniţială a proiectilului
c. căldura care se degajă în procesul ciocnirii

14. Un corp cu masa m_1=1 kg este legat de un fir inextensibil cu lungimea ℓ=40 cm şi deviat faţă de verticală cu un unghi α=60°, după care se lasă liber. Când trece prin poziţia verticală primul corp este ciocnit plastic de un corp cu masa m_2=0,5 kg, care se deplasează în sens opus ca în figură, astfel că după ciocnire corpul nou format rămâne în echilibru în poziţia verticală. Să se afle:
a. viteza cu care trece primul corp prin poziţia verticală
b. viteza corpului al doilea
c. căldura cedată în procesul ciocnirii plastice

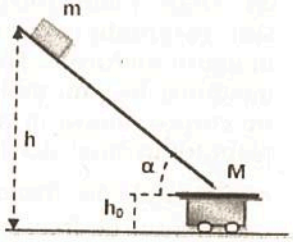
15. Un corp cu masa m_1=2 kg este suspendat de un fir cu lungimea ℓ=1,6 m. Firul este deviat cu unghiul α=60° faţă de verticală şi apoi este lăsat liber. Neglijăm efectul forţelor de frecare. Când sfera trece prin poziţia de echilibru ea se ciocneşte plastic cu un alt corp cu masa m_2=100 g care se deplasează în sens opus primului corp. După ciocnirea plastică corpurile deviază cu un unghi β=30° faţă de verticală. Să se afle:
a. viteza cu care trece primul corp prin poziţia verticală
b. viteza iniţială a celui de-al doilea corp
c. căldura degajată în procesul de ciocnire

16. Un corp cu masa m_1=800 g este suspendat de un fir inextensibil întins şi de lungime ℓ=1,6 m, aflat iniţial în poziţie orizontală ca în figură. După ce corpului cu masă m_1 i se imprimă o viteză iniţială verticală în jos, v_0=2 m/s acesta ciocneşte perfect plastic un corp cu masa m_2=400 g aflat iniţial în repaus. Să se afle:

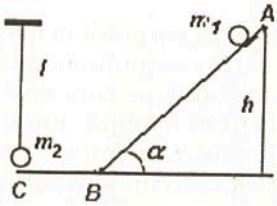


a. viteza primului corp imediat înainte de ciocnire
b. unghiul pe care-l face firul cu verticala atunci când corpul format prin ciocnire ajunge la înălţimea maximă
c. raportul dintre energiile mecanice ale sistemului înainte şi după ciocnire

17. Un sac cu masa m=10 kg, aflat iniţial în repaus la înălţimea h=16 m faţă de suprafaţa solului, alunecă pe un jgheab înclinat cu unghiul α=30° faţă de orizontală. Capătul inferior al jgheabului se află la înălţimea h_0=1 m faţă de sol. La baza jgheabului se află un vagonet de masă M=50 kg, aflat iniţial în repaus, ca în figura alăturată. Când ajunge la baza jgheabului, cu viteza v=10 m/s, sacul cade pe platforma vagonetului. După impact sacul rămâne pe vagonet. Să se afle:
a. lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare dintre sac şi jgheab
b. mărimea forţei de frecare la alunecare dintre sac şi jgheab
c. valoarea vitezei pe care o capătă vagonetul după căderea sacului pe platforma vagonetului
d. forţa dezvoltată de vagonet în timpul Δt=2 ms cât durează interacţiunea sac vagonet până la oprirea sacului



18. Din punctul de înălţime maximă al unui plan înclinat AB cu înălţimea h=0,8 m şi cu unghiul α=45° se lasă liber un corp cu masa m_1=2 kg ca în figură. Din punctul B corpul îşi continuă mişcarea pe suprafaţa orizontală până întâlneşte corpul C aflat în repaus şi cu masa m_2=3 kg. Ciocnirea corpurilor este



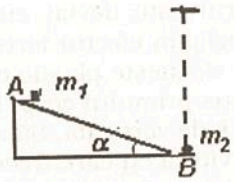
perfect plastică. Cunoscând lungimea firului ℓ=50 cm şi neglijând efectele forţelor de frecare, să se afle:

a. viteza corpului imediat înainte de ciocnire

b. viteza corpului format imediat după ciocnire

c. cosinusul unghiului maxim la care este deviat firul faţă de verticală după ciocnire

19. Pe un plan înclinat cu lungimea ℓ=5 m şi înăţimea h=3 m se lansează de sus în jos de-a lungul planului un corp m_1=2 kg cu viteza $v_0=2\sqrt{5}$ m/s. Mişcarea corpului se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,2. La baza planului înclinat corpul m_1 ciocneşte perfect plastic un corp cu masa $m_2=4m_1$ prins de un fir vertical cu lungimea ℓ'=1 m şi aflat în repaus. Să se afle:



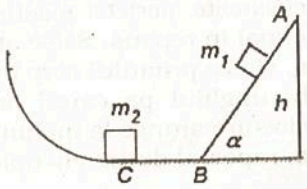
a. energia mecanică a corpului în vârful planului înclinat

b. energia mecanică a corpului m_1 la baza planului înclinat şi justificaţi diferenţa faţă de cea de la punctul **a.**

c. viteza corpului nou format imediat după ciocnirea perfect plastică

d. înălţimea maximă la care se ridică corpul nou format

20. Din punctul de înălţime maximă al unui plan înclinat AB cu înălţimea h=3 m şi cu unghiul $\alpha=30^0$, se lasă liber un corp cu masa m_1=2 kg. Coeficientul de frecare la alunecare pe plan este $\mu_1=1/(2\sqrt{3})$. Din punctul B corpul m_1 îşi continuă mişcarea cu frecare pe planul orizontal BC=2 m, coeficientul de frecare la alunecare pe plan fiind μ_2=0,35. În punctul C ciocnirea corpului cu un alt corp cu masa m_2=3 kg aflat la baza unui jgheab circular este perfect plastică. Mişcarea sistemului de corpuri pe jgheab se face fără frecare. Să se afle:

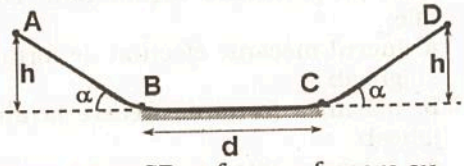


a. viteza corpului imediat înainte de ciocnire

b. căldura degajată la ciocnirea celor două corpuri

c. înălţimea maximă la care se ridică sistemul de corpuri pe jgheab

21. Două plane înclinate de unghi $\alpha=30^0$ sunt racordate la o suprafaţă orizontală, ca în figura alăturată. Din punctul A, situat la înălţimea h=1 m, se lasă liber, din repaus, un corp cu masa m care alunecă spre baza planului înclinat AB. Mişcarea pe planele înclinate AB şi CD se face cu frecare cu coeficientul de frecare $\mu=0{,}2/\sqrt{3}$, iar pe porţiunea orizontală $BC=d$=1 m coeficientul de frecare la alunecare este μ'=0,1. În punctul B corpul cu masa m se cuplează plastic cu un alt corp cu masa $m'=m/3$ aflat iniţial în repaus. Să se afle:



a. viteza corpului m la baza planului înclinat

b. viteza corpului nou format în punctul B

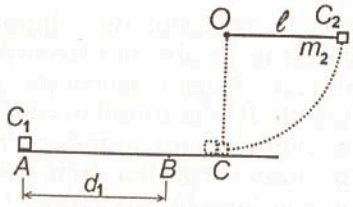
c. distanţa pe care urcă corpul nou format pe planul înclinat CD

d. viteza minimă care trebuie imprimată corpului m în punctul A, orientată către punctul B, pentru ca acesta să poată ajunge în punctul D pe planul CD dacă acest corp nu suferă nicio ciocnire

22. În vârful unui plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$ față de orizontală și având lungimea $\ell=0,8$ m, se află în repaus un corp cu masa $m_1=300$ g. Corpul coboară liber, cu frecare, și își continuă mișcarea pe un plan orizontal. După parcurgerea distanței d_1 corpul de masă m_1 lovește un corp de masă $m_2=2m_1$ aflat în repaus. După impact, cele două corpuri se cuplează și își continuă mișcarea împreună, parcurgând până la oprire distanța $d_2=18$ cm. Pe planul orizontal mișcarea are loc cu frecare, coeficientul de frecare între corpuri și suprafața orizontală fiind $\mu_2=0,1$. Energia potențială gravitațională se consideră nulă la baza planului înclinat. Știind că valoarea coeficientului de frecare la alunecare dintre corpul de masă m_1 și suprafața planului înclinat are valoarea $\mu_1 = 1/(2\sqrt{3})$, să se afle:

a. energia mecanică a corpului de masă m_1 aflat în vârful planului înclinat
b. durata mișcării corpului de masă m_1 pe planul înclinat
c. viteza, imediat după impact, a corpului format
d. distanța d_1

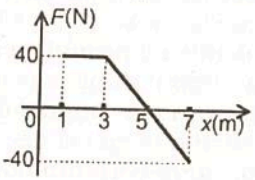
23. Un corp C_1, aflat în punctul A, este lansat spre punctul B cu viteza inițială $v_0=5$ m/s de-a lungul unei suprafețe orizontale, ca în figura alăturată. Mișcarea pe porțiunea AB, de lungime $d=2$ m, are loc cu frecare. Coeficientul de frecare la alunecare între corp și suprafața orizontală este $\mu=0,4$. Pe porțiunea BC frecarea este negijabilă. Un alt corp C_2 având masa $m_2=60$ g, este legat de un fir de lungime $\ell=0,8$ m, inextensibil și de masă neglijabilă. Inițial firul este întins și orizontal. Punctul de suspensie O se află la înălțimea $h=\ell$ față de suprafața orizontală. Corpul C_2 este lăsat liber din repaus, astfel încât cele două corpuri ajung simultan în punctul C. După impact, cele două corpuri rămân în repaus. Considerând că energia potențială gravitațională este nulă la nivelul suprafeței orizontale, să se afle:



a. viteza corpului C_1 în punctul B
b. energia mecanică inițială a corpului C_2
c. impulsul corpului C_2, imediat înainte de impact
d. masa corpului C_1

24. Un corp de mici dimensiuni având masa $m=400$ g, aflat inițial în repaus în punctul de coordonată $x_0=1$ m, se poate deplasa doar de-a lungul axei Ox. În figura alăturată este reprezentată dependența forței de tracțiune care acționează asupra corpului pe axa Ox în funcție de coordonata acestuia. Mișcarea corpului de-a lungul axei Ox se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=0,25$. Să se afle:

a. lucrul mecanic efectuat de forța de tracțiune la deplasarea corpului din punctul de coordonată $x_0=1$m în punctul de coordonată $x=7$ m



b. viteza corpului la trecerea prin punctul de coordonată $x=7$ m
c. viteza corpului nou format dacă atunci când corpul m ajunge în punctul de coordonată $x=7$ m, acesta se cuplează cu un corp cu masa $m_1=0,91m$ aflat în repaus
d. distanța parcursă de corpul nou format până la oprire dacă din momentul cuplării nu mai acționează forța de tracțiune

25. Un corp cu masa $M=0,2$ kg este lansat pe o suprafață orizontală cu viteza inițială $v_0=8$ m/s, având coeficientul de frecare la alunecare $\mu=0,1$. După ce

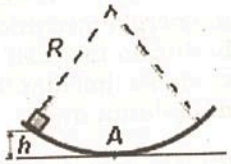
parcurge distanța d=387,5 cm, corpul ciocnește plastic un corp cu masa m=0,1 kg, atârnat de un fir vertical de lungime ℓ=2,5 m și aflat în repaus. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:

a. viteza v_C a corpurilor imediat după ciocnirea plastică

b. unghiul maxim α, făcut de fir cu verticala, după ciocnirea corpurilor

c. tensiunea din fir când unghiul de deviere dintre fir și verticală este $\beta=30^0$

26. Un corp mic cu masa m=20 g alunecă pornind din repaus fără frecare în interiorul unui jgheab ca în figură. Jghebul este de forma unui sfert de cilindru cu raza $R=\sqrt{2}$ m. În punctul A se află în repaus un corp identic. Corpurile se ciocnesc plastic. Să se afle:

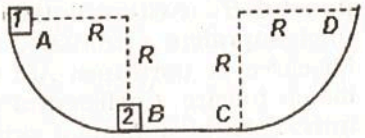


a. viteza corpului în punctul A imediat înainte de ciocnire

b. înălțimea maximă la care se ridică corpul nou format

c. căldura degajată în urma ciocnirii corpurilor

27. În jgheabul din figură se cunosc R=1 m și m=20 g. În absența frecărilor se lasă liber corpul din A. Acesta ciocnește perfect plastic corpul identic B aflat inițial în repaus. Să se afle:

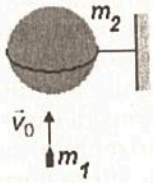


a. viteza cu care ajunge corpul în B

b. viteza corpurilor după ciocnire

c. înălțimea la care ajunge sistemul format pe porțiunea ascendetă CD

28. O bilă cu masa m_1=1 kg este aruncată vertical în sus cu viteza inițială v_0=60 m/s de la sol. După două secunde de la începerea mișcării bila ciocnește plastic un corp cu masa m_2=3 kg aflat pe un suport inelar. Se neglijează forțele de frecare cu aerul. Să se afle:



a. viteza comună a corpurilor după ciocnirea plastică

b. căldura degajată în procesul ciocnirii

c. înălțimea maximă la care urcă corpurile măsurată față de sol

29. Un corp cu masa m_1=100 g este aruncat de jos în sus pe verticală cu viteza inițială v_0=40 m/s. În același moment de la înălțimea maximă la care poate ajunge primul corp este lăsat liber pe verticala primului corp cu masa m_2=60 g. Neglijând frecările, să se afle:

a. timpul după care se întâlnesc corpurile

b. viteza corpului format după ciocnirea plastică

c. căldura degajată în procesul ciocnirii

30. Un corp cu masa m=100 g este aruncat vertical în sus de la nivelul solului cu viteza v_0=20 m/s După Δt=2 s este aruncat din același punct un al doilea corp identic cu primul cu aceeași viteză inițială. Neglijând frecările să se afle:

a. timpul după care se întâlnesc corpurile

b. variația impulsului primului corp între momentul inițial și cel când se întâlnește cu cel de-al doilea corp

b. viteza corpului nou format dacă corpurile se ciocnesc plastic

c. căldura degajată în procesul ciocnirii plastice

31. Un corp cu masa m=2 kg și cu viteza inițială v_0=4 m/s este aruncat vertical în sus de la nivelul solului. Când acest corp ajunge la înălțimea maximă h, el este ciocnit perfect plastic de un alt corp identic cu el care a căzut de la înălțimea $2h$ față de sol. Neglijând frecările, să se afle:

a. viteza v_2 a corpului al doilea imediat înainte de ciocnire
b. viteza corpului nou format imediat după ciocnire
c. energia cinetică a corpului nou format în momentul atingerii solului

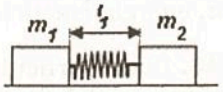
32. Se lasă liber un corp cu masa m_1=5 kg de la înălțimea h=80 m. În același moment de la sol se aruncă pe aceeași verticală în sus un alt corp cu masa m_2=3 kg. Se neglijează forțele de frecare cu aerul. Să se afle:
a. viteza inițială a celui de-al doilea corp astfel încât în urma ciocnirii plastice cu primul corp viteza corpului rezultat să fie nulă
b. raportul energiilor cinetice ale mobilelor în momentul anterior ciocnirii
c. înălțimea la care s-a produs ciocnirea

33. Un corp cu masa m_1=3 kg este aruncat vertical în sus cu viteza inițială v_0=30 m/s. Se neglijează forțele de frecare cu aerul. Când corpul ajunge la 3/4 din înălțimea maximă acesta este ciocnit plastic de un alt corp care are masa $m_2=m_1/3$, astfel că imediat după ciocnire corpurile se opresc. Să se afle:
a. viteza primului corp înainte de ciocnire
b. timpul de mișcare al primului corp până la ciocnire
c. viteza corpului al doilea înainte de ciocnire

34. De un aerostat, aflat în repaus în atmosferă, este legată de un cablu o scară pe care se află în repaus un om. Masa aerostatului cu scară este M=720 kg, iar a omului m=80 kg. Dacă omul începe să urce pe scară cu viteza u=0,4 m/s față de scară, să se afle:
a. viteza omului față de sol
b. viteza aerostatului față de sol
c. lucrul mecanic dezvoltat de om prin punerea sistemului în mișcare

35. Un patinator cu masa M=80 kg ține în mâini un rucsac cu masa m=4 kg și se află în repaus. La un moment dat patinatorul aruncă rucsacul cu viteza v=10 m/s față de sol. Mișcarea patinatorului pe gheață se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,001. Să se afle:
a. viteza patinatorului imediat după ce acesta aruncă rucsacul
b. lucrul mecanic efectuat de patinator la aruncarea rucsacului
c. distanța parcursă de patinator până la oprire

36. De un resort care în stare nedeformată are lungimea ℓ=10 cm se agață un corp cu masa m=0,5 kg care îi produce o alungire x_0=1 cm. Acest resort este prins între corpuri cu masele m_1=1 kg și m_2=2 kg aflate pe o masă orizontală fără frecări ca în figură. Inițial corpurile sunt în repaus și resortul este comprimat și are lungimea ℓ_1=2 cm. Se lasă liber sistemul. Să se afle:
a. constanta elastică a resortului
b. energia potențială a resortului comprimat
c. vitezele corpurilor după destinderea resortului



37. Un obuz cu masa M=100 kg zboară cu viteza v=400 m/s. La un moment dat el explodează în două fragmente. Unul dintre ele de masă m_1=20 kg continuă să se miște înainte cu viteza v_1=500 m/s. Să se afle:
a. viteza celui de-al doilea fragment
b. energia degajată prin explozia obuzului
c. fracțiunea din energia inițială degajată prin explozie

38. Pe un plan orizontal se lansează un corp care se mişcă cu frecare. Legea de mişcare a corpului este $x=10+20t-2,5t^2$ unde coordonata x este exprimată în metri şi timpul t este în secunde. Să se afle:
a. valoarea coeficientului de frecare
b. vitezele celor două fragmente, dacă după o secundă de la lansare corpul explodează în două fragmente a căror masă se află în raportul $m_1/m_2=1/3$, iar fragmentul mai mic se mişcă în sens contrar sensului iniţial de mişcare a corpului, cu viteza relativă $v_r=24$ m/s faţă de fragmentul mare
c. spaţiul dintre fragmente când acestea se opresc, dacă coeficientul de frecare la alunecare este acelaşi ca la punctul **a.**

39. Trei vagoane de tren W_1, W_2 şi W_3 cu masele $m_1=30$ t, $m_2=20$ t şi $m_3=50$ t se deplasează unul după altul pe aceeaşi linie cu vitezele $v_1=2$ m/s, $v_2=4,5$ m/s şi $v_3=5$ m/s orientate în acelaşi sens ca în figură. Se neglijează toate frecările. Să se afle:
a. energia cinetică iniţială a sistemului de vagoane
b. viteza comună a vagoanelor 1 şi 2 care se ciocnesc primele
c. viteza comună a sistemului de vagoane

40. Două bile cu masele $m_1=100$ g şi $m_2=300$ g se mişcă pe direcţii perpendiculare cu vitezele $v_1=10$ m/s, respectiv $v_2=5$ m/s. După ciocnire bila a doua se opreşte. Să se afle:
a. energia cinetică a sistemului imediat înainte de ciocnire
b. viteza primei bile imediat după ciocnire
c. variaţia energiei cinetice

41. De la înălţime $H=10$ m cade liber o sferă cu masa $M=900$ g. Când sfera ajunge la altitudinea $h=6$ m, ea este lovită plastic, orizontal cu viteza $v_0=10$ m/s de o bilă cu masa $m=100$ g. Se neglijează frecările cu aerul. Să se afle:
a. viteza sferei imediat înainte de ciocnire
b. viteza corpului format imediat după ciocnire
c. viteza cu care corpul nou format loveşte solul

42. Un corp cu masa $m_1=2,5$ kg se mişcă de-a lungul axei Ox după legea $x=-t^2+10t$, unde coordonata se măsoară în metrii şi timpul în secunde. După un timp egal cu $t_1=3$ s el ciocneşte central şi perfect elastic un al doilea corp cu masa $m_2=1,5$ kg aflat în repaus. Să se afle:
a. impulsul primului corp după timpul t_1
b. viteza primului corp imediat după ciocnire
c. energia cinetică a celui de-al doilea corp imediat după ciocnire

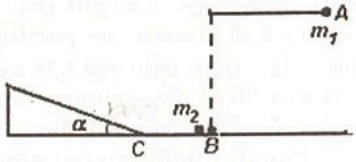
43. Două particule cu masele m_1 şi $m_2=3m_1$ se deplasează pe aceeaşi direcţie una spre cealaltă. Particula cu masa m are viteza $v_1=20$ m/s. Particulele se ciocnesc perfect elastic. Să se afle:
a. vitezele particulelor imediat după ciocnire, dacă viteza paticulei cu masa m_2 este $v_2=4$ m/s
b. viteza particulei cu masa m_2 dacă prima particulă se opreşte imediat după ciocnire
c. cu cât la sută se modifică energia cinetică a sistemului prin ciocnire dacă după ciocnire particula cu masa m_1 se deplasează în sensul vitezei iniţiale cu viteza $v'_1=5$ m/s

d. fracţiunea din energia cinetică iniţială a primei particule care este transferată particulei a doua, dacă particula a doua se afla iniţial în repaus

44. Un corp cu masa m=500 g se deplasează cu viteza v_0=5 m/s pe o suprafaţă orizontală şi ciocneşte central şi perfect elastic un alt corp cu masa m=500 g aflat în repaus. Considerând că valoarea coeficientului de frecare la alunecare dintre corpuri şi suprafaţa orizontală este μ=0,1, să se afle:
a. vitezele corpurilor imediat după ciocnire
b. căldura degajată prin frecare până când mişcarea înceteazî
c. distanţele parcurse de corpuri după ciocnire până la oprirea lor pe suprafaţa orizontală

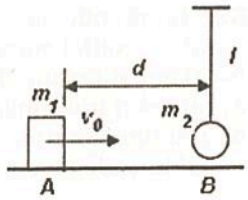
45. Un corp cu masa m_1=400 g şi viteza v=5 m/s loveşte perfect elastic şi central un al doilea corp cu masa m_2=100 g, aflat iniţial în repaus. Corpurile se mişcă cu frecare pe un plan orizontal cu coeficientul de frecare μ=0,1. Să se afle:
a. vitezele corpurilor după ciocnirea perfect elastică şi să se interpreteze rezultatul
b. energia cinetică a sistemului de corpuri imediat după ciocnire
c. distanţa dintre corpuri când acestea se opresc

46. Un corp cu masa m_1=4m_2 este legat la capătul unui fir inextensibil cu lungimea ℓ=0,8 m şi este lăsat liber din poziţia orizontală A ca în figura alăturată. Când ajunge în poziţia verticală, acesta ciocneşte perfect elastic un al doilea corp cu masa m_2=1 kg aflat în repaus. Se cunosc distanţa BC=1 m, α=30°, coeficienţii de frecare la alunecare μ_1=0,048 pe porţiunea BC şi $\mu_2=1/\sqrt{3}$ pe planul înclinat. Să se afle:



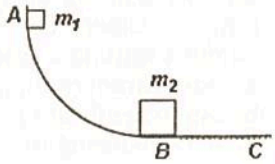
a. viteza corpului m_1 în poziţia B
b. înălţimea maximă la care va ajunge corpul al doilea pe planul înclinat
c. cosinusul unghiului maxim format cu verticala de firul ce susţine primul corp, după ciocnire

47. Un corp de mici dimensiuni şi cu masa m_1=1 kg este lansat din punctul A cu viteza v_0=2 m/s către o bilă cu masa m_2=3 kg suspendată de un fir inextensibil şi aflată la punctul B în repaus, ca în figura alăturată. Lungimea firului este ℓ=20 cm iar distanţa AB este d=50 cm. Coeficientul de frecare la alunecare pe porţiunea AB este μ=0,3. Să se afle:



a. viteza corpului m_1 imediat înaintea ciocnirii cu bila m_2
b. viteza bilei imediat după ciocnirea elastică
c. înălţimea la care urcă bila după ciocnire

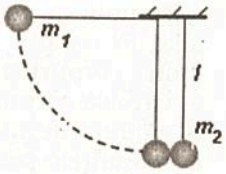
48. Două corpuri cu masele m_1=5 kg şi m_2=10 kg pot aluneca pe suprafaţa ABC, unde AB are forma unui cerc cu raza R=2 m. Iniţial corpurile sunt în repaus şi se află situate ca în figură. Se lasă liber corpul m_1. Când ajunge în punctul B, acesta ciocneşte perfect elastic corpul cu masă m_2. Pe suprafaţa AB nu există frecare, iar pe BC, coeficientul de frecare la alunecare este μ=0,2. Să se afle:



a. vitezele corpurilor după ciocnirea elastică
b. înălţimea la care urcă primul corp pe suprafaţa curbă după ciocnire

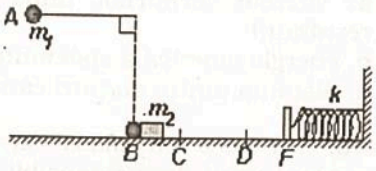
c. distanța parcursă de corpul m_2 până la oprire

49. Fie două bile de fildeş cu masele m_1=40 g şi m_2=80 g suspendate prin două fire ideale cu lungimea ℓ=1 m fiecare. Bila cu masa m_1 este depărtată astfel încât firul de care este prinsă formează unghiul $\alpha=90^0$ cu verticala ca în figură. Se lasă liberă bila. Bilele se ciocnesc perfect elastic. Neglijând frecările cu aerul, să se afle:



a. viteza primei bile imediat înainte de ciocnire
b. înălțimile la care se ridică bilele după ciocnire
c. raportul maselor m_1/m_2 astfel încât după ciocnire bilele să se ridice la aceeaşi înălțime

50. O bilă cu masa de m_1=100 g este legată la unul din capetele unui fir inextensibil cu lungimea ℓ=0,8 m şi având celălalt capăt fixat. Firul întins este adus în poziție orizontală şi lăsat liber ca în figură. Când firul ajunge în poziție verticală, bila ciocneşte perfect elastic un corp de masă m_2=300 g aflat inițial în repaus. Corpul este pus în mişcare şi alunecă fără frecare pe porțiunile *BC* şi *DF* şi cu frecare coeficientul de frecare fiind μ=0,1 pe porțiunea *CD*, care are lungimea ℓ'=0,3 m şi ciocneşte în punctul *F* un resort ideal. Resortul suferă o deformație maximă $\Delta\ell$=1 cm. Să se afle:



a. vitezele corpurilor imediat după ciocnire
b. cosinusul unghiului maxim cu care deviază firul după ciocnire
c. constanta elastică a resortului ideal

51. Un corp *A* cu masa *m* si viteza υ_0 ciocneşte perfect elastic şi central un corp *B* cu masa 2*m*, fixat la capătul unui resort elastic nedeformat. Considerând că deplasările corpurilor se fac pe o suprafață orizontală fără frecare, să se afle:
a. raportul vitezelor corpurilor imediat după ciocnire
b. raportul energiilor cinetice E_{cA}/E_{cB} ale celor două corpuri, imediat după ciocnire
c. comprimare maximă a resortului, cunoscând energia cinetică a corpului *A* înainte de ciocnire E_0=36 mJ şi constanta elastică a resortului *k*=40 N/m

52. Două bile cu masele $m_1=3m_2$=3 kg şi m_2 sunt suspendate pe două fire paralele, astfel încât bilele se ating. Prima bilă este deviată până la o înălțime *h*=20 cm şi lăsată liber. Se neglijează forțele de frecare cu aerul. Să se afle:
a. raportul înălțimilor la care se ridică bilele dacă ciocnirea este perfect elastică
b. înălțimea la care se ridică bilele dacă ciocnirea este perfect plastică
c. căldura degajată în cazul ciocnirii plastice

53. O particulă cu masa m_1 loveşte o altă particulă cu masa $m_2=3m_1$ aflată în repaus. Ciocnirea este unidimensională. Să se afle fracțiunea din energia cinetică inițială a primei particulei care:
a. este transferată particulei a doua, dacă:ciocnirea este perfect elastică
b. este transferată particulei a doua, dacă:ciocnirea este plastică
c. se transformă în căldură în cazul ciocnirii plastice

54. O moleculă cu masa $m=5\cdot10^{-26}$ kg, aflată într-un cilindru cu piston, se mişcă cu viteza υ_1=502 m/s şi ajunge din urmă pistonul care se mişcă cu viteza υ_2=2 m/s şi de care se ciocneşte frontal şi perfect elastic. Să se afle în urma ciocnirii:

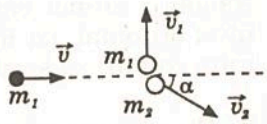
a. viteza moleculei imediat după ciocnire
b. variația impulsului moleculei
c. variația energiei cinetice a moleculei

55. Un corp cu masa m=2 kg se mişcă cu viteza v_1=3 m/s şi ajunge din urmă un perete cu masa M foarte mare ($m<<M$ şi $M \rightarrow \infty$) care se deplasează cu o viteză v_2=1 m/s şi de care se ciocneşte perfect elastic. Durata ciocnirii este Δt=1 ms. Să se afle:
a. viteza corpului imediat după ciocnirea cu peretele
b. forța medie cu care peretele acționează asupra corpului în timpul ciocnirii
c. raportul v_1/v_2 pentru ca după ciocnire corpul cu masă m_1 să se oprească

56. O particulă cu masa m_1 ciocneşte perfect elastic o particulă cu masa m_2 aflată inițial în repaus. Să se afle m_1/m_2, dacă:
a. ciocnirea este centrală iar particulele au viteze egale şi de sensuri opuse
b. direcțiile particulelor după ciocnire formează un unghi $2\alpha=60^0$ şi sunt simetrice în raport cu direcția inițială de mişcare a particulei cu masa m_1

57. Un neutron ciocneşte un alt neutron aflat inițial în repaus. Să se afle:
a. unghiul format de direcțiile de mişcare ale celor doi neutroni după ciocnire, dacă cicocnirea este centrală şi perfect elastică
b. vitezele celor doi neutroni după ciocnire, dacă viteza neutronului incident este $v_1=3{,}46\cdot10^4$ m/s şi după ciocnire viteza lui formează un unghi $\alpha_1=30^0$ cu direcția inițială de mişcare

58. O particulă cu masa m_1 ciocneşte perfect elastic o particulă cu masa $m_2=4m_1$ aflată inițial în repaus. După ciocnire viteza primei particule formează un unghi drept cu direcția inițială de mişcare a ei ca în figură. Să se afle:



a. viteza particulelor imdediat după ciocnirea perfect elastică dacă viteza primei particule este v_1=20 m/s
b. a câta parte din energia cinetică inițială a particulei cu masa m_1 este pierdută prin ciocnirea particulelor

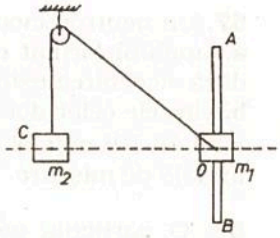
59. Un corp cu masa m_1=1 kg loveşte cu viteza v=10 m/s un alt corp cu masa m_2=2 kg aflat în repaus. După ciocnire direcțiile de mişcare ale corpurilor formează unghiurile $\alpha_1=30^0$ şi respectiv $\alpha_2=45^0$ cu direcția inițială de mişcare a primului corp. Să se afle:
a. vitezele corpurilor după ciocnire
b. raportul energiilor cinetice ale corpurilor după ciocnire E_{C1}/E_{C2}
c. căldura degajată prin ciocnirea corpurilor

4. Elemente de statică
4.1. Echilibrul de translaţie

1. Un corp cu masa m=500 g este suspendat de un fir ideal. Se acţionează cu o forţă orizontală până când corpul deviază faţă de verticală cu unghiul $\alpha=60^0$. Să se afle:
a. valoarea tensiunii în fir
b. valoarea forţei

2. Un plug este tras uniform de două tractoare, astfel încât unghiul format dintre cablurile ce leagă cele două tractoare este $\alpha=60^0$. Tensiunea din fiecare cablu este T_1=15 kN. Să se afle forţa de rezistenţă exercitată de sol.

3. Pentru a menţine constantă viteza unei sănii pe un drum orizontal trebuie să se acţioneze cu o forţă F_1=120 N sub un unghi $\alpha=60^0$ faţă de orizontală sau cu o forţă $F_2=50\sqrt{3}$ N sub un unghi $\beta=30^0$. Să se afle:
a. coeficientul de frecare dintre sanie şi plan
b. masa saniei



4. Un cursor cu masa m_1 poate aluneca fără frecare de-a lungul unei bare verticale AB. De cursor este prins un fir trecut peste un scripete ideal, iar la capătul firului este prins un corp cu masa m_2. Ştiind că sistemul este în echilibru atunci când cele două mase se află pe acelaşi nivel orizontal, iar lungimea firului este de două ori mai mare decât distanţa OC între corpuri să se afle raportul m_1/m_2.

5. Un corp cu greutatea $G=100\sqrt{2}$ N este suspendat ca în figura 1. Să se afle valoarea greutăţii G_1 care asigură echilibrul sistemului, dacă se cunoaşte unghiul $\alpha=45^0$.

6. Un corp cu masa m=4 kg este suspendat prin intermediul a trei fire ca în fig. 2. Se cunosc valorile unghiurilor $\alpha_1=30^0$ şi $\alpha_2=60^0$. Să se afle tensiunile din cele trei fire.

7. Un corp cu masa m =12 kg este suspendat de două grinzi ca în fig.3. Dacă se cunoaşte unghiul $\alpha=30^0$ să se afle tensiunile din grinzi.

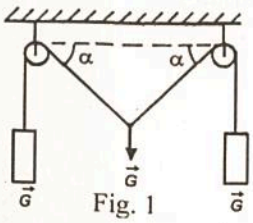


Fig. 1

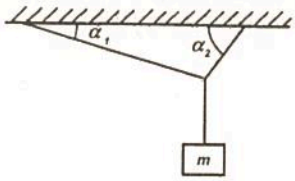


Fig. 2

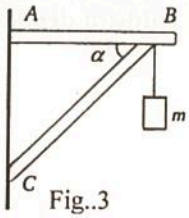


Fig..3

8. Un corp cu masa m=2 kg este suspendat de tavan ca în figura 4 printr-un cablu oblic care formează cu orizontala un unghi $\alpha=30^0$. Corpul este prins şi de o grindă orizontală. Să se afle tensiunea din cablu şi forţa de reacţiune din grindă.

9. Un om cu masa m=80 kg se află pe o platformă cu masa M=40 kg ca în figura 5. Să se afle:

a. forța cu care trage omul sfoara pentru a se menține în echilibru

b. forța de apăsare exercitată de om asupra platformei pe care se află

10. De firul ACB este prinsă o masă m=16 kg ca în figura 6. În poziția de echilibru cablul CB este orizontal, iar cablul AC formează cu verticala un unghi $\alpha=30^0$. Să se afle valorile celor două tensiuni din cele două cabluri.

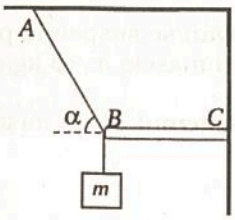


Fig. 4.

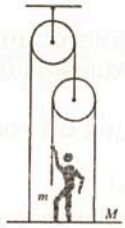


Fig.5

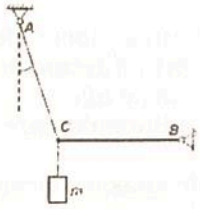
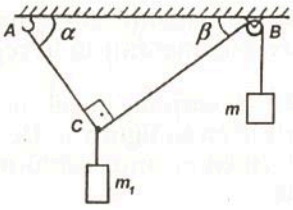


Fig. 6

11. Un cablu este prins de cârligul A și este trecut peste un scripete fix B. La capătul liber al firului se suspendă un corp cu masa m=2 kg, iar în punctul C un alt un alt corp cu masa m_1 ca în figură. Firele AC și CB sunt perpendiculare. Sistemul se află în echilibru. Să se afle:



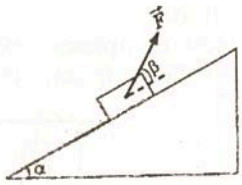
a. valoarea masei m_1, astfel încât tensiunea din firul AC este de două ori mai mare decât tensiunea din firul BC

b. valoarea tensiunii din firul AC

c. forța care acționează asupra scripetelui B

12. Un corp cu masa m=1 kg se află pe un plan orizontal, unde se poate mișca cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ=0,3. Să se afle cu ce forță trebuie să se tragă de corp sub unghiul $\alpha=45^0$ față de orizontală, astfel încât corpul să se miște uniform.

13. Pe un plan înclinat sub unghiul $\alpha=30^0$ se pune un corp cu masa m=1 kg. Mișcarea corpului se face cu frecare coeficientul de frecare fiind μ=0,3. Asupra acestuia se trage cu o forță F sub un unghi $\beta=30^0$ ca în figură, astfel încât corpul să rămână în repaus pe plan. Să se afle:



a. forța F

b. forța de apăsare exercitată de corp asupra planului

c. forța F_1 care aplicată corpului sub același unghi β, determină urcarea uniformă a corpului pe plan

d. forța de apăsare exercitată de corp asupra planului, în condițiile de la punctul anterior

14. Un lanț omogen cu masa m=1 kg și cu lungimea ℓ=1 m este așezat pe o masă orizontală, astfel încât o bucată ℓ_1=60 cm atârnă vertical la capătul masei. Mișcarea lanțului se face cu frecare, coeficientul de frecare este μ=0,2. Să se afle

cu ce forță orizontală trebuie să acționăm asupra lanțului, astfel încât acesta să se afle în echilibru pe masă.

15. Două corpuri cu masele m_1=200 g și m_2=300 g legate printr-un fir ideal și aflate pe un plan orizontal se pot mișca cu frecare, coeficienții de frecare fiind μ_1=0,2 și respectiv μ_2=0,4. Să se afle cu ce forță orizontală trebuie să tragem de primul corp astfel încât sistemul să se miște uniform.

16. Peste un scripete ideal prins cu ajutorul unui cablu de tavan se suspendă pe verticală prin intermediul unui fir inextensibil două corpuri cu masele m_1=5 kg și m_2=3 kg. Să se afle:
a. masa adițională care trebuie pusă pe un corp, astfel ca sistemul să se miște uniform
b. forța de apăsare a corpului adițional
c. forța de reacțiune în cablu în condițiile de la punctul **a.**

17. Să se afle masa m_1 ce trebuie suspendată, astfel încât masa m_2=10 kg din sistemul din figura 7 să rămână în echilibru.

18. Fie sistemul din figura 8. Se cunoaște m_1=8 kg. Să se afle valoarea masei m_2 care este menținută în repaus.

19. Un corp cu masa m_1=1 kg este tras vertical în sus uniform cu ajutorul unei forțe F ca în figura 9. De acest corp este prins un alt corp cu masa m_2=2 kg prin intermediul unui cablu omogen cu masa m_0=200 g și cu lungimea ℓ=1 m. Să se afle:
a. forța care sigură ridicarea uniformă a sistemului de corpuri
b. tensiunea în cablu la distanța ℓ_0=0,4 m de corpul cu masa m_2

20. Două corpuri cu masele m_1=3 kg și m_2=5 kg se află în contact ca în figura 10. Asupra corpului cu masa m_1 se trage cu o forță F sub un unghi α=30° față de orizontală. Mișcarea corpurilor se poate efectua cu frecare coeficienții de frecare ai corpurilor cu planul orizontal sunt μ_1=0,1 și respectiv μ_2=0,2. Să se afle:
a. forța maximă F cu care se trage pentru ca sistemul de corpuri să se mai afle în repaus
b. forța de apăsare exercitată de fiecare corp asupra planului orizontal
c. forțele de frecare care acționează asupra fiecărui corp

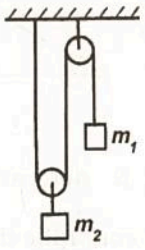


Fig. 7

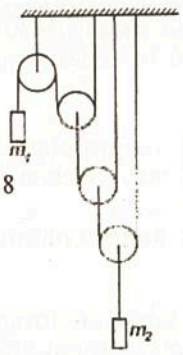


Fig. 8

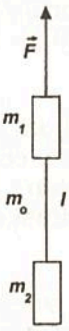


Fig. 9

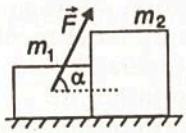
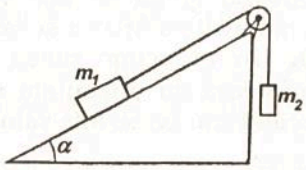


Fig. 10

21. Pe un plan înclinat cu unghiul α=60° se așază un corp cu masa m_1=2 kg legat de un al doilea corp cu masa m_2=4 kg prin intermediul unui fir ideal trecut

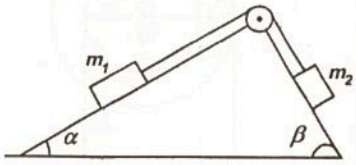
peste un scripete aflat în vârful planului înclinat. Corpul aflat pe planul înclinat se poate mişca cu frecare cu coeficientul de frecare μ_1=0,2. Să se afle:



a. forţa orientată de-a lungul planului înclinat cu care trebuie să se acţioneze asupra corpului m_1 pentru ca sistemul să rămână în repaus pe plan
b. tensiunea din fir
c. reacţiunea în axul scripetelui

22. Pe un plan înclinat cu unghiul α=30^0 se aşază un corp cu masa m_1=1 kg legat de un al doilea corp cu masa m_2 prin intermediul unui fir ideal trecut peste un scripete aflat în vârful planului înclinat ca în figura precedentă. Corpul aflat pe planul înclinat se poate mişca cu frecare cu coeficientul de frecare μ_1=0,1. Să se afle:
a. limitele între care trebuie cuprinsă masa m_2 pentru ca sistemul de corpuri să se afle în repaus
b. valorile tensiunilor în fire în cele două cazuri extreme
c. reacţiunile din axul scripetelui în cele două cazuri extreme

23. Două corpuri cu masele m_1=5 kg şi m_2 sunt legate printr-un fir care trece peste un scripete ideal fixat în vârful comun a două plane înclinate ca în figură. Coeficienţii de frecare ale celor două corpuri sunt μ_1=0,1 şi respectiv μ_2=0,2. Unghiurile planelor sunt α=30^0 şi β=45^0. Să se afle:



a. limitele între care trebuie cuprinsă masa m_2 pentru ca sistemul de corpuri să se afle în repaus
b. valorile tensiunilor în fire în cele două cazuri
c. reacţiunile din axul scripetelui în cele două cazuri

4.2. Echilibrul de rotaţie

1. O bară este menţinută în poziţie orizontală prin acţiunea unei forţe F=20 N la distanţa d=5 cm faţă de axa de rotaţie. Dacă direcţia forţei nu se schimbă, să se afle valoarea valoarea unei forţe F_1 aplicată la distanţa d_1=1 cm faţă de axa de rotaţie, pentru a menţine echilibrul barei.

2. O scândură cu masa neglijabilă se sprijină pe un punct O în jurul căruia se poate roti. La capătul A al barei aflat la distanţa ℓ_1=0,8 m faţă se punctul O se trage cu o forţă F_1=30 N aplicată normal pe scândură. Să se afle ce forţă normală trebuie aplicată la celălalt capăt B al scândurii aflat la la distanţa ℓ_2=1,2 m faţă se punctul O pentru ca acesta să rămână în echilibru.

3. O bară cu lungimea ℓ=1 m se sprijină în două puncte A şi B. La distanţa d=20 cm de capătul A se aşază un corp cu masa m=1 kg. Se neglijează greutatea barei. Să se afle cu ce forţe apasă bara asupra punctelor de sprijin.

4. O grindă omogenă AC orizontală cu masa m=10 kg se sprijină în două puncte A şi B aflate la distanţa d=0,8 m unul de celălalt. La capătul C al grinzii, aflat la distanţa ℓ=1 m de punctul A se atârnă o greutate cu masa m_1=4 kg. Să se afle forţele cu care grinda acţionează asupra punctelor de sprijin.

5. O scândură subţire şi fără masă AC cu lungimea ℓ=1,6 m se sprijină pe un suport O aflat la distanţa ℓ_1=0,6 m de capătul A. De capătul A al scândurii se prinde o masă m_1=800 g, iar la distanţa ℓ_2=1 m de capătul A se prinde o masă

m_2=400 g. Să se afle valoarea masei m_3 ce trebuie prinsă de capătul C al scândurii pentru ca aceasta să fie orizontală.

6. Un muncitor ridică o scândură cu masa m=5 kg până când scândura formează cu orizontala unghiul $\alpha=30^0$ acționând cu o forță perpendiculară pe scândură. Să se afle valoarea acestei forței.

7. Un scripete dublu are razele R_1=15 cm și R_2=3 cm. Se prinde de scripetele cu raza R_2 un corp cu masa m_1=2 kg ca în figura 1. Inițial scripetele este blocat. Să se afle valoarea masei corpului m_2, astfel încât scripetele să nu se rotească după prinderea acestui corp și deblocarea scripetelui.

8. Un corp prismatic cu baza un pătrat cu latura a=2 cm, înălțimea h=10 cm și cu masa m=1 kg se află pe un plan orizontal (fig 2). Să se afle:

a. valoarea minimă a forței orizontale care aplicată în partea superioară a corpului determină răsturnarea acestuia

b. valoarea minimă a unei forței care formează cu orizontala un unghi $\alpha=60^0$ care aplicată în partea superioară a corpului determină răsturnarea acestuia (fig 3)

Fig. 1

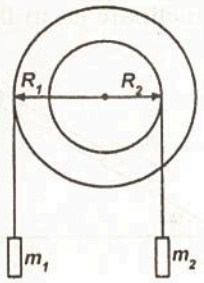


Fig. 2

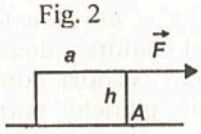


Fig. 3

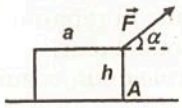
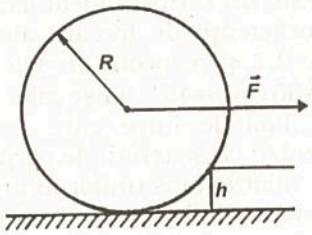


Fig. 4

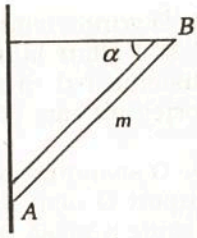


9. Să se afle valoarea minimă a forței F orizontale care trebuie aplicată unei roți cu masa m=5 kg și cu raza R=30 cm, pentru ca roata să urce treapta cu înălțimea h=10 cm. (fig.4)

10. O bară cilindrică cu lungimea ℓ=1 m este confecționată o pătrime din oțel cu densitatea ρ_1=7800 kg/m^3 și restul din aluminiu cu densitatea ρ_2=2700 kg/m^3. Să se afle unde trebuie suspendată bara pentru ca ea să rămână în echilibru dacă bara are peste tot aceeeași secțiune.

11. La volanul cu raza R=15 cm al unei mașini se aplică un moment M=4,5 Nm prin mânuirea volanului cu mâinile aflate în două puncte diametral opuse. Să se afle forța dezvoltată de mâna omului, dacă se presupune că omul trage cu aceeași fortă cu ambele mâini, tangente pe volan.

12. O bară omogenă AB, cu masa m=200 kg se poate roti în jurul unui punct de sprijin A aflat pe sol. Bara este susținută sub un unghi cu orizontala $\alpha=30^0$ în repaus cu ajutorul unui cablu orizontal care este prins de capătul B al barei ca în figură. Să se afle:

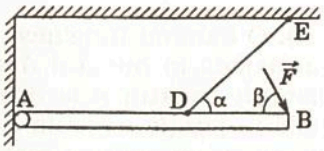


a. tensiunea în cablu

b. reacțiunea în articulație

c. tangenta unghiul format de reacțiunea din punctul A cu orizontala

13. O scândură orizontală AB cu lungimea ℓ=4 m şi masa m=20 kg este articulată în A şi legată cu ajutorul cablului DE, care face un unghi α=30° cu orizontala. Punctul D se află la distanţa d=1,5 m de capătul B. Pentru a menţine scândura în poziţie orizontală în punctul B acţionează o forţă F=300 N, a cărei direcţie formează cu orizontala un unghi β=45° ca în figură. Să se afle:



a. tensiunea din cablul DE

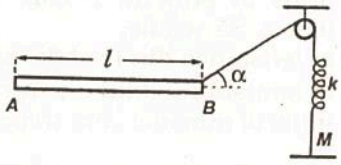
b. forţa de reacţiune în articulaţia A

14. O scândură orizontală AB cu lungimea ℓ=2 m şi masa m=20 kg este articulată în punctul A, iar celălalt capăt este prins cu ajutorul unui fir inextensibil trecut peste un scripete ideal, prin intermediul unui resort, de punctul M ca în figură. Constanta elastică a resortului este k=2 10^3 N/m, iar unghiul făcut de firul care leagă capătul B cu orizontala este α=60°. Ştiind că scândura este orizontală, să se afle:

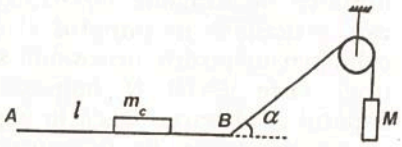
a. forţa de întindere a resortului şi alungirea acestuia

b. reacţiunea din articulaţia A

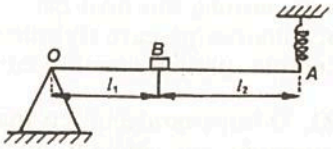
c. unghiul făcut de reacţiune cu orizontala



15. O bară cu masa m=1 kg şi lungimea ℓ=20 cm care se poate roti în jurul capătului A este ţinută în poziţie orizontală prin prinderea la celălalt capăt a unui corp cu masa M=5 kg cu ajutorul unui fir ideal trecut peste un scripete ca în figură. Firul formează cu orizontala un unghi α=30°. Să se afle distanţa faţă de capătul A al scândurii la care se află un corp cu masa m_c=10 kg aşezat pe scândură.



16. Pe o bară orizontală cu greutate neglijabilă se află un corp cu masa m=10 kg. Bara este prinsă cu un resort care se alungeşte cu x=2 cm. Se cunosc ℓ_1=1 m şi ℓ_2=3 m. Să se afle constanta elastică a resortului.



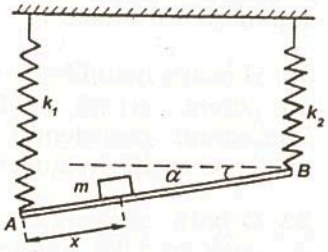
17. O scândură AB cu lungimea ℓ=20 cm şi cu greutatea neglijabilă este prinsă la capete cu ajutorul a două resorturi cu constantele elastice k_1=50 N/m şi k_2=150 N/m de tavan ca în figură. Iniţial resorturile au lungimi egale. Pe scândură se aşază un corp cu masa m=1 kg, astfel încât scândura se înclină faţă de orizontala cu unghiul α=30°. Să se afle:

a. deformaţiile resorturilor

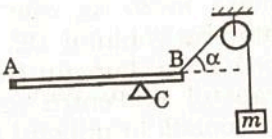
b. forţele elastice în cele două resorturi

c. distanţa măsurată faţă de capătul A la care se aşază corpul

d. distanţa măsurată faţă de de capătul A la care se aşază corpul astfel încât scândura să rămână orizontal



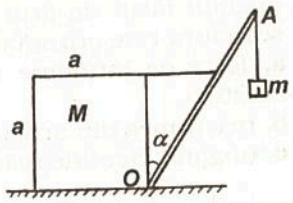
18. O bară cu lungimea ℓ=2 m şi masa m_b=32 kg este articulată în punctul *A* şi sprijinită în punctul *C* aflat faţă de capătul *A* la 3/4 din lungimea barei. Bara se află în poziţie orizontală prin prinderea capătului *B* al barei cu un corp cu masa *m*=2 kg cu ajutorul unui fir inextensibil ce trece peste un scripete ideal ca în figură. Firul formează cu orizontala un unghi α=30°. Să se afle:



a. reacţiunea în reazemul *C*

b. forţa dezvoltată în articulaţie

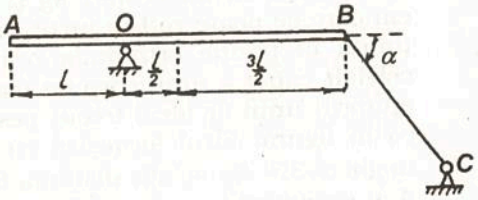
19. O bară omogenă cu masa *m*=0,2 kg şi lungimea *OA*=ℓ=2 m este articulată de muchia unui bloc de forma unui cub cu latura *a*=10 cm şi cu masa *M*=5 kg. În punctul *A* este fixată greutatea *G*=4 N. Sistemul este ţinut în echilibru sub un unghi α cu ajutorul unui fir prins în punctul *B* care are direcţie orizontală ca în figură. Să se afle:



a. tensiunea din firul de legătură

b. sinusul unghiul α pentru care cubul nu se răstoarnă în jurul muchiei care trece prin punctul *O*

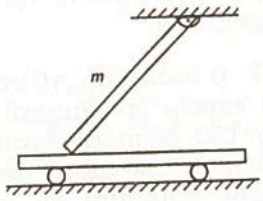
20. O bară omogenă *AB*=3ℓ are masa pe unitatea de lungime *m*/ℓ=1/3 kg/m. Bara este articulată în punctul *O* şi se află în echilibru în poziţie orizontală sub acţiunea unei forţe *F*=10 N aplicată vertical la capătul *A* al barei. Dacă la capătul *B* bara se prinde de un fir *BC* care formează cu orizontala unghiul α=30° ca în figură, să se afle:



a. tensiunea din firul *BC*

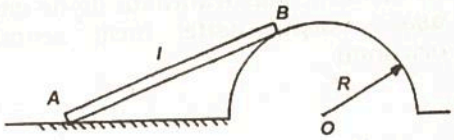
b. valoarea pe care trebuie să o aibă masa barei *m*, astfel ca tensiunea din fir să fie nulă, pentru cazul în care bara este orizontală

21. O bară omogenă cu masa *m*=2 kg este articulată la un capăt, iar celălalt capăt se sprijină pe un cărucior. Să se afle forţa necesară deplasării căruciorului, când bara formează cu verticala unghiul α=30°, iar coeficientul de frecare dintre bară şi cărucior este μ=0,4. Se neglijează frecarea dintre cărucior şi suprafaţa orizontală.



22. O scară neuniformă cu lungimea ℓ=1 m poate sta în echilibru sprijinită de un perete vertical până la un unghi maxim α=30°, format cu podeaua. Cunoscând coeficientul de frecare la alunecare cu peretele şi podeaua μ=0,4, să se afle înălţimea la care se află centrul de masă al scării.

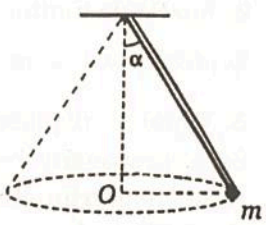
23. O bară omogenă cu lungimea ℓ=1 m şi cu masa *m*=2 kg se sprijină cu frecare cu capătul *A* pe un plan orizontal şi cu capătul *B* tangent pe o suprafaţă circulară cu raza *R*=0,5 m cu centrul în *O*, fără frecare ca în figură. Să se afle coeficientul de frecare



dintre bară şi sol dacă bara se află în echilibru.

24*. Să se afle viteza minimă pe care trebuie să o aibă un autoturism care intră într-o curbă cu raza R=50 m pentru ca acesta să nu se răstoarne. Cunoaştem distanţa dintre roţile autoturismului d=1,2 m şi înălţimea la care se află centrul de greutate al autoturismului faţă de sol h=0,3 m.

25*. O tijă subţire rigidă cu lungimea ℓ=1 m este articulată rigid, sub un unghi α=30°, de un ax vertical. La capătul tijei este prinsă o bilă cu masa m=200 g. Sistemul se roteşte cu turaţia n=120 rot/min ca în figură (π^2=10). Să se afle:



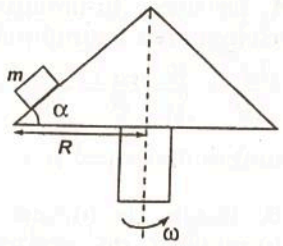
a. reacţiunea bilei asupra tijei

b. tangenta unghiul format de reacţiunea din tijă cu orizontala

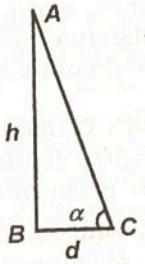
c. momentul reacţiunii faţă de punctul de fixare de pe ax

d. valoarea perioadei de rotaţie astfel încât momentul calculat la punctul **c.**, se anulează

26*. În partea inferioară a unei suprafeţe conice care formează cu orizontala unghiul α=30° se află un corp cu masa m=1 kg ca în figură. Conul se roteşte în jurul axei sale cu viteza unghiulară $\omega=\sqrt{5}$ rad/s. Raza la baza conului este R=30 cm. Să se afle coeficientul de frecare la alunecare pentru care corpul nu părăseşte suprafaţa conică.



1.1. Principiile opticii geometrice, reflexie, refracţie



1. Conform desenului din figură, ţinând cont că razele de lumină se propagă rectiliniu: $tg\,\alpha = \frac{h}{d} = 1{,}73 = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$, faţă de Pământ razele cad sub un unghi de 60°.

2. Razele de lumină se propagă rectiliniu şi, utilizând un desen ca la problema 1 $\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{h}{\ell} = \frac{H}{L} \Rightarrow L = \frac{H\ell}{h} \Rightarrow L$=45 cm.

3. Omul se deplasează rectiliniu cu viteza v şi parcurge distanţa $AC = vt$. Pe baza propagării rectilinii a razelor de lumină, umbra omului este $CE = v_1 t$. Asemănăm triunghiurile *DCE* cu *BAE* (fig. 1) şi obţinem.

$$\frac{h_0}{h} = \frac{CE}{AE} \Rightarrow \frac{h_0}{h} = \frac{v_1 t}{vt + v_1 t} = \frac{v_1}{v + v_1} \Rightarrow v_1 = \frac{h_0 v}{h - h_0} = 29 \text{ cm/s}.$$

4. Deoarece lumânarea se consumă şi umbra flăcării se deplasează, utilizăm asemănarea triunghiurilor *AB'C'* cu *ABC* (fig. 2):

$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow \frac{h - v_1 \cdot t}{h} = \frac{\ell - v_2 \cdot t}{\ell}$, unde v_2 este viteză cu care se deplasează umbra flăcării $\Rightarrow h \cdot v_2 = \ell \cdot v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{\ell \cdot v_1}{h} = 0{,}5$ cm/min.

5. Razele de lumină se propagă rectiliniu şi pe tavan se va forma o pată luminoasă de aceeaşi formă cu fanta pătratică, conform desenului din fig. 3. Asemănăm laturile şi înălţimile piramidelor:

$$\frac{h}{H} = \frac{\ell}{L} \Rightarrow L = \frac{H\ell}{h} = 50 \text{ cm}.$$

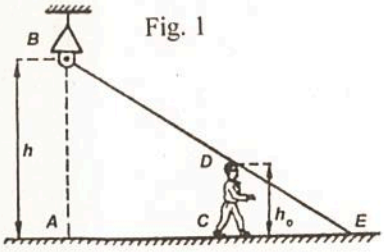


Fig. 1

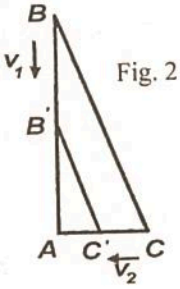


Fig. 2

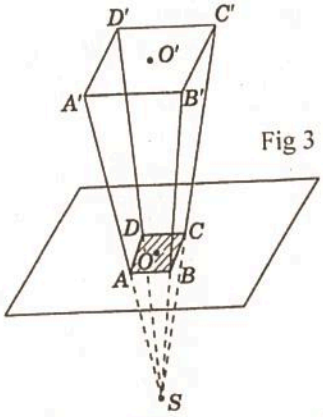
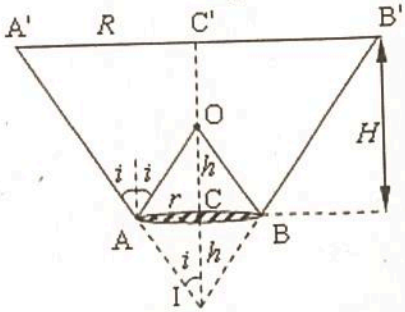


Fig 3

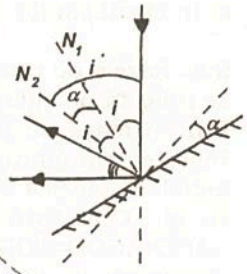
6. Lampa de lumină emite un fascicul divergent de lumină. Razele de lumină cad pe oglinda plană şi se reflectă cu respectarea legii reflexiei i=r. Razele reflectate cad apoi pe tavan producând o pată circulară asemănătoare cu oglinda. Razele de lumină reflectate de oglindă par a proveni dintr-o sursă *I*, care reprezintă imaginea virtuală a lampei obţinută de oglindă, imagine situată simetric în raport cu oglinda. Utilizăm asemănarea triunghiurilor:



IAC cu

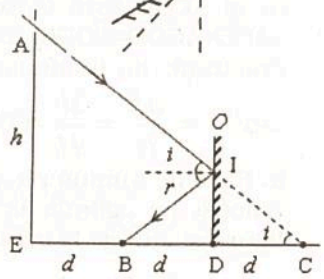
$$IA'C' \Rightarrow \frac{h}{h+H} = \frac{r}{R} \Rightarrow R = \frac{r(h+H)}{h} = 1{,}1\text{m}.$$

7.a. Dacă oglinda plană se roteşte cu unghiul α faţă de poziţia anterioară şi normala N_2 se roteşte faţă de vechea normală N_1 tot cu unghiul α. Din desen se observă că i creşte la $i' = i + \alpha$ astfel că unghiul dintre raza incidentă şi cea reflectată $2i$ creşte la $2i' = 2i + 2\alpha$ şi, prin urmare, raza reflectată se roteşte cu 2α în acelaşi sens cu oglinda atunci când oglinda se roteşte cu unghiul α.

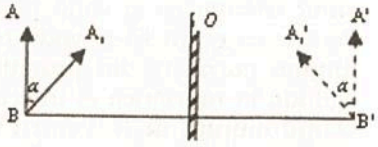


b. Raza de lumină care cade pe oglinda plană suferă fenomenul de reflexie, cu respectarea legii: $\hat{i} = \hat{r}$. Triunghiurile *IBD* şi *IDC* sunt egale. Asemănând triunghiurile *IDC* şi *AEC* $\Rightarrow \frac{ID}{h} = \frac{d}{3d} \Rightarrow ID = \frac{h}{3} = 0{,}5$ m

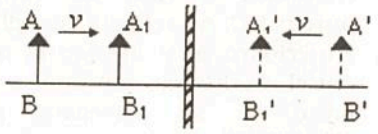
Prin urmare raza de lumină cade pe oglindă la înălţimea de 50 cm faţă de podea.



c. Într-o oglindă plană, imaginea unui obiect real este situată simetric faţă de oglindă şi este virtuală. Pentru a construi imaginea unui punct într-o oglindă plană trebuie să utilizăm două raze de lumină. Acestea se reflectă pe oglindă iar prelungirile lor se întâlnesc într-un punct în care se formează imaginea obiectului. Pe baza modului de construcţie al imaginilor în oglinzi plane se observă că dacă obiectul se roteşte cu unghiul α faţă de o oglindă plană, imaginea virtuală a acestuia se va roti în sens opus cu acelaşi unghi α. Astfel, unghiul dintre noua imagine şi noua poziţie a obiectului este $2\alpha = 60°$.

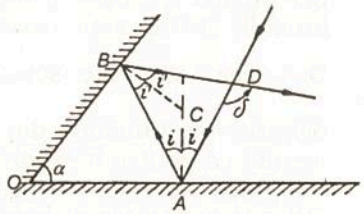


d. Imaginea persoanei se formează în oglinda plană simetric şi din această cauză imaginea se apropie de oglinda plană cu aceeaşi viteză cu care se apropie se apropie persoana de oglindă, adică cu viteza v=4 m/s. Imaginea se apropie de obiect cu viteza $2v$=8 m/s.

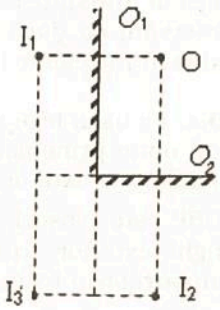


8.a. Conform legii reflexiilor $i = D\hat{A}C = C\hat{A}B$ şi $A\hat{B}C = C\hat{B}D = i'$. Deoarece *OBCA* este patrulater inscriptibil, astfel că $\alpha + A\hat{C}B = 180°$. În triunghiul CAB, $i + i' + A\hat{C}B = 180^0 \Rightarrow i + i' = \alpha$.

Unghiul de deviaţie δ este exterior triunghiului *DBA*, şi deci $\delta = 2i + 2i' = 2(i + i') = 2\alpha$.



b. Conform desenului când $\alpha = 90°$ se formează N=3 imagini. Se poate demonstra prin desene, că dacă două oglinzi plane formează între ele un unghi α care este divizor al unghiului de 360°, numărul de imagini ale unui punct obiect situat între cele două oglinzi este $N = \frac{360^0}{\alpha} - 1$.

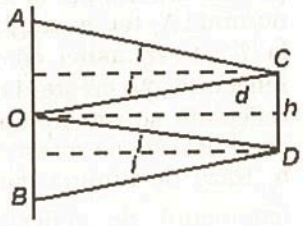


Observaţie: toate imaginile se află pe un cerc care are raza egală cu distanţa de la obiect la punctul de intersecţie al

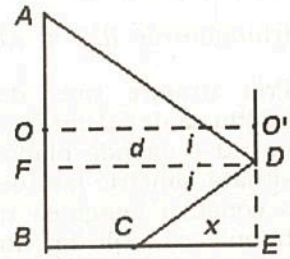
oglinzilor cu un plan ce conține punctul obiect și este situat perpendicular pe cele două oglinzi

c. În cazul când $\alpha=15^0$ se formează $N=23$ imagini.

9.a. Razele de lumină care pornesc din punctele A și B se reflectă pe oglindă și ajung la aparatul de fotografiat. Prin urmare se fotografiază porțiunea AB. Din legea reflexiei triunghiurile ACO și BDO sunt isoscele și egale, astfel că $AC=OC=OD=BD$. Deoarece $OC=OD$ înseamnă că și ΔCOD este isoscel. Din geometrie observăm că $\Delta ACO=\Delta COD=\Delta ODB$, astfel că $AO=CD=OB=h \Rightarrow AB=2h$. Fracțiune din înălțimea omului care apare pe fotografie este $f=\frac{AB}{H}=\frac{2h}{H}$=66,66%.

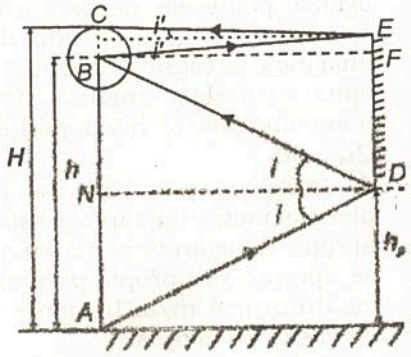


b. Raza de lumină pleacă de pe podea din punctul C, se reflectă pe oglindă la marginea ei inferioară D ca în figură și ajunge la ochiul observatorului în punctul A.



Din geometrie în ΔAFD $tgi=\frac{AF}{FD}=\frac{H+h}{2d}$, iar în ΔDCE $tgi=\frac{DE}{CE}=\frac{H-h}{2x}$, astfel că $x=\frac{d(H-h)}{H+h}$=30 cm

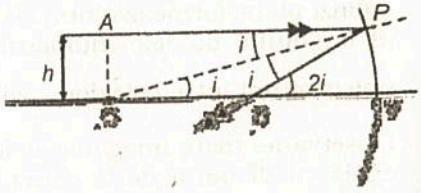
c. Pentru ca să se vadă în întregime în oglindă, omul trebuie să-și vadă picioarele și creștetul. Pentru ca omul să-și vadă picioarele, o rază de lumină pornește din punctul A, se reflectă pe oglindă la marginea ei inferioară D și ajunge la ochiul omului în B. Pentru ca omul să-și vadă creștetul, o rază de lumină pornește din punctul C, se reflectă pe oglindă la marginea ei superioară E și ajunge la ochiul omului în B. Astfel înălțimea minimă a oglinzii pentru ca omul să se privească în întregime este $ED=EF+FD$. Pe baza fenomenului de reflexie a luminii, ΔADB este isoscel, iar $FD=BN=AB/2$.



Deoarece ΔBEC este isoscel, $EF=BC/2 \Rightarrow ED=\frac{AB+BC}{2}=\frac{H}{2}$. Înălțimea minimă a oglinzii este jumătate din înălțimea omului, astfel că $h_o=H/2=90$ cm. Din figură rezultă că pentru a se forma în întregime imaginea omului în oglindă, trebuie ca marginea inferioară a oglinzii să se afle față de podea la înălțimea $h_P=85$ cm, adică la jumătatea distanței dintre podea și ochi.

Observăm că dacă cele două condiții sunt îndeplinite simultan, omul se poate vedea în întregime în oglindă indiferent de poziția lui față de oglindă.

10.a. Pe baza legii reflexiei raza AP, paralelă cu axul optic principal al oglinzii după reflexia pe oglindă taie axul optic principal în punctul B.



ΔCBP este isoscel, iar $V\hat{B}P=2i$ deoarece este unghi exterior triunghiului. Aplicăm teorema sinusurilor în triunghi.

$\frac{CP}{\sin(180-2i)} = \frac{CB}{\sin i} \Rightarrow CB = \frac{R\sin i}{\sin 2i} = \frac{R}{2\cos i}$. Dar în ΔCAP, $\sin i = \frac{h}{R} \Rightarrow$

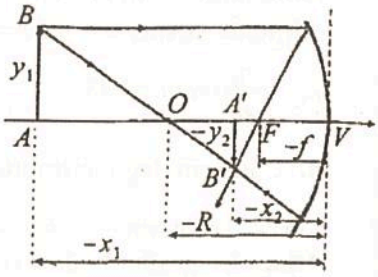
$\cos i = \sqrt{1-\frac{h^2}{R^2}} \Rightarrow CB = \frac{R}{2\sqrt{1-\frac{h^2}{R^2}}}$. Pentru prima rază h_1=0,5 cm astfel că $CB_1 \approx 2{,}5$ cm. Raza puțin depărtată de axul optic principal este o rază paraxială și în urma reflexiei pe oglinda concavă, raza reflectată trece prin focarul oglinzii.

b. Pentru raza a doua h_2=3 cm astfel că $CB_2 \approx 3{,}125$ cm. Raza depărtată de axul optic principal după reflexia pe oglinda concavă taie acet ax mai departe decât focarul principal al oglinzii.

c. Distanța dintre punctele în care cele două raze taie axul optic principal este CB_2-CB_1=6,25 mm.

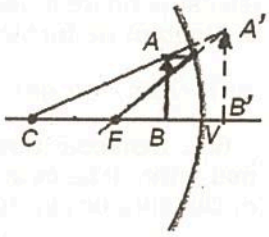
11.a. Utilizăm formula oglinzilor $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}=\frac{2}{R} \Rightarrow$

$x_2 = \frac{Rx_1}{2x_1-R}$ =15 cm



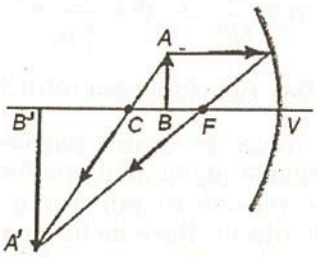
b. Din fomula măririi liniare transversale $\beta = -\frac{x_2}{x_1} = \frac{R}{R-2x_1} = \frac{y_2}{y_1}$ obținem $y_2 = \beta y_1 = -3$ mm

c. Dacă obiectul se apropie de oglindă cu d=20 cm atunci $-x_1 = -x_1' + d \Rightarrow x_1' = x_1 + d = -5$cm, astfel că $\frac{1}{x_2'}+\frac{1}{x_1'}=\frac{2}{R} \Rightarrow x_2' = \frac{Rx_1'}{2x_1'-R}$ =10 cm. Deoarece x_2' >0 imaginea este virtuală deoarece se formează în spatele oglinzii



12.a. Din formula oglinzilor $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}=\frac{2}{R} \Rightarrow$

$x_2 = \frac{Rx_1}{2x_1-R} = -20$ cm



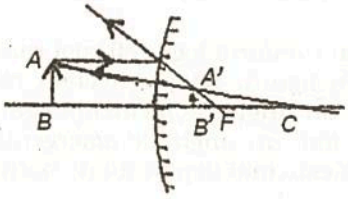
b. Mărirea liniară transversală este $\beta = -\frac{x_2}{x_1} = -3$

c. Deoarece imaginea este egală cu obiectul atunci $\beta' = -1$, astfel că $x_2' = -\beta' x_1' \Rightarrow -\frac{1}{\beta' x_1'}+\frac{1}{x_1'}=\frac{2}{R} \Rightarrow x_1' = \frac{R(\beta'-1)}{2\beta'} = R = -30$ cm

13.a. Din R=2f obținem distanța focală a oglinzii f=R/2=20 cm

b. Utilizăm formula oglinzilor:

$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}=\frac{2}{R} \Rightarrow x_2 = \frac{Rx_1}{2x_1-R}$ =10 cm, cu $-x_1$=d

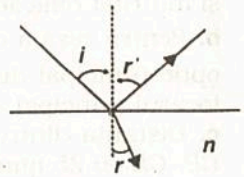


c. Mărirea liniară transversală este

$\beta = -\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2}$.

14.a. Aplicăm legea refracției $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ și obținem indicele de refracție relativ al celui de-al doilea mediu față de primul mediu: $n_{r_{21}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i}{\sin r} \approx 1{,}41$

b. Din legea refracției: $\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n} \Rightarrow r = 30°$.



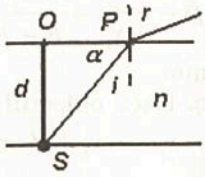
Astfel unghiul dintre raza reflectată și cea refractată este $180° - i - r = 180° - 45° - 30° = 105°$.

c. Deoarece raza reflectată este perpendiculară pe raza refractată, atunci $i + r = 90^0 \Rightarrow r = 90^0 - i$. Conform legii refracției $n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow n_1 \sin i = n_2 \sin(90^0 - i) \Rightarrow n_1 \sin i = n_2 \cos i \Rightarrow$

$n_{r_{21}} = \frac{n_2}{n_1} = tg\, i \approx 1{,}73$.

d. Conform legii refracției $n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow n_2 = \frac{n_1 \sin i}{\sin r}$. Deoarece din grafic $\sin i = 0{,}8$ și $\sin r = 0{,}6$ obținem $n_2 = 2$

15.a. În graficul alăturat este reprezentat mersul razei de lumină care ajunge la un observator plasat în aer deasupra feței superioare a plăcii.



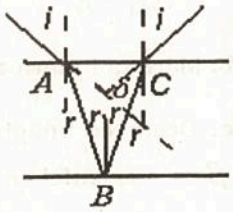
b. Unghiul de incidență este $i = 90^0 - \alpha = 30^0$. Din legea refracției: $\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ unghiul de refracție este $r = 60^0$. Deoarece raza de lumină trece dintr-un mediu mai dens într-un mediu mai puțin dens es se depărtează de normală.

c. Distanța de la punctul O până la punctul P este:

$tg\alpha = \frac{d}{OP} \Rightarrow OP = \frac{d}{tg\alpha} = 2$ cm

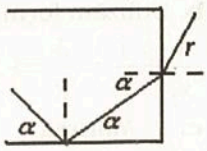
16.a. Aplicăm legea refracției: $\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n} \Rightarrow r = 30^0$

b. Raza de lumină pătrunde în apă sub unghiul r, cade pe oglinda plană aflată pe fundul lichidului tot sub unghiul r și se reflectă în punctul B sub același unghi r ca în figura alăturată. Raza de lumină cade pe fața lichidului în punctul C sub unghiul de incidență r și iese în aer sub unghiul i. Unghiul de deviație al razei emergente față de raza incidentă este $\delta = 180 - 2i = 60^0$, deoarece deviația razei δ este unghi exterior triunghiului isoscel cu unghiurile egale $90 - i$.



c. Din $\sin i = n \sin r = 1$ obținem unghiul de incidență $i = 90^0$.

17.a. Conform legii reflexiei raza se reflectă sub un unghi egal ca în figură. Raza reflectată cade pe fața laterală a cubului sub un unghi de incidență egal cu α. Cum $\alpha < \alpha_{max}$ raza iese în apă sub un unghi de emergență r mai mare decât α, astfel că raza este mai depărtată de normală.



b. Când unghiul de incidenţă devine α_{min} lumina nu mai intră în apă deşi întâlneşte faţa laterală a cubului ceea ce înseamnă că pe faţa laterală a cubului apare fenomenul de reflexie totală. Din legea refracţiei $n_s \sin\alpha_m = n_a$, deoarece r=90⁰ obţinem indicele de refracţie al sticlei $n_s = \frac{n_a}{\sin\alpha_{max}}$ =1,54

c. Dacă apa se scoate din vas, raza iese din cubul de sticlă în aer. Pentru ca raza să nu mai poată să iasă în aer trebuie ca unghiul de refracţie să devină r=90⁰, astfel că $n_s \sin\alpha'_m = n_a \Rightarrow \sin\alpha'_m = \frac{1}{n_a} \approx 0{,}65$

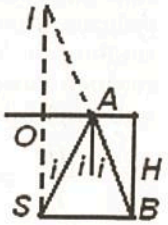
18.a. Deoarece raza trece din aer în soluţie, perpendicular pe suprafaţa de separare atunci i=0 şi din legea refracţiei $\sin i = n\sin r \Rightarrow \sin r = 0 \Rightarrow r$=0, iar din legea reflexiei $i = r'$=0

b. Conform legii refracţiei $n\sin i = \sin 90 \Rightarrow \sin i = 1/n \approx$=0,714. Unghiul limită pentru care raza se refractă sub un unghi de 90⁰ este sinℓ=0,714.

c. Deoarece cos$r$=0,8 atunci $\sin r = \sqrt{1-\cos^2 r}$ =0,6 şi din legea refracţiei $\sin i = n\sin r$ =0,84

d. Pentru tg$x$ şi din $tgx = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ sinusul unghiului de incidenţă este $\sin x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2 x}} \approx 0{,}768$. Cum sin$x$>sinℓ $\Rightarrow x>\ell$, deoarece ungiul de incidenţă la suprafaţa de separare soluţie-apă, este mai mare decât unghiul limită raza fascicului laser suferă fenomenul de reflexie totală.

19.a. Scriem legea refracţiei pentru suprafaţa apă-aer: $n\sin i_{max} = \sin r_{max}$. Din geometrie presupunând că raza de lumină cade la marginea vasului, atunci $\sin i_{max} = \frac{\frac{D}{2}}{\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + H^2}}$. Obţinem sin$i_{max}$=0,6 $\Rightarrow$ sinr_{max}=0,8



b. Imaginea sursei obţinută cu ajutorul oglinzii este virtuală situată simetric faţă de oglindă aflându-se la aceeaşi distanţă ca şi obiectul, astfel că distanţa dintre sursă şi imaginea sursei formată în oglindă este d=2H=80 cm

c. Din desen, deoarece raza SA se reflectă astfel că unghiul de incidenţă este egal cu unghiul de reflexie, ΔSAB este isoscel. Cum SA=AB, atunci OA=SB/2=D/2=30 cm

20.a. Din legea refracţiei scrisă pentru suprafaţa aer-lichid: $\sin i = n\sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n}$=3/8

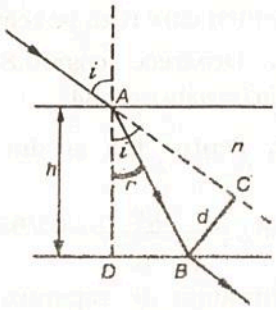
b. În urma reflexiei pe fundul vasului raza cade sub un unghi de incidenţă r venind din apă, astfel că raza iese din apă în aer sub unghiul i. Unghiul format de direcţia fasciculului care iese din lichid cu suprafaţa lichidului este δ=90-i=60⁰

c. O rază de lumină care pătrunde în lichid parcurge distanța $d = AB + BD = 2AB$. Din ΔABD: $\cos r = \frac{h}{AB} \Rightarrow AB = \frac{h}{\cos r}$, astfel că:

$$d = \frac{2h}{\cos r} = \frac{2h}{\sqrt{1-\sin^2 r}} \approx 21{,}6 \text{ cm}$$

21.a. Conform legii refracției scrisă pentru prima față a lamei: $\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n} \Rightarrow r = 30^0$

b. Raza de lumină care cade pe fața superioară a lamei suferă fenomenul de refracție și se apropie de normală, pentru ca la refracția pe fața inferioară să emeargă din lamă sub același unghi sub care a intrat. Raza emergentă este paralelă cu cea incidentă, dar va fi deplasată față de aceasta.

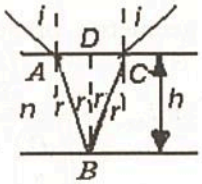


În ΔABC: $\sin(i-r) = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BC = AB\sin(i-r)$, iar în ΔADB: $\cos r = \frac{h}{AB} \Rightarrow AB = \frac{h}{\cos r} \Rightarrow BC = \frac{h\sin(i-r)}{\cos r}$

Din $\sin i = n \sin r \Rightarrow \cos r = \sqrt{1-\frac{\sin^2 i}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}{n}$.

$$BC = h\frac{(\sin i \cos r - \cos i \sin r)}{\cos r} = h\left(\sin i - \frac{\cos i \sin i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}\right).$$

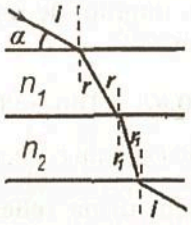
$$BC = h\sin i\left(1-\frac{\sqrt{1-\sin^2 i}}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}\right) \approx 4{,}5 \text{ mm}.$$



c. Raza de lumină care cade pe fața inferioară a lamei se reflectă deoarece această față este argintată. Conform legii reflexiei raza se reflectă sub un unghi de reflexie egal cu unghiul de incidență pe fața inferioară r, ca în figura alăturată. Această rază cade pe fața superioară sub unghiul r și emerge sub unghiul i. Din geometrie $AC=2AD$. În ΔABD:

$$tgr = \frac{AD}{h} \Rightarrow AD = htgr \Rightarrow AC = 2htgr \approx 1{,}73 \text{ cm}$$

22.a. Din legea refracției: $\sin i = n_1 \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n_1}$.



Deoarece $i=90^0-\alpha=60^0$ astfel că obținem $\sin r \approx 0{,}65$

b. Din legea refracției: scrisă la fețele de separație aer-apă, apă-sticlă și sticlă-aer obținem:

$\sin i = n_1 \sin r = n_2 \sin r_1 = \sin i' \Rightarrow i = i'$. Prin urmare raza emergentă la ieșirea din cuvă prin fața inferioară este paralelă cu raza incidentă pe suprafața apei ca în figură.

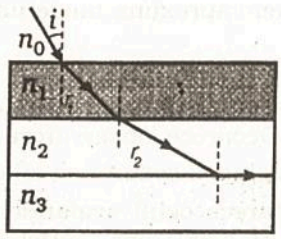
c. Pe baza legii refracției scrisă la suprafața de separare sticlă-sticlă flint $n_2 \sin r_1 = n_3 \sin r_3$ și din $\sin i = n_2 \sin r_1$ obținem:

$$\sin i = n_3 \sin r_3 \Rightarrow \sin i = n_3 \sin r_3 \Rightarrow \sin r_3 = \frac{\sin i}{n_3} \Rightarrow r_3 = 30^0$$

23.a. Din legea refracției pentru suprafața de separație dintre aer și regiunea cu indicele de refracție n_1 obținem: $\sin i = n_1 \sin r_1 \Rightarrow \sin r_1 = \frac{\sin i}{n_1} \Rightarrow r_1 = 30^0$

b. Din legea refracției pentru suprafața de separație dintre regiunile 1 și 2 obținem $n_1 \sin r_1 = n_2 \sin r_2 \Rightarrow n_1 \sin r_1 = \frac{n_1}{k} \sin r_2 \Rightarrow k = \frac{\sin r_2}{\sin r_1} \approx 1{,}73$

c. Aplicăm legea refracției succesiv, astfel că:
$n_0 \sin i = n_1 \sin r_1 = n_2 \sin r_2 = n_3 \sin 90°$.

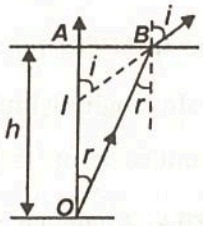


Cum $n_3 = \frac{n_2}{k} = \frac{n_1}{k^2}$ obținem:

$n_0 \sin i = \frac{n_1}{k^2} \Rightarrow n_0 = \frac{n_1}{k^2 \sin i} \approx 1{,}81$

24.a. Pentru a construi imaginea punctului obiect O, sunt necesare două raze de lumină. O rază cade perpendicular pe suprafața apei și părăsește apa pe aceeași direcție și o altă rază de lumină care cade pe suprafața apei sub unghiul r și apoi se depărtează de normală în aer (deoarece raza iese în aer, un mediu mai puțin dens decât apa). Imaginea punctului obiect se formează în punctul I, unde se întâlnesc prelungirile razelor de lumină și este o imagine virtuală, fiind situată mai aproape de suprafața apei.

La suprafața de separare aer–apă legea refracției este:



$n \sin r = \sin i$. În ΔAOB: $tg\, r = \frac{AB}{h} \Rightarrow AB = h \cdot tg\, r$

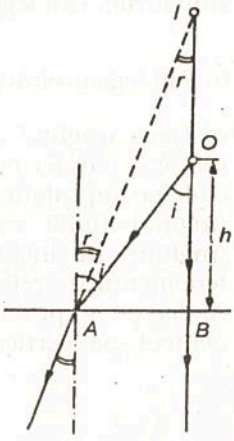
$tg r = \frac{\sin r}{\cos r} = \frac{\sin r}{\sqrt{1-\sin^2 r}} = \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \Rightarrow AB = \frac{h \sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$

În ΔAIB: $tg\, i = \frac{AB}{AI} \Rightarrow AI = \frac{AB}{tg\, i} = \frac{h \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \approx 1{,}97$ m.

b. Distanța dintre piatră și imaginea ei este $OI = AO - AI$

$OI = h\left(1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\right) \approx = 2$ m.

c. Dacă omul privește perpendicular pe suprafața apei $i = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow AI = \frac{h}{n}$, iar $OI = h\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$ m. În cazul incidenței normale stratul de apă cu grosimea h și indicele de refracție n apropie imaginea de suprafața de separare aer–apă cu $d = h\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.



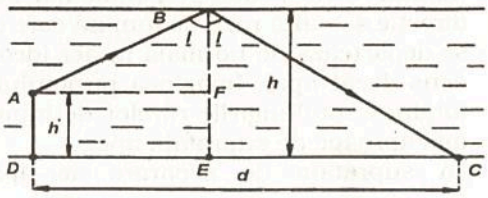
25.a. Pentru a construi imaginea ochilor observatorului se utilizează două raze: o rază perpendiculară pe suprafața apei pătrunde în apă pe aceeași direcție și o rază care cade sub un unghi de incidență i și se refractă apropiindu-se de normală. Prelungirile celor două raze se întâlnesc, formând o imagine virtuală în punctul I.

În ΔIAB: $tgr = \frac{AB}{IB} \Rightarrow IB = \frac{AB}{tgr}$ şi în ΔOAB: $tgi = \frac{AB}{h_1} \Rightarrow AB = h_1 tgi$ şi astfel $IB = h_1 \frac{tgi}{tgr}$. Cum scafandrul priveşte perpendicular, unghiurile sunt mici şi putem aproxima tangenta cu sinusul unghiului, astfel încât $IB \approx h_1 \frac{\sin i}{\sin r}$.

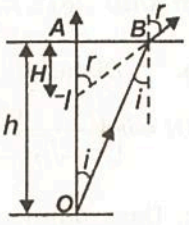
Din legea refracţiei $\sin i = n \sin r \Rightarrow IB = nh_1$ şi deci imaginea virtuală a ochilor observatorului se va forma mai departe decât sunt în realitate ochii acestuia

b. Deoarece observatorul vede ochii scafandrului atunci când priveşte normal imaginea acestora se află faţă de suprafaţa apei la distanţa $h'_{om} = h_{om} / n$ =45 cm, deoarece ochii scafandrului se află situaţi faţă de suprafaţa apei la distanţa h_{om}=h-h'=60 cm. Astfel distanţa dintre observator şi adâncimea la care vede observatorul ochii scafandrului este d=h_1+h_{om}=93 cm

c. Scafandrul vede imaginile obiectelor mai intens prin reflexie totală. Dacă un obiect se află la distanţa d de scafandru raza de lumină se propagă ca în figură. Astfel $d = DE + EC$. În ΔABF: $tg\ell = \frac{AF}{h - h'}$, iar în ΔBEC: $tg\ell = \frac{EC}{h}$, unde ℓ reprezintă este unghiul limită, astfel că $d = (2h - h') \cdot tg\ell$. Conform legii refracţiei, ţinând cont că $n \sin \ell = 1$, atunci $tg\,\ell = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \Rightarrow d = \frac{2h - h'}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 3{,}4$ m.

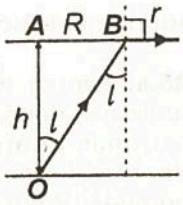


26.a. Imaginea sursei de lumină în situaţia când sursa este privită din afara bazinului, pe verticala ce trece prin sursă este virtuală ca în figură. Deoarece $tgr = \frac{AB}{H}$ şi $tgi = \frac{AB}{h}$ prin împărţirea relaţiilor obţinem $\frac{tgi}{tgr} = \frac{H}{h} \approx \frac{\sin i}{\sin r}$, deoarece unghiurile i şi r sunt foarte mici şi se aproximează tangenta cu sinusurile. Din legea refracţiei $n \sin i = \sin r \Rightarrow n = \frac{h}{H} = \frac{4}{3}$



b. Din legea refracţiei $n \sin i = \sin r \Rightarrow \sin i = \frac{\sin r}{n}$=0,6

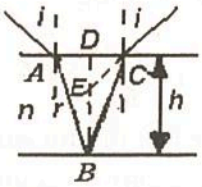
c. Dacă unghiul de refracţie devine r=90°, raza de lumină se refractă paralel cu suprafaţa apei. Orice rază de lumină care cade pe suprafaţa apei sub un unghi de incidenţă mai mic decât unghiul limită iese din apă, în timp ce razele incidente sub unghiuri de incidenţă mai mari decât unghiul limită suferă fenomenul de reflexie totală şi nu pot ieşi prin suprafaţa apei. Astfel pe suprafaţa apei se va observa un cerc luminos cu centrul pe verticala sursei. Din legea refracţiei la suprafaţa apei cu r=90°



obținem: $n\sin\ell = \sin 90° = 1 \Rightarrow \sin\ell = \frac{1}{n}$, astfel că $tg\ell = \frac{\sin\ell}{\sqrt{1-\sin^2\ell}}$. Din geometrie

$$tg\ell = \frac{R}{h} \Rightarrow R = htg\ell = \frac{h}{\sqrt{n^2-1}} \approx 1{,}36 \text{ m}.$$

27.a. Mersul razelor de lumină este redat în figura alăturată.



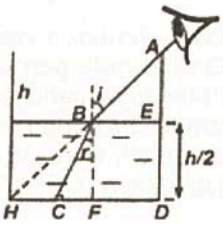
b. Din legea refracției scrisă pentru prima față a lamei:

$$\sin i = n\sin r \Rightarrow n = \frac{\sin i}{\sin r} \approx 1{,}73$$

c. Din grafic $AC = 2AD$. Cum $tgr = \frac{AD}{h} \Rightarrow AC = 2htgr \approx 3{,}46\text{m}$

d. Adâncimea aparentă la care un observator din aer vede moneda este *DE*. Din triunghiul *DEC*: $tg(90-i) = \frac{h_{ap}}{DC} \Rightarrow h_{ap} = ACtg(90-i) = h(tgr)tg(90-i) = 1\text{m}$

28.a. Privind sub unghiul de incidență i, copilul vede fundul vasului în punctul *H* și nu în punctul *C* unde se află moneda. Când se toarnă apă, raza de lumină se propagă ca în figură, astfel că: *DC=DF+FC=BE+FC*.



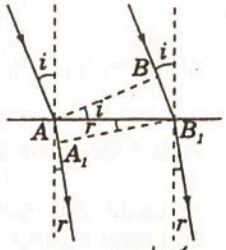
În ΔBCF: $tgr = \frac{CF}{DE} \Rightarrow CF = \frac{htgr}{2}$ și în ΔABE: $tgi = \frac{BE}{AE} \Rightarrow$

$BE = AEtgi = \frac{htgi}{2}$, astfel că obținem $DC = \frac{h}{2}(tgi + tgr)$.

Cum $\sin i = n\sin r$, conform legii refracției $\sin r = \frac{\sin i}{n}$.

Cum $\text{tg}\, r = \frac{\sin i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}$ obținem $DC = \frac{h}{2}\left(\text{tg}\, i + \frac{\sin i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}\right) \approx 1{,}73\text{cm}$.

b. Din desen, pe baza legii refracției se observă că diametrul fascicului în mediul optic mai dens (apă) este mai mare decât diametrul fasciculului în mediul optic mai puțin dens (aer). Din geometrie în ΔABC: $\cos i = \frac{d_{aer}}{AB}$ și în ΔADB:



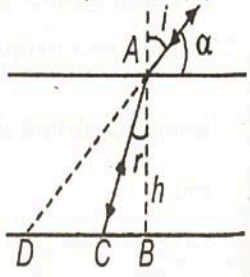
$\cos r = \frac{d_{apă}}{AB}$. Prin împărțirea celor două relații obținem:

$$\frac{\cos i}{\cos r} = \frac{d_{aer}}{d_{apa}} \Rightarrow d_{apa} = d_{aer}\frac{\cos r}{\cos i}.$$

Pe baza legii refracției $\sin i = n\sin r$, astfel că:

$\cos r = \sqrt{1-\sin^2 r} = \sqrt{1-\frac{\sin^2 i}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}{n}$. Obținem:

$$d_{apa} = \frac{d_{aer}\sqrt{n^2-\sin^2 i}}{n\cos i} \approx 4{,}28 \text{ cm}.$$



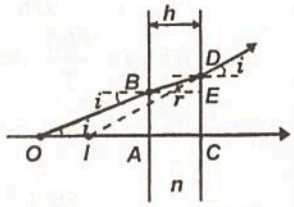
c. Bețișorul atinge fundul vasului în punctul *D*, deoarece copilul introduce bețișorul spre monedă sub unghiul sub care vede el moneda. Raza de lumină își schimbă direcția de

propagare atunci când atinge suprafața apei datorită fenomenului de refracție. Prin urmare raza de lumină atinge fundul vasului în punctul *C*. Conform legii refracției $\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n}$, cu i=30°.

În ΔABC: $tg\ r = \frac{CB}{h_1} \Rightarrow CB = h_1 \cdot tgr$ cu $h_1 = h/2$ și în ΔADB: $tg\ i = \frac{DB}{h_1} \Rightarrow DB = h_1 \cdot tgi$. Astfel distanța dintre punctul unde va atinge un bețișor fundul vasului și monedă este: $DC = DB - CB = h_1(tg\ i - tg\ r)$.

$tgr = \frac{\sin r}{\cos r} = \frac{\sin r}{\sqrt{1-\sin^2 r}} = \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$. Distanța dintre punctul unde va atinge un bețișor fundul vasului și monedă este $DC = h_1(tg\ i - \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}) \approx 1{,}735$ cm

29.a. Pentru a construi imaginea punctului obiect utilizăm două raze de lumină. O rază cade perpendicular pe lamă și se refractă pe aceeași direcție, în timp ce a doua rază cade sub un unghi de incidență *i* și emerge din lamă sub același unghi. Prelungirile cele două raze se intersectează în punctul *I*, unde se va forma imaginea virtuală a obiectului *O*.
Din desen: *OI=OC–IC=OA+h–IC*.



În ΔOBA: $tgi = \frac{AB}{OA} \Rightarrow OA = \frac{AB}{tgi}$ și în ΔIDC:

$tgi = \frac{DC}{IC} \Rightarrow IC = \frac{DC}{tgi} \Rightarrow OI = h - \frac{DC - AB}{tgi} = h - \frac{DE}{tgi}$

Dar în ΔBED: $tgr = \frac{DE}{h} \Rightarrow DE = h \cdot tg\ r \Rightarrow$

$OI = h\left(1 - \frac{tg\ r}{tg\ i}\right)$. Deoarece unghiurile *i* și *r* sunt mici, putem aproxima tangenta cu sinusul, astfel că $OI \approx h\left(1 - \frac{\sin r}{\sin i}\right)$. Conform legii refracției $\sin i = n \sin r$ obținem $OI = h\left(1 - \frac{1}{n}\right)$=1 cm. Deci o lamă cu fețe plan paralele de grosime *h* și indice de refracție *n*, apropie obiectul de lamă cu $h\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, formându-i o imagine virtuală. Apropierea imaginii este independentă de poziția obiectului.

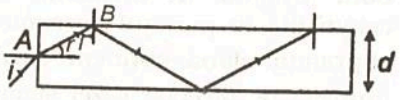
b. Lama cu fețe plan.paralele formează pentru obiectul situat pe fața ei inferioară o imagine virtuală situată mai aproape de fața inferioară cu $h\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, astfel că imaginea finală se formează față de fața superioară la distanța $h - h\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{h}{n}$=2 cm

c. Prima lamă apropie obiectul de fața superioară a sistemului de lame cu $h_1\left(1-\frac{1}{n_1}\right)$, iar această imagine joacă rol de obiect pentru cea de-a doua lamă, care la rândul ei apropie noua imagine cu $h_2\left(1-\frac{1}{n_2}\right)$ și așa mai departe, astfel încât apropierea finală va fi $d = h_1\left(1-\frac{1}{n_1}\right)+h_2\left(1-\frac{1}{n_2}\right)+\cdots+h_n\left(1-\frac{1}{n_n}\right)$.

Cum obiectul se află față de suprafața lamei "n" la distanța $h = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$, imaginea se va forma față de suprafața lamei "n" la: distanța $h - d = \frac{h_1}{n_1}+\frac{h_2}{n_2}+\cdots+\frac{h_n}{n_n}$.

30.a. Conform legii refracției $\sin i = n\sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n} \Rightarrow r = 30^0$

b. Unghiul de incidență pe suprafața cilindrică este $\alpha = 90° - r = 60°$.



c. Deoarece unghiul limită se află din: $n\sin\ell = 1 \Rightarrow \sin\ell = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ell = 45°$. Cum $\alpha > \ell$, înseamnă că pe fețele cilindrice raza de lumină suferă fenomenul de reflexie totală. Distanța parcursă de rază de-a lungul fibrei optice între două reflexii consecutive este $2d_1$ atunci după N-1 reflexii, distanța parcursă va fi $2(N-1)d_1$ și cum după prima reflexie este parcursă distanța d_1 atunci în total distanța parcursă de-a lungul fibrei este $D = d + (N-1)2d_1 = d_1(2N-1)$.

În ΔABC: $tgr = \frac{d}{2d_1} \Rightarrow d_1 = \frac{d}{2tgr} \Rightarrow D = \frac{d\sqrt{3}}{2}(2N-1) \approx 67{,}47$ cm.

a. Din geometrie $\sin i = \frac{H}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow i = 60^0$

b. Cum din desen $i = \delta + r \Rightarrow$ unghiul de refracție este $r = i - \delta = 30^0$ și din legea refracției scrisă la fața curbă a cilindrului $\sin i = n\sin r \Rightarrow n = \frac{\sin i}{\sin r} \approx 1{,}73$

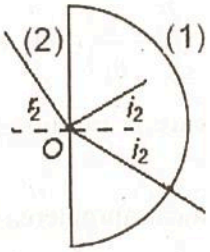
c. Raza de lumină cade pe fața plană sub un unghiul de incidență $i' = \delta$. Din legea refracției scrisă la fața plană a cilindrului $n\sin i' = \sin r' \Rightarrow r' = 60^0$

31.a. Din geometrie $\sin i = \frac{H}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow i = 60^0$

b. Cum din desen $i = \delta + r \Rightarrow$ unghiul de refracție este $r = i - \delta = 30^0$ și din legea refracției scrisă la fața curbă a cilindrului $\sin i = n\sin r \Rightarrow n = \frac{\sin i}{\sin r} \approx 1{,}73$

c. Raza de lumină cade pe fața plană sub un unghiul de incidență $i' = \delta$. Din legea refracției scrisă la fața plană a cilindrului $n\sin i' = \sin r' \Rightarrow r' = 60^0$

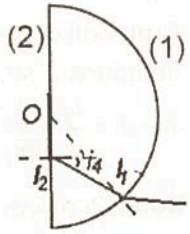
32.a. Raza de lumină pătrunde în cilindru pe direcția incidentă deoarece i_1=0 și din legea refracției $\sin i_1 = n \sin r_1 \Rightarrow r_1$=0.



b. Din desen se observă că unghiul dintre raza incidentă și cea reflectată pe fața (2) este $\alpha=2i_2$. Pe baza legii refracției:

$$n \sin i_2 = \sin r_2 \Rightarrow \sin i_2 = \frac{\sin r_2}{n} \Rightarrow i_2 = 30^0 \Rightarrow \alpha = 60^0$$

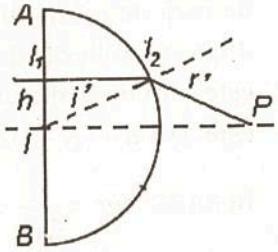
c. Din desen pe baza legii refracției la fața a doua (2) obținem: $n \sin i_4 = \sin 90 \Rightarrow \sin i_4 = \frac{1}{n}$. Unghiul de incidență i_4 pe suprafața (2) este $i_4=45^0$



d. Mersul razei de lumină prin semicilindru în condițiile punctului **c.** este redată în figura alăturată.

33.a. Unghiul de incidență este format de rază cu normala construită în punctul de contact, astfel că $i_1=60^0$. Din legea refracției scrisă la suprafața plană obținem $\sin i_1 = n \sin r_1 \Rightarrow r_1=30^0$. Deoarece raza refractată se propagă pe direcția razei semicilindrului, ea cade pe suprafața sferică sub un unghi de incidență i_2=0 și pe baza legii refacției scrisă la fața sferică $n \sin i_2 = \sin r_2 \Rightarrow r_2$=0. Prin urmare raza iese din semicilindru pe direcția razei din acesta.

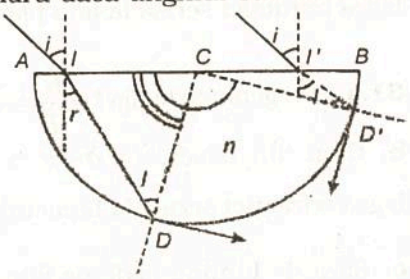
b. Raza normală pe suprafața *AB* pătrunde pe aceeași direcție în semicilindru deoarece $i=0 \Rightarrow r=0$. Această rază cade pe fața cilindrică sub unghiul i' astfel că $\sin i' = \frac{h}{R} = 0{,}5 \Rightarrow i' = 30^0$. Din legea refracției la suprafața cilindrică $n \sin i' = \sin r' \Rightarrow r' = 60^0$



c. Din geometrie $I_2PI = r' - i' = 30^0$ și cum $I_2IP = i'$ atunci se observă că $I_2PI = I_2IP$. Astfel ΔI_2IP este isoscel. Din geometrie obținem $IP = 2I_1I_2$. Dar $\cos i' = \frac{I_1I_2}{R} \Rightarrow I_1I_2 = R\cos i' \Rightarrow IP = 2R\cos i' \approx 8{,}66$ cm

34.a. Aflăm unghiul sub care intră raza de lumină în semicilindru, utilizând legea refracției: $\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = 30°$

b. Raza de lumină *ID* poate emerge din semicilindru dacă unghiul sub care iese în aer este r=90. Conform legii refracției la fața cilindrică $n \sin \ell = \sin 90°$ obținem unghiul limită $\sin \ell = \frac{1}{n} \Rightarrow \ell = 45°$

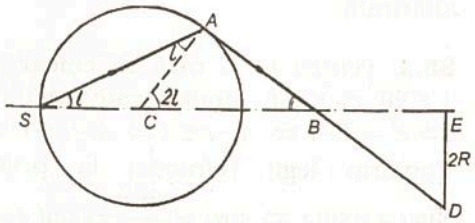


c. Considerăm raza care cade pe suprafața plană în punctul *I* și se refractă ca în figură, ieșind pe suprafața cilindrică sub un unghi de 90^0. Astfel unghiul $IDC=\ell \Rightarrow ICD = 180° - \ell - CID = 75^0$. Razele de lumină care pătrund în semicilindru și cad pe porțiunea *AD* au unghiul de incidență mai

mare decât valoarea unghiului limită şi prin urmare nu ies din suprafaţa cilindrică, pentru că suferă fenomenul de reflexie totală.

Considerăm raza care cade pe suprafaţa plană în punctul I' şi se refractă ca în figură, ieşind pe suprafaţa cilindrică sub un unghi de 90°. Astfel unghiul $I'D'C = \ell \Rightarrow I'CD' = 180 - \ell - CI'D' = 15^0 \Rightarrow ICD' = 165^0$.

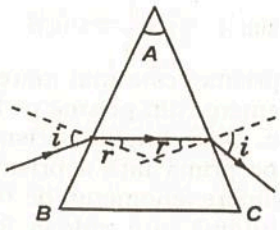
Razele de lumină care cad pe suprafaţa cilindrică BD', suferă fenomenul de reflexie totală, deoarece razele cad sub un unghi de incidenţă mai mare decât valoarea unghiului limită. Deci razele de lumină pot emerge din semicilindru dacă $75^0 \le ICD \le 165^0$



35.a. La trecerea razei din sferă în aer unghiul limită se obţine când r=90. Conform legii refracţiei: $n\sin\ell = \sin 90°$ obţinem unghiul limită ℓ=30°

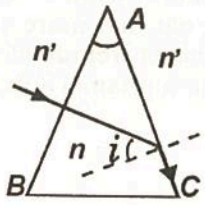
b. Raza de lumină care poate emerge din sferă cade pe suprafaţa sferei sub unghiul limită ℓ. Razele emergente se stâng în dreapta sferei în punctul B. Triunghiul SCA este isoscel, astfel că $SAC = CSA = \ell \Rightarrow$ unghiul $ACB = 2\ell = 60^0$. În ΔABC $\cos(2\ell) = \frac{R}{CB} \Rightarrow CB = \frac{R}{\cos(2\ell)} = 2R = 20$ cm. Distanţa este $SB=SC+CB=3R=30$ cm.

c. Deoarece raza fasciculului emergent din sferă, este egală cu dublul razei sferei atunci din ΔDBE $tg\alpha = \frac{2R}{BE} \Rightarrow BE = \frac{2R}{tg\alpha}$, unde $\alpha = EBD = 30^0$ obţinem $BE = 2R\sqrt{3}$, astfel că $CE = CB + BE = 2R(1+\sqrt{3}) \approx 54{,}6$ cm

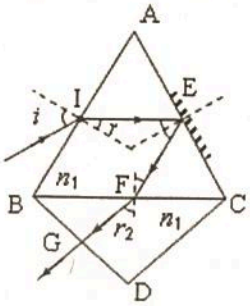


36.a. Deoarece deviaţia razei de lumină este minimă, înseamnă că propagarea razei prin prismă este simetrică, astfel că $r' = r$, iar cum $A = r + r' \Rightarrow A = 2r \Rightarrow r = \frac{A}{2} = 30°$ deoarece triunghiul ABC este echilateral. Conform legii refracţiei la faţa AB: $\sin i = n\sin r = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow i = 60°$.

b. Unghiul de deviaţie minimă este $\delta_{min} = 2i - A = 60°$.



c. Deoarece raza de lumină cade perpendicular pe faţa AB ca în figură ea pătrunde în prismă pe aceeaşi direcţie pentru că din legea refracţiei $n'\sin i = n\sin r$, cum i=0 $\Rightarrow r$=0. Pe faţa AC raza cade sub un unghi de incidenţă i=A=60°. Pe baza legii refracţiei $n\sin A = n'$ obţinem n'=1,5



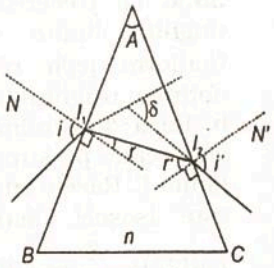
37.a. Deoarece raza de lumină se propagă prin prismă simetric, atunci $r = \frac{A}{2} = 30°$. Cunoscând valoarea $i = 60°$ şi scriind legea refracţiei la prima faţă este: $\sin i = n_1 \sin r \Rightarrow n_1 = \frac{\sin i}{\sin r} \approx 1{,}73$

b. Raza de lumină cade pe AC sub un unghi $r = 30°$ şi se reflectă sub acelaşi unghi, astfel că raza EF cade pe BC

sub un unghi de incidență $i_1 = 30°$ deoarece EF este paralelă cu AB. Din legea refracției la fața BC $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin r_2 \Rightarrow \sin r_2 = \frac{n_1 \sin i_1}{n_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r_2 = 45°$ și deci raza FG va fi paralelă cu latura CD a prismei BCD și cade perpendicular pe fața BD ieșind din această prismă tot perpendicular pe BD.

c. Mersul razelor de lumină prin ansamblul prismelor este redat în figura alăturată.

38.a. Pentru ca o rază să emeargă din prismă trebuie ca $i' \leq 90° \Rightarrow r' \leq \ell$, unde ℓ este unghiul limită. Cum $A = r + r'$ $\Rightarrow r' = A - r \Rightarrow A - r \leq \ell \Rightarrow A - \ell \leq r \Rightarrow \sin(A - \ell) \leq \sin r$.



Conform legii refracției la prima față AB, obținem: $\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n} \Rightarrow \sin(A - \ell) \leq \frac{\sin i}{n}$, relație valabilă pentru orice valoare a unghiului de incidență, deci și pentru $i = 0 \Rightarrow \sin(A - \ell) \leq 0 \Rightarrow A \leq \ell$.

Determinăm valoarea unghiului limită din $n \sin \ell = 1 \Rightarrow \sin\ell = 1/n = 1/2 \Rightarrow$ $\ell = 30° \Rightarrow$ dacă unghiul prismei este mai mic sau cel mult egal cu 30°, orice rază de lumină incidentă pe fața AB emerge din prismă pe fața AC.

b. Pentru ca nici o rază de lumină să nu iasă din prismă, trebuie că $r' > \ell \Rightarrow A - r > \ell \Rightarrow A - \ell > r \Rightarrow \sin(A - \ell) > \sin r \Rightarrow \sin(A - \ell) > \frac{\sin i}{n}$, pentru orice valoare a unghiului i, deci și pentru $i = 90°$, astfel că $\sin(A - \ell) > \frac{1}{n} \Rightarrow \sin(A - \ell) > \sin \ell \Rightarrow A - \ell > \ell \Rightarrow A > 2\ell \Rightarrow A > 60° \Rightarrow$ dacă unghiul prismei este mai mare decât 60°, atunci nici o rază incidentă pe fața AB nu va emerge din prismă pe fața AC.

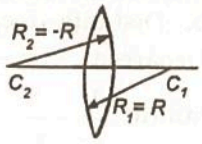
c. Dacă unghiul prismei A este cuprins între ℓ și 2ℓ, pentru ca razele incidente pe prima față a prismei să poată părăsi prisma pe cealaltă față nu trebuie să sufere fenomenul de reflexie totală pe fața a doua a prismei. Prin urmare raza de lumină care cade pe fața a doua a prismei trebuie să cadă sub un unghi sub cel limită ℓ. Cum r' este mic (mai mic decât cel limită), atunci $r = A - r'$ trebuie să fie cât mai mare și prin urmare și unghiul de incidență a razei pe prima față a prismei trebuie să fie cât mai mare. Deci vor putea ieși razele care cad pe prima față a prismei sub un unghi de incidență cât mai mare.

1.2. Lentile

1.a. Pe baza formulei convergenţa este $C = \frac{1}{f} = 3{,}33\ \text{m}^{-1}$

b. Aplicăm formula lentilelor subţiri: $\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1} = 90\ \text{cm} \Rightarrow$ imaginea este reală.

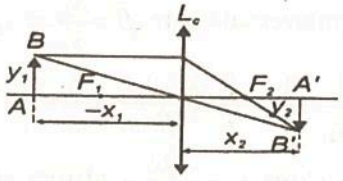
c. Mărirea liniară transversală este $\beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f}{f + x_1} = -2.$



d. $C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n-1)}{|R|} = \frac{1}{f} \Rightarrow |R| = 2f(n-1) = 30\ \text{cm}.$

2.a. Calculăm unde formează lentila imaginea obiectului iniţial. Utilizăm formula lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1}$. Cum $x_1 = -d = -40$ cm obţinem x_2=40 cm. Iniţial ecranul trebuie aşezat la 40 cm în spatele lentilei

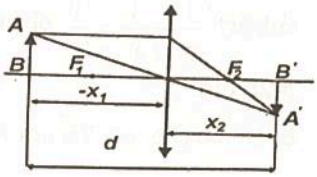
b. Când obiectul se apropie cu 10 cm de lentilă aflăm unde formează lentila imaginea noului obiect. Pentru $x_1' = -30$ cm $\Rightarrow x_2' = 60$ cm $\Rightarrow$ ecranul se va depărta de lentilă cu $\Delta x_2 = x_2' - x_2 = 20$ cm.



c. Cum $\beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta \cdot y_1$ iar din $\beta' = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{y_2'}{y_1'} \Rightarrow y_2' = \beta' \cdot y_1 \Rightarrow \frac{y_2'}{y_2} = \frac{\beta'}{\beta}$.

Cum $\beta' = -2$ şi $\beta = -1 \Rightarrow \frac{y_2'}{y_2} = 2 \Rightarrow$ imaginea se măreşte de 2 ori când obiectul se apropie.

3.a. Deoarece lentila formează o imagine reală şi de 3 ori mai mare decât obiectul, atunci β=−3. Cum $\beta = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = \beta \cdot x_1$ şi $d = x_2 - x_1 = x_1(\beta - 1) \Rightarrow x_1 = \frac{d}{\beta - 1} \Rightarrow$ distanţa de la lentilă la imagine este $x_2 = \frac{\beta \cdot d}{\beta - 1}$ =60 cm

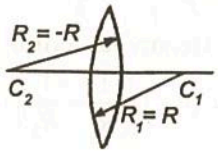


b. Pe baza formulei lentilelor subţiri:

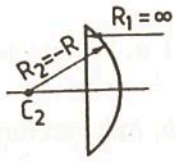
$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \Rightarrow f = -\frac{\beta d}{(\beta - 1)^2}$ =15 cm

c. Din formula convergenţei obţinem:

$C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n-1)}{|R|} = \frac{1}{f} \Rightarrow n = 1 + \frac{|R|}{2f} \approx 1{,}67$



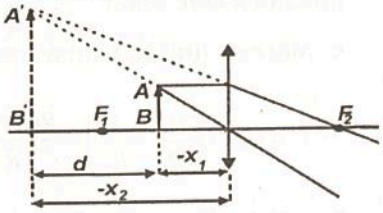
4.a. Lentila fiind plan-convexă are convergența:



$C=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$ și cum $R_1 \to -\infty$ și $R_2=-|R| \Rightarrow C=\frac{n-1}{|R|}$

$\Rightarrow n=C|R|+1$. Din grafic $C=2$ m^{-1} și $|R|=30$ cm. Obținem indicele de refracție al materialului din care este confecționată lentila n=1,6.

b. Distanța focală a lentilei este $f=1/C$=50 cm.



Deoarece $x_1=-30$ cm și din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}=-75$ cm.

Deoarece x_2<0 imaginea obiectului se formează în fața lentilei și este virtuală

c. Mărirea liniară transversală este $\beta=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f}{f+x_1}$=2,5

5.a. Din grafic se observă că $\beta=-3$ când $x_1=-1$ m. Cum mărirea liniară transversală este $\beta=\frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2=\beta x_1$ și din formula lentilelor subțiri:

$$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{\beta \cdot x_1}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow f=\frac{\beta \cdot x_1}{1-\beta}=75 \text{ cm.}$$

b. Cum $x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}$ atunci $\beta=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f}{f+x_1}$=-0,5

c. Din formula convergenței $C=\left(\frac{n}{n'}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$ cum lentila se introduce într-un mediu cu indicele de refracție egal cu cel al ei, $n=n'$, atunci C=0 și prin urmare distanța focală a lentilei devine infinită

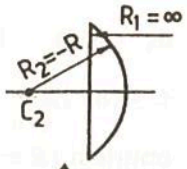
6.a. Mărirea liniară transversală a lentilei este $\beta=\frac{x_2}{x_1}$ și din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}$ obținem $f=\frac{\beta \cdot x_1}{1-\beta}$. Din grafic x_1=−1 m și $1/\beta$=−3 determinăm f=25 cm

b. Deoarece x_1=-75 cm iar $x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}$, mărirea liniară transversală a lentilei este

$$\beta=\frac{f}{f+x_1}=-\frac{1}{2}$$

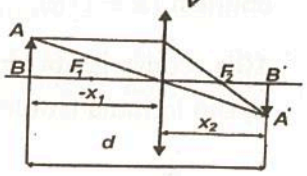
c. Deoarece lentila este plan-convexă atunci pe baza formulei convergenței $C=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$, cum $R_1 \to -\infty$ și $R_2=-|R| \Rightarrow C=\frac{n-1}{|R|}=\frac{1}{f} \Rightarrow n=1+\frac{|R|}{f}$=1,6

7.a. Utilizăm formulele convergenței: $C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$.



Cum $R_1 \to -\infty$ și $R_2=-|R| \Rightarrow \frac{1}{f}=\frac{n-1}{|R|} \Rightarrow n=1+\frac{|R|}{f}=1{,}6$.

b. Deoarece imaginea se obține pe ecran, este o imagine reală și răsturnată Astfel din datele problemei $\beta=-1/3$.



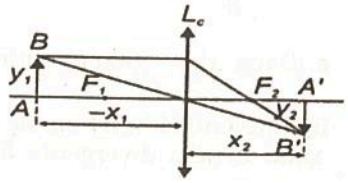
Cum $\beta=\frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2=\beta x_1$. Pe baza formulei lentilelor subțiri obținem: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{\beta x_1}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow x_1=\frac{f(1-\beta)}{\beta}$ și $x_2=f(1-\beta)$. Din desen $d=-x_1+x_2=-\frac{f(\beta-1)^2}{\beta}=40\,\text{cm}$

c. Dacă lentila se scufundă într-un mediu cu indice de refracție n_a atunci convergența lentilei devine $C=\left(\frac{n}{n_a}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{(n-n_a)}{n_a|R|}\approx 4{,}44\ \text{m}^{-1}$

8.a. Din formula distanței focale a lentilei: $\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$ obținem $f=\frac{R_1R_2}{(n-1)(R_2-R_1)}$ =15 cm, deoarece R_1=3 cm și R_2=5 cm. Întrucât distanța focală este pozitivă, lentila este convergentă.

b. Aplicăm formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1} \Rightarrow x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}=22{,}5$ cm.

c. Mărirea liniară transversală este $\beta=\frac{x_2}{x_1}=-\frac{1}{2}$ și cum $\beta=\frac{y_2}{y_1}$ înălțimea y_2 a imaginii este $y_2=\beta\cdot y_1=-2$ cm. Imaginea este reală, răsturnată și mai mică decât obiectul de două ori.



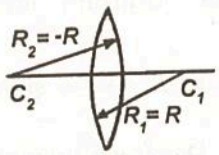
9. a. Utilizăm formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow f=\frac{x_2x_1}{x_1-x_2}$ =12 cm

b. Din $\beta=\frac{y_2}{y_1}=\frac{x_2}{x_1} \Rightarrow y_2=\frac{y_1x_2}{x_1}=-2$ cm, deoarece imaginea obținută cu ajutorul lentilei este reală și răsturnată

c. Deoarece obiectul trebuie să fie îndepărtat foarte mult de lentila introdusă în cuvă, atunci $x'_1 \to \infty$, astfel că din $\frac{1}{x'_2}-\frac{1}{x'_1}=\frac{1}{f'} \Rightarrow f'=x'_2$ =20 cm, deoarece imaginea se formează în același loc ca înainte.

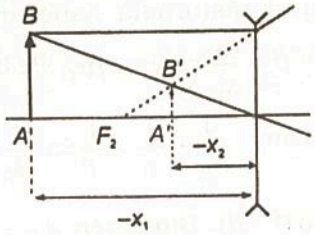
Convergența lentilei introdusă în cuvă este $C'=1/f'$=5 m^{-1}

d. Din formula convergenței a unei lentile $C=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{2(n-1)}{|R|}=\frac{1}{f}$, deoarece R_1=-R și R_2=R, obținem $|R|=2f(n-1)=12$ cm



10.a. Convergența lentilei este $C=1/f\approx 14{,}285$ m^{-1}

b. Din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow$ $x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}=-5{,}6$ cm. Imaginea obiectului obținută cu lentila divergentă este virtuală ca în figură.



c. Din formula măririi liniare transversale $\beta=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f}{f+x_1}$ și cum $\beta=\frac{y_2}{y_1}$ obținem înălțimea y_2 a imaginii $y_2=\beta\cdot y_1=\frac{f\cdot y_1}{f+x_1}$=1 cm

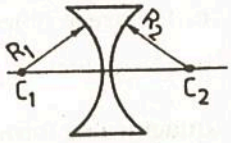
11.a. Din formula măririi liniare transversale $\beta=\frac{y_2}{y_1}=0{,}5$. Valoarea lui β fiind pozitivă, imaginea este virtuală și dreaptă.

b. Deoarece mărirea liniară transversală este: $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}$ și din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}$ obținem $x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}$ astfel că $\beta=\frac{f}{f+x_1}$. În final obținem $x_1=\frac{f(1-\beta)}{\beta}=-40$ cm

c. Dacă $x'_1=-60$ cm obținem $x'_2=\frac{fx'_1}{f+x'_1}=-24$ cm, deci imaginea se formează în fața lentilei la 24 cm de aceasta

12.a. Lentila divergentă formează pentru un obiect așezat în fața sa o imagine virtuală și mai mică de 5 ori decât obiectul, deci $\beta=\frac{1}{5}$. Cum $\beta=\frac{x_2}{x_1}$ $\Rightarrow x_2=\beta\cdot x_1$. Utilizând formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1=\frac{f(1-\beta)}{\beta}\Rightarrow$ $x_1=-120$ cm $\Rightarrow$ obiectul este așezat la 120 cm în fața lentilei

b. Aplicăm formula convergenței $C=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$ cu $R_2=-R_1=|R|$ deoarece lentila biconcava este simetrică astfel că obținem $C=-\frac{2(n-1)}{|R|}$ și cum $C=\frac{1}{f}\Rightarrow|R|=-2f(n-1)$=30 cm

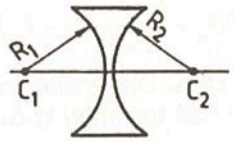


c. Prin introducerea lentilei într-un mediu optic transparent convergența acesteia devine $C=\left(\frac{n}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{f_1}\Rightarrow-\frac{2}{|R|}\left(\frac{n}{n_1}-1\right)=\frac{1}{f_1}\Rightarrow f_1=-\frac{n_1|R|}{2(n-n_1)}\Rightarrow$

$f_1=\frac{n_1(n-1)f}{n-n_1}$=2,4 m. Deoarece lentila se scufundă într-un mediu optic transparent mai dens decât mediul lentilei se schimbă natura lentilei, aceasta devenind convergentă

13.a. Aplicăm formula convergenței:

$C=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=-\frac{2(n-1)}{|R|}=-5$ m^{-1} deoarece lentila biconcavă este simetrică astfel că $R_2=-R_1=|R|$.

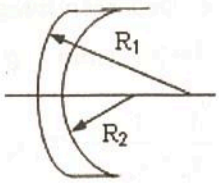


b. Din $C=1/f$ obținem distanța focală a lentilei $f=1/C$=-20 cm și pe baza formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_2=\frac{f\cdot x_1}{f+x_1}\approx-14{,}28$ cm

c. Dacă lentila se îndepărtează de obiect, atunci $x'_1=-100$ cm, astfel că $x'_2=\frac{f\cdot x'_1}{f+x'_1}\approx-16{,}67$ cm, astfel că distanța dintre obiect și noua sa imagine este

$d=-x'_1+x'_2\approx83{,}33$ cm

14.a. Pe baza formulei $\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$ și ținând cont că R_1=60 cm și R_2=30 cm pe baza convenției de semne, obținem: $f=\frac{R_1R_2}{(n-1)(R_2-R_1)}=-120$ cm (1). Deoarece $f<0$, lentila este divergentă.



b. Din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}=-40$ cm

c. Dacă lentila se introduce într-un mediu optic cu indicele de refracție n', distanța focală a acesteia devine: $\frac{1}{f'}=\left(\frac{n}{n'}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$ (2). Împărțind relația (1) la (2) obținem: $\frac{f}{f'}=\frac{\frac{n}{n'}-1}{n-1}\Rightarrow f'=\frac{f(n-1)n'}{n-n'}$=360 cm. Deoarece distanța focală își schimbă semnul, lentila devine în mediul cu indicele $n'>n$ (mediu optic mai dens), o lentilă convergentă.

15.a. Aplicăm formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\Rightarrow x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}$. Cum $-x_1=d_1$, atunci $x_2=\frac{fd_1}{d_1-f}$.

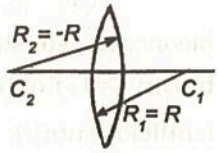
b. Din definiție mărirea liniară transversală este $\beta=\frac{y_2}{y_1}$, astfel că $\beta_C=-\frac{h_{2C}}{h_0}$ și

$\beta_B = -\frac{h_{2B}}{h_0}$. Raportul cerut este $\frac{\beta_C}{\beta_B} = \frac{h_{2C}}{h_{2B}} = 1{,}5$

c. Cum $\beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f}{f+x_1} = \frac{f}{f-d_1}$, astfel $\frac{\beta_C}{\beta_B} = \frac{f-d_{1B}}{f-d_{1C}} = a \Rightarrow f = \frac{ad_{1C} - d_{1B}}{a-1} = 24$ cm

d. Aflăm mărirea liniară transversală în punctele D: $\beta_D = \frac{f}{f-d_{1D}} = -4$ şi B, $\beta_B = \frac{f}{f-d_{1B}} = -2$. Din $\frac{\beta_D}{\beta_B} = \frac{h_{2D}}{h_{2B}} \Rightarrow h_{2D} = h_{2B}\frac{\beta_D}{\beta_B} = 40$ mm

16.a. Din grafic constatăm că atunci când C=1 m^{-1}, n_r=9/8. Pe baza formulei convergenţei:



$$C = (n_r - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n_r-1)}{|R|} \Rightarrow |R| = \frac{2(n_r-1)}{C} = 25 \text{ cm}.$$

Lentila fiind simetrică, conform convenţei de semne, obţinem $R_1 = |R| = 25$ cm şi $R_2 = -|R| = -25$ cm

b. Din C=1/f obţinem distanţa focală a lentilei f=1/C=100 cm. Utilizăm formula lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{fx_1}{f+x_1} = -100$ cm, deoarece x_1=−50 cm. Imaginea este virtuală şi se formează în faţa lentilei.

c. Deoarece imaginea este reală şi de două ori mai mare decât obiectul, atunci β=−2. Cum $\beta = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = \beta \cdot x_1$ şi pe baza formulei lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_1 = \frac{f(1-\beta)}{\beta} = -150$ cm. Obiectul se aşază la 150 cm în faţa lentilei.

17.a. Din grafic, când $x_1 = -40$ cm, $y_2 = -8$ cm, iar când $x_1' = -60$ cm, $y_2' = -4$ cm. Utilizăm formula lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{fx_1}{f+x_1}$, şi a măririi liniare transversale $\beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f}{f+x_1} = \frac{y_2}{y_1}$. Analog pentru x'_1 $\beta' = \frac{f}{f+x_1'} = \frac{y_2'}{y_1}$.

Împărţim cele două relaţii şi obţinem: $\frac{f+x_1'}{f+x_1} = \frac{y_2}{y_2'} \Rightarrow f = \frac{y_2'x_1' - y_2x_1}{y_2 - y_2'} = 20$ cm.

b. Mărimea liniară a obiectului este $y_1 = \frac{(f+x_1)y_2}{f} = 8$ cm.

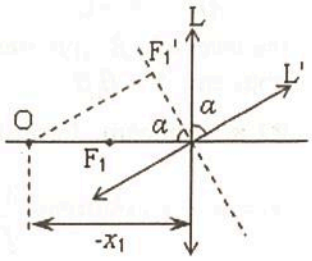
c. Utilizăm formulele convergenţei $C = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$. Lentila fiind biconvexă, conform convenţiei de semne $R_1 = |R|$ şi $R_2 = -3|R|$ obţinem:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{|R|} + \frac{1}{3|R|}\right) = \frac{4(n-1)}{3|R|} \Rightarrow n = 1 + \frac{3|R|}{4f} = 1{,}5625.$$

18.a. Deoarece obiectul se află la $x_1 = -2f$ imaginea se va forma la x_2, care se calculează din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1} = 2f \Rightarrow$ $\beta = \frac{x_2}{x_1} = -1$. Când $x_1' = -\frac{3f}{2} \Rightarrow x_2' = 3f \Rightarrow \beta' = \frac{x_2'}{x_1'} = -2 \Rightarrow \frac{\beta'}{\beta} = 2 \Rightarrow$ imaginea se mărește de 2 ori când lentila se apropie de obiect.

b. Dacă lentila se depărtează cu f de obiect atunci $x_1' = -3f \Rightarrow x_2' = 3f/2 \Rightarrow$ $\beta' = \frac{x_2'}{x_1'} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y'_2 = \beta' \cdot y_1$. Din $\beta = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta \cdot y_1 \Rightarrow \frac{y'_2}{y_2} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ raportul mărimilor liniare transversale ale imaginilor este raportul măririlor liniare transversale ale imaginilor

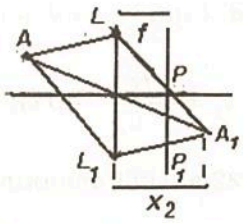
c. Deoarece obiectul se află în fața lentilei la $x_1 = -2f$, când lentila se roteşte cu $\alpha = 60°$, acest obiect se va afla față de lentilă la $x_1' = x_1 \cos\alpha = -f$, adică în planul focal obiect şi, prin urmare, utilizând formula $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{x_2} = 0 \Rightarrow x_2 \to \infty \Rightarrow$ imaginea se formează la infinit.



19.a. Punctul imagine A_1 are coordonatele (8, −2) cm, astfel că x_2=8 cm şi B_1A_1=-2 cm. Din formula lentilelor subțiri obținem coordonata punctului A, astfel că $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_1 = \frac{fx_2}{f - x_2} = -8$ cm. Din $\beta = \frac{x_2}{x_1} = -1$ şi din $\beta = \frac{A_1B_1}{AB}$ obținem $A_1B_1 = \beta AB$=2 cm, astfel că punctului A are coordonatele (−8, 2) cm

b. Punctul C se află la $x'_1 = -6$ cm de lentilă, astfel că imaginea lui se formează la distanța $x'_2 = \frac{fx'_1}{f + x'_1}$ =12 cm de lentilă, astfel $B_1C_1 = x'_2 - x_2$ =4 cm

c. Pentru a determina diametrul d_1 al petei luminoase care se obține pe un ecran aşezat în planul focal imagine al lentilei atunci când în punctul A se aşază o sursă punctiformă de lumină utilizăm desenul alăturat. Asemănăm triunghiurile LL_1A_1 cu PP_1A_1, astfel că : $\frac{d}{d_1} = \frac{x_2}{x_2 - f} \Rightarrow d_1 = \frac{d(x_2 - f)}{x_2}$=5 cm



20.a. Punctul A se află la distanța de 32 cm de lentilă, astfel că x_1=−32 cm, iar imaginea se formează la $x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1}$ =53,33 cm. Punctul B se află la 28 cm de lentilă, astfel că $x'_1 = -28$ cm, iar imaginea se formează la $x'_2 = \frac{fx'_1}{f + x'_1} \Rightarrow x'_2$ =70cm. Lungimea imaginii segmentului AB este $A'B' = x'_2 - x_2$ =16,67 cm

b. Mărirea longitudinală este $\gamma = \frac{A'B'}{AB} \approx 4,17$

c. Dacă în punctul A se aşază un obiect transveral atunci mărirea liniară transversală este $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f}{f+x_1}$, iar dacă în punctul B se aşază un obiect transveral atunci mărirea liniară transversală este $\beta_2 = \frac{x'_2}{x'_1} = \frac{f}{f+x'_1}$.

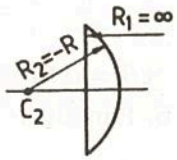
Dar $A'B' = x'_2 - x_2 = \frac{fx'_1}{f+x'_1} - \frac{fx_1}{f+x_1} = \frac{f^2(x'_1 - x_1)}{(f+x'_1)(f+x_1)} = \beta_1\beta_2(x'_1 - x_1)$ şi cum $\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'B'}{x'_1 - x_1}$ obţinem relaţia dintre mărirea longitudinală γ şi măririle transversale β_1 şi β_2 pentru obiectele transversale aflate în punctele A şi B. Astfel obţinem: $\gamma = \beta_1\beta_2$.

21.a. Aplicăm formula lentilelor subţiri: $\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$. Cum $-x_1 = d_1 + f$ şi $x_2 = d_2 + f$, obţinem $\frac{1}{f} = \frac{1}{d_2+f} + \frac{1}{f+d_1} \Rightarrow f = \sqrt{d_1 d_2}$ =20 cm

b. Mărirea liniară transversală este $\beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f}{f+x_1} = -\frac{f}{d_1} = -\sqrt{\frac{d_2}{d_1}} = -2$.

Cum $\beta = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta y_1 = -6$ cm

c. Lentila fiind plan-convexă are convergenţa: $C = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ şi cum $R_1 \to -\infty$ şi $R_2 = -|R| \Rightarrow$



$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{|R|} \Rightarrow |R| = f(n-1)$=10 cm

d. Cum $-x_1 = d_1 + f = -40$ cm din formula lentilelor subţiri $\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$ obţinem $x_2 = \frac{fx_1}{f+x_1}$ =40 cm, astfel că $d_2 = x_2 - f$ =20 cm

22.a. Utilizăm formula lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$ iar când introducem lentila în apă cu indicele de refracţie n_a, se modifică distanţa focală a lentilei şi se schimbă poziţia imaginii, astfel încât: $\frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f'}$. Scădem relaţiile şi obţinem: $\frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{f}$. Pe baza formulei convergenţei obţinem în aer $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ şi în apă $\frac{1}{f'} = \left(\frac{n}{n_a} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$.

Prin împărţirea celor două relaţii obţinem: $\frac{f'}{f} = \frac{(n-1)\cdot n_a}{n - n_a} \Rightarrow f' = \frac{(n-1)\cdot n_a \cdot f}{n - n_a} \Rightarrow$

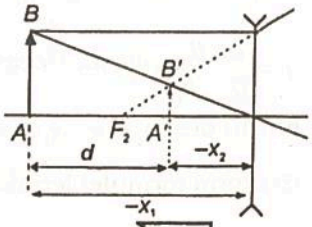
$$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_2'}=\frac{1}{f}-\frac{n-n_a}{f(n-1)\cdot n_a}=\frac{1}{f}\cdot\frac{n\cdot(n_a-1)}{(n-1)\cdot n_a}\Rightarrow f=\frac{(n_a-1)\cdot n}{(n-1)\cdot n_a}\cdot\frac{x_2x_2'}{x_2'-x_2}=9\text{ cm.}$$

b. $x_1=\dfrac{fx_2}{f-x_2}=-90$ cm

c. În apă distanța focală este $f'=\dfrac{(n-1)\cdot n_a f}{n-n_a}=36$ cm.

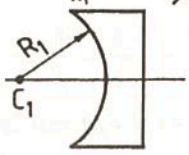
23.a. Distanța focală a lentilei este $f=1/C=-20$ cm

b. Din desen $-x_1=d-x_2\Rightarrow x_2=d+x_1$ și din formula lentilelor subțiri: $\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f}$ obținem $x_1^2+x_1d+df=0\Rightarrow$



$$x_1^2+x_1d+df=0\Rightarrow x_1=\frac{-d-\sqrt{d^2-4df}}{2}=-30\text{ cm}$$

c. Utilizăm formulele convergenței:

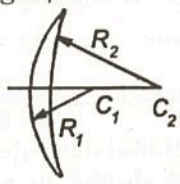


$$C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\Rightarrow\frac{1}{f}=-\frac{n-1}{|R|}\Rightarrow|R|=-f(n-1)$$

$\Rightarrow|R|=10$ cm, deoarece $R_1=-|R|$ și $R_2\to\infty$

24.a. Calculăm distanța focală a lentilei utilizând formulele convergenței:

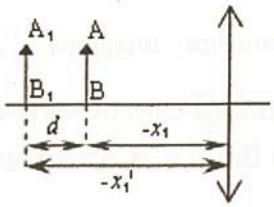
$$C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\Rightarrow f=\frac{R_1R_2}{(n-1)(R_2-R_1)}=40\text{ cm.}$$



b. Din $d=-x_1+x_2$ și din $\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f}$ obținem $x_1^2+x_1d+df=0$. Cum $\Delta=d^2-4df$ și din $\Delta=0$ obținem distanța minimă dintre obiect și ecran pentru ca pe acesta să se formeze imagini reale. Astfel $d_{min}=4f=160$ cm

c. Dacă distanța dintre obiect și ecran este inițial $d=4f$, obiectul se află la dublul distanței focale, astfel încât imaginea sa reală să se formeze pe ecran. În acest caz: $x_1=-2f=-80$ cm iar $x_2=2f=80$ cm

Deoarece ecranul se depărtează cu d=10 cm față de poziția anterioară a lui, atunci $x_2'=x_2+d=90$ cm. Aflăm pe baza formulei lentilelor subțiri $\dfrac{1}{x_2'}-\dfrac{1}{x_1'}=\dfrac{1}{f}$, unde trebuie poziționat obiectul $x_1'=\dfrac{fx_2'}{f-x_2'}=-72$ cm. Obiectul se deplasează spre dreapta apropiindu-se de lentilă cu $|\Delta x_1|=-x_1'+x_1=8$ cm $\Rightarrow$ distanța dintre obiect și ecran devine $d'=-x_1'+x_2'=162$ cm și deci $d'>d$, deoarece d este distanța minimă dintre obiect și ecran.



25.a. Deoarece măririle liniare transversale sunt negative, imaginile formate de lentilă sunt reale și prin urmare lentila este convergentă. Mărirea liniară

transversală este: $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1}$. Conform formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow$

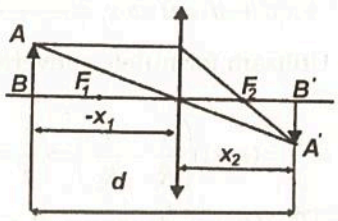
$x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1}$ și din $\beta = \frac{f}{f + x_1}$ obținem $x_1 = \frac{f(1-\beta)}{\beta}$. Conform datelor problemei:

$x_1 = \frac{f(1-\beta_1)}{\beta_1}$ și $x_1' = \frac{f(1-\beta_2)}{\beta_2}$. Conform relațiilor între segmente obținem:

$-x_1' = d - x_1 \Rightarrow -x_1' = d - x_1 \Rightarrow d = x_1 - x_1' = \frac{f(1-\beta_1)}{\beta_1} - \frac{f(1-\beta_2)}{\beta_2} \Rightarrow d = \frac{f(\beta_2 - \beta_1)}{\beta_1\beta_2} \Rightarrow$

$f = \frac{d\beta_1\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} = 40$cm. Deoarece $f > 0$ lentila este convergentă.

b. Din desen $d = -x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = d + x_1$.



Conform formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow$

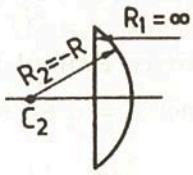
$\frac{1}{d + x_1} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow -df = x_1(d + x_1) \Rightarrow$

$x_1^2 + x_1 d + df = 0 \Rightarrow \Delta = d^2 - 4df = d(d - 4f)$.

Pentru a obține soluții reale pentru x_1, trebuie ca $\Delta \geq 0 \Rightarrow d - 4f \geq 0 \Rightarrow d \geq 4f \Rightarrow$ distanța minimă dintre obiect și imaginea sa reală este $d_{min} = 4f$ =160 cm. În acest caz ecuația de gradul doi admite o singură soluție $x_1 = -\frac{d}{2} = -2f$. Dacă obiectul se află în fața lentilei convergente, la dublul distanței focale, imaginea va fi reală, răsturnată la fel de mare ca obiectul și situată în spatele lentilei la dublul distanței focale. În acest caz se obține distanța minimă de la obiect la imaginea sa reală care este de patru ori mai mare decât distanța focală a lentilei convergente.

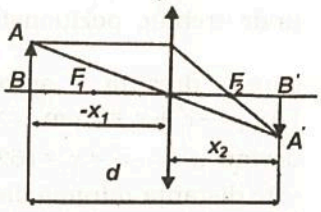
c. Deoarece x_2=2$f \Rightarrow \beta = \frac{x_2}{x_1} = -1$.

26.a. Din formula convergenței $C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{n-1}{|R|}$,



deoarece $R_2 = -|R|$ și $R_1 \to \infty$ obținem $|R| = \frac{n-1}{C}$ =25 cm

b. Din C=1/$f \Rightarrow f$=1/C=50 cm. Din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$ aflăm la ce distanță de lentilă se formeată imaginea: $x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1}$ =300 cm, astfel că distanța obiect-ecran este $d = -x_1 + x_2$ =360 cm



c. Din $d = -x_1 + x_2$ și din $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$ obținem $x_1^2 + x_1 d + df = 0$.

Soluțiile acestei ecuații sunt $x_1 = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4df}}{2} \Rightarrow x_1 = -60$ cm și $x'_1 = -300$ cm. Lentila se deplasează spre dreapta cu $\Delta x_1 = x_1 - x'_1$=240 cm pentru a se obține o nouă imagine pe ecran

27.a. Deoarece distanța dintre obiect și ecran este mai mare decât 4*f*, există două poziții ale lentilei situate între obiect și ecran pentru care pe ecran se formează imagini clare ale obiectului (desen problema precedentă, punctul b)

Cum $d = -x_1 + x_2$ și $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_1^2 + x_1 d + df = 0$. Soluțiile acestei ecuații sunt:

$x_1 = \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4df}}{2}$ și $x'_1 = \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4df}}{2}$.

Când $x_1 = \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4df}}{2} \Rightarrow x_2 = d + x_1 = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4df}}{2} \Rightarrow \beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4df}}{-d - \sqrt{d^2 - 4df}}$.

Când $x'_1 = \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4df}}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{d + \sqrt{d^2 - 4df}}{2} \Rightarrow \beta_2 = \frac{d + \sqrt{d^2 - 4df}}{-d + \sqrt{d^2 - 4df}} \Rightarrow \beta_1\beta_2 = 1$.

Dacă distanța dintre obiect și ecran este mai mare decât patru distanțe focale, produsul măririlor liniare transversale corespunzătoare celor două poziții distincte ale lentilei pentru care pe ecran se formează imagini clare este 1. Cum $\beta_1 = \frac{y_2}{y_1}$ și $\beta_2 = \frac{y'_2}{y_1} \Rightarrow \frac{y_2 y'_2}{y_1^2} = 1 \Rightarrow |y_1| = \sqrt{y_2 y'_2} = 6$ cm. În acest caz mărimea obiectului reprezintă media geometrică a mărimilor celor două imagini obținute în cele două situații distincte.

b. Măririle liniare transversale sunt $\beta_1 = y_2/y_1 = -0{,}66$ și $\beta_2 = y_2'/y_1 = -1{,}5$ deoarece imaginile obținute pe ecran în cele două cazuri sunt reale și răsturnate

c. Din $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{y'_2}{y_2} = \left(\frac{d + \sqrt{d^2 - 4df}}{d - \sqrt{d^2 - 4df}}\right)^2$ și din $-x_1 = -x'_1 + D \Rightarrow D = x'_1 - x_1 = \sqrt{d^2 - 4df}$.

Raportul dimensiunilor corespunzătoare a celor două imagini: $\frac{y'_2}{y_2} = \left(\frac{d + D}{d - D}\right)^2$

28.a. Pe baza demonstrației din problema precedentă înălțimea obiectului este $|y_1| = \sqrt{h_1 h_2} = 4$ cm

b. Măririle imaginilor în cele două situații sunt $\beta_1 = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{h_1}{y_1} = -2$ și $\beta_2 = \frac{y'_2}{y_1} = -\frac{h_2}{y_1} = -\frac{1}{2}$, deoarece imaginile reale obținute pe ecran sunt răsturnate

c. Cum $D = -x_1 + x_2$ și $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_1^2 + x_1 D + Df = 0 \Rightarrow x = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4Df}}{2}$

Mărirea $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df}}{-D - \sqrt{D^2 - 4Df}} = \frac{D - \sqrt{\Delta}}{-D - \sqrt{\Delta}} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \frac{D(1 + \beta_1)}{1 - \beta_1}$=30 cm.

Cum $\sqrt{\Delta} = \sqrt{D^2 - 4Df} \Rightarrow f = \frac{D^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4D}$ =20 cm

29.a. $D=-x_1+x_2$ şi $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1^2+x_1D+Df=0\Rightarrow x_1=\frac{-D-\sqrt{D^2-4Df}}{2}$ şi $x'_1=\frac{-D+\sqrt{D^2-4Df}}{2}$, astfel că $-x_1=-x'_1+d\Rightarrow d=\sqrt{D^2-4Df}\Rightarrow f=\frac{D^2-d^2}{4D}$

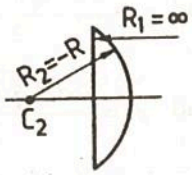
Distanţa focală a lentilei este f=18,75 cm

b. Când $x_1=\frac{-D-d}{2}\Rightarrow x_2=D+x_1=\frac{D-d}{2}$ şi mărirea liniră transversală este: $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}=\frac{D-d}{-D-d}=-\frac{1}{3}$ şi când $x'_1=\frac{-D+d}{2}\Rightarrow x_2=\frac{D+d}{2}\Rightarrow\beta_2=\frac{D+d}{-D+d}=-3$.

Astfel mărimile imaginilor sunt $y_2=\beta_1y_1=-1$ cm şi $y'_2=\beta_2y_1=-9$ cm

c. Din formula convergenţei $\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{n-1}{|R|}$,

deoarece $R_2=-|R|$ şi $R_1\to\infty$ obţinem $n=1+\frac{|R|}{f}\approx 1{,}533$

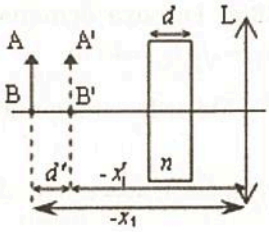


30.a. Utilizăm formula lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1=\frac{x_2\cdot f}{f-x_2}=-66$ cm.

Obiectul se aşază la 66 cm în faţa lentilei.

b. Mărirea liniară transversală este $\beta=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f-x_2}{f}\approx-0{,}833$

c. O lamă cu feţe plan-paralele apropie obiectul de lentilă cu $d'=d\left(1-\frac{1}{n}\right)$, unde d este grosimea lamei, iar n este indicele de refracţie al lamei, astfel că imaginea virtuală a lamei joacă rol de obiect real pentru lentilă. Lentila formează pentru obiectul real o imagine reală, egală cu obiectul, astfel că mărirea liniară transversală este $\beta=-1$. Dar $\beta=\frac{x'_2}{x'_1}\Rightarrow x'_2=\beta\cdot x'_1=-x'_1$. Din formula lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x'_1}=\frac{1}{f}$ obţinem $x'_1=-2f=-60$ cm.

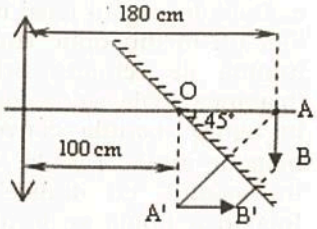


Obiectul virtual trebuie să se afle în faţa lentilei la dublul distanţei focale. Din desen $-x_1=d'-x'_1\Rightarrow d'=x'_1-x_1=6$ cm. Din $d'=d\left(1-\frac{1}{n}\right)\Rightarrow$ $d=\frac{nd'}{n-1}=18$ cm. Grosimea lamei este de 18 cm.

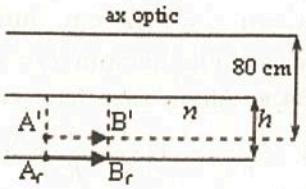
31.a. Deoarece imaginea prinsă pe ecran este o imagine reală şi de trei ori mai mare decât obiectul atunci $\beta=-3$. Cum $\beta=\frac{x_2}{x_1}$ şi pe baza formulei lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1=\frac{f(1-\beta)}{\beta}=-40$ cm, iar $x_2=f(1-\beta)=120$ cm. Ecranul se aşază la 120 cm în spatele lentilei.

b. Poziționând o lamă cu fețe plan-paralele între obiect și lentilă, lama formează pentru obiect, o imagine virtuală situată mai aproape de lamă cu $e\left(1-\frac{1}{n}\right)=4$ cm. Această imagine virtuală este situată în fața lentilei și joacă rol de obiect real pentru aceasta, astfel că $x_1'=-36$ cm. Lentila va forma imaginea noului obiect la: $x_2'=\frac{f\cdot x_1'}{f+x_1'}=180$ cm de lentilă. Ecranul trebuie deplasat spre dreapta cu $x_2'-x_2=60$ cm.

c. Deoarece oglinda se așază în spatele lentilei la 1 m de aceasta, imaginea reală formată de lentilă va fi situată în spatele oglinzii jucând rol de obiect virtual pentru aceasta. Cum oglinda reflectă toate razele de lumină, pe baza legilor reflexiei, imaginea formată de oglindă va fi reală și situată simetric față de aceasta. Cum OA=80 cm, din geometrie $\Delta OAA'$ este dreptunghic și isoscel, astfel că: $OA=OA'=80$ cm. Imaginea formată de oglindă este reală și egală cu obiectul, dar este situată sub axul optic principal al lentilei la 80 cm de acesta, paralel cu acesta, ca în figură.

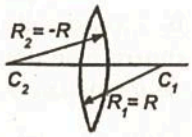


d. Deoarece imaginea finală este reală și situată pe fundul cuvei, înseamnă că imaginea formată de oglindă se află în apă și este obiect virtual pentru stratul de apă. Când razele de lumină pătrund din aer în apă, ele se refractă și se apropie de normală formând în final o imagine mai departe decât obiectul. Cum razele de lumină sunt reversibile putem considera A_fB_f obiect pe fundul apei și $A'B'$ imaginea virtuală a obiectului situată mai aproape de suprafața apei cu $A'A_f=h\left(1-\frac{1}{n}\right)$=5 cm. Fundul cuvei se va situa sub axul optic principal al lentilei la distanța $OA'+A'A_f=85$ cm de acesta.



32.a. Deoarece raza din figură este paralelă cu axul optic principal după refracția prin lentilă aceasta trece prin focarul imagine, astfel că f=20 cm.

b. $C=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{2(n-1)}{|R|}=\frac{1}{f}\Rightarrow|R|=2f(n-1)=20$ cm.



c. O placă transparentă cu fețe plane și paralele, apropie obiectul de lentilă și depărtează imaginea de lentilă cu $d'=d\left(1-\frac{1}{n}\right)$=0,75 cm. Imaginea se depărtează de lentilă cu 0,75 cm.

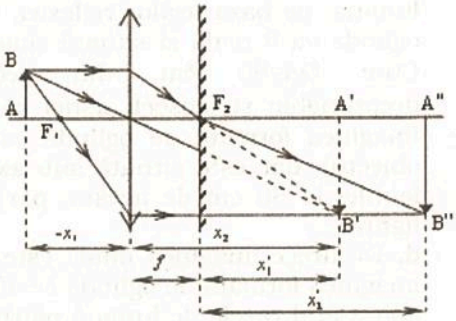
33.a. Aflăm distanța focală a lentilei utilizând formulele convergenței: $C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\Rightarrow f=\frac{R_1\cdot R_2}{(n-1)(R_2-R_1)}=8$ cm, deoarece R_2=−20 cm și R_1=5 cm. Deoarece imaginea se obține pe ecran, ea este reală și răsturnată și din datele problemei $\beta=-4$. Cum $\beta=\frac{x_2}{x_1}$ și conform formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1=\frac{f(1-\beta)}{\beta}=-10$ cm. Obiectul se așază la 10 cm în fața lentilei și

la $d=-x_1+x_2=(\beta-1)x_1=-\frac{f(1-\beta)^2}{\beta}$ =50 cm de ecran.

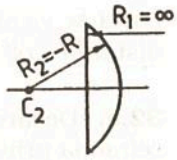
b. Lama cu fețe plan-paralele apropie obiectul de lentilă cu $d=e\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$ cm.

Această imagine virtuală, joacă rol de obiect real pentru lentilă, fiind situat în fața lentilei la $x_1'=-9$ cm. Astfel imaginea se formează la $x_2'=\frac{fx_1'}{f+x_1'}=72$ cm în spatele lentilei și este reală. Ecranul trebuie depărtat cu $x_2'-x_2=32$ cm de lentilă pentru a prinde imaginea pe acesta.

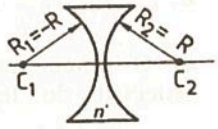
c. Dacă în planul focal imagine al lentilei se află un mediu optic transparent, razele de lumină se refractă prin acest mediu și imaginea reală se va forma mai departe ca în figură. Lentila convergentă formează o imagine reală $A'B'$ la x_2=40 cm față de ea în mediul cu indicele de refracție n. Imaginea finală se formează, pe baza legii refracției, în $A''B''$. Folosind principiul reversibilității razelor de lumină, putem considera $A''B''$ obiect real și $A'B'$ imaginea sa virtuală, fiind situată față de suprafața de separație a mediului la $x_1'=\frac{x_2'}{n}$. Cum $x_1'=x_2-f=32$ cm atunci $x_2'=n\cdot x_1'=51{,}2$ cm. Imaginea finală se formează față de lentilă în spatele acesteia la distanța $D=f+x_2'=59{,}2$ cm și este reală.



34.a. Aflăm raza feței convexe, utilizând formulele convergenței: $C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$. Conform convenției de semne, $R_1\to\infty$ și $R_2=-|R|\Rightarrow\frac{1}{f}=\frac{n-1}{|R|}\Rightarrow|R|=f(n-1)=30$ cm.



b. Lipind cele două lentile plan-convexe și umplând spațiul dintre cele două lentile cu un lichid cu indicele de refracție n' se formează o a treia lentilă biconcavă lipită de celelalte două. Cum $\frac{1}{f'}=(n'-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=-\frac{2(n'-1)}{|R|}\Rightarrow\frac{1}{f'}=-\frac{2(n'-1)}{f(n-1)}$, deoarece conform convenției de semne $R_1=-|R|$ și $R_2=|R|$. Sistemul este format din trei lentile acolate. Pentru lentile alipite convergența este:



$$C=C_1+C_2+C_3\Rightarrow\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\frac{2}{f}+\frac{1}{f'}\Rightarrow\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}-\frac{2}{f}=\frac{f-2F}{Ff}\Rightarrow$$

$$\frac{f-2F}{Ff}=-\frac{2(n'-1)}{f(n-1)}\Rightarrow n'=1-\frac{(n-1)(f-2F)}{2F}=1{,}4.$$

c. Deoarece imaginea obținută cu ajutorul lentilei echivalente este reală și de două ori mai mare decât obiectul, atunci β=−2. Cum $\beta=\frac{x_2}{x_1}$ și din formula

lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{F}\Rightarrow x_1=\frac{F(1-\beta)}{\beta}=-2{,}43$ m

35.a. Din datele problemei $x_1=-20$ cm și x_2=60 cm. Pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{F}$, se obține distanța focală a sistemului echivalent format din cele trei lentile alipite: $F=\frac{x_1x_2}{x_1-x_2}$=15 cm

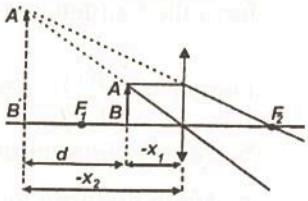
b. Din $\beta=\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}\Rightarrow y_2=\frac{x_2y_1}{x_1}=-18$ cm

c. Convergența sistemului este $C=C_1+C_2+C_3=\frac{2}{f}+\frac{1}{f'}\Rightarrow\frac{1}{f'}=\frac{f-2F}{Ff}$.

Dar pe baza formulelor convergenței: $\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{2(n-1)}{|R|}$ și $\frac{1}{f'}=(n'-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=-\frac{2(n'-1)}{|R|}$. Prin împărțirea relațiilor se obține:

$\frac{f'}{f}=-\frac{n-1}{n'-1}\Rightarrow n'=1-\frac{f(n-1)}{f'}\Rightarrow n'=1-\frac{(n-1)(f-2F)}{F}=1{,}33\Rightarrow$ lichidul este apă.

36.a. Deoarece imaginea este virtuală și mai mare decât obiectul înseamnă că lentila utilizată este convergentă. Mărirea liniară transversală este $\beta=\frac{y_2}{y_1}=2$ și $\beta=\frac{x_2}{x_1}$. Din geometrie $d-x_1=-x_2\Rightarrow x_1=\frac{d}{1-\beta}=-50$ cm, iar $x_2=\frac{\beta d}{1-\beta}$. Utilizând formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}$, aflăm distanța focală a lentilei $\frac{1}{f}=\frac{1-\beta}{\beta\cdot d}-\frac{1-\beta}{d}=\frac{(1-\beta)^2}{\beta\cdot d}\Rightarrow f=\frac{\beta\cdot d}{(1-\beta)^2}=100$ cm.



b. Utilizăm formulele convergenței $C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$.

Introducând lentila într-un mediu optic cu indicele de refracție n' se modifică distanța focală a lentilei, astfel că:

$\frac{1}{f'}=(\frac{n}{n'}-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\Rightarrow\frac{f'}{f}=\frac{n-1}{\frac{n}{n'}-1}\Rightarrow n'=\frac{n\cdot f'}{(n-1)f+f'}$. Cum $f'=2f\Rightarrow n'=1{,}2$

c. Deoarece imaginea devine virtuală și de două ori mai mică decât obiectul, $\beta'=\frac{1}{2}$ și lentila trebuie să fie divergentă. Din $\beta'=\frac{x_2'}{x_1}$ și utilizând formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{F}$ aflăm distanța focală F a lentilei echivalente $F=\frac{\beta' x_1}{1-\beta'}=-50$ cm. Cum în cazul lentilelor alipite $C=C_1+C_2\Rightarrow\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}$

obținem $f' = \frac{Ff}{f-F} = -33{,}33$ cm. Lentila lipită de lentila convergentă este divergentă, deoarece $f' < 0$.

37.a. Utilizăm formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow f_1 = \frac{x_2 x_1}{x_1 - x_2}$ =30 cm. Convergența primei lentile este $C_1 = 1/f_1 \approx 3{,}33$ m^{-1}

b. Aflăm distanța focală a sistemului echivalent $F = \frac{x'_2 x_1}{x_1 - x'_2}$ =40 cm. Pentru un sistem format din două lentile lipite $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$, astfel distanța focală a celei de a doua lentile este $f_2 = \frac{Ff_1}{f_1 - F} = -120$ cm

c. Din $\beta = \frac{h'}{h} = \frac{x'_2}{x_1}$ obținem înălțimea imaginii formate de sistemul celor două lentile alipite $|h'| = \frac{\beta \cdot x_1}{x'_2} = 4{,}8$ cm

38.a. Deoarece imaginea este virtuală ea este şi dreaptă, astfel că β=5. Din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$ şi din $\beta = \frac{x_2}{x_1}$ obținem distanța focală a lentilei $f = \frac{\beta \cdot x_1}{1-\beta}$ =12,5 cm

b. Convergența lentilei este $C = 1/f$=8 dioptrii

c. Aflăm distanța focală a sistemului echivalent de lentile din $\frac{1}{F} = \frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x_1}$, astfel că $F = \frac{x_1 x'_2}{x_1 - x'_2}$ =8 cm şi convergența sistemului echivalent este $C_S = 1/F$=12,5 dioptrii. Deoarece în cazul lentilelor lipite $C_S = C + C'$ obținem convergența celei de-a doua lentile este $C' = C_S - C$ =4,5 dioptrii

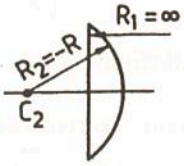
39.a. Din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ obținem distanța focală a primei lentilei $f_1 = \frac{x_2 x_1}{x_1 - x_2}$ =12 cm

b. Distanța focală a sistemului format din cele două lentile este $F = \frac{x_1 x'_2}{x_1 - x'_2} \Rightarrow$ F=−60 cm, deoarece $x'_2 = -30$ cm pentru că imaginea este virtuală

c. Deoarece în cazul lentilelor acolate $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ obținem distanța focală a lentilei a doua, astfel că $f_2 = \frac{Ff_1}{f_1 - F} = -10$ cm. Convergența celei de-a doua lentile este $C_2 = 1/f_2$=−10 m^{-1}.

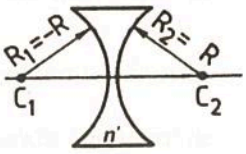
d. Din $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \frac{x_2 y_1}{x_1}$ şi $\beta_s = \frac{x'_2}{x_1} = \frac{y'_2}{y_1} \Rightarrow y'_2 = \frac{x'_2 y_1}{x_1}$ raportul dintre înălţimea imaginii formate de prima lentilă şi înălţimea imaginii formate de sistemul de lentile este $\frac{y_2}{y'_2} = \frac{x_2}{x'_2} = -0{,}5$

40.a. Se formează un sistem de 6 lentile acolate. Lentilele 1, 2, 3 şi 4 sunt plan-convexe şi identice, iar lentilele 5 şi 6 biconcave sunt şi ele identice. Convergenţa sistemului echivalent: $C_e = 4C_1 + 2C_5$. Dar



$C_1 = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{(n-1)}{|R|}$, deoarece $R_1 \to \infty$ şi $R_2 = -|R|$, conform convenţiei de semne pentru lentila plan-convexă.

şi $C_5 = (n'-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{-2(n'-1)}{|R|}$, deoarece $R_1 = -|R|$ şi $R_2 = |R|$, conform convenţiei de semne pentru lentila biconcavă.



Pentru sistemul echivalent: $C_e = \frac{4(n-1)}{|R|} - \frac{4(n'-1)}{|R|} = \frac{4(n-n')}{|R|}$.

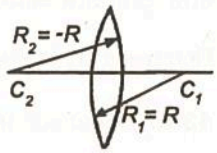
Cum $C_1 = \frac{1}{f} = \frac{n-1}{|R|} \Rightarrow |R| = f(n-1) \Rightarrow C_e = \frac{4(n-n')}{f(n-1)} = 1{,}6\ \text{m}^{-1}$

b. Deoarece raza de lumină cade pe sistem sub un unghi de incidenţă şi iese paralel cu ea însăşi, înseamnă că întreg sistemul reprezintă o lamă cu feţe plan – paralele. Din această cauză mediul optic trebuie să fie omogen şi deci lichidul care umple spaţiul dintre lentile trebuie să aibă acelaşi indice de refracţie cu cel al lentilei, astfel că $n' = n = 1{,}5$

c. În lipsa lichidului transparent sistemul este format din patru lentile lipite, astfel că $C'_e = 4C_1 = 4/f = 8$ dioptrii

41.a. Distanţa minimă dintre obiect şi imaginea sa reală este $D=4f$, astfel că distanţa focală a lentilei este $f=D/4=10$ cm. Din formulele convergenţei:

$C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n-1)}{|R|} = \frac{1}{f}$, deoarece $R_1 = -R_2 = |R|$



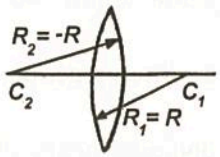
obţinem $|R| = 2f(n-1) = 10$ cm

b. Prin introducerea lentilei în apă se modifică distanţa focală a ei, astfel că $C' = \left(\frac{n}{n_a} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2}{|R|}\left(\frac{n}{n_a} - 1\right) = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{f n_a (n-1)}{n - n_a} = 40$ cm.

Distanţa minimă dintre obiect şi imaginea sa reală este $D' = 4f' = 160$ cm

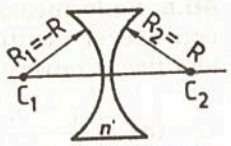
c. Prin alipirea lentilelor obţinem o lentilă cu distanţa focală F, astfel că $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = 6$ cm. Imaginea se formează faţă de sistem la distanţa $x_2 = \frac{F x_1}{F + x_1} = 7{,}5$ cm, iar faţă de obiect la $d = -x_1 + x_2 = 37{,}5$ cm

42.a. Aflăm distanţa focală a lentilei biconvexe simetrice.



Deoarece $C_1 = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n-1)}{|R|} = \frac{1}{f_1}$ pentru că $R_1 = |R|$

și $R_2 = -|R|$, obținem $f_1 = \frac{|R|}{2(n-1)}$=20 cm. Calculăm distanța focală a lentilei biconcave simetrice din apă formată între fețele convexe aflate în contact ale celor două lentile biconveve. Convergența acestei lentile este $C_2 = (n_a - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{2(n_a - 1)}{|R|} = \frac{1}{f_2}$, deoarece $R_2 = -R_1 = |R|$.



Obținem $f_2 = -\frac{|R|}{2(n_a - 1)} = -30$ cm.

Prin lipirea celor trei lentile se obține un sistem echivalent cu convergența $C_s = 2C_1 + C_2 \Rightarrow \frac{1}{F} = \frac{2}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow F = \frac{f_1 f_2}{2f_2 + f_1}$=15 cm

b. Din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{F}$ obținem distanța la care se formează imaginea față de lentilă $x_2 = \frac{Fx_1}{F + x_1}$=24 cm, astfel distanța dintre obiect și imaginea acestuia prin sistem este $d=-x_1+x_2$=64 cm

c. Din $\beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \frac{x_2 y_1}{x_1} = -6$ cm, deoarece imagimea formată de sistemul echivalent este reală și răsturnată

d. Dacă întregul sistem se introduce în apă se modifică distanța focală a acestuia, astfel că sistemul este echivalent cu cele două lentile biconvexe lipite. Distanța focală a unei lentile biconvexe introdusă în apă este $C_a = \left(\frac{n}{n_a} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n - n_a)}{n_a |R|} = \frac{1}{f_a} \Rightarrow f_a = \frac{n_a |R|}{2(n - n_a)}$=80 cm.

Convergența sistemului de lentile este $C' = 2C_a \Rightarrow F' = f_a/2$=40 cm.

Deoarece $x_1 = -40$ cm imaginea se formează la infinit deoarece $x_2 = \frac{F' x_1}{F' + x_1} \to \infty$

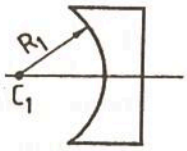
43.a. Deoarece imaginea este reală, de două ori mai mică decât obiectul atunci β=−1/2. Din $\beta = \frac{x_2}{x_1}$ și din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ obținem distanța focală a primei lentile $f_1 = \frac{x_2}{1 - \beta}$=30 cm

b. Deoarece înălțimea imaginii obiectului este cu 20% mai mică decât înălțimea obiectului atunci β'=−0,8. Obiectul se află față de lentilă în punctul de coordonată $x_1 = x_2/\beta = -90$ cm. Convergența sistemului format din cele două lentile alipite este $C' = \frac{1}{f'} = \frac{1 - \beta'}{\beta' x_1}$=2,5 dioptrii

c. Convergența sistemului de lentile este $C' = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{1 - \beta'}{\beta' x_1} - \frac{1 - \beta}{\beta x_1} \Rightarrow$ distanța focală a lentilei a doua este $f_2 = \frac{\beta\beta' x_1}{\beta - \beta'}$=120 cm

d. Înălțimea imaginii date de sistemul de lentile alipite este $h_i = |\beta'|h = 8$ mm

44.a. Deoarece $R_1 = -|R|$ și $R_2 \to \infty$, distanța focală a lentilei este



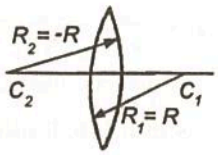
$$C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{n-1}{|R|} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = -\frac{|R|}{n-1} = -20 \text{ cm}.$$

Pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f'}$ imaginea se formează la $x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1} = -10$ cm, deci este o imagine virtuală. Mărimea imaginii este $y_2 = \beta y_1 = \frac{fy_1}{f + x_1} = 1$ cm.

b. Prin alăturarea celei de-a doua lentile cu fețele plane în contact se formează o lentilă echivalentă cu convergența $C' = 2C$, astfel că distanța focală a lentilei echivalente este $f' = f/2 = -10$ cm. Imaginea se formează la $x'_2 = \frac{f'x'_1}{f' + x'_1} = -\frac{20}{3}$ cm, deci este tot o imagine virtuală.

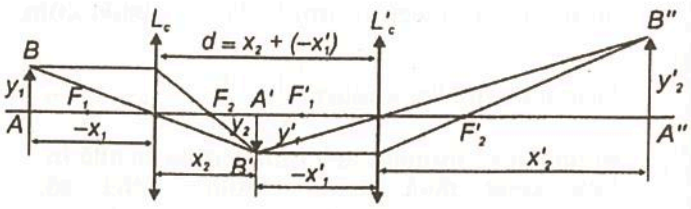
Mărimea imaginii este $y'_2 = \beta y_1 = \frac{f'y_1}{f' + x_1} \approx 0{,}666$ cm

c. Dacă între cele două lentile alipite cu fețele curbe în contact se umple spațiul dintre lentile cu apă se formează un sistem de trei lentile: două plan-concave și una biconvexă din apă. Convergența lentilei biconvexe este $C' = (n_a - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n_a - 1)}{|R|} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{|R|}{2(n_a - 1)} = 15$cm



Convergența sistemului de lentile este $C_S = 2C + C'$, iat distanța focală a sistemului echivalent devine $\frac{1}{F} = \frac{2}{f} + \frac{1}{f'} \Rightarrow F = \frac{f \cdot f'}{2f' + f} = -30$ cm

45.a. AB este obiect real pentru prima lentilă. Calculăm unde formează imaginea prima lentilă pe baza formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow$

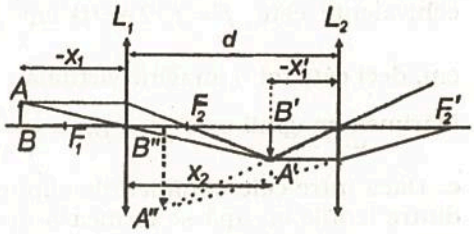


$x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 30$ cm. Cum mărirea liniară transversală este $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} \Rightarrow$ $\beta = -0{,}5$, imaginea $A'B'$ este reală, răsturnată și de două ori mai mică decât obiectul. Această imagine reală este situată în fața lentilei a doua și prin urmare $A'B'$ joacă rol de obiect real pentru aceasta, astfel că a doua lentilă, va forma o imagine la $x'_2 = \frac{f_2 \cdot x'_1}{f_2 + x'_1} = 30$ cm față de ea, deoarece din geometrie, $d = x_2 - x'_1$ și $x'_1 = x_2 - d = -10$ cm. Deoarece $x'_2 = 30$ cm, imaginea finală este reală și este situată în spatele lentilei a doua la 30 cm de aceasta.

b. Mărirea liniară transversală produsă de lentila a doua este $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = -3$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile se obține cu formula: $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = 1{,}5$. Imaginea finală este dreaptă în raport cu obiectul inițial și de 1,5 ori mai mare decât acesta.

c. Cum $\beta_s = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta_s \cdot y_1 = 3$ cm, imaginea $A_f B_f$ are înălțimea de 3 cm.

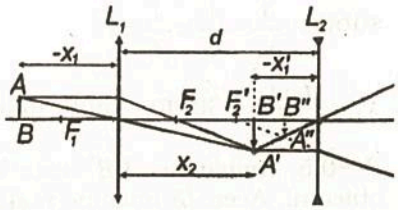
46.a. Din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ aflăm unde formează prima lentilă imaginea: $x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} = 6{,}25$ cm. Deoarece prima lentilei formează imaginea obiectului la distanța de 6 cm în fața lentilei, atunci $d = x_2 - x'_1 = 12{,}25$cm



b. Lentila a doua formează imaginea în punctul de coordonată $x'_2 = \frac{f_2 \cdot x'_1}{f_2 + x'_1} = -15$ cm ca în figură.

c. Măririle liniare transversale produse de lentile sunt $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = -\frac{1}{4}$ și $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = 2{,}5$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile se obține cu formula: $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = -0{,}625$. Astfel înălțimea imaginii formate de sistemul de lentile este $y_f = |\beta|_s y_1 = 7{,}5$ cm

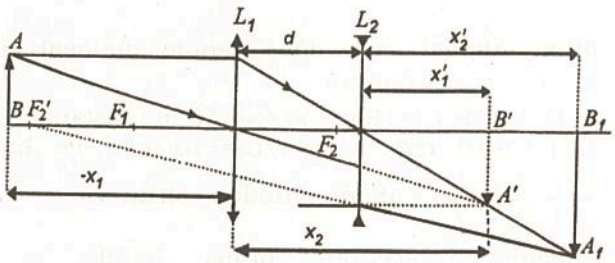
47.a. Deoarece imaginea formată de prima lentilă este reală, răsturnată și la fel de mare ca obiectul, atunci $\beta_1 = -1$. Astfel cum $\beta = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = -x_1 = 20$ cm și din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow -\frac{2}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow f_1 = -\frac{x_1}{2} = 10$ cm



b. Imaginea formată de prima lentilă se află în fața celei de-a doua lentilă, astfel că $d = x_2 - x'_1 \Rightarrow x'_1 = x_2 - d = -10$ cm. Lentila a doua are distanța focală $f_2 = 1/C_2 = -10$ cm. Imaginea finală este virtuală și se formează în fața lentilei a doua în punctul de coordonată $x'_2 = \frac{f_2 x'_1}{f_2 + x'_1} = -5$ cm

c. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile se obține cu formula: $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2$. Măririle liniare transversale produse de lentile sunt $\beta_1 = -1$ și $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = 0{,}5$, astfel că $\beta_s = -0{,}5$

48.a. Prima lentilă este convergentă şi are distanţa focală $f_1=1/C_1=25$ cm.
Pentru obiectul real aflat în faţa sa la $x_1=-30$ cm, lentila va forma o imagine reală la $x_2=\frac{f_1\cdot x_1}{f_1+x_1}=150$ cm de ea.



b. Deoarece lentila a doua este divergentă şi are distanţa focală $f_2=1/C_2=-80$ cm, iar imaginea reală $A'B'$ a primei lentile se formează în spatele lentilei divergente la $x_1'=x_2-d=30$ cm. Această imagine $A'B'$ joacă rol de obiect virtual pentru lentila divergentă. Lentila divergentă va forma în final o imagine la $x_2'=\frac{f_2\cdot x_1'}{f_2+x_1'}=48$ cm de ea, deoarece $x_2'>0$. Imaginea finală este reală şi se formează mai departe decât vechea imagine cu $x_2'-x_1'=18$ cm. Ecranul trebuie deplasat spre dreapta cu 18 cm spre dreapta

c. Măririle liniare transversale ale celor două lentile sunt: $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f_1}{f_1+x_1}=-5$ şi $\beta_2=\frac{x_2'}{x_1'}=\frac{f_2}{f_2+x_1'}=1{,}6$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s=\beta_1\cdot\beta_2=-8$. Imaginea finală este răsturnată şi de opt ori mai mare decât obiectul Cum $\beta_s=\frac{y_2}{y_1}\Rightarrow y_2=\beta_s\cdot y_1=1{,}6$ cm.
Înălţimea imaginii finale este 1,6 cm.

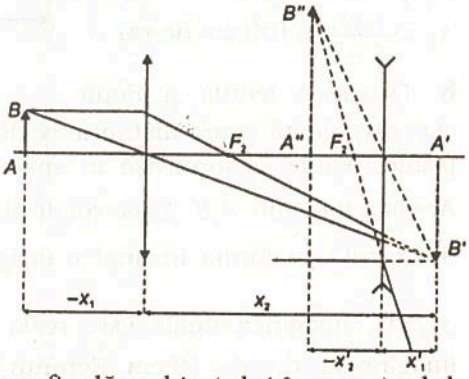
49.a. Prima lentilă este convergentă deoarece $C_1>0$, iar a doua este o lentilă divergentă, deoarece $C_2<0$. Pentru sistemul echivalent de lentile acolate obţinem $C=C_1+C_2=8$ m^{-1} iar $F=1/C=12{,}5$cm.

b. Utilizând formula lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{F}$, aflăm unde formează lentila echivalentă imaginea obiectului, astfel că $x_2=\frac{F\cdot x_1}{F+x_1}=25$cm, deoarece $x_1=-25$ cm. Imaginea este reală deoarece se formează în spatele lentilei echivalente.

c. Calculăm unde formează lentila convergentă imaginea obiectului. Cum $f_1=1/C_1=10$ cm obţinem $x_2=\frac{f_1\cdot x_1}{f_1+x_1}=\frac{50}{3}$cm, deoarece $x_1=-25$ cm. Această imagine este obiect pentru cea de-a doua lentilă. Cum $x_1'=x_2-d=10$ cm, $A'B'$ este obiect virtual pentru lentila divergentă, deoarece se află în spatele acestaia ca în figura de la problema precedentă. Lentila divergentă cu distanţa focală $f_2=1/C_2=-50$ cm, va forma o imagine finală la $x_2'=\frac{f_2\cdot x_1'}{f_2+x_1'}=12{,}5$ cm de ea.
Imaginea finală este reală, deoarece se formează în spatele lentilei divergente.

50.a. Alipind cele două lentile obținem o nouă lentilă cu convergența $C = C_1 + C_2 = 0$ dioptrii.

b. Deoarece C_1=10 m^{-1} și C_2=−10 m^{-1} distanțele focale ale celor două lentile sunt: f_1=1/C_1=10 cm și f_2=1/C_2=−10 cm. Pe baza formulelor lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$ aflăm unde formează imaginea obiectului prima lentilă: $x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 20$ cm, deoarece x_1=−20 cm.

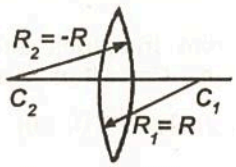


Lentila convergentă formează o imagine reală a obiectului, imagine care joacă rol de obiect pentru lentila divergentă. Cum $x_1' = x_2 - d = 15$ cm, înseamnă că $A'B'$ este obiect virtual pentru lentila divergentă, deoarece se află în spatele acesteia. Lentila divergentă formează imaginea finală a obiectului în punctual de coordonată $x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = -30$ cm. Imaginea finală se formează în fața lentilei divergente la 30 cm de aceasta și este o imagine virtuală, conform figurii.

c. Măririle liniare transversale ale celor două lentile sunt: $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = -1$ și $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = -2$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = 2$. Imaginea finală este dreaptă și de două ori mai mare decât obiectul. Cum $\beta_s = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta_s \cdot y_1 = 8$ cm, înălțimea imaginii finale este 8 cm.

51.a. Din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ obținem distanța focală a lentilei L_1: $f_1 = \frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2}$ =50 cm

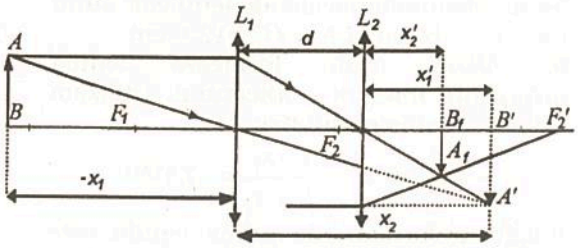
b. Deoarece $C_1 = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n-1)}{|R|} = \frac{1}{f_1}$ pentru că $R_1 = |R|$ și $R_2 = -|R|$, obținem $|R| = 2(n-1)f_1$=45 cm



c. Imaginea reală formată de lentila convergentă este reală și situată în spatele lentilei divergente, astfel că joacă rol de obiect virtual pentru lentila divergentă. Cum $x'_1 = x_2 - d = 25$ cm, din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x'_1} = \frac{1}{f_2}$ obținem coordonata imaginii dată de sistem, măsurată față de lentila L_2 $x'_2 = \frac{f_2 x'_1}{f_2 + x'_1} \approx -33{,}33$ cm (desen problema precedentă).

52.a. Aflăm unde formează prima lentilă imaginea obiectului real pe baza formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}\Rightarrow x_2=\frac{f_1\cdot x_1}{f_1+x_1}=120$ cm. Imaginea reală formată de prima lentilă joacă rol de obiect pentru cea de-a doua lentilă.

Cum $x_1'=x_2-d=20$ cm, această imagine este obiect virtual pentru lentila a doua, deoarece $A'B'$ se formează în spatele lentilei a doua. Calculăm unde se formează imaginea finală cu ajutorul lentilei a doua:



$x_2'=\frac{f_2\cdot x_1'}{f_2+x_1'}=15$ cm.

Imaginea finală este reală deoarece se formează în spatele lentilei L_2.

b. Calculăm măririle liniare transversale produse de cele două lentile: $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f_1}{f_1+x_1}=-3$ și $\beta_2=\frac{x_2'}{x_1'}=\frac{f_2}{f_2+x_1'}=0{,}75$ și prin urmare mărirea liniară transversală produsă de sistemul de lentile este $\beta_s=\beta_1\cdot\beta_2=-2{,}25$. Imaginea finală este răsturnată față de obiectul inițial și de 2,25 ori mai mare decât obiectul.

c. Imaginea finală are mărimea $y_2=|\beta_s|y_1=13{,}5$ cm

53.a. Utilizând formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}$ și a măririi liniare transverale $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}$ obținem $x_1=\frac{f_1(1-\beta_1)}{\beta_1}$ și $x_2=f_1(1-\beta_1)$.

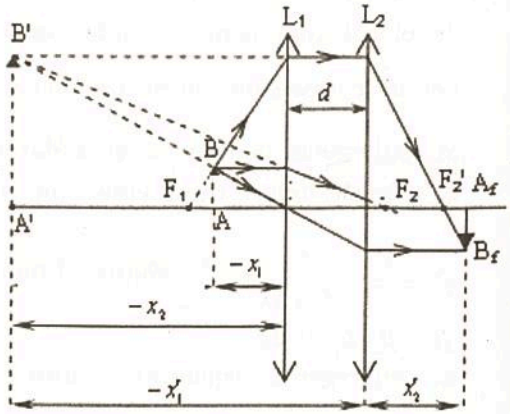
Cum $d=-x_1+x_2=\frac{f(1-\beta_1)^2}{\beta_1}\Rightarrow f_1=\frac{d\cdot\beta_1}{(1-\beta_1)^2}=36$ cm.

b. Imaginea formată de prima lentilă convergentă este virtuală, deoarece se formează în fața lentilei și de aceea imaginea $A'B'$ este dreaptă și mai mare decât obiectul. Această imagine se formează față de a doua lentilă în fața acesteia și din această cauză joacă rol de obiect real pentru această lentilă.

Cum $x_2=f_1(1-\beta_1)=-72$ cm $\Rightarrow$

$x_1'=x_2-d=-96$ cm.

Aflăm unde se formează imaginea finală cu ajutorul celei de-a doua lentile: $x_2'=\frac{f_2\cdot x_1'}{f_2+x_1'}=32$ cm. Lentila a doua formează în final o imagine reală, situată în spatele ei la 32 cm de aceasta.



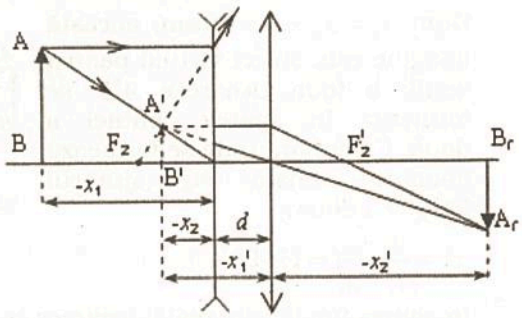
c. Mărirea produsă de a doua lentilă: $\beta_2=\frac{x_2'}{x_1'}=\frac{f_2}{f_2+x_1'}=-\frac{1}{3}$, astfel că mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este: $\beta_s=\beta_1\cdot\beta_2=-1$. Imaginea finală

este la fel de mare ca obiectul, dar este răsturnată. Cum $y_2 - \beta_s \cdot y_1 = -10$ cm, imaginea finală are înălțimea de 10 cm.

54.a. Distanțele focale ale lentilelor sunt: $f_1 = 1/C_1 = -10$cm şi $f_2 = 1/C_2 = 12{,}5$ cm

b. Aflăm unde formează lentila divergentă imaginea obiectului. Utilizăm formula lentilelor subțiri:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = -7{,}5 \text{ cm}.$$



Imaginea formată de prima lentilă este virtuală, deoarece se formează în fața lentilei ca în figură. Această imagine joacă rol de obiect real pentru lentila convergentă, deoarece $x_1' = x_2 - d = -15$ cm. Lentila convergentă formează imaginea finală la $x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = 75$ cm de ea. Pelicula se aşază la 75 cm de lentila convergentă.

c. Calculăm măririle liniare transversale ale celor două lentile: $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = \frac{1}{4}$ şi $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = -5$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = -1{,}25$. Imaginea finală este răsturnată şi de 1,25 ori mai mare decât obiectul.

55.a. Aflăm coordonata punctului unde formează lentila divergentă imaginea obiectului utilizând formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$. Astfel că $x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} \approx -26{,}66$ cm. Imaginea virtuală formată de lentila divergentă joacă rol de obiect real pentru lentila convergentă, astfel că $x_1' = x_2 - d = -66{,}66$ cm. Lentila convergentă formează imaginea la distanța $x'_2 = \frac{f_2 \cdot x'_1}{f_2 + x'_1} = 100$ cm de ea.

Mersul razelor de lumină este redat în figura de la problema precedentă.

b. Măririle liniare transversale ale celor două lentile sunt: $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = \frac{1}{3}$ şi $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = -\frac{3}{2}$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = -0{,}5$.

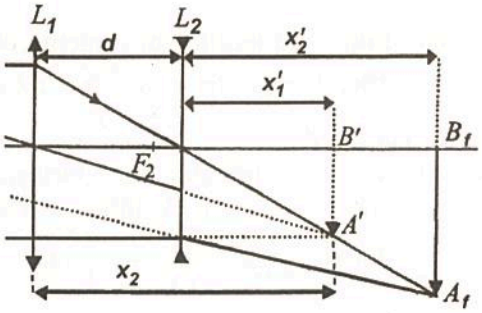
c. Convergența sistemului obținut prin alipirea lentilelor este $C_s = C_1 + C_2$, astfel că $C_S = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 0$

56.a. Deoarece imaginea se formează pe ecran, aceasta este reală şi prin urmare $\beta_1 = -4$, deoarece imaginea este de patru ori mai mare decât obiectul. Utilizând

formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}$ și a măririi liniare transversale $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}$ aflăm distanța focală a primei lentile: $f_1=\frac{\beta_1\cdot x_1}{1-\beta_1}=\frac{x_2}{1-\beta}$.

Deoarece f_1=4 cm convergența lentilei este $C_1=1/f_1$=25 m^{-1}.

b. Din datele problemei $x_1'=\frac{x_2}{2}=10$ cm, astfel că imaginea reală formată de lentila convergentă se formează în spatele lentilei divergente jucând rolul de obiect virtual pentru aceasta. Deoarece ecranul trebuie depărtat pentru a se prinde imaginea de acesta, înseamnă că imaginea finală este reală. Din geometrie, $x_2'=d+\frac{x_2}{2}=30$ cm.



Distanța focală a lentilei a doua se află utilizând formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}=\frac{1}{f_2}\Rightarrow f_2=\frac{x_1'\cdot x_2'}{x_1'-x_2'}=-15$ cm.

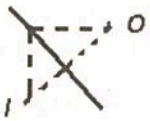
c. Mărirea liniară transversală formată de lentila divergentă este $\beta_2=\frac{x_2'}{x_1'}=3$.

Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s=\beta_1\cdot\beta_2=-12$.

Cum $\beta_s=\frac{y_2}{y_1}\Rightarrow y_2=\beta_s\cdot y_1=-12$ cm, imaginea finală este răsturnată și de 12 ori mai mare decât obiectul.

57.a. Distanța focală a primei lentile este $f_1=1/C_1$=20 cm. Această lentilă formează imaginea obiectului aflat în punctul de coordonată x_1=−25 cm la distanța $x_2=\frac{f_1x_1}{f_1+x_1}$=100 cm de ea

b. Această imagine se formează în spatele oglinzii plane la d=50 cm de aceasta și joacă rol de obiect virtual pentru oglindă. Datorită faptului că oglinda este înclinată cu unghiul α=45^0 față de axa optică principală a primei lentilei, aceasta va forma pentru obiectul virtual o imagine reală situată la 50 cm de oglindă sub axul optic ca în figură. Aceată imagine reală I se află în fața lentilei a doua. Această lentilă va forma în final o imagine reală situată la distanța $x'_2=\frac{f_2x'_1}{f_2+x'_1}$=150 cm de ea, deoarece $x'_1=-30$ cm



c. Datorită primei lentile $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f_1}{f_1+x_1}=-4$, iar datorită lentilei a doua $\beta_2=\frac{x'_2}{x'_1}=\frac{f_2}{f_2+x'_1}=-5$. Oglinda întoarce doar razele de lumină fără să modifice dimensiunile obiectului, astfel că mărirea liniară transversală a sistemului este $\beta_s=\beta_1\beta_2$=20.

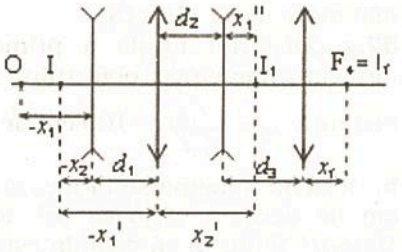
58.a. Deoarece imaginea obținută cu lentila convergentă este reală și de trei ori mai mare decât obiectul, atunci $\beta = -3$. Din $\beta = \frac{x_2}{x_1}$ și din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ obținem distanța focală a lentilei convergente $f_1 = \frac{\beta \cdot x_1}{1-\beta}$=3 cm. Înlocuind lentila convergentă cu o lentilă divergentă obținem distanța focală a lentilei divergente $f_2 = \frac{\beta' \cdot x_1}{1-\beta'} = -2$ cm cu $\beta' = 1/3$.

b. Lentila convergentă formează imaginea obiectului la distanța $x_2=\beta x_1=12$ cm de ea. Această imagine se formează în fața lentilei divergente, astfel că $x_1' = x_2 - d = -4$ cm. Lentila divergentă va forma imaginea în punctul de coordonată $x'_2 = \frac{f_2 x'_1}{f_2 + x'_1} = -\frac{4}{3}$ cm

Mărirea liniară transversală formată de lentila divergentă este $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{1}{3}$.

Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = -1$

c. Pentru ca lentila divergentă să formeze o imagine care se prinde pe un ecran, această imagine trebuie să fie reală. Acest lucru se întâmplă dacă obiectul este virtual și situat între lentilă și focarul obiect al acesteia, astfel că $x'_1 \in [0,2]$ cm. Pentru distanța $d = x_2 - x'_1$ dintre lentile obținem $d_{min}=x_2+f_2=10$ cm și $d_{max}=x_2=12$ cm. Lentila divergentă de deplasează pe o distanță cuprinsă între 4 cm și 6 cm spre lentila convergentă.



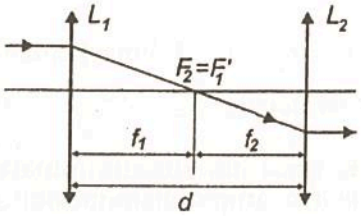
59.a. Aflăm unde formează prima lentilă imaginea obiectului aflat în fața lentilei la $x_1=-10$ cm de aceasta. Aplicăm formula lentilelor subțiri:

$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = -\frac{10}{3}$ cm. Imaginea este virtuală, deoarece se formează în fața lentilei.

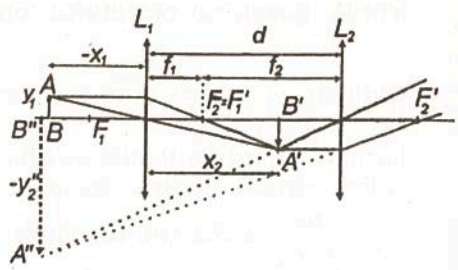
b. Această imagine I este obiect real pentru a doua lentilă convergentă, deoarece $x_1' = x_2 - d_1 = -10$ cm. A doua lentila convergentă va forma o imagine la $x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = 10$ cm de ea, deci imaginea I_1 este reală, dar se formează în spatele lentilei a treia și deci joacă rol de obiect virtual pentru această lentilă.

c. Din geometrie, $x_1'' = x_2 - d_2 = 5$ cm și aflăm unde formează imaginea a treia lentila divergentă, pentru obiectul virtual I_1: $x_2'' = \frac{f_3 \cdot x_1''}{f_2 + x_1''} \to \infty$. Razele de lumină emerg paralel cu axul optic principal, după refracția prin lentila divergentă. Aceste raze cad pe a patra lentila convergentă și aceasta va forma imaginea finală reală în focarul ei principal imagine, adică la $x_f = f_4 = 5$ cm de ea și în spatele ei.

60.a. Un sistem afocal are proprietatea că o rază paralelă cu axul optic principal după refracția prin cele două lentile iese din sistem paralel cu axul optic principal ca în figură. Un astfel de sistem are proprietatea că distanța dintre lentile este suma distanțelor focale ale lentilelor componente: $d = f_1 + f_2$.



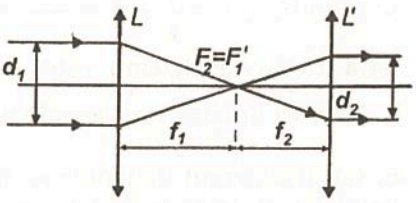
b. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2$. Aflăm măririle produse de fiecare din cele două lentile componente. Pentru prima lentilă: $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1}$, deoarece conform formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1}$. Imaginea formată de prima lentilă este obiect pentru cea de-a doua lentilă. Din geometrie: $x_1' = x_2 - d$ și cum sistemul de lentile este afocal $d = f_1 + f_2 \Rightarrow x_1' = x_2 - f_1 - f_2$. Lentila a doua formează în final o imagine la $x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'}$ față de ea și cu o mărire liniară transversală $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = \frac{f_2}{x_2 - f_1}$. Introducând x_2 în β_2, obținem $\beta_2 = -\frac{f_2(f_1 + x_1)}{f_1^2} \Rightarrow \beta_s = -\frac{f_2}{f_1}$. Observăm că mărirea sistemului afocal nu depinde de poziția obiectului în raport cu sistemul afocal, dar depinde de distanțele focale ale lentilelor componente ale acestuia.



c. Prin particulerizare obținem d=70 cm și β=−2,5.

61.a. Cum sistemul este afocal, pe baza proprietăților sistemului afocal: $d = f_1 + f_2$ și cum mărirea liniară transversală a sistemului afocal este: $\beta = -\frac{f_2}{f_1}$ obținem distanțele focale ale celor două lentile $f_1 = \frac{d}{1-\beta}$=30 cm și $f_2 = -\frac{\beta \cdot d}{1-\beta}$=10 cm

b. Pe baza mersului razelor de lumină, utilizând asemănarea triunghiurilor formate aflăm diametrul fasciculului de lumină emergent: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{f_2}{f_1} \Rightarrow d_2 = \frac{f_2}{f_1} d_1 = 1$ cm.



c. Când acolăm cele două lentile se obține o singură lentilă cu convergența: $C = C_1 + C_2 \Rightarrow C = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = -\frac{(\beta-1)^2}{d \cdot \beta} \approx 13{,}33$ dioptrii

62.a Deoarece obiectul se află la o distanță infinit de mare în fața primei lentile imaginea lui se va forma pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ în focarul imagine al primei lentile, deoarece $x_1 \to -\infty$. Această imagine punctiformă se află în fața lentilei divergente în punctul de coordonată

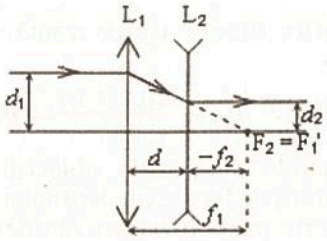
$x'_1 = f_1 - d = -3$ cm. Lentila convergentă va forma imaginea în punctul de coordonată $x'_2 = \frac{f_2 x'_1}{f_2 + x'_1} = -12$ cm

b. Dacă din situația inițială lentila a doua se îndepărtează cu 1 cm de prima lentilă atunci distanța dintre ele devine d=24 cm. Aflăm unde formează prima lentilă imaginea obiectului utilizând formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$.

Obținem $x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1}$ =40 cm. Deoarece $x'_1 = x_2 - d = 16$ cm înseamnă că imaginea formată de prima lentilă se află în spatele celei de-a doua lentilă și joacă rol de obiect virtual pentru aceasta. Lentila a doua formează imaginea în punctul $x'_2 = \frac{f_2 x'_1}{f_2 + x'_1} = 3{,}2$ cm. Imaginea finală este reală deoarece se formează în spatele lentilei a doua.

c. Deoarece observăm că $d = f_1 + f_2$ înseamnă că sistemul de lentile este afocal. Astfel mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta = -\frac{f_2}{f_1}$ =-0,2.

63.a. Deoarece un fascicul paralel cu axul optic principal părăşeşte sistemul tot paralel cu axul optic principal, sistemul de lentile este afocal. Razele de lumină se propagă ca în figură. Astfel: $d = f_1 + f_2$=-10 cm



b. Deoarece mărirea liniară transversală a sistemului afocal este $\beta = -\frac{f_2}{f_1} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow$

$y_2 = -\frac{f_2 y_1}{f_1} = 3$ cm. Imaginea finală obținută se formează de aceeaşi parte cu obiectul şi este de trei ori mai mică decât obiectul.

c. Când acolăm cele două lentile se obține o singură lentilă cu convergența: $C = C_1 + C_2 \Rightarrow C = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2} \approx -13{,}33$ m^{-1}

64.a. Deoarece sistemul este afocal $d = f_1 + f_2 \Rightarrow f_2 = d - f_1 = -10$ cm.

b. Mărirea liniară transversală a sistemului afocal este $\beta = -\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{3}$.

c. Când sistemul de lentile se introduce în apă se schimbă distanțele focale ale lentilelor. Pe baza formulelor convergenței obținem convergențele lentilelor în apă şi respectiv în aer:

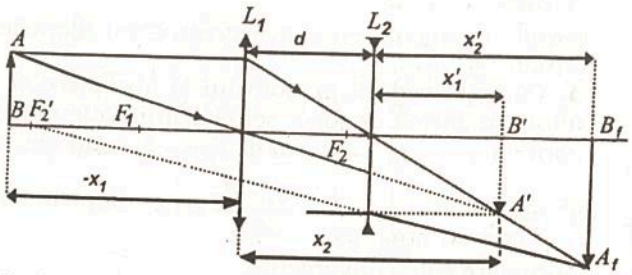
$C_{apa} = \frac{1}{f_{apă}} = \left(\frac{n}{n_a} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ şi $C_{aer} = \frac{1}{f_{aer}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$.

Prin împărțirea celor două relații, obținem distanța focală a primei lentile la introducerea în apă: $\frac{f_{1apă}}{f_{1aer}} = \frac{(n-1)n_a}{(n-n_a)} \Rightarrow f_{1apă} = \frac{f_{1aer}(n-1)n_a}{n-n_a}$. Analog distanța focală a celei de-a doua lentilă la introducerea în apă devine: $f_{2apă} = \frac{f_{2aer}(n-1)n_a}{n-n_a}$.

Cum sistemul de lentile trebuie să rămână afocal şi în apă, distanţa dintre lentile devine: $d_{apă} = f_{1apă} + f_{2apă} = \frac{(n-1)n_a}{n-n_a}(f_1 + f_2) = 80$ cm.

65.a. Aflăm unde formează lentila convergentă imaginea obiectului real pe baza formulei $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 120$ cm, deoarece $x_1 = -40$ cm $\Rightarrow$ ecranul se aşază în spatele lentilei convergente la 120 cm de aceasta.

b. Imaginea obţinută cu ajutorul lentilei convergente, se formează în spatele lentilei divergente şi joacă rol de obiect virtual pentru aceasta, deoarece $x_1' = x_2 - d_1 = 10$ cm ca în figură. Aflăm unde formează lentila divergentă imaginea obiectului virtual cu ajutorul formulei lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = 20$ cm.



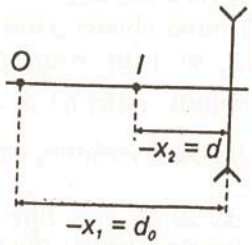
Deoarece $x_2' > 0$, înseamnă că lentila divergentă formează o imagine reală situată mai departe de ea. Prin urmare ecranul se va depărta de lentila divergentă cu $\Delta x = x_2' - x_1' = 10$ cm, pentu a se putea prinde imaginea finală formată de sistemul de lentile pe el.

c. Dacă se formează un sistem afocal cu cele două lentile, atunci $d = f_1 + f_2 = 10$ cm reprezintă distanţa dintre cele două lentile.

Mărirea sistemului afocal este $\beta_s = -\frac{f_2}{f_1} = \frac{2}{3}$.

1.3. Instrumente optice

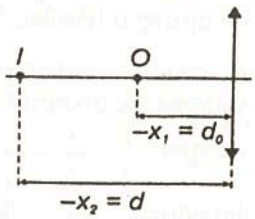
1. Ochiul uman se comportă ca o lentilă convergentă ce formează pentru obiecte reale imagini reale pe retină. Lentila aşezată în faţa ochiului şi lipită de acesta (lentilă de contact) formează pentru un obiect aşezat la distanţa optimă de citire o imagine virtuală în punctul în care vede ochiul. Cum $x_1 = -d_0 = -25$ cm şi $x_2 = -d = -20$ cm, utilizând formula lentilelor subţiri obţinem:



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} \Rightarrow f = \frac{d_0 d}{d - d_0} = -100 \text{ cm}.$$

Prin urmare vederea miopului se corectează cu o lentilă divergentă cu convergenţa $C=-1$ dioptrie.

2. Lentila aşezată în faţa ochiului şi lipită de acesta (lentilă de contact) formează pentru un obiect aşezat la distanţa optimă de citire o imagine virtuală în punctul în care vede ochiul. Pentru hipermetrop $x_1 = -d_0 = -25$ cm şi $x_2 = -d = -30$ cm şi din formula lentilelor subţiri $\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d}$ obţinem distanţa focală a lentilei:



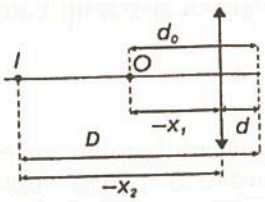
$f = \frac{d_0 d}{d - d_0} = 150$ cm. Vederea la apropiere a hipermetropului se corectează cu o

lentilă convergentă cu convergența $C = 1/f = 0{,}66$ dioptrii.

3. Punctul remotum reprezintă distanța cea mai mare la care vede ochiul. Pentru a putea distinge obiectele aflate la infinit se utilizează o lentilă de contact care să formeze pentru obiectele aflate la infinit o imagine virtuală situată în punctul remotum. Astfel $x_1 \to -\infty$ și $x_2 = -d$ și din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{d}$ obținem $f = -d = -1$ m. Corecția vederii la distanță se face cu o lentilă divergentă cu convergența $C=-1$ dioptrie.

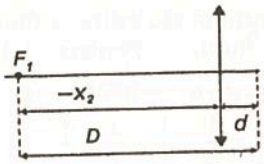
4. Corecția vederii prezbitului la apropiere se face cu ajutorul unei lentile mici aflată în partea de jos a ochelarului. Calculăm convergența acestei lentile, ținând cont că $x_1 = -d_0 = -25$ cm și $x_2 = -d_1 = -40$ cm, astfel că $C_1 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_1} = \frac{d_1 - d_0}{d_0 d_1} = 1{,}5$ dioptrii. Lentila care corectează vederea la apropiere este convergentă.

Corecția vederii prezbitului la distanță se face cu ajutorul unei lentile mari aflate în partea superioară a ochelarului. Ținând cont că $x_1 \to -\infty$ pentru că obiectul se află la infinit și $x_2 = -d_2 = -50$ cm pentru că imaginea virtuală se formează în punctul remotum, obținem $C_2 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{d_2} = -2$ dioptrii. Lentila care corectează vederea la depărtare este divergentă.



5. Persoana distinge obiectele aflate între 40 cm și punctul de infinit. Calculăm distanța minimă la care vede persoana când utilizează ochelari cu distanța focală $f=1/C=100$ cm.

Lentila convergentă formează pentru un obiect așezat la d_0 de ochi, o imagine virtuală în punctul în care vede ochiul, astfel că $d_0 = -x_1 + d$. Dar cum $D = -x_2 + d \Rightarrow x_2 = d - D = -39$ cm, astfel că pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_1 = \frac{f \cdot x_2}{f - x_2} = -28{,}05$ cm. Obținem d_0=29,05 cm. Aflăm distanța maximă la care vede ochiul când se utilizează lentila. Pentru obiectele aflate la infinit, lentila formează o imagine virtuală în focarul ei obiect, astfel că din $x_1 \to -\infty \Rightarrow x_2 = -f = -100$ cm. Astfel $D = -x_2 + d = 101$ cm reprezintă distanța maximă la care se pot distinge obiectele cu ajutorul lentilei. Limitele vederii distincte sunt 29,05 cm și 101 cm.

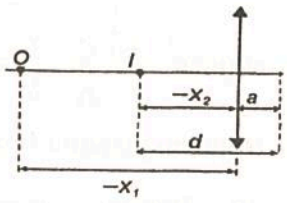


6. Calculăm distanța focală a lentilei ce corectezză vederea la distanță a celui de-al doilea miop. Conform relației $\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$, pentru obiectul aflat la infinit, imaginea se formează în fața lentilei la $x_2 = -d_2 \Rightarrow f = x_2 = -4$ m. Calculăm distanța până la care vede primul miop utilizând ochelarii celuilalt miop

pe baza formulei: $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}$. Cum această lentilă formează pentru un obiect o imagine în punctul în care vede ochiul şi deci $x_2'=-d_1=-2$ m atunci $x_1'=\frac{f\cdot x_2'}{f-x_2'}=-4$ m. Distanţa până la care vede primul miop cu ochelarii celui de-al doilea miop este de 4 m, deci poate vedea la televizor!

7. Calculăm distanţa focală a lentilelor care permit omului să vadă la distanţă. Pentru obiectele aflate la infinit, lentila va forma o imagine virtuală în puntul remotum. Astfel $x_1\to-\infty$ şi $x_2=-D$ şi pr baza formulei lentilelor subţiri $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}$ obţinem $f=x_2=-D=-3$ m. Aflăm distanţa minimă a vederii clare, când miopul utilizează lentilele de distanţă. Cum $x_2'=-d=-20$ cm obţinem $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}\Rightarrow-\frac{1}{D}=-\frac{1}{d}-\frac{1}{x_1'}\Rightarrow x_1'=\frac{D\cdot d}{d-D}\approx21{,}4$ cm. Distanţa minimă a vederii clare este 21,4 cm.

8. Lentila utilizată are distanţa focală $f=1/C=2$ cm. Aflăm limita minimă a vederii clare. Din desen $-x_2+a=d\Rightarrow x_2=a-d=-8$ cm, deoarece imaginea se formează în punctul proximum. Pe baza formulei lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1=\frac{f\cdot x_2}{f-x_2}=-1{,}6$ cm. Obiectul se află faţă de ochi la distanţa $d_{min}=-x_1+a\Rightarrow d_{min}=3{,}6$ cm.

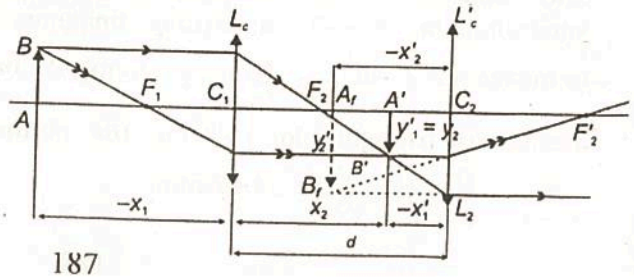


Aflăm limita maximă a vederii clare. Cum imaginea trebuie să se formeze în punctul remotum $-x_2'+a=D\Rightarrow x_2'=a-D=-198$ cm, obiectul se află faţă de lentilă la $x_1'=\frac{f\cdot x_2'}{f-x_2'}=-1{,}98$ cm, astfel că distanţa maximă la care se află obiectul faţă de ochi este $D_{max}=-x_1'+a=3{,}98$ cm. Prin urmare observatorul poate să deplaseze obiectul faţă de lentilă fără a înceta să vadă clar linia pe distanţa $D_{max}-d_{min}=3{,}8$ mm.

9. Deoarece razele de lumină care vin de la Soare şi care cad pe lentilă formează un fascicul paralel de lumină, după ce traversează lentila se strâng în focarul imagine. Pentru ca hârtia să se carbonizeze, aceasta trebuie aşezată în planul focal imagine al lentilei convergente.

Cum $\beta=\frac{x_2}{x_1}\Rightarrow x_2=\beta\cdot x_1=-d_0\Rightarrow x_1=-\frac{d_0}{\beta}$. Din formula lentilelor subţiri $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}$ obţinem $f=\frac{x_1x_2}{x_1-x_2}=\frac{d_0}{\beta-1}=5$ cm. Hârtia se aşază faţă de lentilă la 5 cm în spatele lentilei, în planul focal imagine al lentilei.

10. Aflăm unde formează obiectivul imaginea obiectului din formula lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}\Rightarrow x_2=\frac{f_1\cdot x_1}{f_1+x_1}$ =6m, deoarece x_1=−3 mm. Imaginea formată de obiectiv este reală.

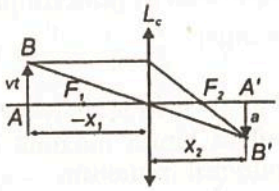


Această imagine joacă rol de obiect pentru lentila ocular, care formează o imagine virtuală la distanța optimă de citire. Această imagine virtuală este preluată de ochi.

Deoarece $x_2' = -25\,\text{cm}$, din $\frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow x_1' = \frac{x_2' \cdot f_2}{f_2 - x_2'} \approx -2{,}678$ cm. Distanța dintre cele două lentile este: $d = x_2 - x_1' \approx 32{,}78$ mm.

11. Aparatul de fotografiat este format din mai multe lentile, astfel că sistemul este echivalent cu o lentilă convergentă. Aflăm unde trebuie pusă pelicula fotografică în primul caz, pentru a se prinde imaginea pe peliculă. Utilizăm formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{f \cdot x_1}{f + x_1}$. Mărirea liniară transversală este $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f}{f + x_1}$. Cum $\beta_1 = \frac{h_1}{o} \Rightarrow \frac{f}{f + x_1} = \frac{h_1}{o}$ (1), unde o este înălțimea obiectului și analog $\beta_2 = \frac{f}{f + x_1'} = \frac{h_2}{o}$ (2). Prin împărțirea relațiilor (1) la (2), obținem $\frac{f + x_1'}{f + x_1} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{f - d_2}{f - d_1} = \frac{h_1}{h_2}$ deoarece $x_1 = -d_1 = 20$ m și $x_1' = -d_2 = -15$ m.

Obținem distanța focală $f = \frac{d_2 h_2 - d_1 h_1}{h_2 - h_1} = 10$ m



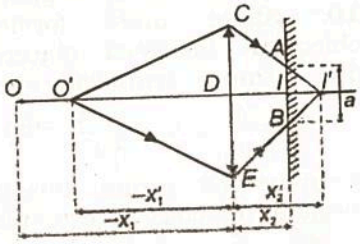
12. Deoarece $x_1 = -5$ m, imaginea pe peliculă a patinatorului dacă nu s-ar deplasa s-ar forma față de lentilă la distanța $x_2 = \frac{f \cdot x_1}{f + x_1} = 10{,}2$ cm.

Pe baza asemănării triunghiurilor din figura alăturată obținem: $-\frac{x_2}{x_1} = \frac{a}{v \cdot t} \Rightarrow t = -\frac{a(f + x_1)}{v \cdot f} \approx 2$ ms.

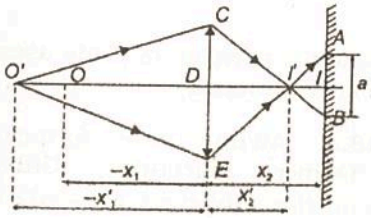
13. Deoarece cunoaștem $x_1 = -15$ cm și $x_2 = 20$ cm aflăm distanța focală a sistemului de lentile: $\frac{1}{F} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \Rightarrow F = \frac{x_2 x_1}{x_1 - x_2} = \frac{60}{7}$ cm. Când acolăm două lentile, convergența sistemului se calculează cu formula $C = C_1 + C_2 \Rightarrow$ $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow f_2 = \frac{F f_1}{f_1 - F} = 30$ cm. Astfel lentila alipită este convergentă.

14.a. Aflăm unde trebuie să așezăm pelicula fotografică când obiectul O se află la $x_1 = -4$ m. Din formula lentilelor subțiri obținem $x_2 = \frac{f \cdot x_1}{f + x_1} \approx 26{,}66$cm.

Dacă obiectul O' se află față de aparatul de fotografiat la $x_1' = -3$ m, atunci imaginea se formează în I' la $x_2' = \frac{f \cdot x_1'}{f + x_1'} \approx 27{,}27$ cm. Pe baza asemănării triunghiurilor CEI' cu ABI' obținem: $\frac{x'_2}{x_2' - x_2} = \frac{D}{d} \Rightarrow D = \frac{x'_2 d}{x_2' - x_2} \approx 4{,}47$ mm.



b. Dacă obiectul O' se află față de aparatul de fotografiat la $x_1' = -6$ m, atunci imaginea se formează în I' la $x_2' = \frac{f \cdot x_1'}{f + x_1'} \approx 26{,}09$ cm. Pe baza asemănării triunghiurilor CEI' cu ABI' obținem:

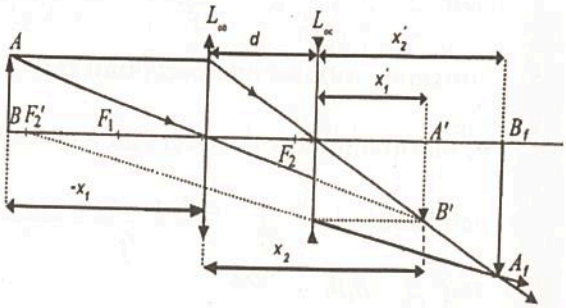


$$\frac{x_2'}{x_2 - x_2'} = \frac{D}{d} \Rightarrow D = \frac{x_2' d}{x_2 - x_2'} \approx 4{,}57 \text{ mm}$$

15. Aflăm unde trebuie așezat diapozitivul față de lentila de proiecție. Utilizăm formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_1 = \frac{f \cdot x_2}{f - x_2} = -21$ cm. Cum mărirea aparatului de proiecție este $\beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f - x_2}{f} = -19$. Dimensiunile laturilor imaginii pe ecranul de proiecție sunt $y_2 = \beta \cdot y_1 = 57$ cm și $y_2' = \beta \cdot y_1' = 76$ cm.

16.a. Calculăm unde formează obiectivul imaginea obiectului real.

Cum $x_1 = -30\text{cm} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 7{,}5\text{cm}$.

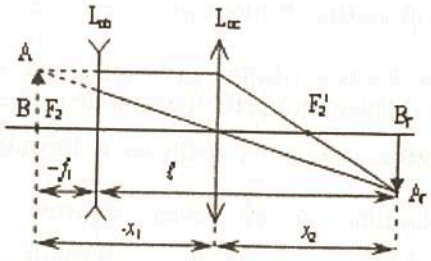


Imaginea obținută cu ajutorul lentilei obiectiv este reală. Această imagine joacă rol de obiect virtual pentru lentila ocular divergentă, deoarece $x_1' = d - x_2 = 6$ cm, imaginea formată de obiectiv aflându-se în spatele lentilei ocular. Aflăm unde formează ocularul imaginea finală, astfel că $x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = 15\text{cm}$. Imaginea finală este reală și se prinde pe pelicula fotografică.

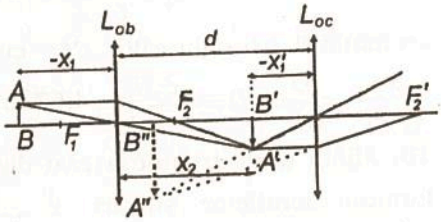
b. Mărirea produsă de obiectiv este $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = -\frac{1}{4}$, iar cea produsă de ocular: $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = \frac{5}{2}$. Mărirea teleobiectivului este $\beta_s = \beta_1 \beta_2 = -0{,}625$. Semnul minus arată că imaginea finală este răsturnată ca în figură.

c. Cum $\beta_s = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow |y_2| = |\beta_s| y_1 = 6{,}25$ cm

17. Deoarece obiectul se află la infinit $x_1 \to -\infty$ și prin urmare cum $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$ obținem $x_2 = f_1 = -5$ cm, adică lentila obiectiv formează o imagine virtuală, în fața ei și în focarul principal imagine. Această imagine fiind situată în fața lentilei ocular, joacă rol de obiect real pentru aceasta. Pe baza relației între segmente: $-x_1 + x_2 = -f_1 + \ell \Rightarrow x_1 = f_1 - \ell + x_2$ și pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_2}$ obținem $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_2 - 50} = \frac{1}{8} \Rightarrow x_2^2 - 50x_2 + 400 = 0$. Soluțiile ecuației sunt x_2=10 cm și x_2=40 cm. Pentru a putea forma imagini clare ale obiectului pe



peliculă, aceasta se poate aşeza faţă de lentila convergentă la 10 cm sau 40 cm. Soluţia practică este x_2=10 cm faţă de lentila convergentă.



18.a. Aflăm unde formează obiectivul imaginea obiectului. Utilizăm formula lentilelor subţiri cu $x_1 = -5/8$ cm, astfel că

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} = 15\text{cm}.$$

Imaginea formată de obiectiv este reală.

b. Această imagine joacă rol de obiect real pentru lentila ocular, care va forma o imagine virtuală preluată direct de ochi şi aflată în faţa lentilei ocular la distanţa optimă de citire, astfel că $x_2' = -d_0 = -25$ cm.

Cum $\frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow x_1' = \frac{f_2 x_2'}{f_2 - x_2'} = -\frac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} = -1{,}85$ cm.

Lungimea tubului microscopului este: $d = x_2 - x_1' = x_2 + \frac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} = 16{,}85$ cm.

c. Mărirea liniară transversală a obiectivului este $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = -24$ şi mărirea ocularului este $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2 - x_2'}{f_2} = \frac{f_2 + d_0}{f_2} = 13{,}5$, astfel că mărirea microscopului este $\beta_s = \beta_1 \beta_2 = -324$.

19.a. Obiectivul va forma o imagine reală la $x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 15{,}12$ cm de el.

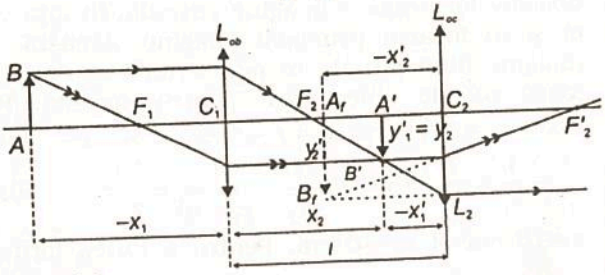
Calculăm lungimea tubului microscopului când omul priveşte imaginea finală la distanţa optimă de citire d_0=25 cm. Conform desenului de la problema precedentă $d = x_2 - x_1'$, aflăm la ce distanţă este obiectul faţă de ocular

$$x_1' = \frac{f_2 \cdot x_2'}{f_2 - x_2'} = -\frac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} = -0{,}96 \text{ cm} \Rightarrow d = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} + \frac{f_2 \cdot d_0}{f_2 + d_0} = 16{,}08 \text{ cm}.$$

b. Aflăm lungimea tubului microscopului când omul priveşte imaginea finală neacomodat, adică când imaginea se formează la infinit $x_2' \to -\infty \Rightarrow x_1' = f_2 = 1$ cm. Astfel obţinem $d' = x_2 - x_1' = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} + f_2 = 16{,}12$ cm.

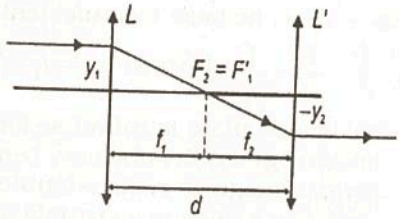
c. Pentru a putea privi imaginea, observatorul poate deplasa ocularul în raport cu obiectivul prin operaţia de punere la punct cu $\Delta d = d' - d = 0{,}4$ mm.

20.a. Imaginea reală va fi formată de obiectiv la $x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} = 13$ cm în spatele lentilei şi va avea mărirea $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = -25$. Această imagine este obiect real pentru lentila ocular care va forma o imagine virtuală la distanţa $-x_2' = 15$ cm de lentilă şi în faţa



ei la $x_1' = \frac{f_2 x_2'}{f_2 - x_2'} = -1{,}76$ cm. Lungimea tubului microscopului pentru miop este $\ell = x_2 - x_1' = 14{,}76$ cm şi aceasta este distanţa dintre lentile.

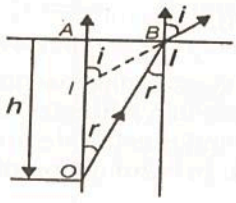
b. Mărirea ocularului este $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2 - x_2'}{f_2} = 8{,}5$.



Mărirea microscopului este $\beta_s = \beta_1\beta_2 = 212{,}5$.

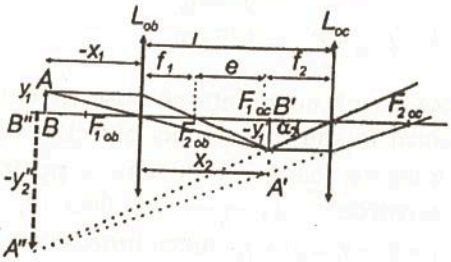
c. Deoarece un fascicul paralel incident pe ambele lentile părăseşte sistemul tot paralel, înseamnă că cele două lentile formează un sistem afocal, astfel că distanţa dintre cele două lentile este $d = f_1 + f_2 = 2{,}5$ cm. Deoarece fasciculul emergent va avea dimensiunile mai mari, atunci $\beta = -\frac{f_2}{f_1} = -4$, astfel că faţă de prima lentilă cu distanţa focală f_1=0,5 cm se aşază a doua lentilă cu distanţa focală f_2=2 cm la d=2,5 cm de aceasta şi în spatele ei ca în figură.

21. Dacă se pune la punct microscopul pentru observarea feţei superioare a lamei (punctul A), când observatorul priveşte faţa inferioară a lamei (punctul O), măsuţa trebuie deplasată în jos până în punctul unde se formează prin refracţie datorită lamei imaginea feţei inferioare. Aceată imagine virtuală I este preluată direct de ochi. Din desen:



$AI = \frac{AB}{tg\, i} = h\frac{tg\, r}{tg\, i}$. Cum unghiurile sunt mici $tgi \approx \sin i$ şi $tgr \approx \sin r$ atunci $AI = h\frac{\sin r}{\sin i}$ şi conform legii refracţiei $\sin i = n \sin r$ obţinem $AI = \frac{h}{n}$. Indicele de refracţie al lamei este $n = \frac{h}{D} = 1{,}43$.

22.a. Deoarece punerea la punct se face pentru infinit, imaginea formată de obiectiv se află în focarul obiect al lentilei ocular. Prin definiţie grosismentul $G = \frac{tg\,\alpha_2}{tg\,\alpha_1}$ unde α_2 este unghiul sub care se vede observatorul prin instrument obiectul (de fapt imaginea) astfel că $tg\alpha_2 = -\frac{y_1'}{f_2}$, iar α_1 este unghiul sub care se vede observatorul obiectul cu ochiul liber, dacă obiectul se află la distanţa optimă de citire,



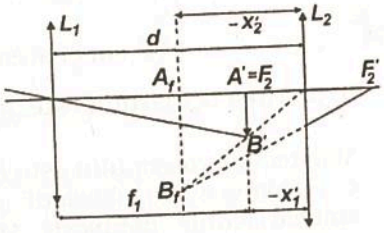
astfel că $tg\alpha_1 = \frac{y_1}{d_0}$, unde d_0=25 cm. Obţinem pentru grosisment: $G = -\frac{y_1'}{f_2}\frac{d_0}{y_1}$.

Lentila obiectiv formează pentru obiectul real o imagine reală ca în figură. Utilizând asemănarea triunghiurilor obţinem: $\frac{e}{f_1} = -\frac{y_1'}{y_1} \Rightarrow G = \frac{ed_0}{f_1 f_2} = 300$.

b. Prin definiţie puterea microscopului este $P = \frac{tg\alpha_2}{y_1} = -\frac{y_1'}{y_1 f_2} = \frac{e}{f_1 f_2} = 1200\ \text{m}^{-1}$

c. Din desen lungimea tubului microscopului este $\ell = f_1 + e + f_2 = 14{,}5$ cm.

23.a. O lunetă astronomică formează imagini virtuale ale obiectelor foarte îndepărtate, adică aflate din punct de vedere fizic la infinit. Cum $x_1 \to -\infty$, pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ obținem $x_2 = f_1 = 80$ cm. Imaginea obiectelor aflate la infinit se formează în focarul imagine al lentilei obiectiv. Lentila ocular va forma pentru imaginea reală a lentilei obiectiv o imagine virtuală, care va fi preluată de ochi. Dacă imaginea virtuală se formează la distanța optimă de citire atunci $x_2' = -d_0 = -25$ cm astfel că $x_1' = \frac{f_2 x_2'}{f_2 - x_2'} = -\frac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} - 7{,}14$ cm. Distanța dintre cele



două lentile este: $d = f_1 - x_1' = f_1 + \frac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} = 87{,}14$ cm. Dacă ochiul privește neacomodat înseamnă că imaginea virtuală formată de ocular se află la infinit. Cum $x_2' \to -\infty \Rightarrow x_1' = -f_2 = -10$ cm și distanța dintre cele două lentile este $d' = f_1 - x_1' = f_1 + f_2 = 90$ cm. Lungimea minimă a lunetei se obține când ochiul privește imaginea formată de lunetă la distanța optimă de citire, iar lungimea maximă a lunetei se obține când imaginea formată de lunetă este la infinit, deci când luneta este un sistem afocal. În ambele situații, ochiul se află lângă ocular.

b. În cazul miopului:

$d'_{min} = f_1 - \frac{x_2 f_2}{f_2 - x_2} = f_1 + \frac{d_1 f_2}{f_2 + d_1} = 86{,}15$ cm, deoarece $x_2 = -d_1 = -16$ cm și

$d'_{max} = f_1 - \frac{x_2' \cdot f_2}{f_2 - x'_2} = f_1 + \frac{d_2 f_2}{f_2 + d_2} = 89{,}52$ cm, deoarece $x_2' = -d_2 = -200$ cm.

c. În cazul unui ochi normal pentru a vedea imaginea formată de lunetă, ocularul trebuie să se deplaseze în raport cu obiectivul pe distanța:

$d = d_{max} - d_{min} = \frac{f_2^2}{f_2 + d_0} = 2{,}86$ cm, iar în cazul unui ochi miop cu distanța:

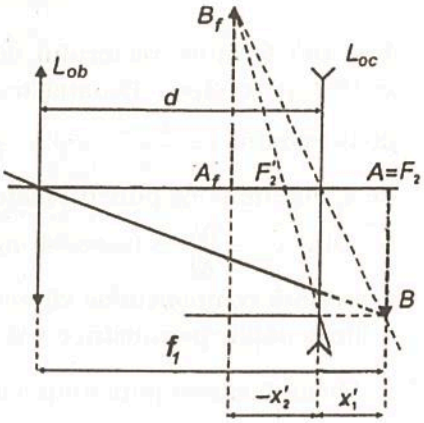
$d = d'_{max} - d'_{min} = 3{,}37$ cm.

24. Dacă cu luneta se observă Luna, imaginea acesteia se formează în planul focal imagine al lentilei obiectiv, deoarece $x_1 \to -\infty$ și $x_2 = f_1 = 80$ cm. Această imagine joacă rol de obiect pentru lentila ocular. Cum ochiul privește fără acomodare $x_2' \to -\infty$ și deci $x_1' = -f_2$. Prin urmare lungimea lunetei este $\ell = f_1 - x_1' = f_1 + f_2$, adică luneta este un sistem afocal.

Deoarece se observă cu luneta un obiect, obiectivul va forma imaginea acestuia la $x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} = 86{,}95$ cm de lentilă. Deoarece ochiul privește neacomodat, lungimea lunetei este: $\ell' = x_2 + f_2$ Ocularul lunetei trebuie depărtat de obiectiv cu

$\Delta\ell = \ell' - \ell = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} - f_1 = -\frac{f_1^2}{f_1 + x_1} = 6{,}41$ mm.

25. Cu binoclul de teatru se observă imagini foarte îndepărtate, astfel că $x_1 \to -\infty$ şi lentila obiectiv va forma o imagine reală în planul ei focal imagine, deci la $x_2 = f_1 = 8$ cm. Această imagine este obiect virtual pentru lentila divergentă, ocular, iar lentila ocular va forma o imagine virtuală şi mărită a obiectului iniţial. Această imagine finală este observată cu ochiul liber lipit de ocular. Dacă imaginea se formează la distanţă optimă de citire $x_2=-d_0=-25$ cm atunci $x_1 = \frac{f_2 \cdot x_2}{f_2 - x_2} = -4{,}76$ cm.



Lungimea binoclului este: $d_{min} = f_1 - x_1 = f_1 + \frac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} = 3{,}24$ cm. Dacă imaginea se formează la infinit, adică ochiul priveşte neacomodat, $x_2 \to -\infty$ atunci $x_1 = -f_2 = -4$ cm, iar lungimea binoclului este $d_{max} = f_1 + f_2 = 4$ cm. Distanţa dintre obiectiv şi ocular este cuprinsă între 3,24 cm şi 4 cm.

2.1. Mişcarea mecanică

1.a. Din formula vectorului de poziţie $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, prin identificare obţinem $x=4t-2$ şi $y=-3t+1$. Ecuaţia traiectoriei se obţine eliminând timpul t din cele două ecuaţii: $t = \frac{x+2}{4} \Rightarrow y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow$ deoarece y este funcţie de gradul întâi de x, înseamnă că punctul material are o mişcare rectilinie şi uniformă.

b. Din $v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{mx}=v_x=4$ m/s şi din $v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \Rightarrow v_{my}=v_y=-3$ m/s. Acestea reprezintă componentele vitezei pe axele de coordonate (coeficienţii din faţa lui t din ecuaţiile parametrice x şi y), astfel că $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$

c. Modulul vitezei punctului material este $v = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}} = 5$ m/s.

d. $a = 0$, deoarece vectorul viteză este constant ($\vec{v}$ =ct).

2.a. Ecuaţiile parametrice ale mişcării pe axele de coordonate sunt $x=t^2/2$ şi $y=t$, astfel că eliminând timpul din ecuaţii obţinem $y = \sqrt{2x}$

b. Din $v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{2\Delta t} = t - \frac{\Delta t}{2}$. Viteza instantanee se obţine din $\Delta t \to 0 \Rightarrow v_x=t$. Din $v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t) - t}{\Delta t} = 1$ m/s $\Rightarrow v_y=1$ m/s, astfel $v = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}} = \sqrt{t^2+1}$. Când $t=2$ s obţinem $v=2{,}236$ m/s

c. Cum $a_{mx} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \Rightarrow a_{mx}=a_x=1$ m/s² iar $a_y=a_{my}=0$, deoarece v_y=ct, atunci punctul material are o mişcare uniform accelerată cu acceleraţia momentană $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ =1 m/s² indiferent de intervalul de timp

3.a. Din $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, prin identificare obţinem $x=1$ m/s, $y=2t$ şi $z=t^2$. Cum $v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{mx}=v_x=0$ m/s, $v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{2(t+\Delta t) - 2t}{\Delta t}$ =2 m/s şi din $v_{mz} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = 2t + \Delta t$ când $\Delta t \to 0$ obţinem $v_z=2t$. Astfel vectorul viteză este $\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = 2\vec{j} + 2t\vec{k}$

b. La momentul t_1=2 s, v_z=4 m/s, astfel $v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \approx 4{,}47$ m/s

c. Deoarece $v_x=0 \Rightarrow a_x=0$, iar $a_{my} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = 0 \Rightarrow a_y=0$. Cum $a_{mz} = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$ =2 m/s² $\Rightarrow$ $a_{mz}=a_z=2$ m/s², obţinem $\vec{a}(t) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = 2\vec{k}$

4.a. Eliminăm timpul t din cele două ecuaţii pentru a determina ecuaţia traiectoriei. Astfel $t = \frac{x+4}{3} \Rightarrow y = \frac{20-x}{3} \Rightarrow$ punctul material are o mişcare rectilinie şi uniformă.

b. Componentele vectorului viteză pe axele de coordonate sunt coeficienții din fața lui t din ecuațiile parametrice x și y, astfel v_x=3 m/s și v_y=−1 m/s $\Rightarrow$ vectorul viteză al punctului material $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

c. Modulul vitezei punctului material este $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ =3,16 m/s

5.a. În intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$=1 s variația coordonatei pe axa Ox este $\Delta x = x_2 - x_1$=2 m iar pe axa Oy variația coordonatei este $\Delta y = y_2 - y_1 = (2x_2+1) - (2x_1+1)$ astfel $\Delta y = 2\Delta x$=4 m $\Rightarrow$ deplasarea mobilului este $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ =4,47 m

b. Viteza medie a punctului material este $v_m = d/\Delta t$=4,47 m/s

c. Deoarece mobilul se mișcă uniform pe axele de coordonate componentele vectorului viteză pe axele de coordonate sunt $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$=2 m/s și $v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$=4 m/s, astfel că vectorului viteză este $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$

d. Deoarece $\vec{v}$ =ct vectorul accelerație este $\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t$=0

6.a. Modulul vitezei punctului material este $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ =5 m/s iar vectorul viteză este $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$

b. Vectorul de poziție este $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t = 2\vec{i} - \vec{j} + \left(-4\vec{i} + 3\vec{j}\right)\cdot t = (2-4t)\vec{i} + (3t-1)\vec{j}$

c. Cum $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow x = 2-4t$ și $y = 3t-1$. Pentru t_1=2 s, x_1=−6 m și y_1=5 m, iar pentru t_2=4 s, x_2=−14 m și y_2=11 m astfel că $\Delta x = x_2 - x_1$=−8 m și $\Delta y = y_2 - y_1$=6 m. Deplasarea mobilului este $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 10$ m

d. Ecuația traiectoriei se obține eliminând timpul din cele două ecuații parametrice x și $y \Rightarrow t = \frac{2-x}{4} \Rightarrow y = \frac{2-3x}{4}$.

7.a. Din grafic coordonatele mobilului atunci când acesta se află în punctul C sunt x_C=4 m și y_C=−2 m

b. $r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \approx 2{,}82$ m, deoarece x_A=−2 m și y_A=2 m

c. Vectorului viteză medie este $\vec{v}_{m\,AD} = \frac{\Delta\vec{r}_{AD}}{\Delta t}$.

Cum $\Delta r_{AD} = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$ deoarece x_D=8 m și y_D=−1 m $\Rightarrow$ $\Delta r_{AD} \approx 10{,}44$ m și v_{mAD}=0,174 m/s

8.a. Conform definiției vitezei medii: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$.

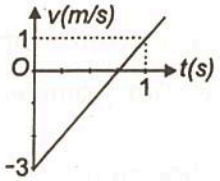
Cum $x(t+\Delta t) = 2(t+\Delta t)^2 - 3(t+\Delta t) + 5 \Rightarrow$

$\Delta x = 2(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - 3(t+\Delta t) + 5 - (2t^2 - 3t + 5) \Rightarrow$

$\Delta x = 4t\Delta t + 2\Delta t^2 - 3\Delta t \Rightarrow v_m = 4t + 2\Delta t - 3$

Viteza instantanee se obține când $\Delta t \to 0 \Rightarrow v = 4t - 3$

b. Pentru t_1=0 s, v_1=−3 m/s și pentru t_2=1 s, v_2=1 m/s. Reprezentarea grafică a legii vitezei este redată în figura alăturată.



c. Conform definiției accelerației medii:

$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow$

$\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t) = 4(t+\Delta t) - 3 - (4t-3) = 4\Delta t \Rightarrow a_m = a = 4\text{m/s}^2 \Rightarrow$ mişcarea mobilului este uniform accelerată.

9.a. Conform definiţiei accelerației medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v = v_0 + at \Rightarrow$ $v = 10 - 2t$ deoarece a=2 m/s², astfel că la t_1=3 s $\Rightarrow v_1$=4 m/s

b. Când mobilul de opreşte v=0 $\Rightarrow t_{op}$=5 s

c. Deoarece viteza depinde liniar de timp, valoarea medie a vitezei se calculează prin media aritmetică a valorilor de la capetele intervalului studiat astfel că $v_m=(v_0+0)/2=v_0/2$=5 m/s

d. Distanţa parcursă până la oprire se calculează cu relaţia $d=v_m t_{op}$=25 m

10.a. Conform definiţiei accelerației medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{\Delta t}$ =2,5 m/s², deoarece v=0 m/s şi $\Delta v = v$.

b. Viteza medie este $v_m=(v_i+v_f)/2$=12,5 m/s

c. Distanţa parcursă de mobil este $d=v_m\Delta t$=125 m

11.a. Conform definiţiei accelerației medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v}{\Delta t} = -\frac{v}{\Delta t} = -1$ m/s².

Semnul "–" arată că mişcarea mişcarea maşinii este frânată.

b. Viteza medie este $v_m=(v_i+v_f)/2=v/2$=7,5 m/s

c. Distanţa parcursă până la oprire $d=v_m\Delta t$=125 m

12.a. Conform definiţiei accelerației medii şi cum $a_m = a$, deoarece viteza creşte uniform cu 1 m/s în fiecare secundă, atunci $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 1$ m/s²

b. Deoarece depăşirea durează Δt, atunci din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} \Rightarrow v_f = v_0 + a\Delta t$.

După Δt=20 s $\Rightarrow v_f$=40 m/s, astfel că viteza medie este $v_m=(v_0+v_f)/2$=30 m/s

c. Distanţa parcursă de mobil este $d=v_m\Delta t$=600 m

13.a. Conform definiţiei accelerației medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t}$ =–0.1 m/s²

b. Viteza medie este $v_m=(v+v_0)/2$=1,5 m/s

c. Distanţa parcursă până la oprire $d=v_m\Delta t$=15 m

d. Din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t'} = \frac{0 - v_o}{\Delta t'} = -\frac{v_0}{\Delta t'} \Rightarrow \Delta t' = -\frac{v_0}{a}$ =20 s, deoarece v=0 m/s şi $\Delta v = -v_0 \Rightarrow$ distanţa totală parcursă de biciclist până la oprire este $d = v'_m \Delta t'$, unde $v'_m = v_0/2 \Rightarrow d = -v_0^2/2a$ =20 m.

14. a. Din definiţie viteza medie a celui mai rapid ciclist este $v_m = \frac{D}{\Delta t}$ =12,5 m/s, deoarece Δt=200 min

b. Din definiţia accelerației $a = \frac{\Delta v}{\Delta t'} = \frac{v - v_0}{\Delta t'}$. Deoarece $d_2 = v'_m \Delta t' = \frac{v_0 + v}{2}\Delta t'$

obţinem $a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d_2}$ =48·10⁻³ m/s²

c. Al doilea ciclist a mers distanța d_1-d_2 uniform cu viteza v_0, iar restul uniform accelerat, astfel că timpul total de mișcare este $\Delta t_t = \frac{d_1 - d_2}{v_0} + \frac{2d_2}{v + v_0}$=542 s. Ora la care ultimul ciclist a trecut linia de sosire este 12:29:02.

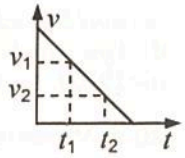
15.a. Momentul de timp la care corpul se oprește se obține din $v=0 \Rightarrow t_{op}=3$s

b. Din $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t} \Rightarrow v = v_0 + at$, iar din identificarea coeficienților accelerația instantanee este $a=-4$ m/s² și viteza inițială este $v_0=12$ m/s

c. Distanța parcursă până la oprire $d=v_m t_{op}$, unde $v_m=(v_0+0)/2$, astfel că $d=v_0 t_{op}/2=18$ m

16.a. Conform definiției $a=\Delta v/\Delta t=-2$ m/s² $\Rightarrow$ mișcarea mobilului este uniform încetinită, deoarece $a<0$ și $v_0>0$.

b. Din $a = \Delta v/\Delta t = (v - v_0)/t \Rightarrow v = v_0 + at = 10 - 2t$. Când $t_1=2$ s $\Rightarrow v_1=6$ m/s, iar când $t_2=4$ s $\Rightarrow v_2=2$ m/s. Spațiul parcurs de mobil reprezintă fizic, aria cuprinsă între curba vitezei, axa timpului și cele două ordonate duse prin punctele cu t_1 și t_2. Această figură geometrică este un trapez, astfel că: $d = A = \frac{(v_1 + v_2)(t_2 - t_1)}{2}$=8 m.



c. Viteza medie este $v_m=(v_1+v_2)/2=4$ m/s

d. Din grafic, timpul până la oprire este $t_{op}=5$ s, deoarece $v=0$ și spațiul până la oprire reprezintă aria triunghiului $s_{op}=A_{triunghi}=25$ m

17.a. Când $t\in(0,2)$s $v=2$ m/s=ct, astfel accelerația este $a_1=0$. Când $t\in(2, 4)$s, accelerația este $a_2=\Delta v/\Delta t=1$ m/s², iar când $t\in(4,8)$s accelerația este $a_3=\Delta v/\Delta t=-0,75$ m/s². Modulului maxim al accelerației este $a=1$ m/s²

b. Distanța parcursă în intervalul $t\in(0, 4)$s reprezintă aria cuprinsă între graficul vitezei, axa timpului și ordonata construită la $t=4$ s $\Rightarrow d=10$ m

c. Distanța parcursă în intervalul $t\in(0, 8)$s este aria cuprinsă cuprinsă între graficul vitezei, axa timpului și ordonata construită la $t=4$ s $\Rightarrow d_t=20$ m, astfel că viteza medie a corpului este $v_m=d_t/\Delta t=2,5$ m/s

18.a. Calculăm spațiul parcurs de mobil în primele trei secunde de la începerea mișcării. Acest spațiu este aria de sub curba vitezei și axa timpului, astfel că $s_3=25$ m. Viteza medie este $v_m=s_3/\Delta t_3=8,33$ m/s, cu $\Delta t=$ s

b. Calculăm accelerațiile pe fiecare porțiune distinctă de mișcare. Deoarece $a_1=\Delta v_1/\Delta t_1=10$ m/s² $\Rightarrow$ în intervalul de timp $t\in(0, 1)$s mobilul are o mișcare uniform accelerată. În intervalul de timp $t\in(1, 3)$s, $a_2=\Delta v_2/\Delta t_2=0 \Rightarrow$ mobilul se mișcă uniform. În intervalul de timp $t\in(3, 7)$s, $a_3=\Delta v_3/\Delta t_3=-4$ m/s² $\Rightarrow$ mobilul are o mișcare uniform încetinită. În intervalul de timp $t\in 7, 8)$s, $a_4=\Delta v_4/\Delta t_4=4$ m/s² $\Rightarrow$ mobilul se mișcă uniform accelerat. Modulul maxim al accelerației se obține pe prima porțiune de mișcare când accelerația este $a_1=10$ m/s²

c. Prin definiție viteza medie este $v_m=\Delta x/\Delta t$. Calculăm coordonata finală x_f, știind că cea inițială este nulă ($x_0=0$). Din graficul vitezei observăm că la un anumit moment $v=0$, iar apoi $v<0$, ceea ce înseamnă că mobilul se întoarce. Pe porțiunea când $t\in 3,7)$s, din $a_3=\Delta v_3/\Delta t_3$, legea vitezei este $v=10-4(t-3)$ și când $v=0 \Rightarrow t_{op}=5,5$ s. Calculăm coordonata maximă când mobilul se oprește cu aria trapezului $x_{max}=37,5$ m. Calculăm spațiul parcurs de mobil în intervalul de timp de la 5,5 s până la 8 s, cu aria cuprinsă între curba vitezei și axa

timpului, astfel că s=8,5 m. După ce viteza devine nulă mobilul se întoarce pe distanța 8,5 m, astfel coordonata finală este $x_f=x_{max}$=29 m $\Rightarrow v_m$=3,625 m/s

d. Viteza în modul medie se calculează împărțind distanța totală parcursă de mobil în intervalul de timp $t\in(0,8)$s $d=x_{max}+s$=46 m la valoarea intervalului de timp Δt=8 s și obținem $|v_m|=d/\Delta t=5{,}75$ m/s. Observăm că există o diferență între viteza medie și viteza în modul medie, deoarece pe parcursul mișcării mobilul se oprește și se întoarce.

19.a. În intervalul $t\in(0,1)$s deoarece viteza crește liniar cu timpul, viteza medie este media aritmetică a valorilor de la extremitățile intervalului, astfel că $v_m=(v_0+v_1)/2$=1 m/s

b. Din definiție viteza medie este $v_m=\Delta x/\Delta t$, unde $\Delta x=x_f-x_0$. Deoarece în intervalul de timp de la 0 la 6 s, $v>0$, mobilul se deplasează în sensul pozitiv al axei de coordonate $\Rightarrow x_f=s$, unde s este spațiul parcurs de mobil și reprezintă aria cuprinsă între curba vitezei, axa timpului și ordonata construită la t=6 s. Obținem x_f=12 m $\Rightarrow v_m$=2 m/s, deoarece Δt=6 s

c. Deoarece v_4=4 m/s când t_4=4 s și v_6=0 m/s când t_6=6 s, atunci $a_4=\Delta v_4/\Delta t_4$=−2m/s^2 $\Rightarrow$ mișcarea mobilului este uniform încetinită

d. Din $a_4=\Delta v_4/\Delta t_4$ obținem $v_4=v_{04}+a_4(t-t_4)$. Din v_{04}=4 m/s și t_4=4 s obținem v_4=12−2t. La momentul t_7=7 s, viteza mobilului va fi v_7=−2 m/s

20.a. Viteza maximă atinsă de metrou se obține la momentul t_a=18 s, astfel că din legea accelerației $a_1=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v}{t}\Rightarrow v_m=a_1t_a$=18 m/s, deoarece a_1=1 m/s^2

b. Durata totală a călătoriei este $t=t_a+t_u+t_i$, unde t_u reprezintă timpul cât metroul se mișcă uniform, iat t_i reprezintă timpul cât metroul se mișcă încetinit. Aflăm din legea vitezei $v=v_m+a_3(t-t_{03})=18-0{,}5(t-54)$ și din condiția de oprire v=0, timpul după care metroul se oprește. Astfel obținem t_i=36 s și t_t=90 s.

c. Distanța totală parcursă de metrou între cele două stații este $d_t=d_1+d_2+d_3$, unde $d_1=v_mt_a/2$=162 m reprezintă distanța parcursă de metrou la accelerare, $d_2=v_mt_u$=648 m reprezintă distanța parcursă de metrou când acesta se mișcă uniform și $d_3=v_mt_i/2$=324 m reprezintă distanța parcursă de metrou când frânează. Astfel obținem d_t=1134 m.

d. Viteza medie a metroului pe întreaga durată a călătoriei este $v=\frac{d}{t_1}$=12,6 m/s

2.1.1. Mișcarea rectilinie și uniformă a punctului material

1. Sonarul emite o undă sonoră care se propagă rectiliniu cu viteza v spre obiect, se lovește de acesta și se întoarce pe aceeași direcție. Intervalul de timp detectat între momentul emiterii și momentul recepției este Δt, iar distanța parcursă dus-întors este $2d$, astfel că $\Delta t=2d/v\Rightarrow d=v\Delta t/2$=7,5 km.

2. Undele radio se propagă de la emițător spre obiectul de detectat, se reflectă, se întorc pe aceeași direcție și apoi sunt recepționate. Distanța d de la sursa de unde la obiect este parcursă dus – întors cu viteza c astfel că $2d=c\cdot\Delta t\Rightarrow d=c\cdot\Delta t/2$ =18·10^6 km

3.a. Deoarece elevul aude tunetul după Δt, iar sunetul se propagă prin aer cu viteza v, locul unde a fulgerat este la distanța $d=v\Delta t$=1020 m.

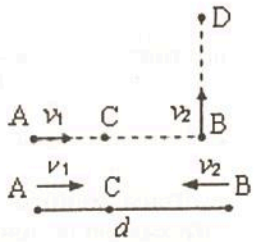
b. Dacă apoi elevul aude tunetul după $\Delta t'$, distanța la care a fulgerat este $d'=v\Delta t'$=680 m $\Rightarrow$ centrul furtunii se apropie de locul unde se află elevul.

4.a. Deoarece distanța d este parcursă în intervalul de timp t, atunci $d=vt$, obținem viteza autoturismului $v=d/t=30$ m/s=108 km/h. Cum în afara localităților viteza legală este 90 km/h, automobilul a depășit viteza legală maximă admisă.

b. Prin definiție viteza medie este $v_m = \frac{AB}{t} = \frac{AB}{t_{AC}+t_{CB}}$. Cum $t_{AC} = \frac{AC}{v_1} = \frac{AB}{2v_1}$ și $t_{CB} = \frac{CB}{v_2} = \frac{AB}{2v_2}$, deoarece $AC = CB = \frac{AB}{2}$. Obținem $v_m = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} \approx 22{,}22$ m/s.

c. Aplicăm definiția vitezei medii $v_m = \frac{d}{t} = \frac{d}{t_1+t_2+t_3}$ unde $t_1 = \frac{d}{8v}$, deoarece prima jumătate de drum $\frac{d}{2}$ a fost parcursă cu viteza $4v$; $t_2 = \frac{d}{8v}$, deoarece următorul sfert de drum $\frac{d}{4}$ a fost parcurs cu viteza $2v$ și $t_3 = \frac{d}{4v}$, deoarece ultimul sfert de drum $\frac{d}{4}$ a fost parcurs cu viteza v. Obținem $v_m = 2v$.

5.a. Aflăm distanțele parcurse de cele două mobile în timpul t: $AC = v_1t$ și $BD = v_2t$, astfel că din desen $CD = \sqrt{(AB-v_1t)^2+(v_2t)^2} \approx 94{,}25$ km.



b. Din desen $d = AC + CB$. Deoarece mișcările sunt rectilinii și uniforme $AC = v_1t$ și $CB = v_2t \Rightarrow d=(v_1+v_2)t \Rightarrow t=d/(v_1+v_2)$ reprezintă timpul după care se întâlnesc automobilele. Astfel $AC=v_1d/(v_1+v_2) \approx 44{,}44$ km

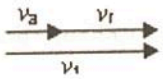
1. c. Alegem origine de timp momentul când pornește primul automobil. Astfel $d = v_1t \Rightarrow t = \frac{d}{v_1}$ reprezintă timpul parcurs de primul mobil din punctul de plecare A până în punctul de sosire B. Al doilea mobil pornește mai târziu cu Δt, astfel că el parcurge aceeași distanță d, în intervalul de timp $t-\Delta t$. Atunci: $d = v_2(t-\Delta t) \Rightarrow \Delta t = \frac{v_2t-d}{v_2} = t - \frac{d}{v_2} = \frac{d}{v_1} - \frac{d}{v_2} = \frac{d(v_2-v_1)}{v_1v_2} = 1000$ s.

6.a. În cazul a, sunetul care se propagă spre zid, se reflectă pe acesta în punctul C și ajunge în punctul B, astfel că acesta ajunge din A în B în $t' = \frac{AC+CB}{c} = \frac{2AC}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{d^2+\frac{D^2}{4}}$. Sunetul se poate propaga direct de la A la B, astfel că $t = D/c$. Intervalul de timp dintre momentele recepționării sunetelor de către B este $\Delta t = t'-t = \frac{1}{c}\left(\sqrt{4d^2+D^2}-D\right) \approx 0{,}235$ s

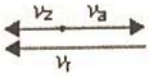
b. În cazul b, sunetul care se propagă spre zid, se reflectă pe acesta în punctul C și ajunge în punctul B, astfel că acesta ajunge din A în B în $t' = \frac{AC+CB}{c} = \frac{D+2d}{c}$. Sunetul se poate propaga direct de la A la B, astfel că $t = D/c$. Intervalul de timp dintre momentele recepționării sunetelor de către B este $\Delta t = t'-t = \frac{2d}{c} \approx 0{,}47$ s.

c. Sunetul emis din A ajunge în B după $t = x/c$. Dar acest sunet se poate reflecta pe zid, astfel că ajunge în B după $t' = \frac{AC+CB}{c} = \frac{2d-x}{c}$. Intervalul de timp care separă sosirea sunetelor în B reprezintă durata unui semnal lung emis de copilul din A, astfel că $\tau = t' - t = \frac{2(d-x)}{c} \approx 0{,}235$ s

7.a. Corpul de studiat este şalupa. Sistemul de referinţă mobil este apa, iar cel fix solul. Notăm cu: v_a–viteza apei faţă de sol (viteză de transport) şi cu v_r–viteza şalupei faţă de apă (viteză relativă).



Studiem mişcarea şalupei în sensul curgerii râului. v_1 este viteza absolută a şalupei faţă de sol. Cum $\vec{v}_1 = \vec{v}_a + \vec{v}_r$ şi din desen $v_1 = v_a + v_r$, iar cum $v_1 = \frac{d}{t_1}$ obţinem $v_a + v_r = \frac{d}{t_1}$.



Studiem mişcarea şalupei în sens contrar sensului de curgere al râului, v_2 fiind în acest caz viteza şalupei faţă de sol.

Cum $\vec{v}_2 = \vec{v}_a + \vec{v}_r$ şi din desen $v_2 = v_r - v_a$, iar cum $v_2 = \frac{d}{t_2}$ obţinem $v_r - v_a = \frac{d}{t_2}$. Prin scăderea relaţiilor obţinem: $v_a = \frac{d(t_2 - t_1)}{2t_2t_1}$ =5 km/h

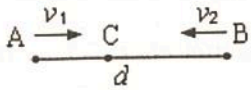
b. Prin adunarea relaţiilor obţinem: $v_r = \frac{d(t_2 + t_1)}{2t_2t_1}$ =15 km/h

c. Dacă motorul şalupei nu funcţionează atunci aceasta se deplasează cu vitteza apei v_a, astel că $t = d/v_a$=16 h

8.a. Studiem mişcarea şalupei de la A la B, adică în sens contrar curgerii râului, astfel că din grafic $v_1 = d/t_1 = 10$ km/h. Cum $\vec{v}_1 = \vec{v}_a + \vec{v}_r$ şi scalar $v_1 = v_r - v_a$, unde v_r este viteza şalupei faţă de apă şi v_a este viteza apei faţă de sol, obţinem $v_r - v_a = v_1$. Studiem mişcarea şalupei de la B la A, adică în sensul curgerii râului, astfel că din grafic $v_2 = d/t_2 = 18$ km/h. Cum $\vec{v}_2 = \vec{v}_a + \vec{v}_r$ şi scalar $v_2 = v_r + v_a$, obţinem $v_r + v_a = v_2$. Prin adunarea relaţiilor obţinem: $v_r = (v_2 + v_1)/2$=14 km/h

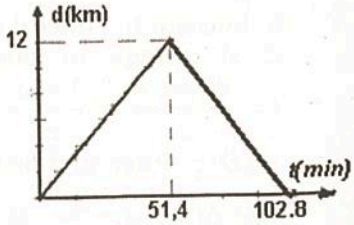
b. Dacă şalupa nu ar staţiona în B atunci durata deplasării şalupei pe drumul A-B-A este Δt=112 min, deoarece şalupa staţioneată 28 min.

c. Pentru şalupa care porneşte din A: $AC = v_1 t$ şi pentru cea care porneşte din B : $BC = v_2 t$.



Deoarece $d = AC + BC = (v_1 + v_2)t = 2v_r t$ obţinem timpul după care şalupele se întâlnesc: $t = d/(2v_r)$. Astfel distanţa faţă de portul B la care se întâlnesc cele două şalupe este $BC = v_2 d/(2v_r)$=7,71 km

d. Dacă apa ar fi stătătoare şi şalupa nu ar staţiona în B, atunci aceata s-ar deplasa cu viteza v_r astfel că timpul de dus este egal cu cel de întors şi este $t_{dus} = d/v_r$=51,428 s.



Reprezentarea grafică a dependenţei de timp a coordonatei d a şalupei de timp la deplasările $A \to B$ şi $B \to A$ este redată în figura alăturată.

9.a. Pe scara imobilă timpul de urcare al omului este $t_2=\ell/v_2$, unde v_2 este viteza omului față de scară, adică viteza relativă. Obținem $v_2=\ell/t_2=0{,}714$ m/s=2,57 km/h

b. Corpul de studiat este omul, sistemul mobil este scara iar sistemul fix este solul. Notăm cu v_1 viteza scării față de sol adică viteză de transport. Inițial față de un observator aflat pe sol omul se deplasează cu viteza absolută $\vec{v}_{abs}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$, iar scalar $v_{abs}=v_1+v_2$, astfel că $t_1=\ell/(v_1+v_2)$. Din cele $(v_1+v_2)=\dfrac{\ell}{t_1}$ și $v_2=\dfrac{\ell}{t_2}$ obținem $v_1=\dfrac{\ell}{t_1}-\dfrac{\ell}{t_2}=\dfrac{\ell(t_2-t_1)}{t_1t_2}\approx 0{,}286\ \text{m/s}\approx 1{,}03\ \text{km/h}$

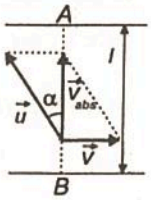
c. Aflăm timpul în care este urcat omul de scară, dacă acesta nu se deplasează pe scară: $t_3=\dfrac{\ell}{v_1}=\dfrac{t_1t_2}{t_2-t_1}=35$ s

10.a. Studiem mișcarea ceferistului în sensul mișcării platformei. Notăm cu v_1 viteza ceferistului față de sol, astfel că vectorial $\vec{v}_1=\vec{v}_0+\vec{v}$ și scalar $v_1=v_0+v=12$ m/s. Studiem mișcarea ceferistului în sensul contrar mișcării platformei. Notăm cu v_2 viteza ceferistului față de sol, astfel că vectorial $\vec{v}_2=\vec{v}_0+\vec{v}$ și scalar $v_2=v_0-v=10$ m/s.

b. Timpul în care ceferistul revine la capătul platformei de unde a plecat este $t=t_{dus}+t_{\hat{i}ntors}=\dfrac{2\ell}{v}=14$ s

c. Distanța parcursă de ceferist față de sol în situația de la punctul b. este $d=v_1t_{dus}+v_2t_{\hat{i}ntors}=(v_1+v_2)\dfrac{\ell}{v}=\dfrac{2v_0\ell}{v}=168$ m

11.a. Corpul studiat este vâslașul, sistemul mobil este apa, iar sistemul fix este solul. Din datele problemei v este viteza de transport, iar u este viteza relativă. Pentru a ajunge pe malul opus pe drumul cel mai scurt, vâslașul orientează barca ca în figură.

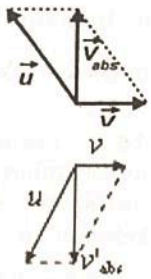


Cum $\vec{v}_{abs}=\vec{u}+\vec{v}$, din desen: $\sin\alpha=\dfrac{u}{v}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\alpha\cong 37°$

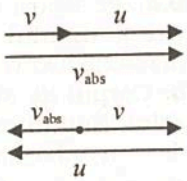
b. Deoarece viteza vâslașului față de sol este $v_{abs}=\sqrt{u^2-v^2}=$ 0,4m/s, atunci timpul necesar pentru traversarea râului este $t_{AB}=\ell/v_{abs}=125$ s

c. Dacă viteza vâslașului se păstrează timpul necesar pentru traversarea unui lac cu aceeași lățime este $t=\ell/u=100$ s

12.a. Corpul studiat este avionul, sistemul mobil este vântul, iar sistemul fix este solul. Din datele problemei v este viteza de transport iar u este viteza relativă. Studiem cazul în care vântul suflă perpendicular pe direcția parcursă de avion. Față de sol, avionul se deplasează cu viteza absolută $\vec{v}_{abs}$. Conform desenului $v_{abs}=\sqrt{u^2-v^2}$, astfel că $t_{dus}=\dfrac{d}{v_{abs}}=\dfrac{d}{\sqrt{u^2-v^2}}$. La întors din desen $v'_{abs}=\sqrt{u^2-v^2}$ și obținem $t'_{\hat{i}ntors}=\dfrac{d}{v'_{abs}}=\dfrac{d}{\sqrt{u^2-v^2}}$. Timpul total de zbor este $t=t_{dus}+t_{\hat{i}ntors}=\dfrac{2d}{\sqrt{u^2-v^2}}=2010\ \text{s}\approx 33{,}5$ min.



b. Studiem cazul în care vântul suflă pe direcția de zbor a avionului. Presupunem că la dus vântul suflă în sensul înaintării avionului. Cum $\vec{v}_{abs} = \vec{u} + \vec{v}$, din desen $v_{abs} = u + v$, este viteza cu care avionul se deplasează față de sol, astfel că timpul de dus este $t_{dus} = \dfrac{d}{u+v}$. La întors, vântul suflă în sens contrar sensului de zbor al avionului. În acest caz viteza cu care se deplasează avionul față de sol este $v'_{abs} = u - v$, iar timpul de întoarcere este $t_{\text{întors}} = \dfrac{d}{u-v}$.

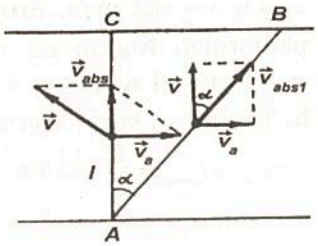


Obținem: $t_{zbor} = t_{dus} + t_{\text{întors}} = \dfrac{d}{u+v} + \dfrac{d}{u-v} = \dfrac{2du}{u^2 - v^2} \approx 33{,}67$ min.

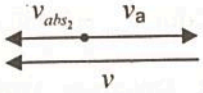
c. Dacă vântul nu suflă viteza cu care se deplasează avionul față de sol este u, atât la dus cât și la întors, astfel că $t_{zbor} = \dfrac{2d}{u} = 2000$ s $\approx$ =33,33 min.

13.a. Studiem vâslașul care traversează râul perpendicular pe maluri. Viteza de transport este v_a, iar viteza relativă este v. Viteza absolută cu care se deplasează vâslașul față de mal este $\vec{v}_{abs} = \vec{v} + \vec{v}_a$. Iar scalar din desen: $v_{abs} = \sqrt{v^2 - v_a^{\,2}}$. Timpul necesar primului vâslaș să treacă râul este

$$t_1 = \frac{\ell}{\sqrt{v^2 - v_a^{\,2}}} \approx 11{,}56 \text{ s}$$



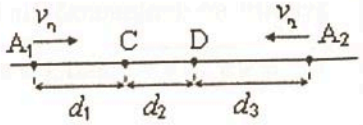
b. Studiem mișcarea celui de-al doilea vâslaș. Deoarece vâslașul orientează barca perpendicular pe maluri, el se va deplasa pe direcția AB și apoi el trebuie să se întoarcă de la B la C. Astfel timpul total de mișcare este $t_2 = t_{AB} + t_{BC}$. Dar $t_{AB} = \dfrac{AB}{v_{abs_1}} = \dfrac{AC}{v} = \dfrac{\ell}{v}$ (din asemănarea triunghiurilor vitezei și cel al distanțelor). La întoarcere $v_{abs_2} = v - v_a$, astfel că $t_{BC} = \dfrac{BC}{v_{abs_2}} = \dfrac{BC}{v - v_a}$. Cum $\dfrac{\ell}{v} = \dfrac{BC}{v_a} \Rightarrow$

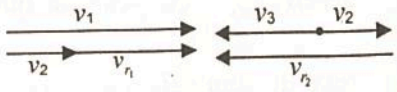


$BC = \dfrac{\ell v_a}{v} \Rightarrow t_{BC} = \dfrac{\ell v_a}{v(v - v_a)}$. Obținem $t_2 = \dfrac{\ell}{v} + \dfrac{\ell v_a}{v(v - v_a)} = \dfrac{\ell}{v - v_a} = 20$ s

c. Intervalul de timp care desparte sosirea vâslașilor în punctul de pe malul opus este $\Delta t = t_2 - t_1 = \dfrac{\ell}{v - v_a} - \dfrac{\ell}{\sqrt{v^2 - v_a^2}} \approx 8{,}44$ s

14.a. Considerăm că observatorul se află în autocamion. Față de acesta autoturismul și autobuzul se deplasează cu viteze relative. Viteza relativă a autoturismului este $\vec{v}_{r_1} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, iar conform figurii alăturate obținem $v_{r_1} = v_1 - v_2$. Viteza relativă a autobuzului este $\vec{v}_{r_2} = \vec{v}_3 - \vec{v}_2$ și conform figurii alăturate obținem $v_{r_2} = v_3 + v_2$.





Autoturismul după ce depăşeşte autocamionul trebuie să treacă pe banda lui în momentul în care în acel loc ajunge pe banda opusă autobuzul. Astfel autoturismul parcurge faţă de autocamion distanţa d_1+d_2, astfel că $d_1+d_2=v_{r_1}t=(v_1-v_2)t$, iar autobuzul parcurge faţă de autocamion distanţa $d_3=d_{min}-d_1-d_2=v_{r_2}t=(v_3+v_2)t$. Eliminând timpul t din cele două relaţii obţinem: $d_{min}=\frac{(v_3+v_1)(d_1+d_2)}{v_1-v_2}=225$ m.

b. Timpul necesar depăşirii este $t=\frac{d_1+d_2}{v_1-v_2}=5$ s

c. În timpul manevrei de depăşire distanţele parcurse faţă de sol de fiecare vehicul sunt: $d_1=v_1t=125$ m, $d_2=v_2t=75$ m şi $d_{31}=v_3t=100$ m

15.a. Fie v_a viteza apei şi v viteza pescarului faţă de apă. Pescarul se deplasează din dreptul podului din punctul A până în punctul B când pescarul îşi dă seama că a scăpat colacul. Deoarece pescarul se deplasează în sens contrar sensului de curgere al râului viteza acestuia faţă de sol este $\vec{v}_{abs}=\vec{v}+\vec{v}_a$, iar scalar $v_{abs}=v-v_a$, astfel că $AB=(v-v_a)\cdot\Delta t$ (1). La întoarcere pescarul se deplasează în sensul de curgere al râului cu viteza $v'_{abs}=v+v_a$. Distanţa parcursă de pescar la întoarcere este $d+AB=(v+v_a)\cdot t$ (2), unde t reprezintă timpul cât se întoarce pescarul după ce realizează că a pierdut colacul şi până când îl recuperează. Deoarece colacul se deplasează cu viteza apei un timp $t_c=\Delta t+t$, obţinem $d=v_at_c=v_a(\Delta t+t)$ (3). Din (3) obţinem $t=\frac{d}{v_a}-\Delta t$.

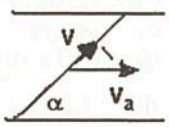
Introducând relaţia (1) şi t în relaţia (2) obţinem:

$$d+(v-v_a)\Delta t=(v+v_a)\left(\frac{d}{v_a}-\Delta t\right)\Rightarrow v\Delta t=\frac{vd}{v_a}-v\Delta t\Rightarrow d=2v_a\Delta t\Rightarrow\frac{d}{v_a}=2\Delta t\cdot$$

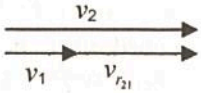
Timpul după care pescarul recuperează colacul din momentul pierderii acestuia este $t_c=\Delta t+t=3\Delta t=1{,}5$ h

b. Astfel din $d=2v_a\Delta t$ obţinem viteza apei $v_a=d/(2\Delta t)=5$ km/h

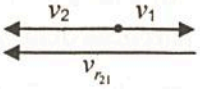
c. Deoarece colacul este barat de un cablu rigid AB legat între cele două maluri şi care formează cu un mal un unghi α ca în figură, colacul se va mişca de-a lungul cablului cu viteza $v=v_a\cos\alpha=2{,}5$ km



16.a. Considerăm că observatorul se află în trenul 1. Un observator din trenul 2 va înregistra o viteză relativă a trenului 2 faţă de trenul 1 $\vec{v}_{r_{21}}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$. Deoarece trenurile se deplasează în acelaşi sens, $v_{r_{21}}=v_2-v_1$. Pentru ca trenurile să se depăşească, distanţa parcursă de trenul 2 este $d=\ell_1+\ell_2$ şi deci timpul de depăşire este $t=\frac{\ell_1+\ell_2}{v_2-v_1}=15$ s.



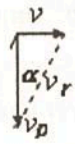
b. Dacă trenurile se deplasează în sens contrar, observatorul din trenul 2 va înregistra viteza relativă $\vec{v}_{r_{21}}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$. Conform figurii obţinem $v_{r_{21}}=v_1+v_2$ şi timpul de depăşire este



$t = \frac{\ell_1 + \ell_2}{v_1 + v_2} = 3{,}75$ s.

c. Observatorul din primul tren vede trecând prin fața lui trenul 2 cu viteza relativă $v_{r_{21}} = v_2 - v_1$ care are lungimea ℓ_2. Timpul cât vede trecând observatorul trenul 2 este $t = \frac{\ell_2}{v_2 - v_1} = 9$ s. Deoarece $v_2 > v_1$, omul din primul vede întâi locomotiva și apoi ultimul vagon al trenului 2.

17.a. Picăturile de ploaie cad față de tren cu viteza relativă $\vec{v}_r = \vec{v}_p - \vec{v}_1$.



Din figura alăturată obținem: $tg\alpha = \frac{v_1}{v_p}$, astfel că viteza picăturilor de ploaie este $v_p = v_1 / tg\alpha \approx 86{,}5$ km/h

b. Deoarece trenurile se deplasează în același sens. viteza relativă a trenului 2 față de trenul 1 este $\vec{v}_{r_{21}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, iar scalar $v_{r21} = |v_2 - v_1|$. Timpul în care călătorul din primul tren vede trecând trenul al doilea cu lungimea ℓ este $t = \frac{\ell}{|v_2 - v_1|}$. Astfel viteza celui de-al doilea tren este $v_2 = v_1 \pm \frac{\ell}{t}$. Soluțiile sunt v_2=86 km/h când trenul al doilea prinde din urmă primul tren și îl depășește și respectiv v_2=14 km/h când trenul al doilea este prins din urmă de primul tren și depășit de acesta.

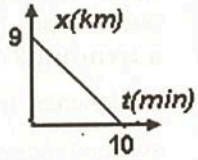
c. Timpul cât un om aflat în al doilea tren vede trecând prin fața lui trenul 1 cu lungimea ℓ_1 și cu viteza relativă $v_{r21} = v_2 + v_1$ este $t = \frac{\ell_1}{v_2 + v_1}$ =90 s

18.a. Viteza v_1 cu care scade distanța dintre M și N este viteza relativă a automobilului M față de automobilul N, astfel că $\vec{v}_1 = \vec{v}_M - \vec{v}_N$, iar scalar $v_1 = v_M - v_N = 2v_M / 3$=72 km/h

b. Deoarece $d/2 = v_1 t$, automobilul M va ajunge din urmă automobilul N după timpul $t = d/(2v_1)$=225 s=3min45s. Astfel ora la care se întâlnesc automobilele este 12:02:40

c. Fiecare automobilul parcurge în timpul t distanțele: $d_M = v_M t$=6750 m, $d_N = v_N t$=2250 m și $d_P = v_P t$=3375 m

d. Cum $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_P - x_o}{t}$ atunci coordonata punctului P este $x_P = x_0 + v_P t = 9 - 54t$, unde timpul este exprimat în în ore și coordonata în km. Automobilul P ajunge în originea O atunci când x_P=0, astfel că t=1/6 h=10 min. Reprezentarea grafică a dependenței de timp a coordonatei automobilului P este redată în figura alăturată.



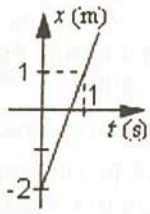
19.a. Înotătorii se întâlnesc prima oară când cel mai rapid întoarce iar cel lent încă nu a ajuns. Astfel primul sportiv a parcurs $AB+BC$, astfel că $AB + BC = v_1 \cdot t$ (C este punctul în care se întâlnesc sportivii). Al doilea sportiv parcurge doar AC, astfel că $AC = v_2 \cdot t$. În final obținem:

$$AB + BC + AC = (v_1 + v_2)t \Rightarrow 2\ell = (v_1 + v_2)t \Rightarrow t = \frac{2\ell}{v_1 + v_2} = 15{,}625 \text{ s.}$$

b. Distanța unde se vor întâlni prima dată față de punctul de plecare este $AC = v_2 \frac{2l}{v_1 + v_2} = 43{,}75$ m.

c. Primul sportiv parcurge de o distanță cu ℓ mai mare decât al doilea sportiv, astfel că $\ell = v_1 t - v_2 t$. Timpul după care primul înotător va parcurge mai mult decât al doilea o lungime de bazin este $t = \frac{\ell}{v_1 - v_2} = 62{,}5$ s.

20.a. Pentru a reprezenta grafic legea de mișcare trebuie să considerăm două valori pentru timpul t.
Pentru t_1=0 ⇒ x_1=−2 m. și pentru t_2=1 s ⇒ x_2=1 m.



b. Punctul de intersecție cu axa coordonatelor Ox, reprezintă coordonata inițială a mobilului x_0=−2 m. Punctul de intersecție cu axa timpului reprezintă momentul de timp când mobilul trece prin originea axei de coordonate, astfel că pentru x=0 obținem $t \approx 0{,}666$ s

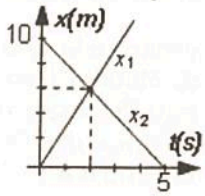
c. Viteza medie a mobilului coincide cu viteza instantanee în cazul mișcării rectilinii și uniforme, astfel că $v = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 3$ m/s.

21.a. Cum $v = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \Rightarrow x = x_0 + v(t - t_0)$. Alegem originea de timp t_0=0 s. Din datele problemei x_0=4 m și v=−2 m/s obținem ecuația coordonatei a mobilului $x = -2t + 4$.

b. Momentul când trece prin originea axei de coordinate Ox se obține din condiția x=0. Obținem t=2 s.

c. Distanța parcursă în primele 10 s se aslă cu $d = |x_f - x_0|$, unde x_0=4 m reprezintă coordonata inițială iar x_f=−16 m este coordonata la momentul t=10 s. Obținem d=20 m.

22.a. Pentru a reprezenta grafic legile de mișcare trebuie sa alegem câte două valori distincte pentru timpul t pentru fiecare mobil și apoi trasăm dreptele. Astfel pentru primul mobil când t_0=0 ⇒ x_{01}=0 și când t_1=1s ⇒ x_1=3 m, iar pentru al doilea mobil când t_0=0 ⇒ x_{02}=10 m și când t_2=5s ⇒ x_2=0.

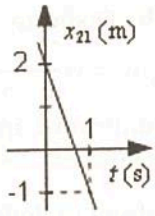


b. Pentru ca mobilele să se întâlnească trebuie ca cele două coordonate să fie egale, astfel că $x_1 = x_2 \Rightarrow 3 \cdot t = 10 - 2 \cdot t \Rightarrow t = 2$ s. Mobilele se întâlnesc după 2 s, când coordonata este x_1 =6 m.

c. Cum legea de mișcare în mișcarea rectilinie uniformă este $x = x_0 + v \cdot t$ prin identificarea coeficienților în cele două ecuații obținem: v_1=3 m/s; v_2=−2 m/s și x_{02}=10 m. Deoarece v_1 și v_2 au semne contrare, cele două mobile se deplasează unul spre celălalt, astfel că viteza relativă a primului mobil față de cel de-al doilea este: $v_{r_{12}} = v_1 - v_2 = 5$ m/s. Viteza relativă a mobilului 2 față de primul este $v_{r21} = v_2 - v_1 = -5$ m/s. Observăm că în modul vitezele relative sunt egale, dar au sensuri contrare.

d. Calculăm coordonatele la momentul t=6 s. Obținem x_1=18 m și x_2=−2 m; distanța dintre mobile este: $d = |x_1 - x_2| = 20$ m.

23.a. Alegând sistemul de referință legat de mobilul 1, ecuația de mișcare a mobilului 2 față de acesta este: $x_{21} = x_2 - x_1 = -3 \cdot t + 2$. Pentru t_1=0 s$\Rightarrow x_{21}$=2 m și pentru t_2=1 s$\Rightarrow x_{21}$=−1 m. Reprezentarea grafică a legii de mișcare a mobilului (2) în raport cu un sistem de referință legat de mobilul (1) este redată în figura alăturată.



b. Pentru a determina momentul întâlnirii mobilelor impunem condiția ca x_{21}=0. Obținem momentul întâlnirii celor două mobile $t \approx 0{,}666$ s

c. Coeficientul din fața timpului t în ecuația coordonatei reprezintă viteza mobilului. Astfel v_1=2 m/s și v_2=−1 m/s, viteza relativă a mobilului 1 față de mobilul 2 este $v_{r_{12}} = v_1 - v_2 = 3$ m/s. Această viteză relativă are întotdeauna aceeași valoare, iar $v_{r_{21}} = -3$ m/s

24.a. Din reprezentarea grafică a legii coordonatei în funcție de timp, putem calcula viteza mobilului: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = tg\,\alpha = -2$ m/s. unde $tg\,\alpha$ se numește panta dreptei (α este unghiul făcut de dreaptă cu axa timpului și α >90°).

b. Cum din grafic la t=0$\Rightarrow x_0$=10m, iar ecuația coordonatei $x = x_0 + v \cdot t$ devine $x = 10 - 2t$ deoarece am considerat momentul inițial de timp momentul pornirii mobilului.

c. La momentul t=3 s coordonata mobilului este x=4 m.

25.a. Pe baza reprezentării grafice a legii coordonatei în funcție de timp, viteza mobilului în intervalul de timp (0,7)s este: $v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1} = \frac{-4-10}{7} = -2$ m/s. Prin urmare mobilul se mișcă rectiliniu și uniform în sens contrar axei *Ox*.

b. În intervalul de timp de la 7s la 10 s, deoarece x=−4 m, mobilul se află în repaus.

c. Viteza medie a mobilului pe parcursul întregii mișcări este $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -1$m/s deoarece la t_0=0, x_0=10 m, iar la t_f=12 s, x_f=−2 m.

d. Mobilul trece prin originea axei de coordonate când x=0. Cum în intervalul $t \in (0,7)$ s legea de mișcare este $x = 10 - 2t$, atunci după t_1=5 s mobilul trece prin originea axei *Ox*.

e. Pentru $t \in (0,7)$ s mobilul are o mișcare rectilinie uniformă în sens contrar axei *Ox* și la t=5 s trece prin originea axei. Pentru $t \in (7,10)$ s mobilul se află în repaus. Pentru $t \in (10,12)$ s mobilul are o mișcare uniformă în sensul axei de coordonate *Ox*.

26.a. Mobilul are pe prima porțiune de mișcare când $t \in (0,4)$s viteza $v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}$=0,5 m/s, pe a doua porțiune când $t \in (4,5)$s viteza $v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = -4$ m/s, pe a treia porțiune când $t \in (5,6)$s mobilul se află în repaus, deoarece x=-2m și pe ultima porțiune când $t \in (6,8)$s mobilul are viteza $v_4 = \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4}$=2m/s

b. Distanța totală parcursă este $d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$=10 m, deoarece pe prima porțiune d_1=2 m, pe a doua porțiune d_2=4 m, pe a treia d_3=0 și pe a patra d_4=4m

c. Viteza medie pe întregul interval de timp este $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$=0,25 m/s, deoarece $\Delta x = x_f - x_0$=2 m și Δt=8 s.

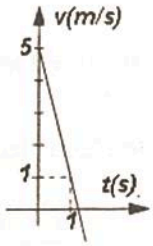
2.1.2. Mişcare rectilinie uniform variată a punctului material

1.a. Cum legea de mişcare a unui mobil care efectuează o mişcare rectilinie uniform variată este: $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, prin identificarea coeficienţilor obţinem $x_0 = 4$ m, $v_0 = 3$ m/s şi $a = -2$ m/s².

b. Când $t = 1$ s coordonata mobilului este $x = 6$ m.

c. Când mobilul trece prin originea axelor de coordonate $x = 0 \Rightarrow 0 = -t^2 + 3t + 4$, iar soluţiile ecuaţiei sunt: t_1=−1 s şi t_2=4 s. Cum valoarea t_1=−1 s înseamnă în trecut, soluţia acceptabilă din punct de vedere fizic este t_2=4 s, ceea ce înseamnă că mobilul trece prin originea axei *Ox* după 4 secunde de la începerea mişcării.

2.a. Din legea de mişcare prin identificarea coeficienţilor obţinem $x_0 = 3$ m, $v_0 = 5$ m/s, $a = -4$ m/s². Ecuaţia vitezei este $v = v_0 + at = 5 - 4t$. Pentru a reprezenta grafic ecuaţia vitezei vom atribui două valori timpului t.



Astfel pentru t_0=0 ⇒ v_0=5 m/s şi pentru $t_1 = 1$ s ⇒ $v_1 = 1$ m/s

b. Intersecţia graficului vitezei cu axa vitezei reprezintă fizic valoarea vitezei iniţiale v_0=5 m/s, iar intersecţia graficului vitezei cu axa timpului reprezintă fizic momentul de timp în care viteza mobilului se anulează şi acesta se opreşte, astfel că: $v = 0 \Rightarrow t_{op} = -\frac{v_0}{a} = 1{,}25$ s

c. Aria cuprinsă între curba vitezei, axa vitezei şi axa timpului este aria triunghiului $A = \frac{v_0 \cdot t_{op}}{2} = v_m \cdot t_{op} = 3{,}125$ m şi reprezintă fizic spaţiul parcurs de mobil până la oprire.

3.a. Din legea coordonatei prin identificarea coeficienţilor obţinem $x_0 = 0$ m, $v_0 = 3$ m/s şi $a = 2$ m/s², astfel că legea vitezei este: $v = v_0 + at = 3 + 2t$. Când $t_1 = 3$ s obţinem v_1=9 m/s.

b. A cincea secundă de la lansare este cuprinsă între $t_2 = 4$ s şi $t_3 = 5$ s. Calculăm coordonatele corespunzătoare celor două momente de timp şi obţinem: $x_2 = 28$ m şi $x_3 = 40$ m. Distanţa parcursă în a cincea secundă de la lansare este: $d = x_3 - x_2 = 12$ m.

c. Conform principiului al doilea al dinamicii $F = ma = 0{,}4$ N

4.a. Utilizăm ecuaţia lui Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2ax \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x} = -1$ m/s².

b. Calculăm momentul de timp la care mobilul trece prin punctul de coordonată x din legea vitezei $v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{2x}{v + v_0} = 30$ s.

c. Viteza medie în acest timp interval de timp este $v_m = \frac{v + v_0}{2} = 5$ m/s.

d. Deoarece $v<0$ şi $v_0>0$ înseamnă că în acest interval de timp mobilul s-a oprit şi apoi s-a întors, astfel că distanţa parcursă este: $d = x_{op} + (x_{op} - x) = 2x_{op} - x$. Din ecuaţia lui Galilei aflăm coordonata în momentul opririi x_{op}. $0 = v_0^2 + 2ax_{op} \Rightarrow x_{op} = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2 x}{v_0^2 - v^2} = x\frac{v_0^2 + v^2}{v_0^2 - v^2}$=250 m.

e. Viteza în modul medie este: $|v_m| = \frac{d}{t} = \frac{v_0^2 + v^2}{2(v_0 - v)}$ =8,33 m/s.

5.a. Pe baza legii lui Galilei $v_1^2 = 2ad_1 \Rightarrow a = \frac{v_1^2}{2d_1}$ = 1,25 m/s², iar din legea vitezei

$v_1 = at_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{2d_1}{v_1}$ = 4 s.

b. $v_2^2 = 2ad_2 \Rightarrow d_2 = \frac{v_2^2}{2a} = \frac{v_2^2}{v_1^2} d_1$ = 160 m.

c. Din legea coordonatei: $d_3 = \frac{at_3^2}{2} \Rightarrow t_3 = \sqrt{\frac{2d_3}{a}} = \frac{2\sqrt{d_1 d_3}}{v_1}$ viteza medie este:

$v_m = \frac{d_3}{t_3} = \frac{v_1}{2}\sqrt{\frac{d_3}{d_1}}$ = 5 m/s.

6.a. Din legea vitezei $v = v_0 + a\Delta t$, când $v = 0 \Rightarrow a = -\frac{v_0}{\Delta t}$ = – 1 m/s².

b. Din ecuaţia lui Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2as$, când $v = 0$, obţinem spaţiul parcurs de corp până la oprire: $s_{op} = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0 \Delta t}{2}$ = 450 m.

c. Viteza medie este: $v_m = \frac{v_0 + 0}{2}$ = 15 m/s.

7.a. Din legea coordonatei: $\ell = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2\ell}{t^2}$ = 1,2 m/s².

b. Din legea vitezei: $v = at = \frac{2\ell}{t}$ = 12 m/s.

c. Pe planul orizontal sania are o mişcare uniform încetinită cu acceleraţia a_1 şi cu viteza iniţială v cea de la baza dealului. Pe baza relaţiei lui Galilei şi din condiţia de oprire v_f=0 $\Rightarrow 0 = v^2 + 2a_1 d \Rightarrow d = \frac{v^2}{2a_1}$ =8 m.

8.a. Utilizăm ecuaţia coordonatei: $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ cu $x_0 = 0$, astfel obţinem:

$x = v_0 t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2(x - v_0 t)}{t^2}$ = 0,3 m/s².

b. Din legea vitezei: $v = v_0 + at$ obţinem viteza mobilului la momentul de timp t, v=16 m/s.

c. Aflăm pe baza ecuației coordonatei la ce moment de timp se află mobilul în punctul de coordonată x_1, astfel că $x_1 = v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} \Rightarrow \frac{at_1^2}{2} + v_0 t_1 - x_1 = 0 \Rightarrow$

$t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2ax_1}}{a} = 15$ s, iar în acest moment viteza mobilului este:

$v_1 = v_0 + at_1 = \sqrt{v_0^2 + 2ax_1} = 8{,}5$ m/s. Viteza medie este: $v_m = \frac{v_0 + v_1}{2} = 6{,}25$ m/s

9.a. Aplicăm legea lui Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2ad \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d} = -4 \cdot 10^5$ m/s².

b. Din legea vitezei: $v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{2d}{v + v_0} = 0{,}5$ ms.

c. Pentru a afla grosimea maximă a stratului de blindaj pe care-l poate străpunge proiectilul impunem condiția de oprire a proiectilului, v=0, astfel că:

$0 = v_0^2 + 2ad_{max} \Rightarrow d_{max} = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2 d}{v_0^2 - v^2} = 31{,}25$ cm.

10.a. Aplicăm legea lui Galilei și punând condiția ca v=0 obținem spațiul până la oprire $0 = v_0^2 - 2as_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_0^2}{2a} = 100$ m și din legea vitezei cu v=0 obținem timpul până la oprire $0 = v_0 - at_{op} \Rightarrow t_{op} = \frac{v_0}{a} = 20$ s.

b. Pe baza legii coordonatei: $x = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ când $t = 5$ s obținem $x = 43{,}75$ m.

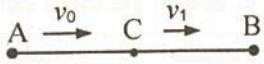
c. A patra secundă de la începerea mișcării este cuprinsă între secundele $t_3 = 3$ s și $t_4 = 4$ s, astfel coordonatele mobilului sunt: x_3=27,75 m și x_4=36 m. Distanța parcursă în a patra secundă de la începerea mișcării este: $d_{3\to4} = x_4 - x_3 = 8{,}25$ m.

11.a. Notăm cu v_0 valoarea inițială a mașinii și cu a, accelerația acesteia. Aplicăm ecuația lui Galilei: $v_1^2 = v_0^2 + 2ad_1$ și $v_2^2 = v_0^2 + 2ad_2$. Scădem cele 2 relații și obținem $a = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2(d_1 - d_2)} = -8$ m/s², iar $v_0 = \sqrt{\frac{v_2^2 d_1 - v_1^2 d_2}{d_1 - d_2}} \approx 17{,}43$ m/s.

b. Timpul necesar mașinii să parcurgă distanța dintre cele două puncte este $\Delta t = t_2 - t_1$, unde t_2 și t_1 reprezintă momentele de timp la care vitezele mobilului au valorile v_2 și v_1. Din legea vitezei: $v_2 = v_0 + at_2$ și $v_1 = v_0 + at_1$ obținem $v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1) \Rightarrow \Delta t = \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{2(d_2 - d_1)}{v_1 + v_2} = 0{,}5$ s.

c. La oprire $v = 0$ și din ecuația lui Galilei: $0 = v_0^2 + 2as_{op}$ obținem spațiul parcurs de corp până la oprire: $s_{op} = -\frac{v_0^2}{2a} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_1^2 d_2 - v_2^2 d_1}{v_1^2 - v_2^2} = 19$ m, iar din legea vitezei $0 = v_0 + at_{op}$ obținem valoarea timpului de oprire: $t_{op} = -\frac{v_0}{a} \approx 2{,}18$s

12.a. Notăm cu v_0 viteza inițială a mobilului și cu a, accelerația acestuia. Aplicăm ecuația coordonatei pentru fiecare jumătate de drum. Astfel: $AC = \frac{d}{2} = v_0 t_1 + \frac{a}{2} t_1^2$ (1)



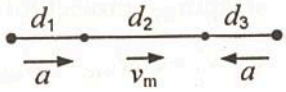
și $CB = \frac{d}{2} = v_1 t_2 + \frac{a}{2} t_2^2$, unde $v_1 = v_0 + a t_1$. Obținem: $\frac{d}{2} = (v_0 + a t_1) t_2 + \frac{a}{2} t_2^2$ (2).

Eliminând v_0 din ecuațiile (1) și (2) obținem: $a = \frac{d(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 0{,}1$ m/s².

b. Viteza inițială a mobilului este $v_0 = \frac{d - a t_1^2}{2 t_1} = 7{,}75$ m/s.

c. Viteza medie a mobilului este $v_m = \frac{d}{t_m} = \frac{d}{t_1 + t_2} = 10$ m/s.

13.a. Notăm cu d distanța dintre cele două stații. Din $v_m = a t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_m}{a} = 30$ s, iar distanța parcursă la accelerare este $d_1 = \frac{a t_1^2}{2} = 450$ m.

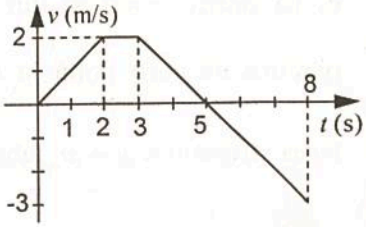


b. Deoarece accelerația la accelerare este egală în modul cu accelerația la frânare mișcarea este simetrică, astfel că distanța d_1 pe care accelerează metroul este egală cu distanța d_3 pe care frânează metroul, astfel că timpul de accelerare t_1 este egal cu cel de frânare t_3: $t_1 = t_3$. La frânare metroul parcurge aceeași distanță, astfel că $d_3 = d_1$. Cum metroul accelerează și frânează într-un timp $t = t_1 + t_3 = 1$ min, înseamnă că restul de timp t de un minut metroul se mișcă uniform cu viteza v_m, astfel că $d_2 = v_m \cdot t' = 1800$ m.

c. Distanța dintre stații este: $d = d_1 + d_2 + d_3 = 2700$ m.

14.a. Studiem mișcarea mobilului pe fiecare porțiune. În intervalul de timp $t \in (0,2)$s, $a_1 = 1$ m/s², $x_{01} = 0$ m și $v_0 = 0$ m/s astfel că legea vitezei este: $v = a_1 t = t$, iar legea coordonatei este: $x = \frac{a_1 t^2}{2} = \frac{t^2}{2}$. Aflăm la finalul primei porțiuni de mișcare, când $t_1 = 2$ s, viteza mobilului este $v_1 = 2$ m/s și coordonata este $x_1 = 2$ m. Când $t \in (2,3)$s, $a_2 = 0$ și prin urmare pe a doua porțiune de mișcare mobilul are o mișcare rectilinie și uniformă iar viteza rămâne constantă la valoarea $v_1 = 2$ m/s, iar legea coordonatei este: $x_2 = x_1 + v_1(t - t_1) = 2t - 2$, iar după $t_2 = 3$ s coordonata este $x_{2f} = 4$ m

Studiem mișcarea mobilului pe porțiunea a treia, în care $a_3 = -1$ m/s². Mobilul are o mișcare uniform încetinită cu viteza inițială $v_1 = 2$ m/s, $x_{03} = x_{2f} = 4$ m, $a_3 = -1$ m/s² când $t \in (3,8)$s. Legea vitezei este: $v_3 = v_1 + a_3(t - t_2) = 2 - (t - 3) = 5 - t$, iar cea a coordonatei este: $x_3 = x_{03} + v_1(t - t_2) + \frac{a_3}{2}(t - t_2)^2$



$\Rightarrow x_3 = 4 + 2(t-3) - \frac{(t-3)^2}{2}$, deoarece t_2=3 s.

Aflăm la ce moment de timp de la începerea mişcării mobilul se opreşte. Din $v = 0 \Rightarrow t_{op} = 5$ s. În final când $t_f = 8$ s $\Rightarrow v_f = -3$ m/s.

b. Pentru $t_f = 8$ s, aflăm din x_3, coordonata finală $x_{3f} = 1{,}5$ m.

c. Deoarece mobilul se opreşte şi apoi se întoarce, distanţa parcursă de mobil nu coincide cu valoarea coordonatei finale. Aflăm la ce distanţă de punctul de plecare se opreşte mobilul. Pentru $t_{op} = 5$ s se obţine $x_{3op} = 6$ m. Distanţa parcursă de mobil până la oprire este $d = x_{3op} + (x_{3op} - x_{3f}) = 10{,}5$ m

15.a. Pentru ca două mobile care se deplasează pe aceeaşi axă de coordonate, să se întâlnească, ele trebuie să se afle în acelaşi punct. Condiţia de întâlnire este: $x_1 = x_2$. Cum $x_1 = t^2 - 10t + 8$ şi $x_2 = -3t^2 + 4t + 2$ obţinem $t^2 - 10t + 8 = 2 + 4t - 3t^2 \Rightarrow 4t^2 - 14t + 6 = 0$. Soluţiile sunt $t_1 = 0{,}5$ s şi $t_2 = 3$ s, adică mobilele se întâlnesc de două ori, deoarece mobilul al doilea se opreşte. Din legea vitezei mobilului 2, $v_2 = 6 - 4t \Rightarrow t_{op_2} \approx 0{,}66$ s, iar apoi mobilul 2 se întoarce şi îl întâlneşte din nou pe primul mobil.

b. Coordonatele la care se întâlnesc mobilele sunt: $x = 3{,}25$ m, când primul mobil se deplasează în sens contrar axei Ox iar al doilea în acelaşi sens, respectiv $x' = -13$ m, când ambele mobile se deplasează în sens contrar axei Ox (după ce mobilul 2 s-a oprit şi s-a întors, dar înainte ca primul mobil să se oprească $t_{op_1} = 5$ s).

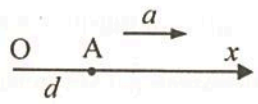
c. Legile vitezelor celor două mobile sunt:

$v_1 = v_{01} + a_1 t = -10 + 2t$, deoarece $v_{01} = 10$ m/s şi $a_1 = 2$ m/s².

$v_2 = v_{02} + a_2 t = 4 - 6t$, deoarece $v_{02} = 4$ m/s şi $a_2 = -6$ m/s².

Cum $v_1 = v_2 \Rightarrow t = 1{,}75$ s $\Rightarrow$ mobilele au viteze egale după ce mobilul 2 s-a oprit. Valoarea vitezei $v = v_1 = v_2 = -6{,}5$ m/s arată că ambele mobile se deplasează în sens contrar axei Ox.

16.a. Alegem origine a axei de coordonate Ox, punctul unde se află maşina care are o mişcare rectilinie şi uniformă. Scriem ecuaţiile de mişcare ale celor două mobile: $x_1 = d + \frac{at^2}{2} = 8 + \frac{t^2}{2}$, iar $x_2 = 5t$. Impunem



condiţia de întâlnire a mobilelor: $x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{t^2}{2} - 5t + 8 = 0$, iar soluţiile ecuaţiei sunt $t_1 = 2$ s şi $t_2 = 8$ s, adică maşina ce are o mişcare uniformă o prinde din urmă pe cea care pleacă de la stop accelerat după $t_1 = 2$ s, pentru ca la $t_2 = 8$ s, maşina care se mişcă accelerat o prinde din urmă pe cea care se mişcă uniform şi o depăşeşte.

b. Calculăm distanţele la care se întâlnesc maşinile, atribuind pe rând valorile t_1 şi t_2 în ecuaţia coordonatei. Obţinem: x=10 m şi $x' = 40$ m.

c.. Aflăm vitezele maşinii care se mişcă accelerat la cele două momente de timp t_1 şi t_2. Obţinem: $v_1 = at_1 = 2$ m/s şi $v_2 = at_2 = 8$ m/s. Cum viteza relativă este $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, în primul moment t_1, $v_{r_1} = v_1 - v = -3$ m/s, deoarece maşina care

se mişcă accelerat este depăşită de maşina care se mişcă uniform, iar în momentul t_2, $v_{r_2} = v_2 - v = 3$ m/s, deoarece maşina care se mişcă accelerat depăşeşte maşina care se mişcă uniform.

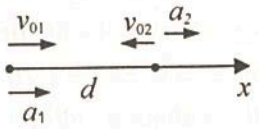
17.a. Alegem origine a axei de coordonate stopul şi origine a timpului, momentul când prima maşină trece prin dreptul stopului. Scriem ecuaţiile de mişcare ale celor două maşini: $x_1 = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 5t + t^2$, iar $x_2 = v(t - \Delta t) = 15(t-1)$, deoarece maşina a doua merge un timp mai mic cu Δt decât prima maşină întrucât porneşte mai târziu. Impunem condiţia de întâlnire: $x_1 = x_2 \Rightarrow 5t + t^2 = 15t - 15 \Rightarrow t^2 - 10t + 15 = 0$, iar soluţiile sunt $t_1 = 1{,}838$ s şi $t_2 = 8{,}162$ s. Maşinile se întâlnesc de două ori, prima dată când maşina care se mişcă uniform o prinde din urmă pe cea care se mişcă accelerat şi a doua oară când maşina care se mişcă uniform este prinsă din urmă de maşina care se mişcă accelerat.

b. Distanţele măsurate de la stop la care se întâlnesc maşinile se află din ecuaţia coordonatelor în care introducem pe rând cele două valori ale timpului aflate t_1 şi t_2 şi obţinem: $x \approx 12{,}57$ m şi $x' \approx 107{,}43$ m.

c. Pentru a se întâlni o singură dată, ecuaţia de gradul doi trebuie să aibă o singură soluţie $\Delta = 0$, astfel că din $x_1 = x_2 \Rightarrow 5t + t^2 = 15(t - \Delta t) \Rightarrow t^2 - 10t + 15\Delta t = 0 \Rightarrow \Delta = 100 - 60\Delta t$. Se obţine $\Delta t \approx 1{,}666$ s.

Dacă $\Delta t < 5/3$ s, maşinile se întâlnesc de 2 ori, dacă $\Delta t = 5/3$ s, maşinile se întâlnesc o singură dată, iar dacă $\Delta t > 5/3$ s, maşinile nu se mai întâlnesc.

18.a. Alegem origine a axei de coordonate punctul de unde porneşte primul mobil într-o mişcare accelerată. Considerăm origine de timp, momentul în care porneşte primul mobil. Scriem ecuaţiile de mişcare ale celor două mobile. Pentru primul mobil ecuaţia coordonatei este: $x_1 = v_{01} t + \frac{a_1 t^2}{2} = 40t + t^2$.



Pentru mobilul al doilea ecuaţia coordonatei este: $x_2 = d - v_{01}(t - \Delta t) + \frac{a_2}{2}(t - \Delta t)^2$, deoarece acesta porneşte cu întârziere Δt faţă de primul mobil, din alt punct şi deci are coordonata iniţială $x_{02} = d$, se mişcă în sens contrar axei şi încetinit ceea ce înseamnă că viteza lui este negativă, iar accelerаţia este pozitivă (a_2 are sensul axei) Astfel $x_2 = 426 - 10(t-2) + \frac{1}{2}(t-2)^2 = 448 - 10t + \frac{t^2}{2}$.

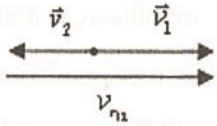
Impunem condiţia de întâlnire a mobilelor $x_1 = x_2$:

Obţinem: $40t + t^2 = 448 - 12t + \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{t^2}{2} + 52t - 448 = 0$, iar soluţia acceptabilă din punct de vedere fizic este pozitivă şi este $t_i = 8$ s. Valoarea t_i reprezintă momentul de timp la care se întâlnesc mobilele.

b. Calculăm vitezele mobilelor în momentul întâlnirii acestora utilizând ecuaţiile vitezelor: $v_1 = v_{01} + a_1 t_i = 56$ m/s şi $v_2 = -v_{02} + a_2(t_i - \Delta t) = -4$ m/s deoarece al doilea mobil se deplasează în sens contrar axei de coordonate.

c. Calculăm vitezele medii ale mobilelor utilizând definiția vitezei medii: $v_{m_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{x_i}{t_i}$, unde x_i reprezintă coordonata la care se întâlnesc mobilele. Coordonata la care se întâlnesc mobilele se obține introducând timpul de întâlnire în oricare din ecuațiile de coordonate. Prin urmare: $x_i = 384$ m. Obținem vitezele medii ale celor două mobile, Astfel:

$v_{m_1} = 48$ m/s, iar $v_{m_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{x_i - d}{t_i - \Delta t} = -7$ m/s.

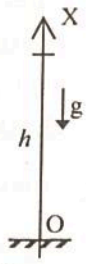


Calculăm viteza relativă a mobilului 1 față de mobilul 2 în momentul întâlnirii. Cum $\vec{v}_{r12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, scalar $v_{r_{12}} = v_1 + |v_2| = 60$ m/s.

d. Calculăm după cât timp se oprește mobilul 2, din ecuația vitezei punând condiția ca $v_2 = 0$. Din $v_2 = -v_{02} + a_2(t - \Delta t) = -12 + t$ obținem: t_{op}=12 s. Calculăm la acest moment de timp valorile coordonatelor celor două mobile: $x_1' = 624$ m și $x_2' = 376$ m. Astfel distanța dintre cele două mobile la acel moment de timp este: $d = x_1' - x_2' = 248$ m.

2.1.3. Mișcarea punctului material sub acțiunea greutății

1.a. Studiem căderea liberă a pietrei. Alegem originea axei *Ox* pe sol. Legea de mișcare a pietrei este: $x = h - \frac{gt^2}{2}$. Când piatra ajunge la sol $x = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 4$ s.



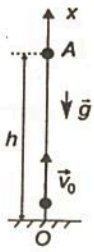
b. Utilizăm ecuația lui Galilei pentru a afla viteza cu care piatra lovește solul. Din $v^2 = v_0^2 + 2gh$ cu $v_0 = 0$ obținem $v = \sqrt{2gh} = 40$m/s

c. Calculăm valoarea coordonatei când $t_1 = t_c - 1 = 3$ s$\Rightarrow x = 35$ m $\Rightarrow$ în ultima secundă piatra a coborât pe distanța de 35 m.

2.a. Deoarece originea axei de coordonate este pe sol, legea de mișcare a corpului este $x = h - \frac{gt^2}{2}$. Aflăm timpul de cădere punând condiția ca $x = 0$: $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 20$ s. Aflăm după cât timp corpul ajunge în punctul în care $x = h_1 \Rightarrow h_1 = h - \frac{gt_1^2}{2} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2(h - h_1)}{g}} = 16$ s$\Rightarrow \Delta t = t_c - t_1 = 4$ s.

b. Calculăm coordonatele la momentele de timp $t_2 = 1$ s și $t_3 = 2$ s, deoarece a doua secundă de mișcare este cuprinsă între t_2 și t_3.

Cum $x_2 = 1995$ m și $x_3 = 1980$ m$\Rightarrow \Delta x = x_2 - x_3 = 15$ m reprezintă distanța parcursă de mobil în a doua secundă de la lansare.



3.a. Utilizăm ecuația lui Galilei, ținând cont că mobilul are o mișcare uniform încetinită cu accelerația *a=g*. În momentul atingerii înălțimii maxime, corpul se oprește, astfel că din $v = 0$

$\Rightarrow 0 = v_0^2 - 2gh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 61{,}25$ m.

b. Din legea coordonatei $x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, considerând originea axei pe sol, punând condiția ca mobilul să reajungă pe sol, x=0, determinăm timpul de mișcare al mobilului, astfel că $0 = v_0 t_m - \frac{gt_m^2}{2} \Rightarrow t_m = \frac{2v_0}{g} = 7$ s.

c. Calculăm timpul de urcare al mobilului până la înălțimea maximă din legea vitezei $v = v_0 - gt$ punând condiția ca $v = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0}{g} = 3{,}5$ s.

Observăm că $t_c = t_m - t_u = \frac{v_0}{g} = t_u \Rightarrow$ timpul de urcare este egal cu timpul de coborâre. A patra secundă de mișcare este cuprinsă între secundele 3 și 4. Deoarece $t_u \in (3,4)$s înseamnă că în secunda a patra mobilul urcă, se oprește și apoi coboară. Aflăm valoarea coordonatelor la momentele $t_3 = 3$ s și t_4=4 s și observăm că $x_3 = x_4 = 60$ m. Astfel mobilul urcă pe distanța $h_{max} - x_3$=1,25 m și coboară pe distanța $h_{max} - x_4$=1,25 m.

Distanța parcursă este $d = 2(h_{max} - x_3)$=2,5m.

4.a. Corpul are o mișcare uniform încetinită cu viteza inițială v_0 și accelerația g. Din grafic se determină timpul de urcare $t_u = 2$ s. Din legea vitezei $v = v_0 - gt$ și când $v = 0 \Rightarrow v_0 = gt_u = 20$ m/s. Viteza inițială a corpului este v_0=20 m/s.

b. Din legea lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$, pentru v=0 aflăm înălțimea maximă la care urcă corpul $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{g \cdot t_u^2}{2}$=20 m.

c. Din punctul de înălțime maximă corpul coboară accelerat cu accelerația g. Timpul de coborâre se obține din ecuația coordonatei $x = h - \frac{gt^2}{2}$ cu $x = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}} = \frac{v_0}{g} = t_u$. Timpul total de mișcare este $t_m = t_u + t_c = 2t_u = 4$s

Conform legii vitezei $v = -gt$, deoarece la coborâre corpul cade liber și cum v_0=0 atunci $v = -gt_c = -gt_u = -v_0 = -20$ m/s $\Rightarrow$ corpul revine în punctul de lansare cu viteza cu care a fost lansat.

5.a. Un corp aruncat vertical de la sol urcă și coboară astfel că $\Delta t = t_u + t_c = 2t_u$, deoarece $t_u = t_c$. Din legea vitezei $v = v_0 - gt$ și când $v = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0}{g} \Rightarrow \Delta t = \frac{2v_0}{g} \Rightarrow v_0 = \frac{g\Delta t}{2} = 30$ m/s.

b. Din ecuația lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ și pentru $v = 0$ aflăm înălțimea maximă la care urcă corpul, astfel că $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{g\Delta t^2}{8} = 45$ m.

6.a. Pe baza ecuației lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ si din condiția $v = 0$ în punctul de înălțime maximă obținem înălțimea maximă la care ajunge corpul $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 5\text{m}$.

Cum $h = \frac{h_{max}}{2} = \frac{v_0^2}{4g}$, pe baza ecuației coordonatei $x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow$ $\frac{v_0^2}{4g} = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow \frac{gt^2}{2} - v_0 t + \frac{v_0^2}{4g} = 0$, iar cele două soluții sunt: $t_{1,2} = \frac{v_0}{g}(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ $\Rightarrow t_1$=0,29 s şi t_2=1,71 s. Se obțin două valori care corespund momentelor când mingea trece prin punctul aflat la jumătate din înălțimea maximă la care ajunge corpul la urcare şi respectiv la coborâre.

b. Pe baza ecuației lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ cu $h=h_{max}/2$ obținem cele două valori ale vitezei mingii: $v^2 = v_0^2 - 2g\frac{h_{max}}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow v = \pm\frac{v_0\sqrt{2}}{2} = \pm 7{,}05$ m/s, unde valoarea pozitivă se obține la urcarea mingii iar cea negativă la coborârea acesteia.

c. Cum definiția vitezei medii este $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, iar $\Delta x = x_f - x_0 = \frac{h_{max}}{2}$ şi $\Delta t = t_2 \Rightarrow v_m = \frac{v_0\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}+1)} \approx 1{,}463$ m/s.

Prin definiție viteza în modul medie este $|v|_m = \frac{d}{\Delta t}$, unde d reprezintă distanța parcursă de minge în intervalul de timp Δt. Dar $d = h_{max} + \frac{h_{max}}{2} = \frac{3h_{max}}{2} = \frac{3v_0^2}{4g}$, deoarece mingea urcă până la înălțimea maximă şi apoi coboară pe distanța $\frac{h_{max}}{2} \Rightarrow |v|_m = \frac{3v_0\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}+1)} \approx 4{,}388$ m/s.

7.a. Conform legii vitezei $v = v_0 - gt$ iar cum $v = \frac{v_0}{2}$ obținem $t = \frac{v_0}{2g} = 2$ s.

b. Utilizăm ecuația lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ cu $v = \frac{v_0}{2}$ obținem $h = \frac{3v_0^2}{8g} = 60$ m

c. Observăm că $t_u = \frac{v_0}{g} = 4$ s şi din această cauză cum a treia secundă de lansare este cuprinsă între secundele t_1=2 s şi t_2=3 s înseamnă că în a treia secundă corpul se află în urcare. Calculăm din legea coordonatei valorile coordonatelor la momentele t_1 şi t_2 si obținem: $x_1 = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$=60 m şi $x_2 = v_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 75$ m. Distanța parcursă de mobil eate $d = x_2 - x_1 = 15$ m.

8.a. Omul aflat pe platforma orizontală superioară vede coborând corpul după timpul Δt_1 măsurat din momentul urcării prin fața lui, astfel că $\Delta t_1 = t_{1u} + t_{1c} = 2t_{1u}$, deoarece $t_{1u} = t_{1c}$. Notăm cu v_{01} viteza cu care trece corpul prin fața omului aflat pe platforma orizontală superioară. Din legea vitezei

$v = v_{01} - gt$ şi din condiţia de oprire $v = 0$ obţinem: $t_{1u} = \frac{v_{01}}{g} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{2v_{01}}{g} \Rightarrow v_{01} = \frac{g\Delta t_1}{2} = 10$ m/s.

b. Notăm cu v_{02} viteza cu care trece corpul prin faţa omului aflat pe platforma orizontală inferioară. Analog $v_{02} = \frac{g\Delta t_2}{2} = 30$ m/s.

Aflăm distanţa dintre cele două platforme, pe baza ecuaţiei lui Galilei $v_{01}^2 = v_{02}^2 - 2gd \Rightarrow d = \frac{v_{02}^2 - v_{01}^2}{2g} = 40$ m.

9.a. Ambele picături cad liber, într-o mişcare uniform accelerată cu accelerația g. Alegem origine de timp, momentul când prima picătură se desprinde. Axa Ox este orientată în jos. Legile vitezelor celor două picături sunt $v_1 = gt$ şi respectiv $v_2 = g(t - \Delta t)$. Prin definiţie viteza relativă $v_r = v_1 - v_2 = g\Delta t \Rightarrow \Delta t = v_r / g = 1$ s reprezintă intervalul de timp care separă lansările celor două picături.

b. Cum $v_1 = 2v_2 \Rightarrow gt_1 = 2g(t_1 - \Delta t) \Rightarrow t_1 = 2\Delta t = 2$ s.

c. Distanţele parcurse de cele două picături în intervalul de timp t_1 sunt $d_1 = \frac{gt_1^2}{2} = 2g\Delta t^2$ şi $d_2 = \frac{g}{2}(t_1 - \Delta t)^2 = \frac{g}{2}\Delta t^2$.

Distanţa care desparte picăturile este $d = d_1 - d_2 = \frac{3}{2}g\Delta t^2 = 15$ m.

10.a. Alegem originea axei de coordonate Ox, punctul de unde circarul lansează bilele. Alegem origine de timp momentul când este lansată prima bilă. Scriem legile de mişcare ale celor două bile: $x_1 = v_{01}t - \frac{gt^2}{2}$ şi $x_2 = v_{02}(t - \Delta t) - \frac{g}{2}(t - \Delta t)^2$.

Condiţia ca cele două bile să se întâlnească este $x_1 = x_2 \Rightarrow v_{01}t - \frac{gt^2}{2} = v_{02}(t - \Delta t) - \frac{g}{2}(t - \Delta t)^2 \Rightarrow t_i = \frac{2v_{02} + g\Delta t^2}{2(v_{02} + g\Delta t - v_{01})} = 1{,}25$s reprezintă timpul după care bilele se întâlnesc.

b. Introducând valoarea timpul după care bilele se întâlnesc în oricare din ecuaţiile coordonatelor obţinem coordonata la care se întâlnesc bilele: x_i=4,6875m.

c. Calculăm după cât timp din momentul aruncării primei bile ajung corpurile pe sol. Pentru aceasta impunem condiţiile: $x_1 = 0$ şi $x_2 = 0$ şi obţinem $t_{m_1} = \frac{2v_{01}}{g} = 2$ s şi $t_{m_2} = \frac{2v_{02}}{g} + \Delta t = 5$ s, iar intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este $\Delta t = t_{m_2} - t_{m_1} = 3$ s.

d. Cele două bile se pot întâlni în aer în imediata vecinătate a punctului de lansare când prima bilă coboară după $t_{m_1} = \frac{2v_{01}}{g} = 2$ s iar a doua bilă începe să urce. Dacă intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare $\Delta t > t_{m_1}$ bilele nu se mai pot întâlni în aer şi prin urmare intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este mai mare decât două secunde.

Cum $t_{m_2} = \frac{2v_{02}}{g} = 1$ s, bilele se pot întâlni în aer în imediata vecinătate a punctului de lansare când ambele coboară iar intervalul de timp ce desparte

sosirea bilelor în punctul de lansare $\Delta t_{min} = t_{m_1} - t_{m_2} = \frac{2(v_{01} - v_{02})}{g} \Rightarrow \Delta t_{min} = 1$s.

Dacă $\Delta t < \Delta t_{min}$, bila a doua ajunge în punctul de lansare mai repede decât prima bilă şi bilele nu se întâlnesc în aer. Prin urmare dacă intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este mai mic decât o secundă bilele nu se mai pot întâlni în aer. Deci intervalul de timp Δt ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este cuprins între (1s,2s) pentru ca bilele să se întâlnescă în aer.

11.a. Calculăm înălţimea maximă la care ajunge corpul lansat vertical de jos în sus din ecuaţia lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ punând condiţia ca în momentul opririi $v = 0$ şi obţinem $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 80$ m. Aflăm timpul de urcare al primului corp la înălţimea maximă din legea vitezei $v = v_0 - gt$ cu $v = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0}{g} = 4$ s

b. Calculăm înălţimea de la care se lasă liber cel de-al doilea corp pe baza datelor problemei şi obţinem: $h = \frac{3}{4}h_{max} = \frac{3v_0^2}{8g}$. Alegem origine de timp momentul când se aruncă corpurile. Originea axei de coordonate Ox o alegem pe sol. Scriem ecuaţiile de mişcare ale celor două mobile considerând că primul mobil este cel aruncat de pe sol. Astfel $x_1 = v_{01}t - \frac{gt^2}{2}$ şi $x_2 = h - \frac{gt^2}{2} = \frac{3v_0^2}{8g} - \frac{gt^2}{2}$.

Impunem condiţia de întâlnire şi aflăm timpul după care corpurile se întâlnesc: $x_1 = x_2 \Rightarrow v_0 t - \frac{g \cdot t^2}{2} = \frac{3v_0^2}{8g} - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_i = \frac{3v_0}{8g} = 1{,}5$ s şi înlocuind această valoare în oricare din ecuaţiile coordonatei obţinem: $x_i = 48{,}75$ m.

c. Calculăm vitezele mobilelor în momentul întâlnirii din ecuaţia vitezei prin introducerea timpului de întâlnire. Obţinem $v_1 = v_0 - gt_i = 25$ m/s şi $v_2 = -gt_i = -15$ m/s, deoarece în momentul întâlnirii primul mobil urcă, iar al doilea coboară. Viteza relativă cu care mobilul care urcă trece prin dreptul mobilului care coboară este $v_r = v_1 - v_2 = 40$ m/s.

12.a. Alegem originea axei de coordonate Ox pe sol şi origine de timp momentul când pornesc corpurile. Scriem ecuaţiile de mişcare ale celor două corpuri, considerând primul corp cel care cade liber. Astfel: $x_1 = h - \frac{gt^2}{2}$ şi $x_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Aflăm timpul după care primul corp ajunge la sol din $x_1 = 0 \Rightarrow t_{c_1} = \sqrt{2h/g} = 2$s.

Impunem condiţia de întâlnire $x_1 = x_2$ şi obţinem $h - \frac{g \cdot t^2}{2} = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow v_0 = \frac{h}{t_i}$.

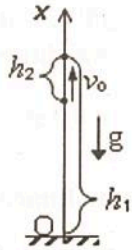
Deoarece corpurile se întâlnesc la sol $t_i = t_{c_1}$ viteza iniţială cu care se aruncă corpul al doilea este $v_0 = \sqrt{\frac{gh}{2}} = 10$ m/s.

b. Din ecuaţia lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ calculăm înălţimea maximă la care ajunge corpul de pe sol, punând condiţia ca în momentul opririi $v = 0$.

Obținem: $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{h}{4} = 5$ m.

c. Calculăm pe baza ecuației lui Galilei vitezele cu care ajung corpurile pe sol, ambele având căderi libere de la înălțimile h și respectiv h_{max} după ce corpul al doilea s-a orpit. Obținem $v_1 = \sqrt{2gh} = 20$ m/s și $v_2 = \sqrt{2gh_{max}} = v_1/2 = 10$ m/s.

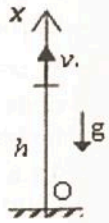
13.a. Alegem originea axei de coordonate Ox pe sol și origine de timp momentul când pornesc corpurile. Considerăm primul corp, cel care cade liber. Ecuația de mișcare a acestuia este $x_1 = h - \frac{gt^2}{2}$ și când ajunge la sol din $x_1 = 0$ aflăm timpul de coborâre al primului corp $t_{c_1} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 3{,}16$ s.



b. Ecuația de mișcare a celui de-al doilea corp este $x_2 = h_1 - h_2 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Impunem condiția de întâlnire a corpurilor $x_1 = x_2 \Rightarrow h_1 - \frac{g \cdot t^2}{2} = h_1 - h_2 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ Viteza inițială cu care a fost lansat corpul al doilea este $v_0 = h_2 / t_1$. Deoarece corpurile se întâlnesc la sol $t_1 = t_{c_1}$ atunci $v_0 \approx 3{,}16$ m/s.

c. Calculăm pe baza ecuației lui Galilei $v^2 = v_0^2 + 2gh$ viteza cu care ajunge primul corp la sol din v_0=0 și h=h_1. Obținem $v_1 = \sqrt{2gh_1} = 31{,}62$ m/s. Aplicăm ecuația lui Galilei pentru cel de-al doilea corp, ținând cont că $h = h_1 - h_2$ când corpul ajunge la sol. Obținem $v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_1 - h_2)} = 28{,}46$ m/s, deoarece la întoarcere corpul al doilea are o mișcare accelerată cu accelerația g și revine în punctul de lansare cu viteza v_0 cu care a fost aruncat, dar această viteză este orientată în jos.

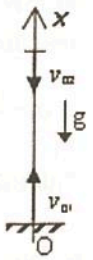
14.a. Alegem originea axei de coordonate Ox pe sol și originea de timp, momentul când se aruncă vertical în sus corpul aflat la înălțimea h. Scriem ecuația de mișcare a acestui corp: $x_1 = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ și aflăm după cât timp ajunge acest corp pe sol din condiția ca $x_1 = 0 \Rightarrow \frac{g \cdot t^2}{2} - v_0 t - h = 0 \Rightarrow t_{c_1} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} = 4$ s.



b. Scriem ecuația de mișcare a celui de-al doilea corp: $x_2 = h - \frac{g(t - \Delta t)^2}{2}$, deoarece acesta cade liber de la înălțimea h, dar mai târziu cu Δt. Deoarece corpurile se întâlnesc la sol concomitet atunci $x_2 = 0$ când $t = t_{c_1} \Rightarrow 0 = h - \frac{g(t_{c_1} - \Delta t)^2}{2} \Rightarrow \Delta t = t_{c_1} - \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 1{,}18$ s.

c. Aflăm viteza cu care ajunge corpul al doilea la sol, aplicând ecuația lui Galilei și ținând cont că acesta cade liber de la înălțimea h. Obținem $v_2 = \sqrt{2gh} \approx 28{,}28$ m/s. Scriem ecuația vitezei pentru primul corp când acesta ajunge pe sol și $t = t_{c1}$. Obținem $v_1 = v_0 - gt_{c_1} = -\sqrt{v_0^2 + 2gh} = -30$ m/s, iar semnul minus apare deoarece corpul 1 se mișcă în sens contrar axei Ox.

15.a. Alegem originea axei de coordonate Ox pe sol şi origine de timp momentul când pornesc corpurile. Considerăm primul corp cel lansat de pe sol vertical în sus. Scriem ecuaţiile de mişcare ale celor două mobile: $x_1 = v_{01}t - \frac{gt^2}{2}$ şi $x_2 = h - v_{02}t - \frac{gt^2}{2}$. Din condiţia de întâlnire $x_1=x_2$ obţinem $v_{01}t - \frac{gt^2}{2} = h - v_{02}t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_i = \frac{h}{v_{01}+v_{02}}$.



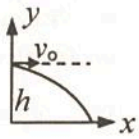
Ecuaţiile vitezelor celor două mobile sunt: $v_1 = v_{01} - gt$ şi $v_2 = -v_{02} - gt$. În momentul întâlnirii vitezele celor două corpuri sunt egale, dar opuse, deoarece mobilele se deplasează în sens contrar, astfel că $v_1 = -v_2 \Rightarrow v_{01} - gt_i = v_{02} + gt_i \Rightarrow t_i = \frac{v_{01}-v_{02}}{2g} \Rightarrow h = \frac{v_{01}^2 - v_{02}^2}{2g} = 100$ m.

b. Calculăm după cât timp din momentul lansării corpurile ajung pe sol, punând condiţia ca x=0. Pentru primul corp: $x_1 = 0 \Rightarrow t_{m_1} = \frac{2v_{01}}{g} = 9$ s.

Pentru cel de-al doilea corp: $x_2 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{gt_{m_2}^2}{2} + v_{02}t_m - h \Rightarrow$ $t_{m_2} = \frac{-v_{02} + \sqrt{v_{02}^2 + 2gh}}{g} \Rightarrow t_{m_2} = \frac{v_{01}-v_{02}}{g} = 4$ s. Intervalul de timp care desparte sosirea corpurilor la sol este $\Delta t = t_{m_1} - t_{m_2} = 5$ s.

c. Utilizăm ecuaţia vitezei $v = v_0 - gt$ pentru a afla vitezele cu care cad corpurile pe sol. Pentru primul corp $v_1 = v_{01} - gt_{m_1} = -v_{01} = -45$ m/s, deoarece acesta se întoarce cu viteza cu care a plecat. Pentru corpul al doilea $v_2 = -v_{02} - gt_{m_2} = -v_{01} = -45$ m/s. Semnele „–" apar deoarece corpurile se deplasează în sens contrar axei Ox.

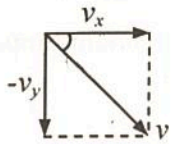
16.a. Studiem mişcarea cărţii pe două axe de coordonate Ox şi Oy, cu originea pe sol. Pe Ox cartea are o mişcare rectilinie uniformă cu viteza $v_x = v_0$, iar ecuaţia de mişcare este $x = v_0 t$ iar pe Oy cartea are o mişcare uniform accelerată cu accelerația g şi fără viteză iniţială pe axa Oy $v_{0y} = 0$ (cădere liberă), astfel că ecuaţia de mişcare este $y = h - \frac{gt^2}{2}$. Ecuaţia traiectoriei se obţine eliminând timpul din cele două ecuaţii. Obţinem $t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow y = h - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2}$. Traiectoria este o parabolă deoarece y este o funcţie de gradul doi de x.



b. Cartea ajunge la sol când $y = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}4$ s.

c. Cartea cade faţă de marginea masei la distanţa: $d = v_0 t_c = v_0\sqrt{2h/g} = 40$ m

17.a. Studiem aruncarea pietrei pe orizontală pe axele de coordonate Ox şi Oy. Pe Ox mişcarea pietrei este rectilinie şi uniformă cu $v_x = v_0$, iar ecuaţia de mişcare este $x = v_0 t$ iar pe Oy piatra cade liber de la înălţimea h, astfel că legea de mişcare este $y = h - \frac{gt^2}{2}$,



iar legea vitezei este $|v_y| = gt$. Cum vectorul viteză este tangent la traiectorie, îl descompunem în două componente v_x şi v_y astfel că

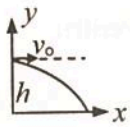
$$tg\,\alpha = \frac{|v_y|}{v_x} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{gt_m}{v_0} \Rightarrow t_m = \frac{v_0 tg\,\alpha}{g} \approx 2{,}595 \text{ s.}$$

Calculăm înălţimea casei din condiţia ca $y = 0 \Rightarrow h = \frac{gt_m^2}{2} = \frac{v_0^2 tg^2\alpha}{2g} = 33{,}75$ m.

b. Din desen $\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0}{v} \Rightarrow v = \frac{v_0}{\cos\alpha} = 30$ m/s.

c. Distanţa unde cade piatra se află din ecuaţia de mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza v_0 pe axa *Ox*, astfel că $d = v_0 t_m = \frac{v_0^2}{g} tg\,\alpha \approx 38{,}9$ m.

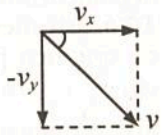
18.a. Studiem aruncarea pe orizontală a unui corp. Astfel pe axa *Ox* corpul are o mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza v_0, astfel că $x = v_0 t$ iar pe axa *Oy* corpul are o cădere liberă, astfel că $y = h - \frac{gt^2}{2}$. Timpul de cădere se obţine când corpul ajunge la sol astfel că $y = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.



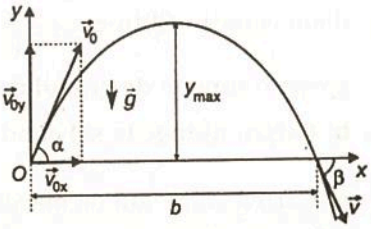
Deoarece corpurile cad de la aceeaşi înălţime $h_1 = h_2 = h \Rightarrow t_{c_1} = t_{c_2} = t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \frac{t_{c_2}}{t_{c_1}} = 1$. Prin urmare corpurile cad în acelaşi interval de timp.

b. Deoarece $\frac{b_2}{b_1} = \frac{v_{02} t_{c_2}}{v_{01} t_{c_1}} = 4$ înseamnă că bătaia corpului al doilea este de patru ori mai mare decât bătaia primului corp.

c. Viteza la sol se calculează din geometrie ţinând cont că vectorul viteză este tangent la traiectorie, astfel că $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, iar $v_x = v_0$ şi $v_y = -gt_c = -\sqrt{2gh} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ Raportul vitezelor corpurilor când acestea ajung la sol este: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{v_{02}^2 + 2gh}}{\sqrt{v_{01}^2 + 2gh}} = 2$.



19.a. Studiem aruncarea pietrei sub un unghi pe cele două axe de coordonate cu originea pe sol *Ox* şi *Oy*. Astfel că pe *Ox* piatra are o mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, iar legea de mişcare este: $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$ iar pe *Oy* piatra are o mişcare de aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza iniţială $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, iar legea de mişcare este $y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Pentru a obţine ecuaţia traiectoriei, eliminăm timpul *t*, din cele două ecuaţii.

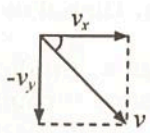


Astfel $t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}\Rightarrow y=xtg\,\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$ redă dependența coordonatei y în funcție de coordonata x. Cum funcția lui y de x este de gradul doi, traiectoria este o parabolă cu vârful în sus, deoarece coeficientul lui x^2 este negativ.

b. Pentru a determina unde loveşte piatra solul punem condiția ca y=0 şi obținem $x_m=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\approx 25{,}95$ m.

c. Aflăm timpul de urcare până la înălțimea maximă din legea vitezei pe axa Oy: $v_y=v_{0y}-gt=v_0\sin\alpha-gt$ şi din condiția de oprire $v_y=0\Rightarrow t_u=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$ Prin introducem timpului în ecuația coordonatei pe axa Oy obținem $h_{max}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}=11{,}25$ m.

d. Cum viteza corpului este tangentă la traiectorie o descompunem în două componente pe cele două axe, astfel că $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$. Cum $v_x=v_0\cos\alpha$, deoarece pe Ox corpul se mişcă rectiliniu uniform, iar $v_y=v_0\sin\alpha-gt$ obținem $v=\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\alpha+g^2t^2}=10$ m/s.



20.a. Studiem aruncarea proiectilului pe axele de coordonate Ox şi Oy cu originea pe sol. Astfel pe Ox $x=v_0\cos\alpha\cdot t$, deoarece pe această axă proiectilul are o mişcare rectilinie şi uniformă iar pe Oy $y=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}$, deoarece pe această axă proiectilul are o aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza inițială $v_{0y}=v_0\sin\alpha$. Aflăm timpul de zbor al proiectilului din condiția ca acesta să ajungă la sol, astfel că $y=0\Rightarrow t_m=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}\Rightarrow$ bătaia proiectilului se obține înlocuind timpul de mişcare în ecuația coordonatei pe axa Ox. Obținem $b=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$ şi înlocuind timpul de mişcare în ecuația coordonatei pe axa Oy, obținem înălțimea maximă a proiectilului $h_{max}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$.

Cum $b=h_{max}\Rightarrow\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}\Rightarrow 4\cos\alpha=\sin\alpha\Rightarrow 16\cos^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}}$ şi $\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}$.

b. Înălțimea maximă la care urcă proiectilul este $h_{max}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}=80$ m.

c. Timpul de zbor este $t_m=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}=8$ s.

21.a. Mingea este aruncată de un copil sub un unghi α şi cu viteza inițială v_0. Pe axa Oy, mingea are o aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza inițială $v_{0y}=v_0\sin\alpha$, astfel că $v_y=v_{0y}-gt=v_0\sin\alpha-gt$. În momentul opririi

$v_y = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Timpul total de mişcare este $t = t_u + t_c = 2t_u = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, deoarece timpul de urcare este identic cu cel la coborâre. Aplicând ecuaţia lui Galilei la mişcarea pe verticală de jos în sus obţinem: $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gh = v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh$.

În momentul opririi $v_y=0 \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{gt^2}{8}$ =5 m şi înălţimea maximă faţă de sol până la care ridică mingea este $H_{max} = h_{max} + h = 6{,}2$ m.

b. Pe axa *Ox* mingea are o mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, astfel că distanţa la care se află copii pentru a prinde mingea este $d = v_0 \cos\alpha \cdot t = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Deoarece această distanţă este maximă atunci $\sin 2\alpha = 1$, adică α=45⁰ şi în acest caz $d = \frac{v_0^2}{g} = 10$ m.

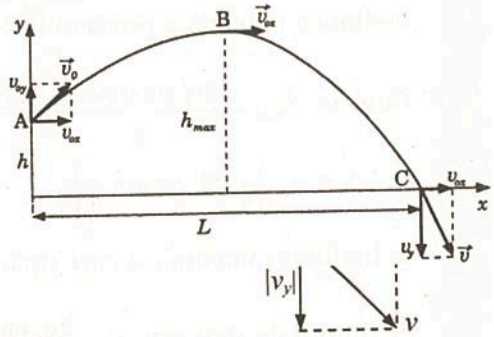
c. Timpul de zbor al mingii când α=45⁰ este $t_m = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \approx 1{,}41$ s

22.a. Studiem mişcarea corpului alegând originea axelor *Ox* şi *Oy* pe sol, la baza turnului. Pe axa *Ox*, corpul se mişcă rectiliniu şi uniform cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, astfel că legea de mişcare este $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$.
Pe axa *Oy*, corpul are o mişcare de aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, astfel că legea de mişcare este $y = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Aflăm din legea vitezei pe axa *Oy* $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt$, timpul de urcare până la înălţimea maximă punând condiţia ca $v_y = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Astfel înălţimea maximă la care urcă corpul este $h_{max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 15$ m

b. Aflăm timpul de zbor al corpului, punând condiţia ca:

$y = 0 \Rightarrow \frac{gt_m^2}{2} - v_0 \sin\alpha \cdot t_m - h = 0 \Rightarrow$

$t_m = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} \approx 2{,}73$ s.



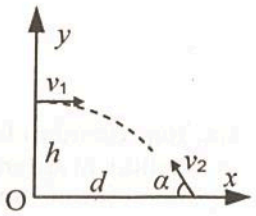
c. Distanţa la care cade corpul faţă de baza turnului este $d = v_0 \cos\alpha \cdot t_m \approx 47{,}23$m.

d. Din desen $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ unde $v_x = v_0 \cos\alpha$ iar $v_y = v_{0y} - gt_m \Rightarrow$

$v_y = v_{0y} \sin\alpha - gt_m = -\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \approx 24{,}5$ m/s.

$tg\,\beta = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt_m}{v_0 \cos\alpha} = 1 \Rightarrow \beta = 45°$.

23.a. Deoarece piatra loveşte pasărea, impunem condiţia de întâlnire faţă de cele două axe de coordonate *Ox* şi *Oy*, astfel că $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$.



Originea axelor de coordonate se alege pe sol la baza stâlpului. Studiem mişcarea păsării pe cele două axe de coordonate: pe *Ox*: $x_1 = v_1 t$ şi pe *Oy*: $y_1 = h$.

Deoarece piatra este aruncată simultan cu zborul păsării, legile de mişcare ale pietrei pe cele două axe de coordinate sunt:

pe *Ox*: $x_2 = d - v_2 \cos\alpha \cdot t$ şi pe *Oy*: $y_2 = v_2 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$.

Din $y_1 = y_2 \Rightarrow h = v_2 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{v_2 \sin\alpha \pm \sqrt{v_2^2 \sin^2\alpha - 2gh}}{g}$. Momentele de timp după care piatra loveşte pasărea sunt t_1=1 s, când piatra loveşte pasărea în urcare, şi t_2=2 s, când piatra loveşte pasărea în coborâre.

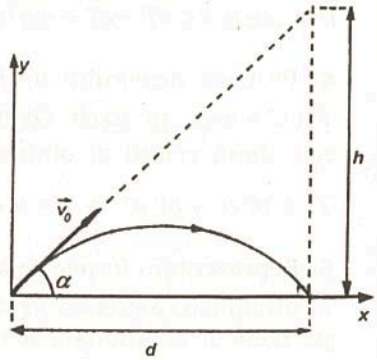
b. Din $x_1 = x_2 \Rightarrow v_1 t = d - v_2 \cos\alpha \cdot t \Rightarrow d = (v_2 \cos\alpha + v_1)t$. Obţinem valorile la care se poate afla pasărea de locul unde copilul lansează piatra: d_1=40 m şi d_2=80 m corespunzătoare valorilor t_1 şi t_2.

c. Descompunem viteza pietrei în cele două componente v_x şi v_y imediat înainte de ciocnire, astfel că în momentul lovirii păsării viteza pietrei este $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Deoarece $v_x = v_2 \cos\alpha$ şi $v_y = v_2 \sin\alpha - gt$ obţinem $v = \sqrt{v_2^2 + g^2t^2 - 2gtv_2 \sin\alpha}$.

Pentru t_1 şi t_2 obţinem aceeaşi valoare a vitezei $v \approx 26{,}46$ m/s

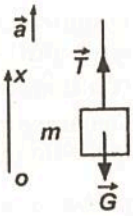
24. Arătăm că glontele loveşte întotdeauna ţinta. Alegem originea axelor *Ox* şi *Oy* pe sol unde se află puşca. Pentru aceasta trebuie îndeplinită condiţia de întâlnire $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$. Scriem legile de mişcare pentru glonte pe cele două axe: pe *Ox*: $x_1 = v_0 \cos\alpha \cdot t$ şi pe *Oy*: $y_1 = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Ţinta se află la distanţa *d* de puşcă, astfel că $tg\,\alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{tg\,\alpha}$ şi legile de mişcare pentru ţintă pe cele două axe sunt: pe *Ox* $x_2 = d = \frac{h}{tg\,\alpha}$ şi pe *Oy*: $y_2 = h - \frac{gt^2}{2}$.



Cum $x_1 = x_2 \Rightarrow v_0 \cos\alpha \cdot t_i = \frac{h\cos\alpha}{\sin\alpha}$ obţinem $t_i = \frac{h}{v_0 \sin\alpha}$=0,25s şi din $y_1 = y_2 \Rightarrow v_0 \sin\alpha \cdot t_i - \frac{gt_i^2}{2} = h - \frac{gt_i^2}{2}$ obţinem $t_i = \frac{h}{v_0 \sin\alpha}$.

Deoarece se obţine aceeaşi formulă pentru timpul de întâlnire, înseamnă că glontele loveşte întotdeauna ţinta.

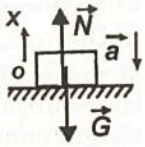
2.2. Principiile mecanicii



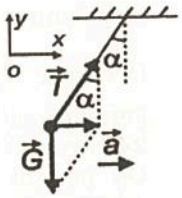
1.a. Reprezentăm forţele ce acţionează asupra corpului: greutatea G ca rezultat al interacţiunii corp–Pământ şi tensiunea T ca rezultat al interacţiunii corp–fir. Se aplică principiul al II-lea al dinamicii: $\vec{T}+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Se alege o axă Ox în sensul de mişcare şi se proiectează relaţia vectorială. Scalar se obţine: $T-mg=ma \Rightarrow T=m(g+a)=3mg$ =60 N

b. $a_{max}=T_{max}/m-g=30$ m/s²

2.a. Omul apasă asupra podelei liftului cu o forţă egală cu reacţiunea normală, astfel că pe baza principiilor mecanicii $\vec{N}+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Prin proiecţie pe Ox se obţine: $N-mg=-ma \Rightarrow N=m(g-a)=900$ N



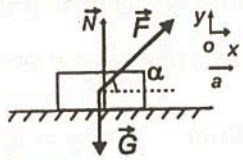
b. Deoarece $N\geq 0 \Rightarrow m(g-a)\geq 0 \Rightarrow g\geq a \Rightarrow$ accelerația maximă cu care poate coborî liftul pentru ca omul să mai apese pe podea este accelerația gravitațională g=10 m/s².



3. După reprezentarea forţelor, aplicăm principiul al II-lea al dinamicii. Vectorial se obţine: $\vec{T}+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Alegem un sistem de axe Ox şi Oy şi proiectăm pe aceste axe relaţia vectorială:
pe Ox: $T\sin\alpha=ma$ şi pe Oy: $T\cos\alpha-mg=0 \Rightarrow$
$T\cos\alpha=mg \Rightarrow tg\,\alpha=a/g \Rightarrow a=g\cdot tg\,\alpha$ =5,76 m/s²
Din $\cos\alpha=G/T \Rightarrow T=mg/\cos\alpha$ =5,78 N.

4. Pe baza desenului de la problema precedentă, proiectând relaţia vectorială $\vec{T}+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$ pe axele Ox şi Oy obţinem: $T\sin\alpha=ma$ şi $T\cos\alpha=mg$. Împărţim cele două relaţii şi obţinem: $tg\alpha=a/g \Rightarrow \alpha=30^0$, iar din teorema lui Pitagora $T^2=m^2a^2+m^2g^2 \Rightarrow T=m\sqrt{a^2+g^2}$ =2,31 N

5. Reprezentăm forţele ce acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al II-lea al dinamicii, astfel că vectorial obţinem: $\vec{T}+\vec{G}+\vec{F}=m\cdot\vec{a}$. Scalar prin proiecţia pe axele de coordonate se obţine:



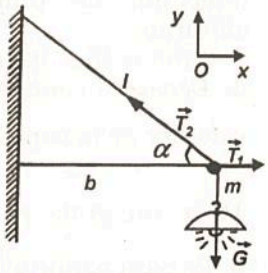
pe Ox: $F\cos\alpha=ma \Rightarrow F=\dfrac{ma}{\cos\alpha}$ =4 N.
pe Oy: $N+F\sin\alpha=mg \Rightarrow N=mg-F\sin\alpha$ =16,54 N.

6. Deoarece pisica rămâne în permanenţă la aceeaşi înălţime faţă de sol, ea se află în repaus, astfel că rezultanta forţelor este nulă. Asupra pisicii acţionează atât greutatea G, ca rezultat al interacţiunii cu Pământul, cât şi forţa F, ca rezultat al interacţiunii pisicii cu lustra. Lustra împinge pisica în sus, iar pisica împinge lustra în jos, conform principiului acţiunii şi reacţiunii. Studiem repausul pisicii, astfel că rezultanta forţelor care acţionează asupra acesteia este nulă. Vectorial: $\vec{F}+\vec{G}=0$ şi scalar: $F=mg=20$ N

Reprezentăm forţele ce acţionează asupra lustrei şi aplicăm

principiul al II-lea al dinamicii, astfel că vectorial obținem: $\vec{G}' + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Scalar obținem: $G' + F = Ma \Rightarrow Mg + mg = Ma \Rightarrow a = \frac{(M+m)g}{M} = 15$ m/s².

7. Deoarece lampa se află în repaus, rezultanta forțelor este nulă, conform principiului 1. Vectorial $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = 0$ Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $T_1 - T_2 \cos\alpha = 0$ și pe Oy: $T_2 \sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{mg}{\sin\alpha}$.



Din geometrie $\sin\alpha = \frac{\sqrt{\ell^2 - b^2}}{\ell} = \frac{3}{5} \Rightarrow T_2 = \frac{mg\ell}{\sqrt{\ell^2 - b^2}} = 100$ N

și $T_1 = T_2 \cos\alpha = mg\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{mgb}{\sqrt{\ell^2 - b^2}} = 80$ N.

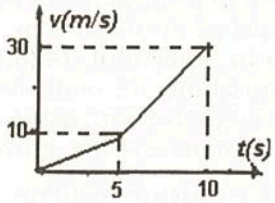
8.a. Pentru $t \in (0,5)$s, F_1=10 N $\Rightarrow$ accelerația este $a_1 = F_1 / m$=2 m/s². Conform definiției accelerației: $a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t}$, deoarece la momentul inițial t_0=0, v_0=0 $\Rightarrow v = a_1 t = 2t$, astfel că atunci când t_1=5 s $v_1 = a_1 t_1 = 10$ m/s.

Pentru $t \in (5,10)$s $\Rightarrow F_1$=20N $\Rightarrow a_2 = F_2 / m$=4 m/s²

Cum $a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_{02}}{t - t_{02}} \Rightarrow v = v_{02} + a_2(t - t_{02})$, unde $v_{02} = v_{1max}$=10 m/s și t_{02}=5 s $\Rightarrow v$=4t−10.

Când t_f=10 s $\Rightarrow v_f$=30 m/s.

Reprezentarea grafică a dependenței vitezei în raport cu timpul este redată în figura alăturată.



b. Distanța parcursă de corp în timpul este $d = v_m t_1$,

deoarece $v_m = \frac{0 + v_1}{2} = \frac{v_1}{2} \Rightarrow d = \frac{v_1 t_1}{2} = \frac{a_1 t_1^2}{2}$=25 m

c. Prin definiție $v_m = \frac{D}{\Delta t}$, unde D reprezintă distanța totală parcursă. Pe baza interpretării grafice, deoarece viteza este reprezentată în funcție de timp, distanța parcursă se calculează prin aria de sub curba vitezei, astfel că: $D = A_{triunghi} + A_{trapez}$=25 m+100 m=125 m $\Rightarrow v_m$=12,5 m/s.

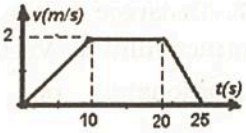
9.a. Când $t \in (0,10)$s, a_1=0,2 m/s², astfel că liftul are o mișcare uniform accelerată pornind din repaus. Pe baza reprezentării fortelor obținem $T_1 - mg = ma_1 \Rightarrow T_1 = m(g + a_1) = 5100$ N. Când $t \in (10,20)$s, a_2=0 m/s², astfel că liftul are o mișcare rectilinie și uniformă și T_2=mg=5000 N. Când $t \in (20,25)$s, a_3=−0,4 m/s², astfel că liftul are o mișcare uniform frânată $T_3 = m(g + a_3) \Rightarrow$ T_3=4800 N.

b. $a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} \Rightarrow v = a_1 t$ =0,2t când, $t \in (0,10)$s $\Rightarrow v_1$=2 m/s când t_1=10 s

Când $t \in (10,20)$ s corpul are o mișcare rectilinie și uniformă cu v_1=2 m/s

Când $t\in(20,25)$s, $a_2=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v-v_{02}}{t-t_{02}}\Rightarrow v=v_{02}+a_2(t-t_{02})$ unde v_{02}=2 m/s şi t_{02}=20 s, astfel că v=10−0,4t.

Viteza finală se obţine când t=25 s$\Rightarrow v$=0 m/s, adică liftul se opreşte.



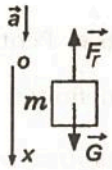
Reprezentarea grafică a vitezei liftului în funcţie de timp în intervalul de timp $t\in(0;25)$s este redată în figura alăturată.

c. Când t=15 s, liftul are o mişcare uniformă cu viteza v=2 m/s

d. Deoarece când $t\in(0,10)$s, v=0,2t, viteza medie reprezintă media aritmetică a valorilor de la capetele intervalului, astfel că $v=\frac{0+v_1}{2}$=1 m/s

10. a. Din grafic pe baza definiţiei acceleraţiei se obţine $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v}{t}$=9 m/s²

b. Pe baza acţiunii forţelor şi a principiului II obţinem:



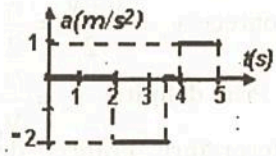
$mg-F_r=ma\Rightarrow F_r=m(g-a)$=0,1 N

c. Cum $d=v_m\Delta t$, iar cum $v=at$, viteza medie reprezintă media aritmetică a vitezelor $v_1=at_1$=4,5 m/s şi $v_2=at_2$=13,5 m/s, astfel că $v_m=\frac{v_1+v_2}{2}$=9 m/s$\Rightarrow d$=9 m

11.a. Deoarece viteza este reprezentată în funcţie de timp, distanţa parcursă de corp în primele t_1=3 s reprezintă aria cuprinsă între curba vitezei şi axa timpului, astfel că $d_1=A_{trapez}$=5 m

b. În intervalul $t\in(3,5)$s corpul a parcurs distanţa d_2=1,25 m, adică aria trapezului de sub axa timpului. Distanţa totală parcursă de corp este $d=d_1+d_2$=6,25 m, astfel că modulul vitezei medii este $v_m=d/t$=1,25 m/s

c. Deoarece $F=ma$, atunci când $t\in(0;2)$s şi când $t\in(3,5;4)$s a=0 deoarece mobilul are o mişcare rectilinie şi uniformă. Când $t\in(2;3,5)$s acceleraţia este $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=-2$ m/s² şi când $t\in(4;5)$s acceleraţia este $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=1$ m/s²

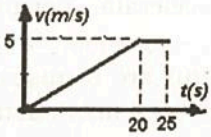


Reprezentarea grafică a forţei rezultante care se exercită asupra corpului este redată în figura alăturată.

12. a. Cum $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v}{t}\Rightarrow t=\frac{v}{a}$=20 s

b. Pe baza acţiunii forţelor şi a principiului II obţinem: $F-F_r=(M+m)a$. Cum $F_r=F/n\Rightarrow F=n(M+m)/(n-1)$=31,25 N

c. În primele t=20 s ciclistul are o mişcare accelerată şi porneşte din repaus, astfel că $v=at$=0,25t, iar după t=20 s, v=5 m/s. Apoi ciclistul are o mişcare uniformă. Reprezentarea grafică a vitezei ciclistului este redată în figura alăturată.



d. Considerăm biciclistul observator şi calculăm viteza relativă cu care se deplasează camionul faţă de el, $\vec{v}_r=\vec{v}_C-\vec{v}$. Scalar obţinem $v_r=v_C+v$ deoarece camionul se deplasează în sens contrar. Intervalul de timp Δt în care camionul depăşeşte ciclistul este $\Delta t=(\ell+\ell_1)/(v_C+v)$=0,6 s

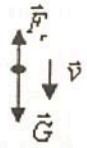
13. a. Din definiția accelerației $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -12$ m/s²

b. Cum $\Delta v = v - v_0$ obținem $v = v_0 + at$, astfel că atunci când t_1=0,5s viteza este v_1=18m/s, iar viteza medie este $v_m = \frac{v_1 + v_0}{2}$ =21 m/s

c. Pe baza principiului fundamental al dinamicii: $-mg - F_r = ma \Rightarrow F_r = -m(a+g)$=0,2N

d. Distanța parcursă de corp la urcare reprezintă aria triunghiului asftfel că $d = \frac{v_0 t_m}{2}$ =24 m

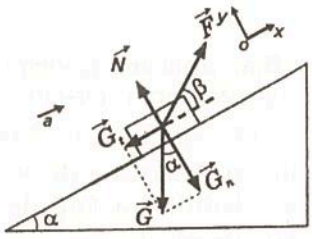
14.a. În imediata vecinătate a Pământului, parasutistul are o mișcare uniformă astfel că: $\vec{G} + \vec{F}_r = 0 \Rightarrow mg = kv_0 \Rightarrow k = mg/v_0$=200 Ns/m



b. $\vec{G} + \vec{F}_r = m\vec{a}$, iar scalar $mg - kv = ma \Rightarrow a = g\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)$=5 m/s²

15.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} = m\vec{a}$. Proiectăm pe axele de coordonate și obținem: pe *Ox*: $F\cos\beta - mg\sin\alpha = ma$ și pe *Oy*:

$N + F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow F = \frac{m(a + g\sin\alpha)}{\cos\beta} \approx 9{,}92$N



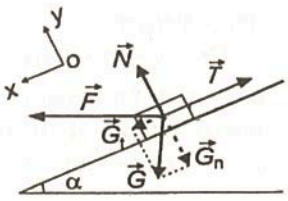
b. $N = mg\cos\alpha - F\sin\beta = mg\cos\alpha - \frac{m(a + g\sin\alpha)}{\cos\beta}\sin\beta$

$N = m\frac{g\cos(\alpha+\beta) - a\sin\beta}{\cos\beta}$ =1,65 N

c. Deoarece corpul nu mai apasă pe plan înseamnă că N=0$\Rightarrow$ $F = \frac{mg\cos\alpha}{\sin\beta} \approx 12{,}27$ N. Din $N = 0 \Rightarrow a = g\cos(\alpha+\beta)/\sin\beta = 3{,}65$ m/s²

16.a. Impunem condiția de echilibru corpului și proiectăm pe axele de coordonate ecuația vectorială $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F} = 0$. Obținem pe axa *Ox*: $F\cos\alpha + mg\sin\alpha - T = 0 \Rightarrow T = F\cos\alpha + mg\sin\alpha$ =35 N

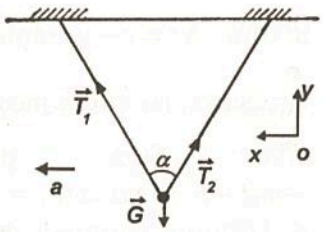
b. Dacă se taie firul, corpul se mișcă accelerat, astfel că pe baza principiului al II-lea al dinamicii obținem $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F} = m\vec{a}$, iar prin proiecție pe axa *Ox* obținem: $F\cos\alpha + mg\sin\alpha = ma \Rightarrow a = \frac{F\cos\alpha}{m} + g\sin\alpha \Rightarrow$



a=8,75 m/s²

c. Prin proiecția ecuației pe axa *Oy* obținem: $N + F\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha - F\sin\alpha$. Deoarece corpul mai rămâne în contact cu planul înclinat, trebuie ca $N \geq 0$, astfel că $F \leq mgctg\alpha \Rightarrow$ $F_{max} = mgctg\alpha$=69,2 N

17.a. Reprezentăm forțele și studiem mișcarea corpului pe baza principiului II al dinamicii: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}=m\vec{a}$. Proiectăm relația pe axele de coordonate: pe *Ox*:



$$T_1\sin\frac{\alpha}{2}-T_2\sin\frac{\alpha}{2}=m\cdot a\Rightarrow T_1-T_2=\frac{m\cdot a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\ (1)$$ și pe*Oy*:

$$T_1\cos\frac{\alpha}{2}+T_2\cos\frac{\alpha}{2}-mg=0\Rightarrow T_1+T_2=\frac{mg}{\cos\frac{\alpha}{2}}\ (2)$$

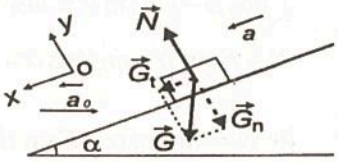
Adunăm cele două relații și apoi le scădem. Obținem:

$$T_1=\frac{m(a\cos\frac{\alpha}{2}+g\sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}\approx 20{,}34\text{ N și } T_2=\frac{m(g\sin\frac{\alpha}{2}-a\cos\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}\approx 14{,}34\text{ N.}$$

b. Primul se va rupe firul în care tensiunea este mai mare, adică firul 1.

c. $T_1=F\Rightarrow F\sin\alpha-mg\sin\frac{\alpha}{2}=ma\cos\frac{\alpha}{2}\Rightarrow a=\frac{2F}{m}\sin\frac{\alpha}{2}-g\cdot tg\frac{\alpha}{2}\approx 4{,}22\text{ m/s}^2$

18.a. Aplicăm principiul al doilea al mecanicii, după reprezentarea forțelor corpului și vectorial se obține $\vec{N}+\vec{G}=m(\vec{a}+\vec{a}_0)$, deoarece corpul se deplasează față de un observator de pe sol cu o accelerație compusă din accelerația lui față de plan $\vec{a}$ și accelerația planului față de sol $\vec{a}_0$.

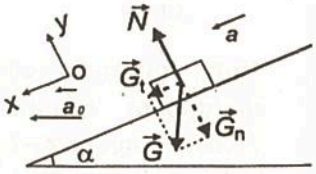


Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:

pe *Ox*: $mg\sin\alpha=ma-ma_0\cos\alpha\Rightarrow a=g\sin\alpha+a_0\cos\alpha$ =8,46 m/s²

pe *Oy*: $N-mg\cos\alpha=-ma_0\sin\alpha\Rightarrow N=m(g\cos\alpha-a_0\sin\alpha)$ =5,64 N

b. Dacă planul este împins spre stânga, accelerația $\vec{a}_0$ are sens contrar. Relația vectorială se păstrează: $\vec{N}+\vec{G}=m(\vec{a}+\vec{a}_0)$. Proiecția relației pe *Ox* devine:



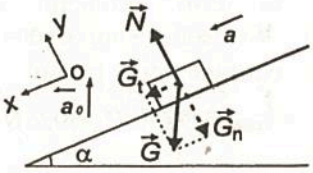
$mg\sin\alpha=ma+ma_0\cos\alpha\Rightarrow a=g\sin\alpha-a_0\cos\alpha$

a=5,64 m/s²

pe *Oy*: $N-mg\cos\alpha=ma_0\sin\alpha\Rightarrow N=m(g\cos\alpha+a_0\sin\alpha)$ =8,46 N.

c. Pentru ca acest corp să nu apese pe planul înclinat, $N=0$, iar acest lucru se poate realiza doar în cazul în care planul se deplasează spre dreapta când $a_0=gctg\alpha$ =10 m/s²

19.a. Aplicăm corpului principiul al doilea al mecanicii după reprezentarea forțelor: $\vec{N}+\vec{G}=m(\vec{a}+\vec{a}_0)$, unde $\vec{a}+\vec{a}_0$ reprezintă accelerația corpului față de un observator aflat pe sol și este formată din accelerația corpului față de plan $\vec{a}$ și din accelerația $\vec{a}_0$ a planului față de sol. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.



Pe Ox: $mg\sin\alpha = ma - ma_0\sin\alpha \Rightarrow a = (g + a_0)\sin\alpha$ =7 m/s²

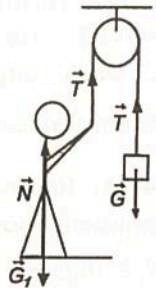
b. pe Oy: $N - mg\cos\alpha = ma_0\cos\alpha \Rightarrow N = m(g + a_0)\cos\alpha$ =24,22 N.

c. Proiectăm relația vectorială $\vec{N} + \vec{G} = m(\vec{a} + \vec{a}_0)$ pe axele de coordonate când accelerația liftului este în jos:

pe Ox: $mg\sin\alpha = ma + ma_0\sin\alpha \Rightarrow a = (g - a_0)\sin\alpha$ =3 m/s²

pe Oy: $N - mg\cos\alpha = -ma_0\cos\alpha \Rightarrow N = m(g - a_0)\cos\alpha$ =10,38 N

20.a. Tensiunea în fir este forța F, astfel că T=F. Reprezentăm forțele care acționează asupra sacului și pe baza principiului II obținem: $T - mg = ma \Rightarrow a$=$F/m$−$g \Rightarrow a$=1,25 m/s²



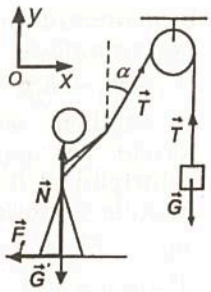
b. Reprezentăm forțele care acționează asupra omului și impunem condiția de echilibru $\vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{N} = 0$. Scalar obținem:

$T + N - G_1 = 0 \Rightarrow N = G_1 - F$ =100 N

c.Deoarece sacul este ridicat fără ca muncitorul să se ridice de pe sol atunci, N=0 $\Rightarrow F$=G_1, astfel ca a_{max}=G_1/m−g=2,5m/s²

d. T'−$m'g$=$m'a \Rightarrow T$'=$m'(g+a)$=450 N

21.a. Deoarece balotul m de află în echilibru, rezultanta forțelor este nulă, astfel că: $\vec{T} + \vec{G} = 0 \Rightarrow T = mg$ =100 N



b. Impunem condiția de echilibru omului M și vectorial obținem: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Scalar prin proiecție pe axele de coordonate se obține:

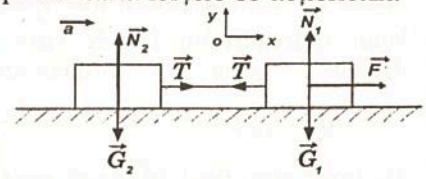
pe Ox: $T\sin\alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = T\sin\alpha = mg\sin\alpha$ =50 N

pe Oy: $T\cos\alpha + N = Mg \Rightarrow N = (M - m\cos\alpha)g$ =713,5 N

c. Asupra suprafeței omul exercită două forțe conform principiului acțiunii și reacțiunii: o forță normală și forța de frecare. Rezultanta acestor forțe este:

$R = \sqrt{N^2 + F_f^2} = g\sqrt{m^2 + M^2 - 2mM\cos\alpha} \approx 715{,}25$ N

22. a. Studiem separat mișcarea fiecărui corp, reprezentând forțele ce acționează asupra fiecăruia și aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare corp. Proiectăm relațiile vectoriale pe axele de coordonate. Pentru corpul M: $\vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{G}_1 = M\vec{a}$ și prin proiecție pe axa Ox: $F - T = Ma$ (1), iar pentru corpul m: $\vec{T} = m \cdot \vec{a}$ și scalar $T = ma$ (2). Adunăm relațiile (1) și (2) $\Rightarrow F = (M + m)a \Rightarrow a = \dfrac{F}{M + m}$ =3 m/s²

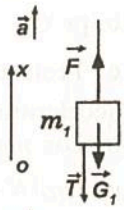


b. $T = ma = \dfrac{mF}{M + m}$ =3 N.

c. Dacă forța F formează cu orizontala un unghi α=30°, obținem prin proiecție pe axa Ox: $F\cos\alpha - T = Ma$ (3). Adunăm relațiile (2) și (3) și obținem

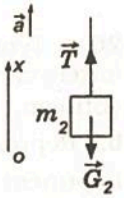
$F\cos\alpha = (M + m)a \Rightarrow a = \dfrac{F\cos\alpha}{M + m}$ =1,5 m/s²

23.a. Studiem separat mişcarea fiecărui corp, reprezentând forţele ce acţionează asupra fiecăruia şi aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare corp. Proiectăm relaţiile vectoriale pe axa de coordonate *Ox*. Pentru corpul m_1: $F - m_1 g - T = m_1 a$ (1) şi pentru corpul m_2: $T - m_2 g = m_2 a$ (2). Adunând relaţiile (1) şi (2) obţinem $F - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow F = (m_1 + m_2)(a + g)$=48 N.



b. $T = m_2(a + g)$=36 N.

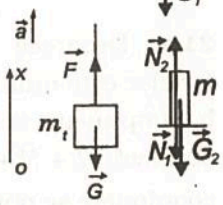
c. Dacă corpurile urcă rectiliniu şi uniform, accelerația corpului este a=0 $\Rightarrow F = (m_1 + m_2)g = 40$ N.



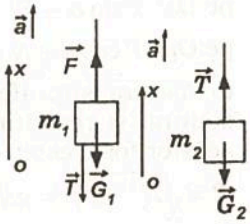
d. Dacă tensiunea în fir atinge valoarea maximă, accelerația sistemului este $a' = \frac{T_{max}}{m_2} - g$ =5 m/s² $\Rightarrow F = (m_1 + m_2)(a' + g) = 60$ N.

24. a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra primului corp şi impunem condiţia de echilibru. Obţinem: $N_1 + F - m_1 g = 0 \Rightarrow$ $N_1 = m_1 g - F$ =300 N

b. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului aşezat pe suprafaţă şi impunem condiţia de repaus. Obţinem $N_2 - N_1 - m_2 g = F \Rightarrow N_2 = (m_1 + m_2)g - F$ =700 N



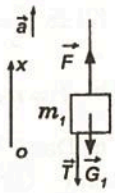
c. Studiem separat mişcarea fiecărui corp, reprezentând forţele ce acţionează asupra fiecăruia şi aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare corp. Proiectăm relaţiile vectoriale pe axa de coordonate *Ox*. Pentru corpul m_1: $F - m_1 g - T = m_1 a$ (1) şi pentru corpul m_2: $T - m_2 g = m_2 a$ (2). Adunând relaţiile (1) şi (2) obţinem $F - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow m_2 = \frac{F}{a + g} - m_1$=40 kg



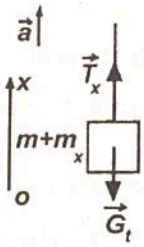
d. Tensiunea din fir este $T = F - m_1(g + a)$=480 N

25.a. Putem considera întreg sistemul un punct material cu masa $m_t = m + m_0$ şi apoi reprezentăm forţele care acţionează asupra acestui corp. Reprezentăm forţele şi proiectăm pe axa *Ox*. Obţinem: $F - (m + m_0)g = (m + m_0)a \Rightarrow a = \frac{F}{m + m_0} - g = 2{,}5$ m/s²

b. Împărţim firul în două porţiuni: porţiunea superioară de lungime $2\ell/3$ şi masă $m_1 = 2m_0/3$ şi o porţiune inferioară de lungime $\ell/3$ şi masă $m_2 = m_0/3$. Reprezentăm forţele şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii pentru corpul cu masa m_1: $\vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{F} = m_1 \cdot \vec{a}$ şi scalar se obţine: $F - m_1 g - T = m_1 a \Rightarrow F - \frac{2}{3} m_0 g - T = \frac{2}{3} m_0 a$ (1)



Porțiunea inferioară de fir împreună cu masa m constituie un nou corp de studiu cu masa $M = m + m_2 = m + \frac{m_0}{3}$. Reprezentăm forțele și aplicăm principiul al doilea al dinamicii pentru corpul cu masa M: $\vec{T} + \vec{G}_t = M \cdot \vec{a}$ și scalar: $T - (m + \frac{m_0}{3})g = (m + \frac{m_0}{3})a$ (2).



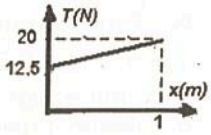
Adunăm relațiile (1) și (2) și obținem $F - (m + m_0)g = (m + m_0)a$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{m + m_0} - g \Rightarrow T = (m + \frac{m_0}{3})(g + a) \Rightarrow T = (m + \frac{m_0}{3})\frac{F}{m + m_0} = 15\text{N}$$

c. Porțiunea inferioară de fir cu masa $m_x = m_0 x/\ell$ formează împreună cu corpul suspendat m un nou corp cu masa $m + m_0 x/\ell$, astfel că:

$$T - (m + \frac{m_0 x}{l})g = (m + \frac{m_0 x}{l})a \Rightarrow T = (m + \frac{m_0 x}{l})(g + a) = (m + \frac{m_0 x}{l})\frac{F}{m + m_0}$$

Când x=0 se obține valoarea minimă a tensiunii $T_{min} = \frac{mF}{m + m_0}$ =12,5 N, în partea inferioară a firului și când x=ℓ se obține valoarea maximă a tensiunii în fir T_{max}=F=20 N, în partea superioară a firului. Tensiunea în fir depinde liniar de x, iar reprezentarea grafică a lui T=$f(x)$ este o dreaptă.



26.a. Putem considera întreg sistemul un punct material cu masa $m_t = m_1 + m_0 + m_2$ și apoi reprezentăm forțele care acționează asupra acestui corp. Reprezentăm forțele și proiectăm $\vec{F} + \vec{G}_t = m_t \vec{a}$ pe axa Ox (desen 23.a). Obținem:

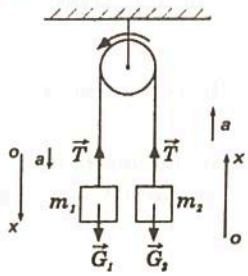
$$F - (m_1 + m_0 + m_2)g = (m_1 + m_0 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_0 + m_2} - g = 2 \text{ m/s}^2$$

b. Porțiunea inferioară de fir cu masa $m_x = m_0 \cdot x/\ell = fm_0$ împreună cu corpul cu masa m_2 constituie un nou corp cu masa $M = fm_0 + m_2$. Pe baza proiecției relației vectoriale $\vec{T} + \vec{G} = M \cdot \vec{a}$ pe axa Ox: $T - Mg = Ma \Rightarrow T = M(a + g) \Rightarrow$

$$T = \frac{(fm_0 + m_2)F}{m_1 + m_0 + m_2} = 50{,}4 \text{ N}$$

c. Dacă sistemul coboară cu accelerația a, proiectăm relația $\vec{T} + \vec{G}_t = M_t \cdot \vec{a}$ pe axa Ox: $(m_1 + m_0 + m_2)g - F = (m_1 + m_0 + m_2)a \Rightarrow F = (m_1 + m_0 + m_2)(g - a) = 48$ N

27.a. Deoarece $m_1 > m_2$, maimuța coboară accelerat, iar ciorchinele urcă cu aceeași accelerație. Pentru maimuță $\vec{T} + \vec{G}_1 = m_1 \cdot \vec{a}$ și scalar $m_1 g - T = m_1 a$ (1).

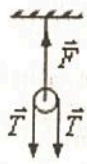


Pentru ciochinele de banane $\vec{T} + \vec{G}_2 = m_2 \cdot \vec{a}$ și scalar $T - m_2 g = m_2 a$ (2). Din adunarea relațiilor (1)+(2) obținem:

$$g(m_1 - m_2) = a(m_1 + m_2) \Rightarrow a = g\frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = 2 \text{ m/s}^2 \text{ și}$$

$$T = m_2(a + g) = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 480 \text{ N}.$$

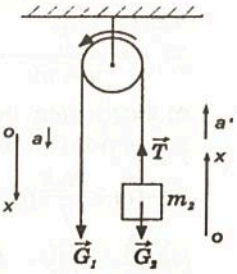
b. Impunem condiția de echilibru scripetului. Rezultanta forțelor este nulă. Vectorial $\vec{F}+\vec{T}+\vec{T}=0 \Rightarrow$ scalar $F=2T=\dfrac{4m_1m_2g}{m_1+m_2}$=960 N.



c. Din $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v}{t} \Rightarrow v=at$ =2 m/s

d. Deoarece de maimuța trage de fir cu o forță egală cu greutatea corpului ei, tensiunea în fir este egală cu G_1, astfel că $T=G_1$. Studiem mișcarea uniform accelerată a ciorchinelui de banane. Vectorial $\vec{T}+\vec{G}_2=m_2\vec{a}'$, iar scalar:

$T-m_2g=m_2a' \Rightarrow m_1g-m_2g=m_2a' \Rightarrow a'=g\dfrac{(m_1-m_2)}{m_2}$=5m/s²



28.a. Deoarece sistemul se află în repaus impunem condiția de echilibru corpurilor. Impunem condiția de echilibru corpului cu masa m_2, astfel că $T=m_2g$. Din condiția de echilibru impusă scripetelui $\vec{F}+\vec{T}+\vec{T}=0 \Rightarrow F=2T=2m_2g$=6 N

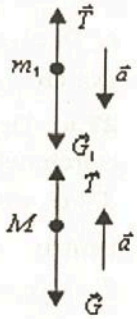
b. Din condiția de echilibru impusă corpului cu masa m_1: $\vec{T}+\vec{G}_1+\vec{N}+\vec{F}=0$, astfel că scalar $F+m_1g-T-N=0 \Rightarrow$ $N=F+(m_1-m_2)g$=3 N

c. Lăsând liber sistemul de corpuri acesta se va mișca accelerat cu accelerația a. Deoarece corpul cu masă m_2 coboară și corpul m_1 urcă, pe baza demonstației de la 25.a din $T-m_1g=m_1a$ și din $m_2g-T=m_2a$ obținem $a=g\dfrac{(m_2-m_1)}{m_1+m_2}$=5 m/s². Cum $a=\Delta v/\Delta t=v/t \Rightarrow v=at$, iar viteza medie este $v_m=v/2=at/2$, astfel că distanța parcursă de corpuri este $d=v_mt=at^2/2$=2,5 m

29.a. Deoarece corpul m se așază peste un corp M, noul corp cu masa $m_1=m+M$ va coborî accelerat cu accelerația a, iar M va urca accelerat cu aceeași accelerație. Reprezentăm forțele asupra corpurilor de mase m_1 și M apoi studiem mișcarea fiecărui corp. Aplicăm principiul al doilea al dinamicii și vectorial obținem pentru fiecare corp $\vec{T}+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Scalar se obține:pentru corpul m_1:

$m_1g-T=m_1a \Rightarrow (m+M)g-T=(m+M)a \Rightarrow T=(m+M)(g-a)$ (1)

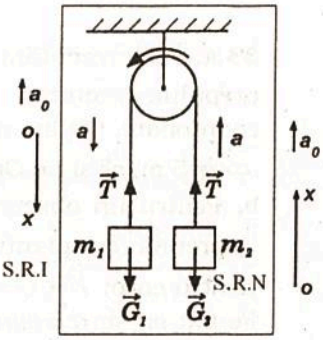
Pentru corpul M : $T-Mg=Ma \Rightarrow T=M(g+a)$=9,6 N (2)



b. Din (1) și (2)$\Rightarrow (m+M)(g-a)=M(g+a) \Rightarrow m=\dfrac{2Ma}{g-a}$=400 g

c. Studiem mișcarea corpului cu masa m: $\vec{G}+\vec{N}=m\cdot\vec{a}$, astfel că scalar $mg-N=ma \Rightarrow N=m(g-a) \Rightarrow N=2Ma$ =3,2 N

30.a.b. Pentru un observator aflat în lift corpurile se deplasează cu accelerația $\vec{a}$. Pentru un observator aflat pe sol, liftul se deplasează cu accelerația $\vec{a}_0$ în sus. Fiecare corp se va deplasa față de observatorul de pe sol cu accelerația formată din accelerația liftului față de sol și din accelerația corpului față de lift, adică cu accelerația $\vec{a}_0 + \vec{a}$. Studiem mișcarea fiecărui corp.



Pentru corpul m_1 vectorial: $\vec{T} + \vec{G}_1 = m_1(\vec{a} + \vec{a}_0)$ și scalar $m_1 g - T = m_1(a - a_0)$ (1)

Pentru corpul m_2: vectorial $\vec{T} + \vec{G}_2 = m_2(\vec{a} + \vec{a}_0)$ și scalar $T - m_2 g = m_2(a_0 + a)$ (2)

Adunând relațiile (1) și (2) obținem $(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a - (m_1 - m_2)a_0 \Rightarrow$

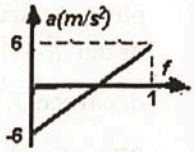
$a = \dfrac{(m_1 - m_2)(g + a_0)}{m_1 + m_2} = 3$ m/s² și $T = m_2 g + m_2(a_0 + a) = 2\dfrac{m_1 m_2 (g + a_0)}{m_1 + m_2} = 4{,}5$ N.

c. Impunem condiția de echilibru scripetelui. Vectorial $\vec{F} = \vec{T} + \vec{T}$ iar scalar: $F = 2T = \dfrac{4m_1 m_2 (g + a_0)}{m_1 + m_2} = 9$ N.

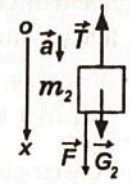
31. Calculăm masele porțiunilor de lanț care atârnă pe cele două părți. Astfel porțiunea de lanț cu lungimea ℓ_0, are masa $m_0 = m\ell_0/\ell = fm$, iar cealaltă porțiune are masa $m_1 = (1-f)m$. Din condițiile de mișcare ale celor două porțiuni de lanț obținem $m_0 g - T = m_0 a$ și $T - m_1 g = m_1 a$. Prin adunarea celor două relații obținem $a = g\dfrac{(m_0 - m_1)}{m_1 + m_0} = g(2f - 1) = 6$ m/s²

b. Considerăm jumătatea de lanț cu masa $m_2 = m/2$ și impunând condiția de mișcare acestei porțiuni de lanț obținem $m_2 g - T = m_2 a$, astfel că $T = m_2(g-a) \Rightarrow T = mg(1-f) = 12$ N

c. Reprezentarea grafică a accelerației lanțului în funcție de fracțiunea f este redată în figura alăturată.

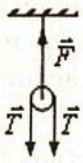


32.a. Impunem condiția de echilibru corpului cu masa m_2, astfel că vectorial $\vec{F} + \vec{T} + \vec{G}_2 = 0$, deoarece $a = 0 \Rightarrow$ scalar $F + m_2 g = T$. Din condiția de echilibru pentru corpul cu masa m_1. Obținem vectorial $\vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{T} = 0$, iar scalar $N + T - m_1 g = 0 \Rightarrow N = (m_1 - m_2)g - F = 30$ N



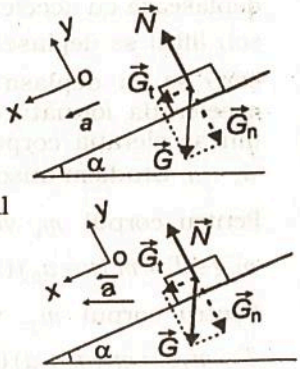
b. Dacă sistemul se mișcă accelerat, atunci pentru corpul m_2 vectorial $\vec{F} + \vec{T} + \vec{G}_2 = m_2\vec{a} \Rightarrow$ scalar $F + m_2 g - T = m_2 a$ (1).

Pentru corpul cu masă m_1 vectorial $\vec{G}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a}$, iar scalar $T - m_1 g = m_1 a$ (2). Din (1)+(2) obținem $F = (m_1 - m_2)g + (m_2 + m_1)a \Rightarrow F = 56$ N



c. Impunem condiția de echilibru scripetului. Rezultanta forțelor este nulă. Vectorial $\vec{F} + \vec{T} + \vec{T} = 0 \Rightarrow$ scalar $F = 2T = 2m_1(g + a) = 144$N

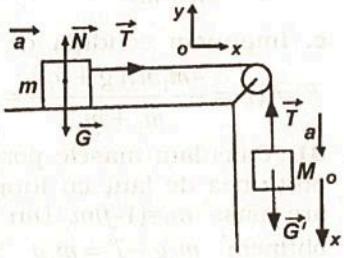
33.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului. Vectorial $\vec{N}+\vec{G}=m\vec{a}$. Proiectăm pe axele de coordonate. Obținem pe Ox $mg\sin\alpha = ma \Rightarrow a = g\sin\alpha$ $\Rightarrow a$=5 m/s² și pe Oy $N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$



b. Pentru un observator de pe sol, corpul se deplasează împreună cu planul cu accelerația acestuia $\vec{a}$. Vectorial pentru corp: $\vec{N}+\vec{G}=m\vec{a}$ și prin proiecții obținem:
Pe Ox: $mg\sin\alpha = ma\cos\alpha \Rightarrow a = gtg\,\alpha = 5{,}78$ m/s²

c. Pe Oy: $N - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha \Rightarrow N = mg/\cos\alpha$ =5,78 N

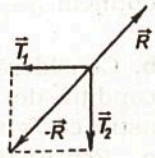
34.a Studiem separat mișcarea fiecărui corp, reprezentând forțele ce acționează asupra fiecăruia și aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare. Proiectăm relațiile vectoriale pe axele de coordonate. Pentru corpul m: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{T}=m\vec{a}$, iar scalar pe Ox:
$T = m\cdot a$ (1)
Pentru corpul M: $\vec{G}'+\vec{T}=M\vec{a}$, iar scalar pe Ox:
$Mg - T = Ma$ (2). Din (1)+(2)$\Rightarrow$



$$Mg = (m+M)a \Rightarrow a = \frac{Mg}{M+m} = 6{,}66 \text{ m/s}^2$$

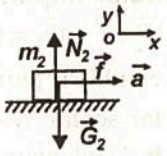
b. $T = ma = \dfrac{mMa}{m+M} = 6{,}66$ N.

c. Impunem condiția de echilibru scripetului.
$\vec{R}$ este reacțiunea în axul scripetului, iar cele două tensiuni $\vec{T}_1$ și $\vec{T}_2$ reprezintă forțele de interacțiune dintre scripete și cele două părți ale firului (cea orizontală și cea verticală).

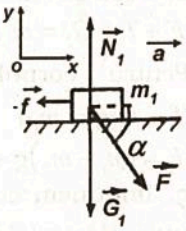


Astfel $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0 \Rightarrow \vec{R}=-\left(\vec{T}_1+\vec{T}_2\right) \Rightarrow R^2 = T_1^2 + T_2^2 = 2T^2$,
deoarece $T_1 = T_2 = T \Rightarrow R = T\sqrt{2} = \dfrac{mMa}{m+M}\sqrt{2} \approx 9{,}4$ N.

35.a. Studiem mișcarea fiecărui corp. Reprezentăm forțele ce acționează asupra fiecărui corp și aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare dintre aceste corpuri. Pentru corpul cu masa m_2: vectorial $\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{f}=m_2\vec{a}$ și scalar $f = m_2 a$ (1), unde f este forța cu care corpul 1 îl împinge pe al doilea.



Pentru corpul cu masa m_1: vectorial $\vec{F}+\vec{N}_1+\vec{G}_1-\vec{f}=m_1\vec{a}$ deoarece asupra corpului m_1 acționează o forță $(-\vec{f})$ cu care m_2 reacționează asupra corpului m_1 conform principiului acțiunii și reacțiunii. Prin proiecția pe axa de coordonate Ox obținem $F\cos\alpha - f = m_1 a$ (2)

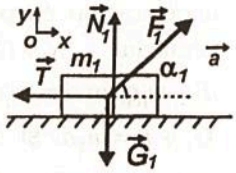


Din (1)+(2)$\Rightarrow$ $F\cos\alpha = (m_1+m_2)a \Rightarrow a = \dfrac{F\cos\alpha}{m_1+m_2}$ =5 m/s²

b. Forța cu care corpul 1 apasă asupra planului este reacțiunea normală. Din proiecția pe axa Oy: $N_1 - m_1 g - F\sin\alpha = 0 \Rightarrow N_1 = F\sin\alpha + m_1 g$ =64,6 N

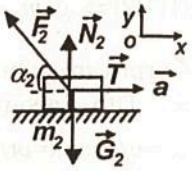
c. Forța cu care primul corp împinge corpul al doilea este $f = m_2 a$ =5 N

36.a. Stabilim sensul în care se deplasează sistemul de corpuri comparând componentele celor două forțe pe orizontală. Cum $F_1 \cos\alpha_1 > F_2 \cos\alpha_2$ sistemul se deplasează spre dreapta accelerat. Pentru corpul m_1, vectorial $\vec{F}_1 + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a}$, iar scalar pe Ox $F_1 \cos\alpha_1 - T = m_1 a$ (1)



Pentru corpul m_2, vectorial obținem $\vec{F}_2 + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{T} = m_2\vec{a}$, iar scalar pe Ox $T - F_2 \cos\alpha_2 = m_2 a$ (2). Din (1)+(2)$\Rightarrow$

$$F_1 \cos\alpha_1 - F_2 \cos\alpha_2 = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{F_1 \cos\alpha_1 - F_2 \cos\alpha_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

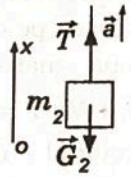


a=0,5 m/s²

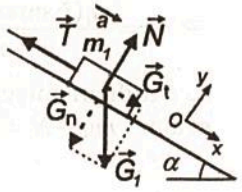
b. Din proiecția pe axa Oy: $N_1 + F_1 \sin\alpha_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g - F_1 \sin\alpha_1$. Deoarece apăsarea exercitată pe suprafața orizontală de către corpul de masă m_1 este nulă, atunci N_1=0$\Rightarrow F_1 = m_1 g / \sin\alpha_1$ =240 N

c. Deoarece sistemul de corpuri se deplasează orizontal cu viteză constantă, a=0$\Rightarrow F_1 \cos\alpha_1 = F_2 \cos\alpha_2 \Rightarrow F_2 / F_1 = \cos\alpha_1 / \cos\alpha_2 \approx 1{,}22$

37.a. Deoarece componenta tangențială a greutății corpului 1 este mai mare decât greutatea corpului 2, corpul 2 urcă iar corpul 1 coboară de-a lungul planului înclinat. Reprezentăm forțele ce acționează asupra fiecărui corp și aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare dintre aceste corpuri. Pentru corpul m_2: vectorial $\vec{T} + \vec{G}_2 = m_2\vec{a}$ și scalar pe Ox $T - m_2 g = m_2 a$ (1), iar pentru corpul m_1: vectorial $\vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{N} = m_1\vec{a}$ și scalar pe Ox obținem $m_1 g \sin\alpha - T = m_1 a$ (2). Din(1)+(2)$\Rightarrow$



$$m_1 g \sin\alpha - m_2 g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{g(m_1 \sin\alpha - m_2)}{m_1 + m_2} = 0{,}71 \text{ m/s}^2$$



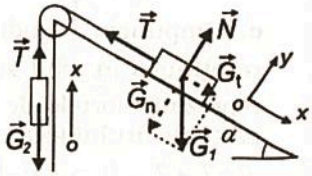
b. Dacă sistemul se deplasează în același sens atunci din

$$m_1 g \sin\alpha - m_2 g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow m_2 = m_1 \frac{g \sin\alpha - a}{g + a} = 0{,}25 \text{ kg}$$

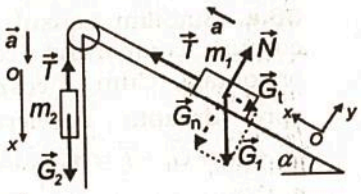
Dacă sistemul se deplasează în sens contrar atunci pentru corpul m_2: $m_2' g - T = m_2' a$ și pentru corpul m_1: $T - m_1 g \sin\alpha = m_1 a$. Prin adunarea celor două relații obținem $m_2' g - m_1 g \sin\alpha = (m_1 + m_2')a \Rightarrow m_2' = m_1 \dfrac{g \sin\alpha + a}{g - a}$ =0,875kg

c. Dacă sistemul rămâne în repaus atunci a=0$\Rightarrow m_1 \sin\alpha = m_2 \Rightarrow$ m_1=m_2/sinα=0,8 kg

38.a. Pentru corpul m_1 vectorial $\vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{T} = 0$ și scalar pe Ox: $m_1 g \sin\alpha - T = 0$ (1). Pentru corpul m_2 vectorial $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$ și scalar pe Ox: $T - m_2 g = 0$ (2). Din (1)+(2)$\Rightarrow m_1 \sin\alpha = m_2 \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{\sin\alpha}$ =2



b. Deoarece $m_2=2m_1$ corpul cu masă m_2 coboară accelerat iar corpul m_1 urcă pe plan. Pentru corpul m_1 vectorial $\vec{N}+\vec{G}_1+\vec{T}=m_1\vec{a}$ şi scalar pe Ox: $T-m_1g\sin\alpha=m_1a$ (1). Pentru corpul m_2 vectorial $\vec{G}_2+\vec{T}=m_2\vec{a}$ şi scalar pe Ox: $m_2g-T=m_2a$ (2). Din

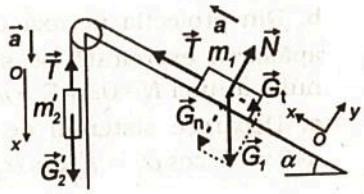


(1)+(2) $\Rightarrow g(m_2-m_1\sin\alpha)=a(m_1+m_2)\Rightarrow a=\dfrac{g(m_2-m_1\sin\alpha)}{m_1+m_2}$ =5/3 m/s²

Corpul m_2 coboară pe distanţa x, iar corpul m_1 urcă pe plan pe aceeaşi distanţă x. Din geometrie $h=x+x\sin\alpha\Rightarrow x=h/(1+\sin\alpha)$=1 m. Cum $x=v_mt$ şi $v_m=v/2\Rightarrow x=vt/2$. Din $a=\Delta v/\Delta t=v/t\Rightarrow v=at\Rightarrow x=at^2/2\Rightarrow t=\sqrt{2x/a}\approx 1{,}09$ s

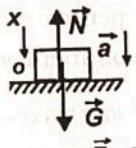
c. Viteza sistemului este $v=at$=1,81 m/s

39.a. Deoarece sistemul de corpuri este în echilibru atunci conform demonstraţiei de la problema precedentă de la punctul **a.**, obţinem $m_1\sin\alpha=m_2\Rightarrow m_2$=1 kg



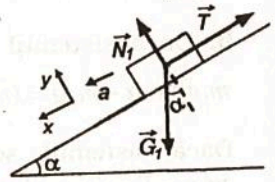
b. Dacă pe corpul 2 se adaugă o masă adiţională m, noua masă a corpului devine $m_2'=m_2+m$. Pentru corpul m_1 vectorial $\vec{G}_1+\vec{N}+\vec{T}=m_1\vec{a}$ şi scalar pe Ox $T-m_1g\sin\alpha=m_1a$ (1). Pentru corpul m_2' pe Ox: vectorial $\vec{G}_2'+\vec{T}=m_2'\vec{a}$ şi scalar pe Ox $m_2'g-T=m_2'a$ (2). Adunând (1)+(2) $\Rightarrow m_2'g-m_1g\sin\alpha=a(m_1+m_2')\Rightarrow m_2'(g-a)=m_1(g\sin\alpha+a)$

$\Rightarrow m_2'=\dfrac{m_1(g\sin\alpha+a)}{g-a}\Rightarrow m=\dfrac{m_1(g\sin\alpha+a)}{g-a}-m_2=0{,}75$ kg



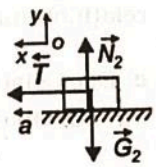
c. Studiem mişcarea corpului adiţional m. Vectorial $\vec{G}+\vec{N}=m\vec{a}$ şi scalar: $mg-N=ma\Rightarrow N=m(g-a)=6$ N.

40.a. Corpul cu masa m_1 va coborî şi va trage corpul cu masă m_2. Pentru m_1 vectorial: $\vec{G}_1+\vec{N}_1+\vec{T}=m_1\vec{a}$ şi scalar pe Ox: $m_1g\sin\alpha-T=m_1a$ (1).



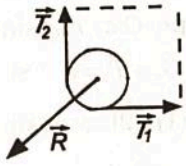
Pentru m_2 vectorial $\vec{G}_2+\vec{N}_2+\vec{T}=m_2\vec{a}$, iar scalar $T=m_2a$ (2). Din (1) şi (2) obţinem prin adunare

$m_1g\sin\alpha=(m_1+m_2)a\Rightarrow a=\dfrac{m_1g\sin\alpha}{m_1+m_2}$ =3,75 m/s²



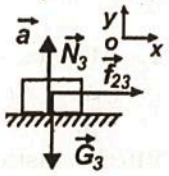
b. $T=\dfrac{m_1m_2g\sin\alpha}{m_1+m_2}$ =7,5 N

c. Impunem condiţia de echilibru scripetului. $\vec{R}$ este reacţiunea în axul scripetului, iar cele două tensiuni $\vec{T}_1$ şi $\vec{T}_2$ reprezintă forţele de interacţiune dintre scripete şi cele două părţi ale firului (cea orizontală şi cea verticală).

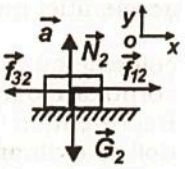


$\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0\Rightarrow\vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2)\Rightarrow R^2=T_1^2+T_2^2=2T^2$, deoarece $T_1=T_2=T\Rightarrow R=T\sqrt{2}\approx 10{,}575$ N.

41.a. Considerâm sistemul un corp cu masa $m=m_1+m_2+m_3$, astfel că asupra acestuia acționează forța F. Accelerația sistemului de corpuri este $a=F/(m_1+m_2+m_3)=1{,}5$ m/s²

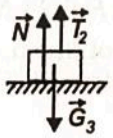


b. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului cu masă m_3 și obținem vectorial $\vec{G}_3+\vec{N}_3+\vec{f}_{23}=m_3\vec{a}$. Scalar pe Ox: $f_{23}=m_3a=3$ N, unde f_{23} reprezintă forța cu care corpul cu masa m_2 împinge corpul cu masa m_3



c. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului cu masă m_2 și obținem vectorial $\vec{G}_2+\vec{N}_2+\vec{f}_{32}+\vec{f}_{12}=m_2\vec{a}$. Scalar pe Ox: $f_{12}-f_{32}=m_3a$, unde f_{12} reprezintă forța cu care corpul cu masa m_1 împinge corpul cu masa m_2. $f_{12}=(m_3+m_2)a=7{,}5$ N

42.a. Impunem condiția de echilibru corpului m_3: $\vec{G}_3+\vec{N}+\vec{T}_2=0$ și scalar $N+T_2-m_3g=0 \Rightarrow T_2=m_3g-N=120$ N.



b. Din condiția de echilibru impusă scripetelui mobil obținem $2\vec{T}_1+\vec{T}_2=0$, astfel că $T_2=2T_1 \Rightarrow T_1=T_2/2=60$ N

c. Impunem condiția de echilibru corpurilor m_1 și m_2: $\vec{G}_1+\vec{T}_1=0$. Scalar obținem $m_1g=T_1 \Rightarrow m_1=T_1/g=6$ kg

43. a. Deoarce ansamlul se mișcă uniform, atunci $F_t=F_R=F_r+3F_{rv}=11$ KN

b. Din principiul II pentru ansamblu obținem $F'_t-F_R=(M+3m)a$, astfel că a=0,35 m/s²

c. Din principiul II pentru ultimul vagon obținem $T-F_{rv}=ma$, astfel că T=9 kN

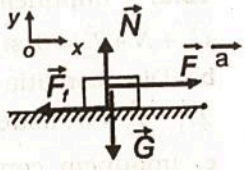
d. Cum $a'=\dfrac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -\dfrac{F_R}{M+3m}=\dfrac{0-v}{\Delta t} \Rightarrow v=\dfrac{F_R\Delta t}{M+3m}=11$ m/s

2.3. Forţa de frecare

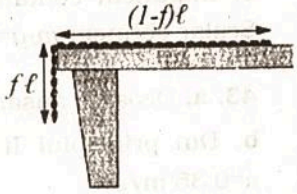
1. Metoda conform materiei obligatorii. Pe baza formulei vitezei medii: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{4-2(t+\Delta t)+(t+\Delta t)^2-(4-2t+t^2)}{\Delta t} \Rightarrow v_m = -2+2t+\Delta t.$

Viteza instantanee se obţine pentru $\Delta t \to 0 \Rightarrow v_0 = 2t-2$. Pe baza formulei acceleraţiei medii $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_m = \frac{2(t+\Delta t)-2-(2t-2)}{\Delta t} = 2\ \text{m/s}^2 \Rightarrow$ acceleraţia medie coincide cu acceleraţia instantanee, deoarece $a = 2\ \text{m/s}^2$ este constantă şi atunci corpul are o mişcare rectilinie uniform accelerată.

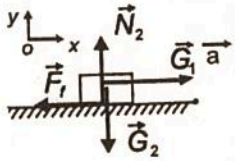
Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii şi obţinem vectorial:



$\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f = m\cdot\vec{a}$. Proiectând pe axele de coordonate obţinem pe *Ox*: $F-F_f=ma$ şi pe *Oy*: $N-mg=0$. Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow F=m(a+\mu g)=3$ N.



2. Împărţim lanţul omogen în două bucăţi: una de lungime $f\ell$ cu masa aferentă $m_1 = fm$, unde m reprezintă masa întregului lanţ şi alta de lungime $(1-f)\ell$ cu masa $m_2 = (1-f)m$. Forţa care trage bucata orizontală de lanţ cu masa m_2, este greutatea bucăţii verticale de lanţ cu masa m_1: $G_1 = m_1 g = fmg$. Considerăm că bucata orizontală m_2 începe să se mişte uniform, deci rezultanta forţelor este nulă. Vectorial $\vec{G}_1+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_f = 0$ şi scalar prin proiecţia pe axele de coordonate obţinem: pe *Ox*: $G_1-F_f=0$ şi pe *Oy*:

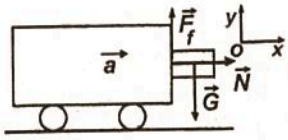


$N_2 - G_2 = 0 \Rightarrow N_2 = G_2 = m_2 g = (1-f)mg$

$F_f = \mu N_2 = \mu(1-f)mg \Rightarrow fmg = \mu(1-f)mg \Rightarrow$

$\mu = f/(1-f) = 0{,}25$

3. Deoarece corpul cu masa m nu cade, el se deplasează odată cu căruciorul, adică cu acceleraţia $\vec{a}$ pe care căruciorul o are faţă de un observator de pe sol. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului m şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f = m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate şi obţinem: pe *Ox*: $N = ma$ şi pe *Oy*:

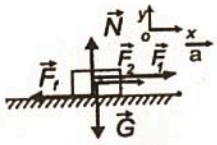


$mg - F_f = 0 \Rightarrow F_f = mg$.

Dar conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu ma$. Din cele două relaţii obţinem $mg = \mu ma \Rightarrow \mu = g/a = 0{,}5$. Deoarece $\mu < 1$, problema este posibilă numai dacă $a > g \Rightarrow a > 10\ \text{m/s}^2$.

4.a. Pe baza relaţiei $a=\Delta v/\Delta t=v_1/t_1=0{,}3\ \text{m/s}^2$, deoarece din grafic $v_1=1{,}2$ m/s şi $t_1=4$ s

b. Reprezentăm forţele care acţionează asupra maşinii şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii:



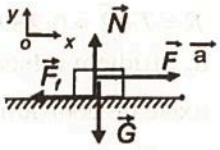
$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $F_1+F_2-F_f=m\cdot a \Rightarrow F_f=F_1+F_2-ma$ =500 N, astfel că $\mu=F_f/mg$=0,0625

c. Distanța parcursă de mașină este $d=v_m t=v_1 t/2$=2,4 m cu v_1=1,2 m/s

d. Din momentul încetării acțiunii celor doi oameni mașina va avea o mișcare uniform încetinită cu accelerația imprimată de forța de frecare, astfel că $a_1=-F_f/m=-\mu g$. Cum $a_1=\Delta v/\Delta t=-v_1/t_{op} \Rightarrow t_{op}=v_1/\mu g$=1,92 s

5.a. Accelerația corpului este $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v_1/t_1$=2 m/s², deoarece din grafic v_1=10 m/s și t_1=5 s

b. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $F-F_f=ma$ și pe Oy: $N-mg=0$, astfel că din $F_f=\mu N=\mu mg$, obținem $\mu=(F-ma)/mg$=0,3



c. Din momentul încetării acțiunii forței F, corpul va avea o mișcare uniform încetinită cu accelerația imprimată de forța de frecare, astfel că $a_1=-F_{f1}/m=-\mu_1 g$. Cum $a_1=\Delta v/\Delta t=-v_1/\Delta t$=-5 m/s², deoarece corpul se oprește în $\Delta t=t_2-t_1$=2 s, atunci $\mu_1=-a_1/g$=0,5

6.a. Cum $a=\Delta v/\Delta t=(v-v_0)/t \Rightarrow v=v_0+at$, din identificarea coeficienților obținem v_0=8 m/s și a=-4 m/s²

b. Din $a=-F_f/m$ și $F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow a=-\mu g$, obținem $\mu=-a/g$=0,4

c. Corpul are o mișcare rectilinie uniform încetinită, astfel că distanța parcursă de corp până la oprire este $d=v_m t_{op}=v_0\ t_{op}/2$. În momentul opririi $v=0 \Rightarrow t_{op}=-v_0/a \Rightarrow d=-v_0^2/2a$=8 m

7.a. Deoarece rezultanta celor două forțe este paralelă cu planul orizontal, asupra corpului acționează forțele ca în figura 5.b., astfel că $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Scalar obținem: pe Ox: $F-F_f=ma$ și pe Oy: $N-mg=0$ și cum din legea forței de frecare $F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow F=m(a+\mu g)$=300 N

b. Din geometrie $\cos\alpha_1=F_1/F=0{,}5 \Rightarrow \alpha_1=60^0$ și cum $\alpha_1+\alpha_2=90^0 \Rightarrow \alpha_2=30^0$. Din $\mathrm{tg}\,\alpha_1=F_2/F_1 \Rightarrow F_2=F_1\mathrm{tg}\,\alpha_1$=259,5 N

c. Dacă acțiunea forțelor F_1 și F_2 încetează iar corpul va avea o mișcare rectilinie uniform încetinită, astfel că $a_1=-F_f/m$ și din $F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow a_1=-\mu g$=-2 m/s²

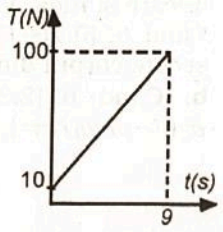
8.a. Forța orizontală cu care trebuie să tragă omul de fir este $F=T$. Deoarece corpul se deplasează cu viteză constantă, rezultanta forțelor este nulă, astfel că $\vec{T}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$. Pe axa Ox: $T-F_f=0$ și pe Oy: $N-mg=0$. Cum $F_f=\mu N=\mu mg$, obținem $T=\mu mg$=40 N

b. Impunem condiția de echilibru axului scripetelui și obținem: $\vec{F}+\vec{T}+\vec{T}=0$, iar scalar $F=2T$=80 N

c. Pe baza relației vectoriale $\vec{T}_1+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\vec{a}$ obținem scalar pe axa Ox: $T_1-F_f=ma$ și cum $F_f=\mu N=\mu mg$ obținem $a=(T_1-\mu mg)/m$=1 m/s²

9.a. Firul se rupe când $F=T_{max}$, astfel că $10t+10=100 \Rightarrow t$=9 s

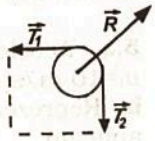
b. Cum $T=F=10t+10$, atunci când $t=0 \Rightarrow F$=10 N, iar când t=9 s $\Rightarrow F$=100 N. Dependența forței de tensiune din fir în funcție



de timp, în primele 9 s de la începutul acțiunii forței F este redată în graficul alăturat.

c. Pe baza relației vectoriale $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\vec{a}$ obținem scalar pe axa Ox: $F-F_f=ma$ și cum $F_f=\mu N=\mu mg$ obținem $a=(F-\mu mg)/m=0{,}2$ m/s², deoarece la $t=10$ s forța $F=110$ N

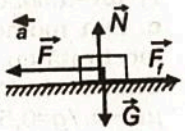
10.a. Forța care se exercită în fir este chiar $F=T$. Din condiția de echilibru impusă scripetelui $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{R}=0$, scalar obținem



$R=T\sqrt{2}\approx 0{,}282$ N, deoarece $T_1=T_2=T$

b. Studiem mișcarea accelerată a corpului, astfel că $\vec{T}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Pe axele de coordonate obținem pe Ox: $T-F_f=ma$ și cum $F_f=\mu N=\mu mg$ obținem

$a=\dfrac{T}{m}-\mu g=1$ m/s²

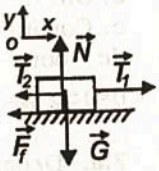


c. Din $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t_1}=\dfrac{v}{\Delta t_1}\Rightarrow v=a\Delta t_1=1$ m/s

d. Din momentul încetării acțiunii forței F corpul se va mișca frânat. Astfel $-F_f=ma'\Rightarrow -\mu mg=ma'\Rightarrow a'=-\mu g$.

Cum $a'=\dfrac{\Delta v_2}{\Delta t_2}=\dfrac{0-v}{\Delta t_2}\Rightarrow \Delta t_2=\dfrac{v}{\mu g}=1$ s $\Rightarrow \Delta t_1+\Delta t_2=2$ s

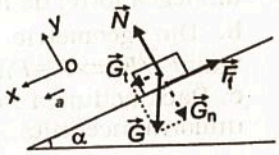
11.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$.



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $T_1-T_2-F_f=ma$ și pe Oy: $N-mg=0$ și cum $F_f=\mu N=\mu mg$ obținem

$\mu=\dfrac{T_1-T_2-ma}{mg}=0{,}04$

b. Cum $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v}{t}\Rightarrow v=at=1$ m/s



c. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $mg\sin\alpha-F_f=ma$ și pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0$.

Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha$, astfel $a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$.

Cum distanța coborâtă este $\ell=\dfrac{h}{\sin\alpha}=v_m t=\dfrac{vt}{2}=\dfrac{at^2}{2}\Rightarrow t=\sqrt{\dfrac{2h}{a\sin\alpha}}$, astfel că

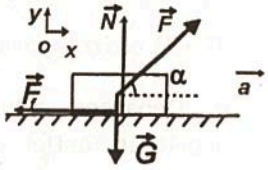
$v=\sqrt{2ah/\sin\alpha}=\sqrt{2gh(1-\mu ctg\alpha)}\approx 23{,}6$ m/s

12.a. Asupra blocului de beton acționează forța de tracțiune F_t și o forță de frecare statică. Valoarea forței de frecare la alunecare este $F_{fa}=\mu mg=10$ N.
Când $t\in[0;1]$s $F_t<F_{fa}$, înseamnă că forța de tracțiune este insuficientă pentru a scoate corpul din repaus $\Rightarrow$ viteza blocului de beton este nulă.

b. Când $t\in[2;3]$s din grafic $F_t=20$ N. Obținem $F_t-F_{fa}=ma\Rightarrow F_t-\mu mg=ma\Rightarrow$ $a=(F_t-\mu mg)/m=1$ m/s²

c. În intervalul de timp $t\in[1;6]$s corpul se mişcă şi prin urmare forţa de frecare dintre blocul de beton şi suprafaţa orizontală este cea de alunecare $F_{fa}=\mu mg=10$ N. La momentul $t=0,3$ s corpul se află în repaus iar forţa de frecare statică este egală cu cea de tracţiune, astfel că $F_{fs}=F_{t1}$. Deoarece forţa de tracţiune în intervalul de timp $t\in[0;1]$s creşte direct proporţional cu timpul, după $t=0,3$ s va avea valoarea $F_{t1}=3$ N $\Rightarrow F_{fs}=3$ N

d. Asupra blocului în intervalul de timp $t\in[4;5]$s acţionează simultan forţa de tracţiune şi forţa de frecare la alunecare, astfel că forţa rezultantă este $F=F_t-F_{fa}=0$ N $\Rightarrow$ corpul are o mişcare rectilinie şi uniformă



13.a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Obţinem pe Ox: $F\cos\alpha-F_f=ma$ şi pe Oy: $N+F\sin\alpha-mg=0\Rightarrow N=mg-F\sin\alpha$. Conform legii frecării $F_f=\mu N\Rightarrow$

$$F_f=\mu(mg-F\sin\alpha)\Rightarrow F\cos\alpha-\mu(mg-F\sin\alpha)=ma\Rightarrow F=\frac{m(a+\mu g)}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}=15,35\text{N}$$

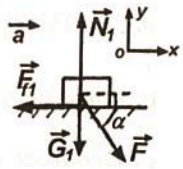
b. $N=mg-F\sin\alpha=10,28$ N

c. Deoarece corpul se mişcă uniform cu viteza, accelerația corpului este nulă $\Rightarrow a=0\Rightarrow F=\dfrac{\mu\cdot mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}=5,11$ N

14.a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$, iar prin proiecţia pe axele de coordonate (desen 13.a.) obţinem: pe Ox: $F\cos\alpha-F_f=ma$ şi pe Oy: $N+F\sin\alpha-mg=0\Rightarrow N=mg-F\sin\alpha$. Din $F_f=\mu N\Rightarrow F_f=\mu(mg-F\sin\alpha)\Rightarrow$ $F_f=\mu(mg-F\sin\alpha)\Rightarrow F\cos\alpha-\mu(mg-F\sin\alpha)=ma\Rightarrow a=1$ m/s²

b. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t\Rightarrow v=at=15$ m/s

c. După încetarea acţiunii forţei F, asupra corpului acţionează numai forţa de frecare, astfel că că accelerația corpului este $a_1=-F_f/m$ şi din $F_f=\mu N=\mu mg$ $\Rightarrow a_1=-\mu g$. Cum $a_1=\Delta v/\Delta t=-v/\Delta t_{op}\Rightarrow\Delta t_{op}=v/\mu g=2,595$ s



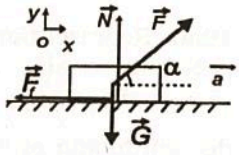
15.a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Obţinem pe Ox: $F\cos\alpha-F_f=ma$ şi pe Oy:

$N-mg-F\sin\alpha=0\Rightarrow N=mg+F\sin\alpha\Rightarrow F_f=\mu N\Rightarrow$

$$F_f=\mu(mg+F\sin\alpha)\Rightarrow F\cos\alpha-\mu(mg+F\sin\alpha)=ma\Rightarrow F=\frac{m(a+\mu g)}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\approx 9,68\text{ N}$$

b. $N=mg+F\sin\alpha\approx 28,37$ Na

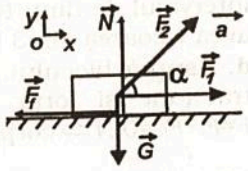
c. Dacă de corp se trage cu forţa F, pentru ca acest corp să nu apese asupra planului orizontal trebuie ca $N=0$. Cum pe Oy: $N+F\sin\alpha-mg=0\Rightarrow F=mg/\sin\alpha=23,12$ N şi în acest caz accelerația saniei este:



$a'=F\cos\alpha/m=g\cdot ctg\,\alpha\approx 5,78$ m/s²

16.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și deoarece acest corp se află în repaus, rezultanta forțelor este nulă: $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.



Pe Oy: $N-mg+F_2\sin\alpha=0 \Rightarrow N=mg-F_2\sin\alpha\approx 51{,}35$ N

b. Pe Ox: $F_1+F_2\cos\alpha-F_f=0$ și cum $F_f=\mu N \Rightarrow$

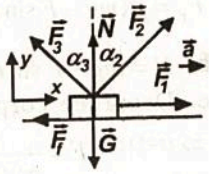
$F_f=\mu(mg-F_2\sin\alpha)$, astfel că

$$F_1+F_2\cos\alpha=\mu(mg-F_2\sin\alpha)\Rightarrow \mu=\frac{F_1+F_2\cos\alpha}{mg-F_2\sin\alpha}\approx 0{,}68$$

c. Deoarece valoarea coeficientului de frecare scade, corpul se va mișca accelerat, astfel că $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația pe axa Ox:

$$F_1+F_2\cos\alpha-F_f=ma \text{ și } F_f=\mu(mg-F_2\sin\alpha)\Rightarrow a=\frac{F_1+F_2(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{m}-\mu g$$

$a\approx 2{,}95$ m/s²



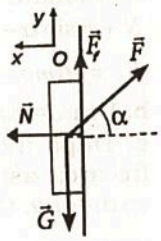
17.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii:

$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe Ox: $F_1+F_2\sin\alpha_2-F_3\sin\alpha_3-F_f=ma\Rightarrow F_f=F_1+F_2\sin\alpha_2-F_3\sin\alpha_3-ma$=3,46 N

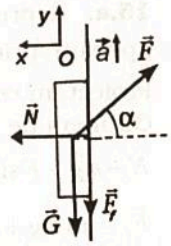
b. pe Oy: $N+F_2\cos\alpha_2+F_3\cos\alpha_3-mg=0\Rightarrow N=mg-F_2\cos\alpha_2-F_3\cos\alpha_3$=6 N.

c. Coeficientul de frecare la alunecare este $\mu=F_f/N$=0,576



18.a. După reprezentarea forțelor, impunem condiția ca acest corp să se afle în repaus. În acest caz, rezultanta forțelor este nulă: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_F+\vec{F}=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $N-F\cos\alpha=0\Rightarrow N=F\cos\alpha$ și pe Oy: $F_f+F\sin\alpha-mg=0$. Cum $F_f=\mu N=\mu F\cos\alpha\Rightarrow$

$$mg=F(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\Rightarrow F=\frac{mg}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}=40\text{ N}$$

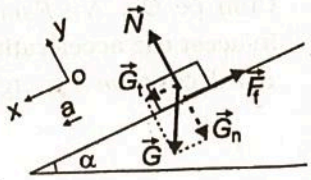


b. Forța de apăsare normală este: $N=\dfrac{mg\cos\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}\approx 34{,}6$ N.

c. Deoarece corpul urcă accelerat, pe baza principiului al doilea al dinamicii $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_F+\vec{F}=m\vec{a}$ și prin proiecție pe axa Ox obținem: $F\sin\alpha-mg-F_f=ma$ și pe Oy $N-F\cos\alpha=0$, astfel că

$F_f=\mu N=\mu F\cos\alpha$. Astfel $F\sin\alpha-mg-\mu F\cos\alpha=ma\Rightarrow F=\dfrac{m(a+g)}{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}$=132N

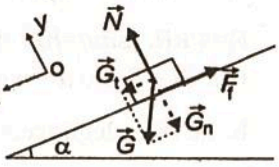
19.a. Reprezentăm forțele ce acționează asupra snowmobilului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Vectorial: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem: pe Ox: $mg\sin\alpha-F_f=m\cdot a$ și pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0$.



Pe baza legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \Rightarrow$ $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$=const$\Rightarrow$ snowmobilul are o mişcare rectilinie uniform accelerată. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=(v-v_0)/t \Rightarrow a=3$ m/s²

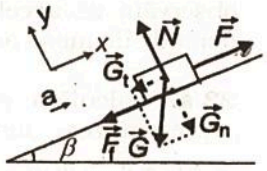
b. $F_f = m(g\sin\alpha - a)$=1600 N

c. Din $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \Rightarrow \mu = \dfrac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} \approx 0{,}231$



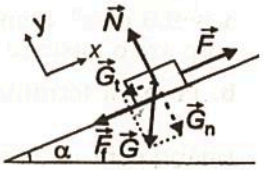
20.a. Deoarece corpul începe să alunece pe planul înclinat, mişcarea acestuia este uniformă şi rezultanta forţelor este nulă, conform principiului 1 al mecanicii. $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate: pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = mg\sin\alpha$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$. Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha$ $\Rightarrow$ tgα=0,578. Unghiul α pentru care corpul lunecă uniform pe planul înclinat se numeşte unghi de frecare, astfel încât tangenta unghiului de frecare reprezintă fizic coeficientul de frecare la alunecare

b. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\cdot\vec{a}$.

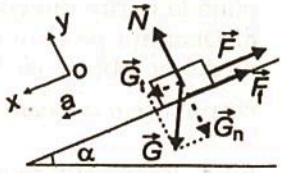


Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate.
Pe *Ox*: $F - mg\sin\beta - F_f = ma$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\beta = 0$
$\Rightarrow N = mg\cos\beta$ Conform legii frecării:
$F_f = \mu N = \mu\cdot mg\cos\beta \Rightarrow F - mg\sin\beta - \mu mg\cos\beta = ma$
$\Rightarrow F = m(g\sin\beta + \mu g\cos\beta + a)$=6,77 N

c. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/\Delta t \Rightarrow v=a\Delta t$. Deoarece viteza corpului creşte direct proporţional cu timpul, viteza medie este $v_m=v/2=a\Delta t/2$, astfel că distanţa parcursă de corp este $d=v_m\Delta t=a\Delta t^2/2$=4 m



21.a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului ca în figură şi impunem condiţia ca acest corp să mişte uniform (a=0) astfel că: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relaţia pe axele de coordonate. Obţinem pe *Ox*:



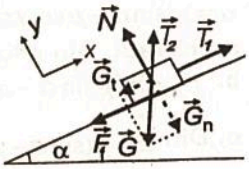
$F - mg\sin\alpha - F_f = 0$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0$ şi din $F_f = \mu N = \mu\cdot mg\cos\alpha \Rightarrow F - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow$

$\mu = \dfrac{F - mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha}$=0,2

b. Deoarece forţa cu care se trage de fir este mai mică decât cea iniţială corpul coboară, astfel că $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$, iar scalar prin proiecţia pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F - F_f = ma$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow$
$N = mg\cos\alpha$ şi din $F_f = \mu N = \mu\cdot mg\cos\alpha \Rightarrow$
$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - F/m$=0,4 m/s²

c. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/\Delta t \Rightarrow v=a\Delta t$=0,8 m/s

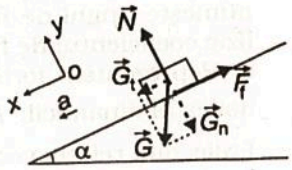
22.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului ca în figură și impunem condiția ca acest corp să miște uniform (a=0) astfel că: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$. Proiectăm relația pe axele de coordonate: Pe Ox: $T_1+T_2\sin\alpha-mg\sin\alpha-F_f=0 \Rightarrow F_f=T_1+(T_2-mg)\sin\alpha$



F_f=4 kN, ($\sin\alpha=h/\ell$=0,6 și $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ =0,8) și pe Oy: $N+T_2\cos\alpha-mg\cos\alpha=0 \Rightarrow N=(mg-T_2)\cos\alpha$

b. Pe baza legii frecării obținem: $\mu=\dfrac{F_f}{N}=\dfrac{T_1+(T_2-mg)\sin\alpha}{(mg-T_2)\cos\alpha}$=0,25

c. Accelerația cu care coboară liber lada goală pe planul înclinat se află reprezentând forțele și scriind principiul fundamental al dinamicii, astfel că: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem: pe Ox: $mg\sin\alpha-F_f=m\cdot a$ și pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0$. Pe baza legii frecării $F_f=\mu N$ $\Rightarrow$ $mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=ma \Rightarrow a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$=4m/s² $\Rightarrow$ observăm că accelerația cu care coboară lada goală nu depinde de masa acesteia



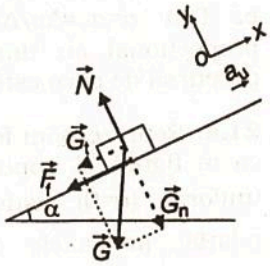
23.a. Calculăm accelerația cu care urcă corpul pe planul înclinat, după reprezentarea forțelor și aplicarea principiul al doilea al dinamicii: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}_u$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:

pe Ox: $-F_f-mg\sin\alpha=m\cdot a_u$ și pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0$

Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha \Rightarrow$

$-\mu mg\cos\alpha-mg\sin\alpha=ma_u \Rightarrow a_u=-g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha) \Rightarrow$

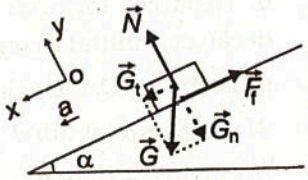
a_u=−9,9 m/s². Semnul "−" al accelerației ne arată că acest corp are o mișcare uniform frânată.



b. Pe baza formulei accelerației medii: $a_m=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v-v_0}{t-t_0}$ și ținând cont că $a_m=a$, iar $t_0=0 \Rightarrow v=v_0+at$. Calculăm timpul până la oprire din condiția $v=0 \Rightarrow 0=v_0+at_{op} \Rightarrow t_{op}=-v_0/a$=1 s.

c. Distanța pe care o parcurge corpul până la oprire este $s_{op}=v_m t_{op}$, unde viteza medie se obține ca fiind media aritmetică a valorilor inițială și finală deoarece corpul are o mișcare uniform încetinită, astfel că $v_m=v_0/2 \Rightarrow s_{op}=-v_0^2/2a$=4,95 m.

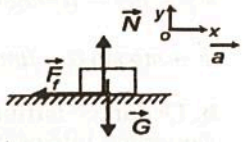
24.a. Reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Vectorial: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $mg\sin\alpha-F_f=m\cdot a$ și pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0 \Rightarrow N=mg\cos\alpha$.



Pe baza legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=ma \Rightarrow$

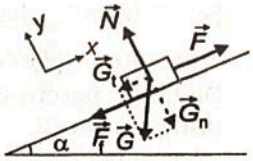
$a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\approx 2{,}84$ m/s².

b. La baza planului corpul are o viteză cu care se mişcă în continuare pe planul orizontal. Aflăm accelerația corpului pe planul orizontal. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:pe *Ox*: $-F_f=m\cdot a$ şi pe *Oy*: $N-G=0\Rightarrow N=mg$. Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\Rightarrow -\mu mg=ma\Rightarrow a=-\mu g=-2{,}5$ m/s², iar semnul minus ne arată că acest corp are o mişcare încetinită.



c. Pentru ca acest corp să urce uniform pe planul înclinat, trebuie ca $\vec{a}=0$, deci rezultanta forțelor care acționează asupra lui să fie nulă: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe *Ox*: $F-mg\sin\alpha-F_f=0$ şi pe *Oy*: $N-mg\cos\alpha=0\Rightarrow$

$F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha\Rightarrow F=mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$=14,325 N



25.a. Pe baza interpretării geometrice distanța parcursă de corp până la oprire este aria triunghiului, astfel că *d*=*A*=4 m

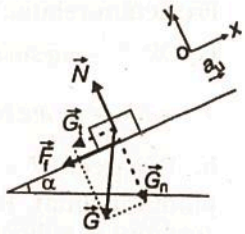
b. Studiem mişcarea corpului la urcarea pe plan înclinat. Astfel cum $a_u=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{0-v_0}{\Delta t}=-8$ m/s². Reprezentăm forțele şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}_u$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe *Ox*: $-F_f-mg\sin\alpha=m\cdot a_u$ şi pe *Oy*: $N-mg\cos\alpha=0$

Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha\Rightarrow$

$-\mu mg\cos\alpha-mg\sin\alpha=ma_u\Rightarrow a_u=-g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\Rightarrow$

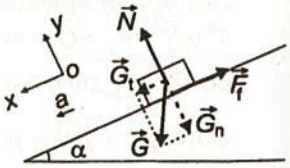
$\mu=-\left(tg\alpha+\frac{a_u}{g\cos\alpha}\right)$=0,25, deoarece $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$=0,8



c. Studiem mişcarea corpului la coborârea pe plan înclinat. Reprezentăm forțele şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe *Ox*: $mg\sin\alpha-F_f=m\cdot a$ şi pe *Oy*: $N-mg\cos\alpha=0$.



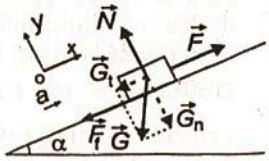
Pe baza legii frecării obținem:

$F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha\Rightarrow mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=ma\Rightarrow a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$.

Din definiția accelerației $a=\frac{\Delta v'}{\Delta t'}=\frac{v}{\Delta t'}\Rightarrow\Delta t'=\frac{v}{a}$=2 s, astfel că t_1=3 s

d. Distanța parcursă de corp la coborârea pe planul înclinat până când viteza revine la valoarea inițială este egală cu aria celui de-al doilea triunghi, astfel că *d'*=*A'*=8 m, iar d_{total}=*d*+*d'*=12 m.

26.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra saniei şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $F-mg\sin\alpha-F_f=ma$ şi pe *Oy*: $N-mg\cos\alpha=0$. Conform legii frecării:

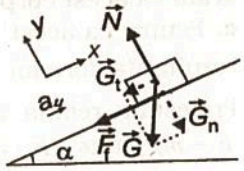


$F_f = \mu N = \mu \cdot mg\cos\alpha \Rightarrow$

$F - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 0{,}5\ \text{m/s}^2$

b. Deoarece sania se mişcă accelerat distanţa parcursă de sanie este $d=v_m t$. Deoarece viteza corpului creşte direct proporţional cu timpul, viteza medie este $v_m=v/2$. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t \Rightarrow v=at$, astfel că $v_m=at/2 \Rightarrow d=at^2/2=9$ m

c. După încetarea acţiunii forţei F, sania va avea o mişcare uniform încetinită, astfel că $\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=m\cdot\vec{a}_u$.



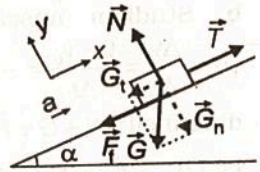
Pe Ox: $-mg\sin\alpha - F_f = m\cdot a$ şi pe Oy: $N - mg\cos\alpha = 0$.

Pe baza legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow$

$-mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \Rightarrow a = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$

Distanţa parcursă de corp până la oprire este $d_{op}=v_m t_{op}$, unde $v_m=v/2$, astfel că $d_{op}=vt_{op}/2$. Cum $a_u=\Delta v/\Delta t=-v/t_{op} \Rightarrow t_{op}=-v/a_u$ $\Rightarrow d_{op}=-v^2/2a_u=v^2/2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)=0{,}45$ m, unde $v=at=3$ m/s

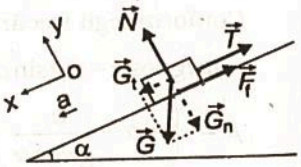
27.a. Deoarece $T > mg\sin\alpha$ corpul se va deplasa pe planul înclinat în sus. Reprezentăm forţele ce acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=m\vec{a}$.



Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate.

Pe Ox: $T - mg\sin\alpha - F_f = ma$ şi pe Oy: $N - mg\cos\alpha = 0$ şi c

$F_f = \mu N = \mu \cdot mg\cos\alpha \Rightarrow a = \frac{T - mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m} = 7{,}5\text{m/s}^2$



b. Deoarece $T < mg\sin\alpha$, corpul se va mişca în jos pe planul înclinat. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii:

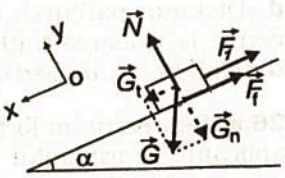
$\vec{T}+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate:

pe Ox: $mg\sin\alpha - T - F_f = ma$ şi pe Oy: $N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$.

Cum $F_f = \mu N = \mu \cdot mg\cos\alpha \Rightarrow a = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - T}{m} = 0{,}5\ \text{m/s}^2$

c. Dacă corpul urcă uniform în situaţia de la punctul **a.**, impunem condiţia ca $a=0 \Rightarrow T = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)=7{,}5$ N. Dacă corpul coboară uniform în situaţia de la **b.**, impunem condiţia ca $a=0 \Rightarrow T = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)=2{,}5$ N

28.a. Deoarece corpul este menţinut în repaus, rezultanta forţelor ce acţionează asupra corpului este nulă, iar forţa F_1 este aplicată de-a lungul planului în sus, la fel ca şi forţa de frecare. Utilizăm principiul al doilea al dinamicii, după reprezentarea forţelor care acţionează asupra corpului.

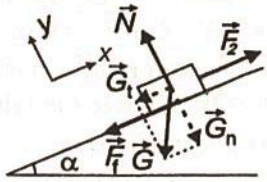


Obţinem: $\vec{F}_1+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=0$.

Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $mg\sin\alpha - F_1 - F_f = 0$ şi pe Oy: $N - mg\cos\alpha = 0$.

Cum $F_f = \mu N = \mu \cdot mg\cos\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = F_1$ (1). Studiem mişcarea uniformă în sus pe planul înclinat a corpului. Pe baza principiului al doilea al dinamicii, după reprezentarea forţelor care acţionează asupra corpului, obţinem vectorial: $\vec{F}_2 + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = 0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $F_2 - mg\sin\alpha - F_f = 0$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0$.

$F_f = \mu N = \mu \cdot mg\cos\alpha \Rightarrow F_2 = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$ (2).



Adunăm relaţiile (1) şi (2): $F_1 + F_2 = 2mg\sin\alpha \Rightarrow$

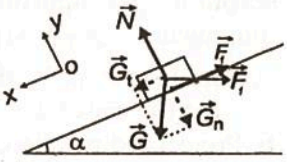
$$m = \frac{F_1 + F_2}{2g\sin\alpha} = 1{,}41 \text{ kg}$$

b. Împărţim relaţia (1) la relaţia (2) şi obţinem:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \Rightarrow \mu = \frac{(F_2 - F_1)}{(F_1 + F_2)} tg\alpha = 0{,}5.$$

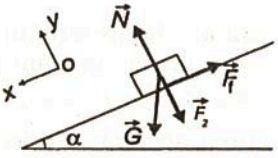
c. Unghiul de frecare este unghiul planului înclinat pentru care un corp lăsat liber pe plan coboară uniform, astfel că $\vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = 0$. Pe axe obţinem prin proiecţii: pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F_f = 0$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0$, astfel că din $F_f = \mu N = \mu \cdot mg\cos\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = \mu = 0{,}5$

29.a. Studiem echilibrul corpului în situaţia în care asupra corpului se aplică o forţă orizontală. După reprezentarea forţelor, aplicăm principiul al doilea al dinamicii şi obţinem $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_1 + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Astfel pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F_f - F_1\cos\alpha = 0$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha - F_1\sin\alpha = 0$.



$F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha + F_1\sin\alpha) \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \mu F_1\sin\alpha - F_1\cos\alpha = 0$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$



Studiem echilibrul corpului în situaţia în care asupra corpului se aplică o forţă normală. Reprezentăm forţele şi ţinem cont că în repaus, rezultanta forţelor este nulă $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_2 + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm pe axele de coordonate ecuaţia vectorială şi obţinem pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F_f = 0$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha - F_2 = 0 \Rightarrow$

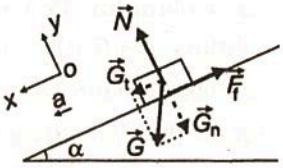
$F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha + F_2) \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \mu F_2 = 0 \Rightarrow$

$$F_2 = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\mu}.$$

Cum $F_2 = nF_1 \Rightarrow \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\mu} = n\dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \Rightarrow \mu = \dfrac{\cos\alpha}{n - \sin\alpha} \approx 0{,}31$

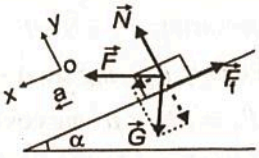
b. Dacă corpul este lăsat liber pe planul înclinat din condiţia vectorială $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$, prin proiecţia pe axele de coordonate, obţinem: pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F_f = m \cdot a$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0$. Pe baza legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma$

$\Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \approx 4{,}87 \text{ m/s}^2$



Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t \Rightarrow v=at=9{,}74$ m/s

c. Distanța parcursă de corp este $d=v_m t$, unde $v_m=v/2$, astfel că $d=vt/2=at^2/2$ $\Rightarrow d=9{,}74$ m



30.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe Ox: $F\cos\alpha+mg\sin\alpha-F_f=ma$ și pe Oy: $N+F\sin\alpha-mg\cos\alpha=0$.

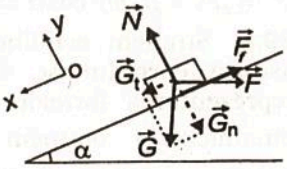
Din legea frecării:

$F_f=\mu N=\mu(mg\cos\alpha-F\sin\alpha)\Rightarrow F\cos\alpha+mg\sin\alpha-\mu(mg\cos\alpha-F\sin\alpha)=ma$

$\Rightarrow a=\dfrac{F(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{m}+g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\approx 4{,}7$ m/s²

b. Apăsarea corpului pe planul înclinat este $N=mg\cos\alpha-F\sin\alpha\approx 16{,}3$ N

c. Pentru ca acest corp să nu mai apese pe planul înclinat, trebuie ca $N=0$ $\Rightarrow F=mgctg\,\alpha\approx 34{,}6$ N

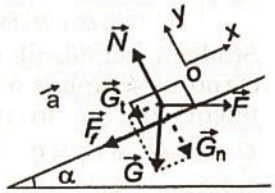


31.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe Oy: $N-F\sin\alpha-mg\cos\alpha=0\Rightarrow N=F\sin\alpha+mg\cos\alpha=65$ N.

b. Proiectând pe axa Ox:

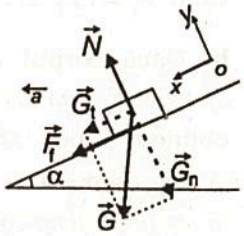
$mg\sin\alpha-F\cos\alpha-F_f=0\Rightarrow F_f=mg\sin\alpha-F\cos\alpha\approx 8{,}65$ N

c. Din legea frecării: $F_f=\mu N\Rightarrow\mu=\dfrac{F_f}{N}=\dfrac{mg\sin\alpha-F\cos\alpha}{mg\cos\alpha+F\sin\alpha}\approx 0{,}133$



32.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}$. Deoarece $F\cos\alpha\geq mg\sin\alpha$, corpul va urca acclerat. Proiectăm relația pe axele de coordonate. Pe Ox: $F\cos\alpha-F_f-mg\sin\alpha=ma$ și pe Oy: $N-F\sin\alpha-mg\cos\alpha=0\Rightarrow N=F\sin\alpha+mg\cos\alpha$. Din legea frecării $F_f=\mu N\Rightarrow a=\dfrac{F(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}{m}-g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\approx 3{,}33$ m/s²

b. Deoarece corpul urcă uniform, $a=0\Rightarrow F=\dfrac{mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\approx 20{,}76$ N

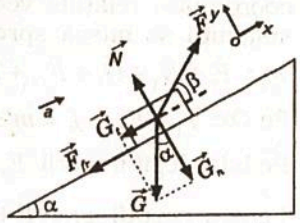


c. Reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului. Impunem condiția ca rezultanta forțelor să fie egală cu $m\cdot\vec{a}$, deoarece față de un observator aflat pe sol corpul se deplasează odată cu planul, adică cu accelerația orizontală $\vec{a}$ a planului. Pe baza principiului al doilea al dinamicii se obține: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe axa Ox: $mg\sin\alpha+F_f=ma\cos\alpha$ și pe Oy: $N=mg\cos\alpha+ma\sin\alpha\Rightarrow N-mg\cos\alpha=ma\sin\alpha$.

Cum $F_f = \mu N \Rightarrow F_f = \mu(mg\cos\alpha + ma\sin\alpha) \Rightarrow$

$mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + \mu ma\sin\alpha = ma\cos\alpha \Rightarrow a = \dfrac{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \approx 10{,}38\ \text{m/s}^2$

33.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Deoarece corpul se mișcă uniform, vectorial obținem $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, deoarece $\vec{a} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.



Pe Ox: $F\cos\beta - F_f - mg\sin\alpha = 0$ și pe Oy:

$N + F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0$. Din legea forței de frecare:

$F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha - F\sin\beta) \Rightarrow F\cos\beta - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin\beta - mg\sin\alpha = 0$

$\Rightarrow F = \dfrac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \approx 8{,}935\ \text{N}.$

b. Forța de apăsare normală este: $N = mg\cos\alpha - F\sin\beta = \dfrac{mg\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \approx 2{,}35\ \text{N}$

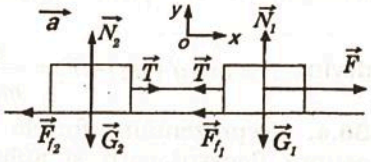
c. Dacă corpul se mișcă accelerat cu accelerația $\vec{a}$, atunci relația vectorială devine: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe Ox: $F\cos\beta - F_f - mg\sin\alpha = ma$ și pe Oy: $N + F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0$. Din $F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha - F\sin\beta) \Rightarrow$

$F\cos\beta - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin\beta - mg\sin\alpha = ma \Rightarrow F = \dfrac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + ma}{\cos\beta + \mu\sin\beta} = 9{,}83\text{N}$

Forța de apăsare normală este: $N = mg\cos\alpha - F\sin\beta = 1{,}72\ \text{N}$

d. Pentru ca acest corp să nu mai apese pe plan, trebuie ca forța de apăsare normală să fie nulă $\Rightarrow N = 0 \Rightarrow F = \dfrac{mg\cos\alpha}{\sin\beta} \approx 12{,}2\ \text{N}$

34.a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Proiectăm pe axele de coordonate relațiile vectoriale. Pentru corpul m_1 vectorial: $\vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{T} = m_1\vec{a}$. Pe Oy: $N_1 - G_1 = 0$ și



pe Ox: $F - F_{f1} - T = m_1 a$. Cum $F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \Rightarrow F - \mu m_1 g - T = m_1 a$ (1)

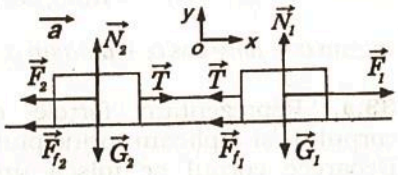
Pentru corpul m_2: $\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$. Pe Ox: $T - F_{f_2} = m_2 a$ și pe Oy: $N_2 - G_2 = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g$. Cum $F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 g \Rightarrow T - \mu m_2 g = m_2 a$ (2)

Din (1)+(2) $\Rightarrow F - \mu(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} - \mu g = 2\ \text{m/s}^2$

b. $T = m_2(a + \mu g) = \dfrac{m_2 F}{m_1 + m_2} = 2\ \text{N}$

c. Din $a = a_m = \Delta v/\Delta t = v/t \Rightarrow v = at = 8$ m/s și distanța parcursă de corp $d = v_m t$, unde $v_m = v/2$, astfel că $d = vt/2 = at^2/2 = 16$ m

35.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Proiectăm pe axele de coordonate relațiile vectoriale. Deoarece $F_1>F_2$, sistemul se mișcă spre dreapta. Pentru corpul m_1: $\vec{F}_1+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}+\vec{T}=m_1\vec{a}$.



Pe *Ox*: $F_1-F_{f1}-T=m_1a$ și pe *Oy*: $N_1-G_1=0$

Pe baza legii frecării $F_{f1}=\mu N_1=\mu m_1g \Rightarrow F_1-\mu m_1g-T=m_1a$ (1)

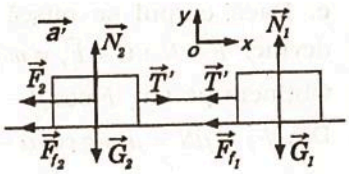
Pentru corpul m_2: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}+\vec{F}_2=m_2\vec{a}$. Pe *Ox*: $T-F_{f2}-F_2=m_2a$ (1)

Pe *Oy*: $N_2-G_2=0 \Rightarrow N_2=m_2g$. $F_{f2}=\mu N_2=\mu m_2g \Rightarrow T-\mu m_2g-F_2=m_2a$ (2)

Din (1)+(2) $\Rightarrow F_1-F_2-\mu(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)a \Rightarrow a=\dfrac{F_1-F_2}{m_1+m_2}-\mu g=0{,}5\ \text{m/s}^2$

b. $T=m_2(a+\mu g)+F_2=\dfrac{m_1F_2+m_2F_1}{m_1+m_2}=50\ \text{N}$

c. Imediat cum F_1 încetează să acționeze sistemul se va mișca ca și inainte spre dreapta, până ce sistemul de corpuri se va opri. Astfel, pentru corpul m_1: $\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}+\vec{T}'=m_1\vec{a}'$.



Pe *Ox*: $-F_{f1}-T'=m_1\vec{a}'$

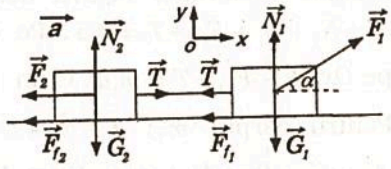
și pe *Oy*: $N_1-G_1=0$ $F_{f_1}=\mu N_1=\mu m_1g \Rightarrow -\mu m_1g-T'=m_1a'$ (1)

Pentru corpul m_2: $\vec{T}'+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}+\vec{F}_2=m_2\vec{a}'$. Pe *Ox*: $T'-F_{f_2}-F_2=m_2a'$ și pe *Oy*: $N_2-G_2=0 \Rightarrow N_2=m_2g$. Cum $F_{f_2}=\mu N_2=\mu m_2g \Rightarrow T'-\mu m_2g-F_2=m_2a'$ (2)

Din(1)+(2) $\Rightarrow -F_2-\mu(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)a' \Rightarrow a'=-\dfrac{F_2}{m_1+m_2}-\mu g \Rightarrow$ tensiunea din fir

devine $T'=m_2(a'+\mu g)+F_2=\dfrac{m_1F_2}{m_1+m_2}=8\ \text{N}$

36.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Proiectăm pe axele de coordonate relațiile vectoriale. Deoarece $F_1\cos\alpha>F_2$, sistemul se mișcă spre dreapta.



Pentru corpul m_1: $\vec{F}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}+\vec{T}+\vec{N}_1=m_1\vec{a}$.

Proiectăm pe *Ox*: $F_1\cos\alpha-F_{f1}-T=m_1a$ și pe *Oy*: $N_1+F_1\sin\alpha-m_1g=0$.

Cum $F_{f_1}=\mu N_1=\mu(m_1g-F_1\sin\alpha) \Rightarrow F_1\cos\alpha-\mu m_1g+\mu F_1\sin\alpha-T=m_1a$ (1)

Pentru corpul m_2: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}+\vec{F}_2=m_2\vec{a}$.

Proiectăm pe *Ox*:: $T-F_{f2}-F_2=m_2a$ și pe *Oy*: $N_2-m_2g=0$.

Cum $F_{f2}=\mu N_2 \Rightarrow T-\mu m_2g-F_2=m_2a$ (2). Adunând relațiile (1) și (2) obținem:

$$F_1(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)-\mu g(m_1+m_2)-F_2=(m_1+m_2)a \Rightarrow a=\frac{F_1(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)-F_2}{m_1+m_2}-\mu g$$

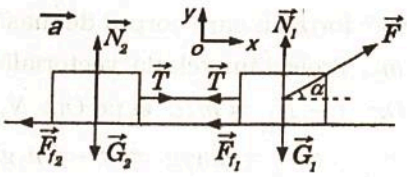
$\Rightarrow a=1$ m/s²

b. $T = m_2(a+\mu g)+F_2 = 16{,}95$ N

c. Deoarece sistemul se mişcă uniform spre dreapta, atunci $a=0$, astfel că forţa

$$F_1 = \frac{F_2+\mu g(m_1+m_2)}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha} \approx 23{,}78 \text{ N}$$

37.a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra fiecărui corp, scriem legile vectoriale pe baza principiului 2 al dinamicii şi apoi proiectăm pe axele de coordonate. Pentru corpul m_1: $\vec{F}+\vec{G}_1+\vec{F}_{f_1}+\vec{T}+\vec{N}_1 = m_1\vec{a}$.



Proiectăm pe Ox: $F\cos\alpha - F_{f1} - T = m_1 a$ şi pe Oy: $N_1 + F\sin\alpha - m_1 g = 0$

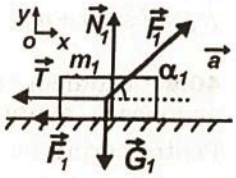
Pentru corpul m_2: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$. Proiectăm pe Ox: $T - F_{f2} = m_2 a$ şi pe Oy: $N_2 - m_2 g = 0$. Deoarece $N_1=N_2=0{,}5 \Rightarrow m_1 g - F\sin\alpha = m_2 g \Rightarrow \alpha=30^0$

b. Deoarece $N_1=N_2$, atunci $F_{f1}=F_{f2}=F_f=\mu m_2 g=6$ N

c. Din $F\cos\alpha - F_{f1} - T = m_1 a$ (1) şi $T - F_{f2} = m_2 a$ (2) prin adunarea relaţiilor (1) şi (2) obţinem: $F\cos\alpha - 2F_f = (m_1+m_2)a \Rightarrow a = \dfrac{F\cos\alpha - 2F_f}{m_1+m_2} = 1{,}76$ m/s²

d. Din $T - F_{f2} = m_2 a \Rightarrow T = m_2 a + F_f = 7{,}76$ N

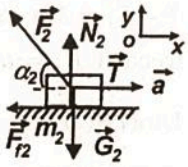
38.a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra fiecărui corp, scriem legile vectoriale pe baza principiului 2 al dinamicii şi apoi proiectăm pe axele de coordonate. Pentru corpul m_1, vectorial $\vec{F}_1+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{T}+\vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$, iar scalar pe Ox $F_1\cos\alpha_1 - T - F_{f1} = m_1 a$ şi pe Oy:



$N_1 + F_1\sin\alpha_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g - F_1\sin\alpha_1$

$\Rightarrow F_{f1} = \mu_1 N_1 = \mu_1(m_1 g - F_1\sin\alpha_1) \Rightarrow F_1\cos\alpha_1 - T - \mu_1(m_1 g - F_1\sin\alpha_1) = m_1 a$ (1)

Pentru corpul m_2, vectorial $\vec{F}_2+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{T}+\vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$, iar scalar pe Ox $T - F_2\cos\alpha_2 - F_{f2} = m_2 a$ şi pe Oy:



$N_2 + F_2\sin\alpha_2 - m_2 g = 0 \Rightarrow F_{f2} = \mu_2 N_2 = \mu_2(m_2 g - F_2\sin\alpha_2) \Rightarrow$

$T - F_2\cos\alpha_2 - \mu_2(m_2 g - F_2\sin\alpha_2) = m_2 a$ (2). Din (1)+(2) $\Rightarrow$

$F_1\cos\alpha_1 - F_2\cos\alpha_2 - \mu_1(m_1 g - F_1\sin\alpha_1) - \mu_2(m_2 g - F_2\sin\alpha_2) = (m_1+m_2)a \Rightarrow$

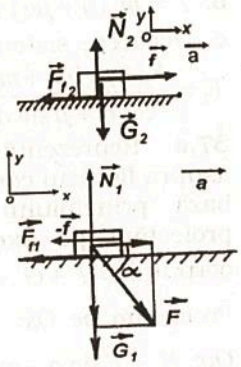
$$a = \frac{F_1\cos\alpha_1 - F_2\cos\alpha_2 - \mu_1(m_1 g - F_1\sin\alpha_1) - \mu_2(m_2 g - F_2\sin\alpha_2)}{m_1+m_2} \approx 1{,}07 \text{ m/s}^2$$

b. Distanţa parcursă de corp $d=v_m t$. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t \Rightarrow v=at \Rightarrow v_m=v/2$, astfel că $d=vt/2=at^2/2=53{,}51$ m

c. Deoarece sistemul se mişcă uniform în acelaşi sens ca la punctul **a.**, atunci $F_1\cos\alpha_1 - F_2\cos\alpha_2 - \mu_1(m_1 g - F_1\sin\alpha_1) - \mu_2(m_2 g - F_2\sin\alpha_2) = 0 \Rightarrow$

$$F_1 = \frac{F_2(\cos\alpha_2 - \mu_2\sin\alpha_2) + g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)}{\cos\alpha_1 + \mu_1\sin\alpha_1} \approx 31{,}35 \text{ N}$$

39.a. Studiem echilibrul corpului în situația în care asupra corpului se aplică o forță orizontală. După reprezentarea forțelor, aplicăm principiul al doilea al dinamicii, ținând cont că $\vec{a}=0$. Pentru corpul m_2: $\vec{f}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}=m_2\vec{a}$, unde $\vec{f}$ este forța cu care corpul de masă m_1 împinge corpul de masă m_2. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. pe Ox: $f-F_{f_2}=m_2a$ și pe Oy: $N_2-m_2g=0\Rightarrow$



$F_{f_2}=\mu N_2=\mu m_2g\Rightarrow f-\mu m_2g=m_2a$ (1)

Pentru corpul m_1: $\vec{F}+\vec{G}_1+\vec{F}_{f_1}+\vec{N}_1-\vec{f}=m_1\vec{a}$, unde $-\vec{f}$ este forța de reacțiune cu care corpul de masă m_2 împinge corpul de masă m_1, conform principiului acțiunii și reacțiunii. Prin proiecție pe axele de coordonate. obținem pe Ox: $F\cos\alpha-F_{f_1}-f=m_1a$ și pe Oy: $N_1-m_1g-F\sin\alpha=0\Rightarrow$

$F_{f_1}=\mu N_1=\mu(F\sin\alpha+m_1g)\Rightarrow F\cos\alpha-\mu F\sin\alpha-\mu m_1g-f=m_1a$ (2)

Din (1)+(2) $\Rightarrow F(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)-\mu g(m_1+m_2)=(m_1+m_2)a\Rightarrow$

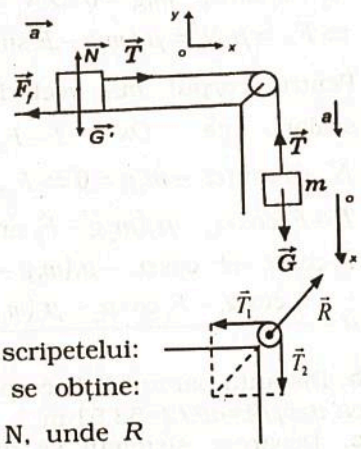
$$a=\frac{F(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}{m_1+m_2}-\mu g\approx 5{,}65\ \text{m/s}^2$$

b. Forța dintre cele două corpuri este $f=m_2(\mu g+a)\approx 1{,}524$ N.

c. Forța de apăsare normală exercitată de corpul 1, este $N_1=F\sin\alpha+m_1g=5{,}5$N.

40.a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Pentru corpul m: $\vec{G}+\vec{T}=m\vec{a}$ și pe axa Ox și obținem: $mg-T=ma$ (1)

Pentru corpul M: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}'=M\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $T-F_f=Ma$ și pe Oy: $N-Mg=0$. Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu Mg\Rightarrow T-\mu Mg=Ma$ (2)



Din(1)+(2) $g(m-\mu M)=(m+M)a\Rightarrow a=\dfrac{g(m-\mu M)}{m+M}$

a=2,8 m/s².

b. $T=m(g-a)=\dfrac{mM(1+\mu)g}{M+m}=14{,}4$ N.

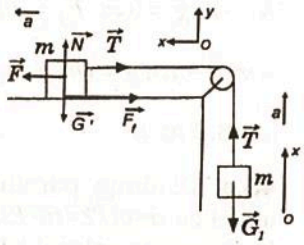
c. Impunem condiția de echilibru scripetelui: $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0\Rightarrow\vec{R}=-\left(\vec{T}_1+\vec{T}_2\right)$. Din geometrie scalar se obține: $R^2=T_1^{\,2}+T_2^{\,2}$. Cum $T_1=T_2=T\Rightarrow R=T\sqrt{2}=20{,}3$ N, unde R este reacțiunea în axul scripetelui.

41.a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii.

Studiem mișcarea corpului vertical: $\vec{G}+\vec{T}=m\vec{a}$ și scalar Ox: $mg-T=ma$ (1)

Studiem mişcarea corpului aflat pe planul orizontal: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}$.
Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T-F_f=ma$ şi pe Oy: $N-mg=0 \Rightarrow N=mg$. Cum $F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow T-\mu mg=ma$ (2)
Din(1)+(2)$\Rightarrow mg-\mu mg=2ma \Rightarrow \mu=(g-2a)/g=0{,}6$.

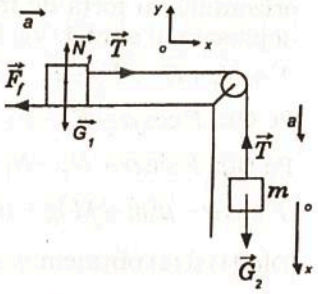
b. Dacă sub acţiunea forţei *F*, corpurile se mişcă în sens contrar cu aceeaşi accelerație. Pentru corpul vertical vectorial: $\vec{G}+\vec{T}=m\vec{a}$, iar scalar prin proiecţie pe axa verticală obţinem: $T-mg=ma$ (1).



Pentru corpul care se deplasează pe orizontală: $\vec{F}+\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $F-F_f-T=ma$ şi pe *Oy*: $N-mg=0 \Rightarrow F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow F-\mu mg-T=ma$ (2)
Din(1)+(2) obţinem: $F-\mu mg-mg=2ma \Rightarrow$
$F=m(2a+\mu g+g)=2mg=40$ N

c. Tensiunea în fir este $T=m(a+g)=24$ N

42.a. Studiem mişcarea fiecărui corp separat. Studiem mişcarea corpului cu masa m_2. Relaţia vectorială este: $\vec{G}_2+\vec{T}=m_2\vec{a}_1$ şi scalar prin proiecţie pe axa de coordonate *Ox*: $m_2g-T=m_2a_1$ (1)

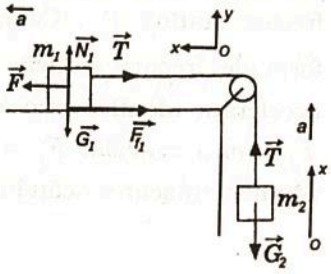


Studiem mişcarea corpului cu masa m_1. Relaţia vectorială este: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_f=m_1\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T-F_f=m_1a_1$ şi pe *Oy*: $N_1-m_1g=0 \Rightarrow F_f=\mu N_1=\mu m_1g \Rightarrow T-\mu m_1g=m_1a_1$ (2)
Din (1)+(2)$\Rightarrow m_2g-\mu m_1g=(m_1+m_2)a_1 \Rightarrow g(m_2-\mu m_1)=(m_1+m_2)a_1$.
Cum $m_2=4m_1 \Rightarrow a_1=g(4-\mu)/5$ (3). Schimbând corpurile între ele se obţine analog: $g(m_1-\mu m_2)=(m_1+m_2)a_2 \Rightarrow a_2=g(1-4\mu)/5$ (4)

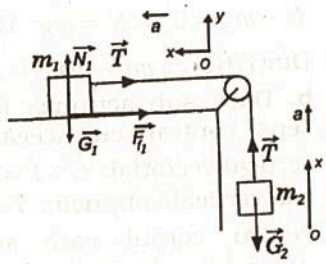
Împărţind relaţia (3) la (4) se obţine: $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{4-\mu}{1-4\mu}=6{,}5 \Rightarrow a_1=6{,}5a_2$

b. Pentru ca sistemul de corpuri să se deplaseze cu viteză constantă $a_1=0 \Rightarrow m_{1tot}=m_2/\mu=40$ kg$\Rightarrow m_{1s}=m_{1tot}-m_1=m_2/\mu-m_1=39$ kg

c. Pentru corpul m_2, $\vec{G}_2+\vec{T}=m_2\vec{a}$ şi scalar $T-m_2g=m_2a$ (1), iar pentru corpul m_1, $\vec{F}+\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$.
Pe *Ox* $F-T-F_{f1}=m_1a$ şi pe *Oy* $N_1-m_1g=0 \Rightarrow$
$F_{f1}=\mu N_1=\mu m_1g \Rightarrow F-T-\mu m_1g=m_1a$ (2).
Adunăm (1)+(2): $F-m_2g-\mu m_1g=(m_1+m_2)a$
$F=(m_2+\mu m_1)g+(m_1+m_2)a=46$ N



d. Studiem mişcarea corpului cu masa m_2. $\vec{G}_2+\vec{T}=m_2\vec{a}$ şi scalar prin proiecţie pe axa de coordonate Ox: $T-m_2g=m_2a$ (1)



Studiem mişcarea corpului cu masa m_1:

$\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$. Pe Ox $-T-F_f=m_1a$ şi Oy

$N_1-m_1g=0\Rightarrow F_f=\mu N_1=\mu m_1g\Rightarrow -T-\mu m_1g=m_1a$

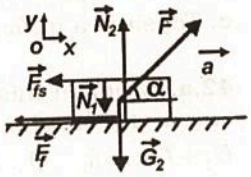
$-m_2g-\mu m_1g=(m_1+m_2)a\Rightarrow a=-\dfrac{g(m_2+\mu m_1)}{m_1+m_2}\Rightarrow$

a=−8,2 m/s²

43.a. Distanţa parcursă de corp $d=v_mt$. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t\Rightarrow v=at\Rightarrow v_m=v/2$, astfel că $d=vt/2=at^2/2\Rightarrow a=2d/t^2=2$ m/s²

b. Deoarece coletul se află pe sanie se deplasează împreună cu sania, el va avea aceeaşi acceleraţie. Din reprezentarea forţelor $\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{fs}=m\vec{a}$, scalar forţa de frecare statică dintre colet şi sanie este $F_{fs}=ma=10$ N (1)

c. Reprezentăm forţele saniei. Coletul acţionează asupra saniei pe verticală cu forţa de apăsare $N_1=mg$ în jos şi pe orizontală cu forţa de frecare F_{fs} în sens contrar sensului de deplasare al saniei. Vectorial obţinem:



$\vec{F}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_f+\vec{F}_{fs}+\vec{N}_1=M\vec{a}$ şi scalar:

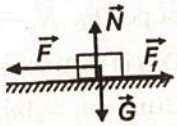
Pe Ox: $F\cos\alpha-F_f-F_{fs}=Ma\Rightarrow F\cos\alpha-F_f-ma=Ma$

Pe Oy: $F\sin\alpha+N_2-N_1-Mg=0\Rightarrow N_2=(m+M)g-F\sin\alpha$ şi din $F_f=\mu N_2\Rightarrow$

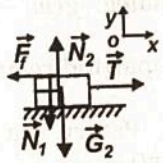
$F\cos\alpha-\mu(m+M)g+\mu F\sin\alpha-ma=Ma$ (2)

Din (1) şi (2) obţinem: $F=\dfrac{(m+M)(a+\mu g)}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\approx 57{,}68$ N

44.a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului 1 şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii, astfel că $\vec{F}+\vec{G}_1+\vec{N}+\vec{F}_f=0$. Scalar obţinem: $F=F_f=\mu N=\mu m_1g=75$ N

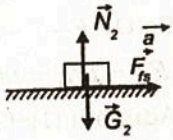


b. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului 2. Ţinând cont că asupra corpului 2 forta de frecare exercitată de primul corp este îndreptată spre stânga (conform principiului acţiunii şi reacţiunii) şi presupunând că firul nu se rupe, atunci $T=F_f=\mu m_1g=75$ N



c. Firul rezistă la solicitare deoarece $T<T_{max}$

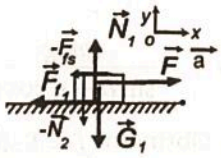
45.a. Studiem corpul cu masa m_2. Dacă corpul cu masă m_2 nu alunecă pe scândură, forţa de frecare ce apare la contactul corp-scândură este o forţă de frecare statică F_{f_s}. Conform principiului al doilea al dinamicii forţa de frecare statică F_{f_s} imprimă corpului cu masa m_2 o acceleraţie identică cu cea a scândurii şi în acelaşi sens. Vectorial



$\vec{F}_{f_s}=m_2\vec{a}\Rightarrow$ scalar $F_{f_s}=m_2a$ (1)

Studiem mişcarea scândurii. Vectorial:

$\vec{F}+\vec{N}_1-\vec{F}_{f2}-\vec{N}_2+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $F-F_{f_s}-F_{f_1}=m_1a$ și pe *Oy*: $N_1-N_2-G_1=0\Rightarrow N_1=m_1g+N_2=(m_1+m_2)g$, deoarece $N_2=G_2$.



Din $F_{f_1}=\mu_1N_1=\mu_1(m_1+m_2)g\Rightarrow F-F_{f_s}-\mu_1(m_1+m_2)g=m_1a$ (2).

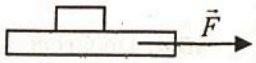
Din (1)+(2) obținem $F-m_2a-\mu_1(m_1+m_2)g=m_2a\Rightarrow$

$a=\dfrac{F}{m_1+m_2}-\mu_1g\Rightarrow F_{f_s}=m_2\left(\dfrac{F}{m_1+m_2}-\mu_1g\right)$. Condiția de nealunecare a corpului m_2 pe scândură este ca forța de frecare statică să fie mai mică sau cel mult egală cu forța de frecare la alunecare este $F_{f_s}\le F_{f_1}\Rightarrow F_{f_s}\le\mu_2m_2g\Rightarrow$

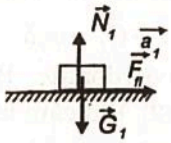
$m_2\left(\dfrac{F}{m_1+m_2}-\mu_1g\right)\le\mu_2m_2g\Rightarrow F\le(m_1+m_2)(\mu_1+\mu_2)g\Rightarrow F\le 9$ N.

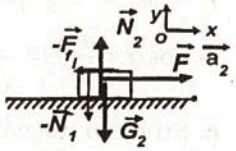
Dacă $F>9$ N, corpul m_2 începe să alunece pe scândură.

46.a. Inițial forța F este mică și prin urmare corpurile se mișcă împreună formând un corp cu masa $m_t=m_1+m_2$. Cum $F=c\cdot t=(m_1+m_2)a\Rightarrow a=\dfrac{F}{m_1+m_2}=\dfrac{c\cdot t}{m_1+m_2}=t$, adică accelerația sistemului de corpuri crește direct proporțional cu timpul.



b. La un anumit moment de timp t_0, corpul începe să lunece pe scândură, iar forța de frecare la alunecarea este cea care va imprima corpului o accelerație. Deoarece inițial corpul se va mișca sub acțiunea forței $\vec{F}$ într-un sens, forța de frecare la alunecare va acționa în același sens cu forța $\vec{F}$. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului m_1. Conform principiului al doilea prin proiecția pe axa *Ox*, scalar obținem: $F_{f_1}=m_1a_1$. Cum $F_{f_1}=\mu N_1=\mu m_1g\Rightarrow a_1=\mu g=2$ m/s² și din momentul t_0 când corpul alunecă pe scândură, accelerația acestuia rămâne constantă. Reprezentăm forțele care acționează asupra scândurii: $F-F_{f_1}=m_2a_2\Rightarrow c\cdot t-\mu m_1g=m_2a_2\Rightarrow a_2=\dfrac{c\cdot t-\mu m_1g}{m_2}=\dfrac{5t-2}{4}$, deci accelerația scândurii continuă să crească liniar cu trecerea timpului.

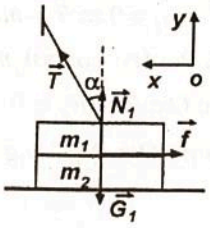




c. Momentul de timp t_0 la care corpurile încep să se miște independent se poate afla din condiția ca $a_1=a_2\Rightarrow\mu g=\dfrac{ct_0-\mu m_1g}{m_2}\Rightarrow t_0=\dfrac{\mu g(m_1+m_2)}{c}=2$ s

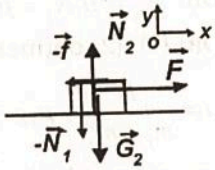
47.a. Reprezentăm forțele ce acționează asupra cărămidei superioare și impunem condiția ca aceasta să se afle în repaus: Vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{f}=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T\sin\alpha-f=0$ și pe *Oy*: $T\cos\alpha+N_1-m_1g=0\Rightarrow N_1=m_1g-T\cos\alpha$.

$f=\mu N_1=\mu(m_1g-T\cos\alpha)\Rightarrow T\sin\alpha-\mu(m_1g-T\cos\alpha)=0$



$$\Rightarrow T = \frac{\mu m_1 g}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \approx 2{,}35 \text{ N}$$

b. Obținem $f = T\sin\alpha = \dfrac{\mu m_1 g \sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \approx 1{,}67$ N

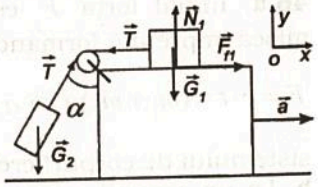


Reprezentăm forțele care acționează asupra cărămidei inferioare și impunem condiția ca aceasta să iasă uniform de sub cea superioară, adică rezultanta forțelor să fie nulă. Vectorial: $\vec{F} + \vec{N}_2 - \vec{f} - \vec{N}_1 + \vec{G}_2 = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe Ox: $F - f = 0 \Rightarrow F = f = \dfrac{\mu m_1 g \sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \approx 1{,}67$ N.

c. Pe Oy: $N_2 - N_1 - m_2 g = 0 \Rightarrow N_2 = N_1 + m_2 g$.

Cum $N_1 = \dfrac{f}{\mu} = \dfrac{m_1 g \sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \Rightarrow N_2 = \dfrac{m_1 g \sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} + m_2 g \approx 28{,}35$ N, unde N_2 reprezintă forța cu care cărămida inferioară apasă asupra planului



48.a. Deoarece sistemul de corpuri se află în repaus în raport cu platforma, ele se deplasează față de un observator de pe sol cu accelerația platformei $\vec{a}$.

Studiem mișcarea corpului de masă m_2. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G}_2 = m_2\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $T\sin\alpha = m_2 a$ (1) și pe Oy: $T\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = m_2 g$ (2). Ridicăm la pătrat cele două ecuații și apoi le adunăm. Obținem

$T^2 = m_2^2(a^2 + g^2) \Rightarrow T = m_2\sqrt{a^2 + g^2} \approx 1{,}077$ N

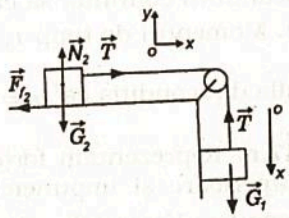
b. $\cos\alpha = \dfrac{m_2 g}{T} = \dfrac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}} \approx 0{,}928$

c. Studiem mișcarea corpului cu masa m_1. Vectorial: $\vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f_1} = m_1\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $F_{f1} - T = m_1 a$ și pe

Oy: $N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \Rightarrow \mu m_1 g - m_2\sqrt{a^2 + g^2} = m_1 a \Rightarrow$

$$\mu = \frac{m_1 a + m_2\sqrt{a^2 + g^2}}{m_1 g} \approx 0{,}615$$



49.a. Deoarece sistemul de corpuri se află în repaus pe căruciorul care se mișcă rectiliniu și uniform, înseamnă că și ele se vor mișca rectiliniu și uniform față de un observator aflat pe sol. Pentru corpu m_2:

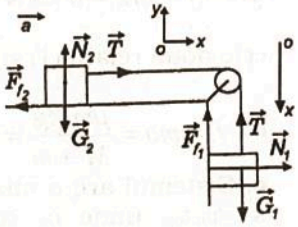
$\vec{T} + \vec{G}_2 = 0 \Rightarrow T = m_2 g = 25$ N

b. Pentru corpul m_1: $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_f = 0$

Pe Ox: $T - F_f = 0 \Rightarrow T = F_f \Rightarrow F_f = m_2 g$

și pe Oy: $N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow F_f = \mu m_1 g \Rightarrow \mu m_1 g = m_2 g \Rightarrow \mu = m_2 / m_1 = 0{,}25$

c. Schimbăm locul corpurilor pe cărucior şi imprimăm căruciorului o mişcare accelerată, astfel încât sistemul de corpuri să se afle în repaus faţă de cărucior şi să se deplaseze faţă de un observator de pe sol cu acceleraţia căruciorului $\vec{a}$.



Pentru corpul de masă m_2: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{F}_{f_2}+\vec{G}_2=m_2\vec{a}$. Pe Ox: $T-F_{f_2}=m_2a$ şi pe Oy: $N_2-m_2g=0 \Rightarrow F_{f_2}=\mu m_2 g$

$\Rightarrow T-\mu m_2 g=m_2 a$ (1)

Pentru m_1 vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$ şi scalar pe Ox: $N_1=m_1a$ şi pe Oy: $T+F_{f_1}-m_1g=0$.

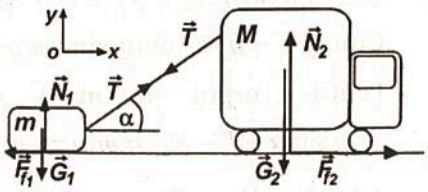
Cum $F_{f_1}=\mu N_1=\mu m_1 a \Rightarrow T+\mu m_1 g-m_1 g=0$ (2)

Introducem relaţia (2) în (1) şi obţinem:

$$T=m_1g-\mu m_1 a \Rightarrow m_1g-\mu m_1 a-\mu m_2 g=m_2 a \Rightarrow a=\frac{g(m_1-\mu m_2)}{m_2+\mu m_1}=\frac{g(m_1^2-m_2^2)}{2m_1m_2} \Rightarrow$$

a=18,75 m/s²

50.a. Studiem mişcarea lăzii. Deoarece lada se mişcă rectiliniu şi uniform, atunci vectorial $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=0$. Scalar pe Ox:



$T\cos\alpha-F_{f1}=0$ şi pe Oy: $T\sin\alpha+N_1-mg=0$

$F_{f1}=\mu_1N_1=\mu_1(mg-T\sin\alpha)\Rightarrow$

$$T=\frac{\mu_1 mg}{\cos\alpha+\mu_1\sin\alpha}\approx 671{,}14\text{ N}$$

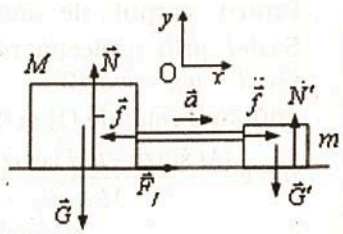
b. Studiem mişcarea maşinii. Astfel $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{F}_{f_2}+\vec{G}_2=0$, forţa de frecare se pune în sensul de mers pentru că Pământul împinge maşina inainte. Pe Ox:

$F_{f2}-T\cos\alpha=0 \Rightarrow F_{f2}=\dfrac{\mu_1 mg\cos\alpha}{\cos\alpha+\mu_1\sin\alpha}\approx 335{,}8$N şi pe Oy: $N_2-T\sin\alpha-Mg=0$

$$\Rightarrow N_2=g\frac{M\cos\alpha+\mu_1(M+m)\sin\alpha}{\cos\alpha+\mu_1\sin\alpha} \Rightarrow \mu_2=\frac{F_{f2}}{N_2}=\frac{\mu_1 m\cos\alpha}{M\cos\alpha+\mu_1(M+m)\sin\alpha}\approx 0{,}021$$

c. Dacă se consideră că toate roţile sunt motoare şi toate apasă la fel asupra şoselei, atunci forţa de frecare care se exercită asupra fiecărei roţii este $F_f=F_{f2}/4\approx 83{,}9$ N

51.a. Deoarece frâna blochează numai roţile autocamionului, numai asupra acestuia se exercită o forţă de frecare. Bara rigidă împinge remorca cu forţa $\vec{f}$ astfel ca şi aceasta să frâneze cu acceleraţia autocamionului. Studiem mişcarea remorcii: $\vec{N}'+\vec{G}'+\vec{f}=m\vec{a}$, iar prin proiecţia pe axa Ox: $f=m\cdot a$ (1).



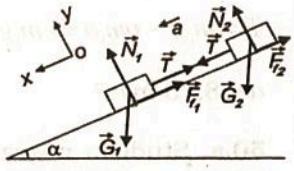
Studiem mişcarea autocamionului. Remorca împinge prin intermediul barei rigide autocamionul cu o forţă $(-\vec{f})$ pe aceeaşi direcţie, dar în sens contrar, conform principiului acţiunii şi reacţiunii astfel că: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f-\vec{f}=M\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $F_f - f = Ma$ și pe Oy: $N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg$, iar $F_f = \mu N = \mu Mg \Rightarrow \mu Mg - f = Ma$ (2). Adunăm cele două relații (1) și (2) $\Rightarrow \mu Mg - ma = Ma \Rightarrow a = \dfrac{\mu Mg}{M+m} = 6{,}4$ m/s²

b. $f = ma = \dfrac{\mu mMg}{M+m} = 6{,}4$ kN

c. Sistemul are o mișcare rectilinie uniform încetinită cu a=−6,4 m/s², astfel că $s_{op}=v_m t_{op}$, unde v_m reprezintă viteza medie și t_{op} timpul până la oprire. Cum $a=a_m=\Delta v/\Delta t=(v-v_0)/t$, în momentul opririi $v=0 \Rightarrow t_{op}=-v_0/a$. Deoarece viteza depinde liniar de timp $v_m=v_0/2 \Rightarrow s_{op} = -v_0^2/2a$ =20 m

52 a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Pentru corpul de masă m_1: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$.



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $m_1 g\sin\alpha - T - F_{f1} = m_1 a$ și pe Oy: $N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0$.

Cum $F_{f1} = \mu_1 N_1$, obținem: $m_1 g\sin\alpha - T - \mu_1 m_1 g\cos\alpha = m_1 a$ (1)

Pentru corpul de masă m_2: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f_2} = m_2\vec{a}$. Proiectăm pe Ox: $m_2 g\sin\alpha + T - F_{f2} = m_2 a \Rightarrow m_2 g\sin\alpha + T - \mu_2 m_2 g\cos\alpha = m_2 a$ (2)

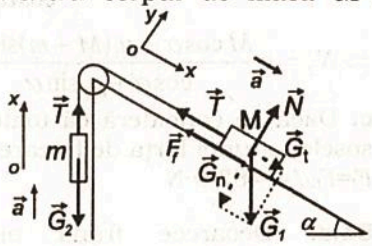
Adunăm (1) cu (2): $a = g\sin\alpha - g\dfrac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\cos\alpha$=3,5 m/s²

b. $T = m_1(g\sin\alpha - \mu_1 g\cos\alpha - a)$=−4 N $\Rightarrow$ sensul tensiunilor în tijă sunt invers

c. În absența frecării între corpuri și suprafața planului înclinat μ_1=0 și μ_2=0, astfel că sistemul de corpuri va coborî accelerat cu acceeraţia $a=g\sin\alpha \Rightarrow$ tensiunea din tijă este T=0.

53.a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Pentru corpul de masă M: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_f = M\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe Ox: $Mg\sin\alpha - T - F_f = Ma$ și pe Oy: $N - Mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu Mg\cos\alpha$

$\Rightarrow Mg\sin\alpha - T - \mu Mg\cos\alpha = Ma$ (1)



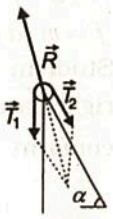
Pentru corpul de masă m: $\vec{G}_2 + \vec{T} = m\cdot\vec{a}$. Scalar prin proiecția relației vectoriale pe axa Ox: $T - mg = ma$ (2)

Adunând relațiile (1) și (2) $\Rightarrow g(M\sin\alpha - \mu M\cos\alpha - m) = (m+M)a \Rightarrow$

$a = g\dfrac{(M\sin\alpha - \mu M\cos\alpha - m)}{M+m} = 0{,}5$ m/s²

b. $T = m(a+g) = \dfrac{mMg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha + 1)}{M+m} = 10{,}5$ N

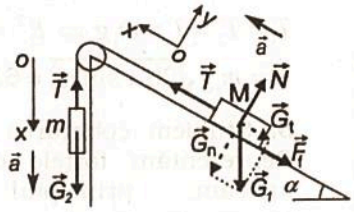
c. Impunem condiția de echilibru scripetelui: $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow$ $\vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$. Pe baza teoremei Pitagora generalizată obținem: $R^2 = T_1^2 + T_1^2 + 2T_1T_2\cos(90-\alpha)$.



Cum $T_1 = T_2 = T \Rightarrow R^2 = 2T^2 + 2T^2 \sin\alpha \Rightarrow R = T\sqrt{2(1+\sin\alpha)} \approx 18{,}165$ N

54.a. Studiem mişcarea fiecărui corp separat. Pentru corpul de masă m: $\vec{G}_2 + \vec{T} = m\vec{a}$ şi scalar prin proiecţia pe axa Ox: $mg - T = ma$ (1)

Pentru corpul de masă M, relaţia vectorială este: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_f = M\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Obţinem pe Ox: $T - F_f - Mg\sin\alpha = Ma$ şi pe Oy: $N - Mg\cos\alpha = 0$.



$F_f = \mu N = \mu Mg\cos\alpha \Rightarrow T - \mu Mg\cos\alpha - Mg\sin\alpha = Ma$ (2). Prin adunarea relaţiilor (1) cu (2) $\Rightarrow$

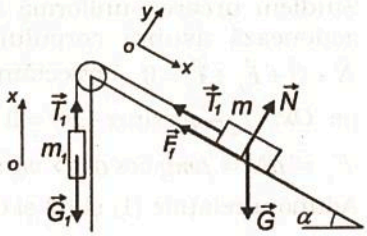
$g(m - \mu M\cos\alpha - M\sin\alpha) = (m+M)a \Rightarrow$

$$a = \frac{g(m - \mu M\cos\alpha - M\sin\alpha)}{m+M} \approx 6{,}725 \text{ m/s}^2$$

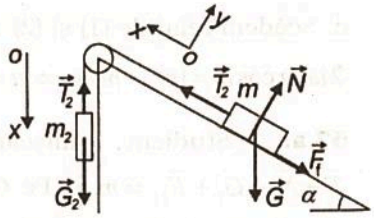
b. $T = m(g-a) = \dfrac{mMg(1+\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{m+M} \approx 16{,}375$ N.

c. Distanţa parcursă de corp $d = v_m t$. Din $a = a_m = \Delta v/\Delta t = v/t \Rightarrow v = at \Rightarrow v_m = v/2$, astfel că $d = vt/2 = at^2/2 = 13{,}45$ m

55.a. Când pe taler se aşază corpul cu masa m_1 corpul cu masa m are tendinţa să coboare. Deoarece sistemul este în echilibru, atunci pentru corpul m_1: $T_1 = m_1 g$ şi pentru corpul m: $\vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar prin proiecţia pe axa Ox: $mg\sin\alpha - T_1 - F_f = 0$. Cum $N = mg\cos\alpha$ şi $F_f = \mu N \Rightarrow m_1 = m(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ (1)



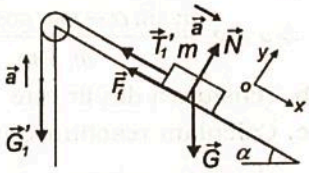
Când pe taler se aşază corpul cu masa m_2 corpul cu masa m are tendinţa să urce. Deoarece sistemul este în echilibru, atunci pentru corpul m_2: $T_2 = m_2 g$ şi pentru corpul m: $\vec{T}_2 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$ şi prin proiecţia pe axa Ox: $T_2 - mg\sin\alpha - F_f = 0$. $N = mg\cos\alpha$ şi $F_f = \mu N \Rightarrow m_2 = m(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$(2).



Din (1)+(2) obţinem: $m = \dfrac{m_1 + m_2}{2\sin\alpha} = 25$ kg, cu $\sin\alpha = \dfrac{h}{\ell} = 0{,}6$.

b. Din (2)-(1) obţinem: $\mu = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} tg\alpha = 0{,}25$, deoarece $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = 0{,}8$

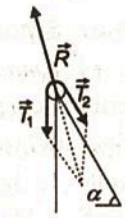
c. Deoarece se trage cu o forţă egală cu jumătate din greutatea corpului cu masa m_1 atunci $T_1' = m_1 g/2$. Corpul cu masă m coboară accelerat cu acceleraţia a, astfel că $\vec{T}'_1 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Pe Ox: $mg\sin\alpha - F_f - T'_1 = ma$.



Cum $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha$, obţinem

$a = g[\sin\alpha - \mu\cos\alpha - m_1/(2m)] = 2$ m/s²

56.a. Calculăm reacțiunea în axul scripetelui impunând acestuia condiția de echilibru: $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0 \Rightarrow \vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2) \Rightarrow$

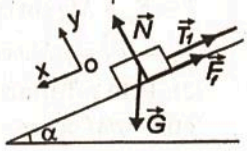


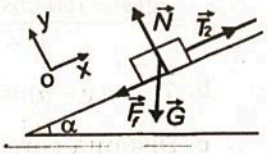
$R^2=T_1^2+T_2^2+2T_1T_2\cos(90-\alpha)$.

$T_1=T_2=T=m_1g \Rightarrow R^2=2T^2+2T^2\sin\alpha \Rightarrow R=T\sqrt{2(1+\sin\alpha)} \Rightarrow$

$R=m_1g\sqrt{2(1+\sin\alpha)}\approx 6{,}06$ N

b. Studiem coborârea uniformă a corpului aflat pe plan. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f+\vec{T}_1=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem: pe *Ox*: $mg\sin\alpha-T_1-F_f=0$ și pe *Oy*: $N-mg\cos\alpha=0$.





Pe baza legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha \Rightarrow$

$mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=m_1g$ (1).

Studiem urcarea uniformă a corpului aflat pe plan. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f+\vec{T}_2=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem: pe *Ox*: $T_2-mg\sin\alpha-F_f=0$ și pe *Oy*: $N-mg\cos\alpha=0$. Pe baza legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha+\mu mg\cos\alpha=m_2g$ (2)

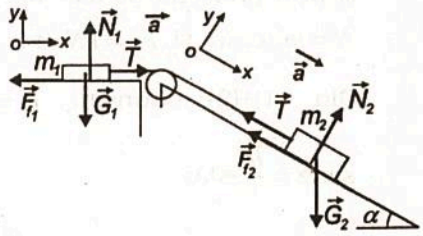
Adunăm relațiile (1) și (2) și obținem:

$$2mg\sin\alpha=(m_1+m_2)g \Rightarrow m=\frac{m_1+m_2}{2\sin\alpha}=1 \text{ kg}$$

c. Scădem relațiile (1) și (2) și obținem:

$$2\mu mg\cos\alpha=(m_2-m_1)g \Rightarrow \mu=\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}tg\alpha\approx 0{,}173$$

57.a. Studiem mișcarea corpului m_1: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$. Pe *Ox*: $T-F_{f_1}=m_1a$ și pe *Oy*: $N_1-m_1g=0 \Rightarrow F_{f_1}=\mu N_1$. Obținem:



$T-\mu m_1g=m_1a$ (1). Studiem mișcarea corpului m_2: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}=m_2\vec{a}$.

Pe *Ox*: $m_2g\sin\alpha-F_{f_2}-T=m_2a$ și pe *Oy*:

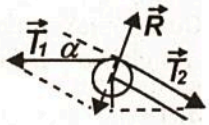
$N_2-m_2g\cos\alpha=0 \Rightarrow F_{f_2}=\mu N_2 \Rightarrow m_2g\sin\alpha-\mu m_2g\cos\alpha-T=m_2a$ (2).

Din (1)+(2) $\Rightarrow g(m_2\sin\alpha-\mu m_2\cos\alpha-\mu m_1)=(m_1+m_2)a$

$$\Rightarrow a=g\frac{m_2\sin\alpha-\mu m_2\cos\alpha-\mu m_1}{m_1+m_2}=0{,}62 \text{ m/s}^2$$

b. Tensiunea din fir este $T=m_1(a+\mu g)=0{,}262$ N.

c. Calculăm reacțiunea în axul scripetelui impunând acestuia condiția de echilibru: $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0 \Rightarrow \vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2) \Rightarrow$

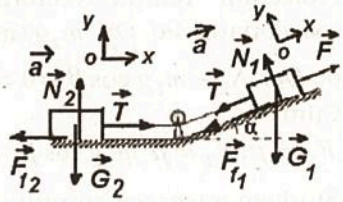


$R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2\cos(180^0 - \alpha)$.

$T_1 = T_2 = T = m_1 g \Rightarrow R^2 = 2T^2 - 2T^2\sin\alpha \Rightarrow R = T\sqrt{2(1-\sin\alpha)} \approx 0{,}262$ N

d. Deoarece sistemul de corpuri se mişcă uniform, atunci a=0, astfel că $m_1 = m_2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/\mu$=654 g

58.a. Studiem mişcarea corpului m_1:



$\vec{F} + \vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$.

Pe *Ox*: $T - F_{f_1} - m_1 g\sin\alpha = m_1 a$ şi pe *Oy*: $N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_{f_1} = \mu N_1$.

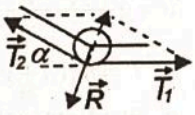
Obţinem: $F - T - \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha = m_1 a$ (1).

Studiem mişcarea corpului m_2: $\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$.

Pe *Ox*: $T - F_{f_2} = m_2 a \Rightarrow T - \mu m_2 g = m_2 a$ (2). Adunăm relaţiile (1) şi (2) şi obţinem: $F - \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha - \mu m_2 g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow$ a=2 m/s².

b. Tensiunea din fir este $T = m_2(a + \mu g)$=8 N

c. Calculăm reacţiunea în axul scripetelui impunând acestuia condiţia de echilibru: $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2) \Rightarrow$



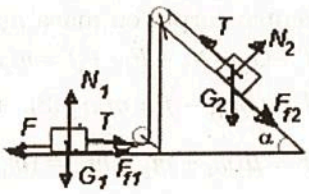
$R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2\cos(180^0 - \alpha)$.

$T_1 = T_2 = T = m_1 g \Rightarrow R^2 = 2T^2 - 2T^2\sin\alpha \Rightarrow R = T\sqrt{2(1-\sin\alpha)} \approx 7{,}155$ N

d. Din $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v - v_0}{t - t_0} \Rightarrow v = at$, deoarece v_0=0 şi t_0=0.

Cum $d = v_m t = \dfrac{v}{2}t = \dfrac{at^2}{2}$ obţinem: $t = \sqrt{\dfrac{2d}{a}}$=1,2s

59.a. Studiem mişcarea corpului m_1: $\vec{F} + \vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$.



Pe *Ox*: $F - T - F_{f_1} = m_1 a$ şi pe *Oy*: $N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow$

$F_{f_1} = \mu N_1 \Rightarrow F - T - \mu m_1 g = m_1 a$ (1)

Studiem mişcarea corpului m_2:

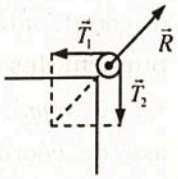
$\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Obţinem pe *Ox*: $T - F_{f2} - m_2 g\sin\alpha = m_2 a$ şi pe *Oy*: $N - m_2 g\cos\alpha = 0$.

Cum $F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 g\cos\alpha \Rightarrow T - \mu m_2 g\cos\alpha - m_2 g\sin\alpha = m_2 a$ (2)

Din (1)+(2): $F - \mu m_1 g - m_2 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a \approx 0{,}71$ m/s²

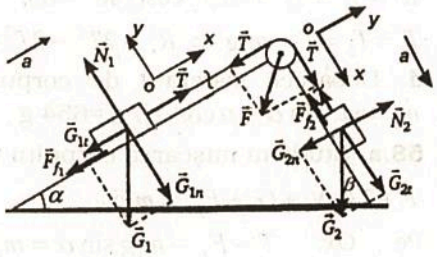
b. $T = F - m_1(\mu g + a) \approx 4{,}58$ N

c. Reprezentăm forţele care acţionează asupra scripetelui S_1 şi impunem condiţia de echilibru acestuia. $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$. Din geometrie se obţine scalar: $R^2 = T_1^2 + T_2^2$. Cum $T_1 = T_2 = T \Rightarrow R = T\sqrt{2} \approx 6{,}46$ N, unde R este reacţiunea în axul scripetelui.



d. Deoarece sistemul se deplasează uniform în acelaşi sens ca la punctul **a.**, atunci a=0 $\Rightarrow F = \mu m_1 g + m_2 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \approx 8{,}23$ N

60.a. Studiem mişcarea fiecărui corp separat. Studiem mişcarea corpului m_2.



Vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}=m_2\vec{a}$.

Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox $m_2g\sin\beta-T-F_{f_2}=m_2a$

pe Oy: $N_2-m_2g\cos\beta=0\Rightarrow N_2=m_2g\cos\beta$.

Cum

$F_{f_2}=\mu_2N_2=\mu_2m_2g\cos\beta\Rightarrow m_2g\sin\beta-T-\mu_2m_2g\cos\beta=m_2a$ (1)

Studiem mişcarea corpului m_1. Vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$. Obţinem:

Pe Ox: $T-F_{f_1}-m_1g\sin\alpha=m_1a$ şi pe Oy: $N_1-m_1g\cos\alpha=0$.

Cum $F_{f_1}=\mu_1N_1=\mu_1m_1g\cos\alpha\Rightarrow T-\mu_1m_1g\cos\alpha-m_1g\sin\alpha=m_1a$ (2)

Din (1)+(2)$\Rightarrow m_2g(\sin\beta-\mu_2\cos\beta)-m_1g(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)=(m_1+m_2)a\Rightarrow$

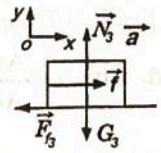
$$a=g\frac{m_2(\sin\beta-\mu_2\cos\beta)-m_1(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)}{m_1+m_2}\approx 1{,}72\ \text{m/s}^2$$

b. $T=m_1(a+g\sin\alpha+\mu_1g\cos\alpha)\approx 10{,}87$ N

c. Studiem echilibrul scripetelui. $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{R}=0\Rightarrow\vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2)$. Deorece $\vec{T}_1$ şi $\vec{T}_2$ sunt perpendiculare, din geometrie se obţine scalar:

$R^2=T_1^2+T_2^2=2T^2\Rightarrow\ R=T\sqrt{2}\approx 15{,}32$ N

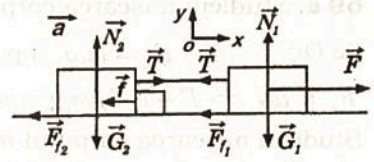
61.a. Corpurile se deplasează spre dreapta uniform accelerat. Studiem mişcarea corpului cu masa m_3:



$\vec{f}+\vec{G}_3+\vec{N}_3+\vec{F}_{f3}=m_3\vec{a}$. Scalar $f-\mu m_3g=m_3a$ (1).

Pentru corpul cu masa m_1: $\vec{F}+\vec{G}_1+\vec{N}_1+\vec{F}_{f1}+\vec{T}=m_1\vec{a}$, iar scalar:

$F-T-\mu m_1g=m_1a$ (2)



Pentru corpul cu masa m_2:

$\vec{T}+\vec{G}_2+\vec{N}_2+\vec{F}_{f2}+\vec{f}=m_2\vec{a}$, scalar pe axa Ox:

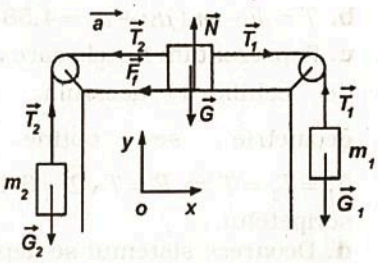
$T-\mu m_2g-f=m_2a$ (3). Din (1)+(2)+(3) obţinem:

$$F-\mu(m_1+m_2+m_3)=(m_1+m_2+m_3)a\Rightarrow a=\frac{F}{m_1+m_2+m_3}-\mu g=1\ \text{m/s}^2$$

b. Din (2) obţinem $T=F-m_1(a+\mu g)=\dfrac{F(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3}=10{,}5$ N

c. Forţa cu care corpul m_2 împinge corpul cu masa m_3 este $f=m_3(a+\mu g)=7$N

62.a. Studiem mişcarea corpului cu masa m_1:



$\vec{G}_1+\vec{T}_1=m_1\vec{a}$. Scalar obţinem prin proiecţia pe axa de coordonate: $m_1g-T_1=m_1a$ (1)

Studiem mişcarea corpului cu masă m_2. Vectorial $\vec{G}_2+\vec{T}_2=m_2\vec{a}$ şi scalar obţinem prin proiecţia pe axa de coordonate: $T_2-m_2g=m_2a$ (2). Studiem mişcarea corpului cu masă M:

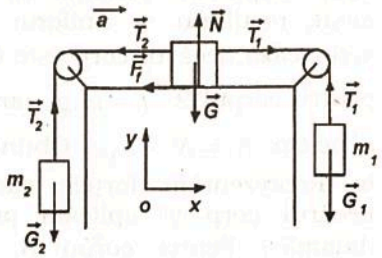
$\vec{T}_1+\vec{N}+\vec{T}_2+\vec{G}+\vec{F}_f=M\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T_1-T_2-F_f=Ma$ și pe *Oy*: $N-Mg=0\Rightarrow$

$F_f=\mu N=\mu Mg\Rightarrow T_1-T_2-\mu Mg=Ma$ (3). Adunând cele trei relații obținem:

$g(m_1-\mu M-m_2)=(m_1+m_2+M)a\Rightarrow 3\ \text{m/s}^2$

b. $T_1=m_1(g-a)=35$ N și $T_2=m_2(a+g)=13$ N

c. Deoarece sistemul se mișcă uniform în același sens ca la punctul **a.**, atunci $a=0\Rightarrow m_1=m_2+\mu M=2$ kg



63.a. Pentru corpul cu masa m_1: $\vec{G}_1+\vec{T}_1=m_1\vec{a}$, iar scalar obținem: $m_1g-T_1=m_1a$ (1)

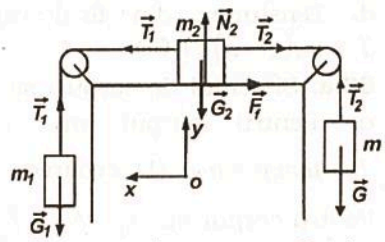
Pentru corpul cu masa m_2. $\vec{G}_2+\vec{T}_2=m_2\vec{a}$ și scalar obținem: $T_2-m_2g=m_2a$ (2). Pentru corpul cu masa *M*: $\vec{T}_1+\vec{N}+\vec{T}_2+\vec{G}+\vec{F}_f=M\vec{a}$. Pe *Ox*: $T_1-T_2-F_f=Ma$ și pe *Oy*: $N-Mg=0\Rightarrow$

$F_f=\mu N=\mu Mg\Rightarrow T_1-T_2-\mu Mg=Ma$ (3). Adunând cele trei relații obținem:

$$g(m_1-\mu M-m_2)=(m_1+m_2+M)a\Rightarrow m_1=\frac{(m_2+M)a+(\mu M+m_2)g}{g-a}=5{,}25\ \text{kg}$$

b. $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{m_1(g-a)}{m_2(g+a)}=1{,}75$

c. $g(m_1-\mu M-m_2)=(m_1+m_2+M)a_1\Rightarrow \mu=\dfrac{g(m_1-m_2)-(m_1+m_2+M)a_1}{Mg}=0{,}2$



64.a. Dacă elevul pune un cubuleț pe taler corpul m_1 începe să coboare uniform, atunci pentru corpul cu masă m_1: $m_1g=T_1$, iar pentru corpul cu masă *m*: $mg=T_2$. Impunând condiția de mișcare uniformă corpului cu masă m_2: vectorial $\vec{T}_1+\vec{N}_2+\vec{T}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_f=0$, iar scalar

$T_1-T_2-\mu m_2g=0\Rightarrow m_1-m-\mu m_2=0$ (1)

Dacă elevul pune cinci cubulețe pe taler corpul m_1 începe să urce uniform, astfel că pentru corpul cu masă m_1: $m_1g=T_1$, iar pentru corpul cu masă 5*m*: $5mg=T_2$.

Din condiția de echilibru impusă corpului cu masă m_2:

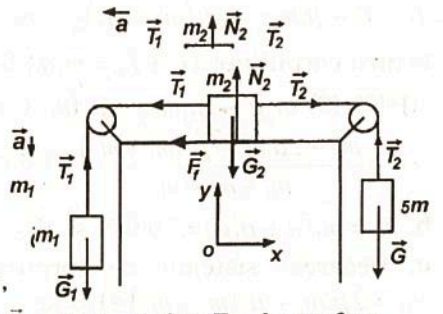
$\vec{T}_1+\vec{N}_2+\vec{T}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_f=0$, scalar

$T_2-T_1-\mu m_2g=0\Rightarrow 5m-m_1-\mu m_2=0$ (2)

Din (1) $m=m_1-\mu m_2$, astfel că introducând în (2) $\Rightarrow \mu=2m_1/(3m_2)=0{,}25$

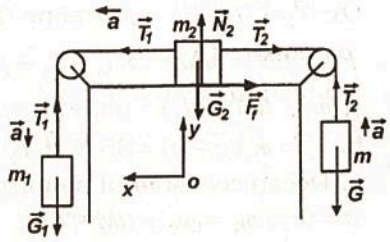
b. Masa unui cubuleț este $m=m_1-\mu m_2=1$kg

c. Sistemul se mișcă accelerat, astfel încât corpul cu masa m_1 coboară, iar corpul cu masă m_2 urcă. Pentru corpul m_1: $\vec{G}_1+\vec{T}_1=m_1\vec{a}$, scalar $m_1g-T_1=m_1a$, iar pentru corpul *m*: $\vec{G}+\vec{T}_2=3m\vec{a}$, scalar $T_2-3mg=3ma$.

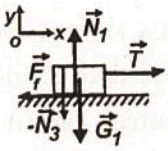


Pentru corpul cu masa m_2:

$\vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_f = m_2\vec{a}$, iar scalar obținem: pe Ox $T_1 - T_2 - \mu m_2 g = m_2 a$. Adunând cele trei relații obținem: $a = g\dfrac{m_1 - \mu m_2 - 3m}{m_1 + m_2 + 3m} \approx 0{,}345$ m/s²



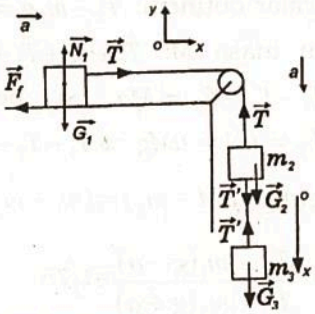
65.a. Impunem condiția ca fiecare corp să se mişte rectiliniu şi uniform. Astfel rezultanta forțelor care acționează fiecărui corp este nulă. Pentru corpul 3, $m_3 g = N_3$, pentru corpul 2, $T = m_2 g$, iar pentru corpul 1, pe Ox: $T = F_{f1}$ şi pe Oy: $N_1 = N_3 + m_1 g$. Obținem $m_2 g = \mu(m_1 + m_3)g \Rightarrow \mu = 0{,}2$.



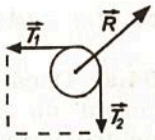
b. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Pentru corpul 3, $m_3 g - T' = m_3 a$, pentru corpul 2, $T' + m_2 g - T = m_2 a$, iar pentru corpul 1, $T - \mu m_1 g = m_1 a$. Adunăm cele trei ecuații şi obținem:

$m_3 g + m_2 g - \mu m_1 g = (m_1 + m_2 + m_3)a \Rightarrow$

$a = g\dfrac{m_3 + m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m_2} = 2$ m/s².

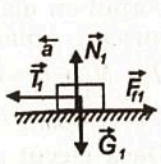


c. Forța de apăsare pe scripetele S în condițiile punctului anterior este $R = T\sqrt{2} \approx 4{,}5$ N, deoarece din condiția de echilibru impusă scripetelui $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{R} = 0$, unde $T_1 = T_2 = T = m_1(a + \mu g)$.



d. Tensiunea din firul care leagă corpurile 2 şi 3 este $T' = m_3(g - a) = 1{,}6$ N

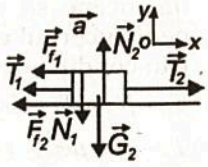
66.a. Sistemul de corpuri se deplasează accelerat cu accelerația a. Pentru corpul m_1. $\vec{G}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{N}_1 = m_1\vec{a}$, iar scalar $T_1 - \mu_1 m_1 g = m_1 a$ (1), deoarece $F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g$.



Pentru corpul m_2: $\vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f1} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$, scalar pe Ox $T_2 - T_1 - F_{f1} - F_{f_2} = m_2 a$ şi

pe Oy: $N_2 - N_1 - m_2 g = 0 \Rightarrow F_{f2} = \mu_2(m_1 + m_2)g \Rightarrow$

$T_2 - T_1 - \mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1 + m_2)g = m_2 a$ (2)



Pentru corpul m_3: $\vec{G}_3 + \vec{T}_2 = m_3\vec{a}$. Scalar $m_3 g - T_2 = m_3 a$ (3)

(1)+(2)+(3) $m_2 g - 2\mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2 + m_3)a \Rightarrow$

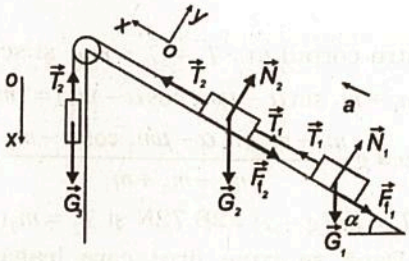
$a = g\dfrac{m_3 - 2\mu_1 m_1 - \mu_2(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} = 5{,}8$ m/s²

b. $T_1 = m_1(a + \mu_1 g) = 15{,}6$ N şi $T_2 = m_3(g - a) = 52$ N

c. Deoarece sistemul de corpuri se mişcă uniform în acelaşi sens, $a = 0 \Rightarrow$ $m_3 = 2\mu_1 m_1 + \mu_2(m_1 + m_2) = 1{,}3$ kg

67.a. Studiem mişcarea corpului m_3.

$\vec{G}_3 + \vec{T}_2 = m_3\vec{a}$. Prin proiecţia pe axa de coordonate Ox: $m_3 g - T_2 = m_3 a$ (1)



Studiem mişcarea corpului m_2. Vectorial: $\vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_1 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$.

Pe Ox: $T_2 - m_2 g\sin\alpha - F_{f_2} - T_1 = m_2 a$ şi pe Oy: $N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0 \Rightarrow$

$F_{f_2} = \mu N_2 = \mu m_2 g\cos\alpha \Rightarrow T_2 - m_2 g\sin\alpha - \mu m_2 g\cos\alpha - T_1 = m_2 a$ (2)

Studiem mişcarea corpului m_1. Vectorial: $\vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$

Proiectăm pe Ox: $T_1 - m_1 g\sin\alpha - F_{f_1} = m_1 a$ şi pe Oy: $N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0$.

Cum $F_{f_1} = \mu N_1 = \mu m_1 g\cos\alpha \Rightarrow T_1 - m_1 g\sin\alpha - \mu m_1 g\cos\alpha = m_1 a$ (3)

Din (1)+(2)+(3)$\Rightarrow g[m_3 - (m_1 + m_2)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)] = (m_1 + m_2 + m_3)a$

$$\Rightarrow a = g\frac{m_3 - (m_1 + m_2)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3} = 2{,}63 \text{ m/s}^2$$

b. $T_2 = m_3(g - a) = 36{,}85$ N

c. $T_1 = m_1(g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha + a) = 12{,}28$ N

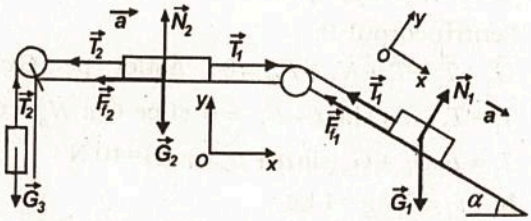
68.a. Studiem mişcarea corpului m_1. Vectorial: $\vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$.

pe Ox: $m_1 g\sin\alpha - T_1 - F_{f_1} = m_1 a$

pe Oy: $N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0$

Cum $F_{f1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g\cos\alpha \Rightarrow$

$m_1 g\sin\alpha - T_1 - \mu_1 m_1\cos\alpha = m_1 a$ (1)



Studiem mişcarea corpului m_2.

$\vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_1 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$

pe Ox: $T_1 - T_2 - F_{f_2} = m_2 a$ şi pe Oy: $N_2 - m_2 g = 0$.

Cum $F_{f_2} = \mu_2 N_2 \Rightarrow T_1 - T_2 - \mu_2 m_2 g = m_2 a$ (2)

Studiem mişcarea corpului m_3: $\vec{T}_2 + \vec{G}_3 = m_3\vec{a}$ şi scalar $T_2 - m_3 g = m_3 a$ (3)

Din (1)+(2)+(3)$\Rightarrow g(m_1\sin\alpha - \mu_1 m_1\cos\alpha - \mu_2 m_2 - m_3) = (m_1 + m_2 + m_3)a$

$$\Rightarrow a = g\frac{m_1\sin\alpha - \mu_1 m_1\cos\alpha - \mu_2 m_2 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0{,}834 \text{ m/s}^2$$

b. $T_1 = m_1(g\sin\alpha - \mu_1 g\cos\alpha - a) \approx 16{,}5$ N şi $T_2 = m_3(g + a) = 10{,}83$ N

69.a. Studiem mişcarea corpului m_1.

$\vec{T}_1 + \vec{G}_1 = m_1\vec{a}$ şi $m_1 g - T_1 = m_1 a$ (1)

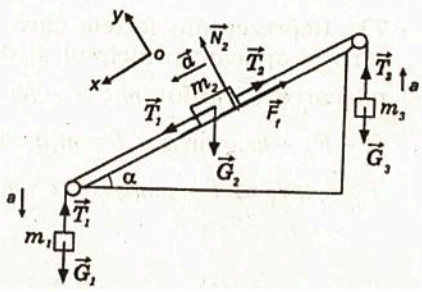
Studiem mişcarea corpului m_2:

$\vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_1 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$. Proiectăm pe Ox:

$T_1 + m_2 g\sin\alpha - T_2 - F_{f_2} = m_2 a$ şi pe Oy:

$N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_{f_2} = \mu N_2 = \mu m_2 g\cos\alpha$

$T_1 + m_2 g\sin\alpha - T_2 - \mu m_2 g\cos\alpha = m_2 a$ (2)

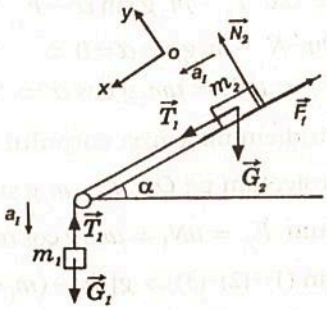


Pentru corpul m_3: $\vec{T}_2+\vec{G}_3=m_3\vec{a}$ şi scalar $T_2-m_3g=m_3a$ (3). Din(1)+(2)+(3)$\Rightarrow$

$g(m_1+m_2\sin\alpha-\mu m_2\cos\alpha-m_3)=(m_1+m_2+m_3)a$

$$\Rightarrow a=g\frac{m_1+m_2\sin\alpha-\mu m_2\cos\alpha-m_3}{m_1+m_2+m_3}\approx 3{,}32\ \text{m/s}^2$$

b. $T_1=m_1(g-a)=26{,}72\text{N}$ şi $T_2=m_3(g+a)=26{,}64\text{N}$



c. Dacă se rupe firul care leagă corpul m_3 de corpul m_2 sistemului de corpuri se mişcă accelerat cu accelerația a_1. Pentru corpul m_1:

$m_1g-T_1=m_1a_1$ (1), iar pentru corpul m_2:

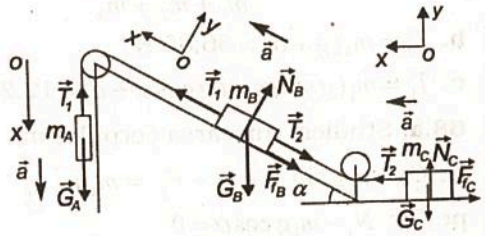
$T_1+m_2g\sin\alpha-\mu m_2g\cos\alpha=m_2a_1$ (2).

Din (1)+(2) obținem:

$m_1g+m_2g\sin\alpha-\mu m_2g\cos\alpha=(m_1+m_2)a_1\Rightarrow$

$$a_1=g\frac{m_1+m_2(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{m_1+m_2}=7{,}76\ \text{m/s}^2$$

70.a. Deoarece sistemul de corpuri se mişcă uniform a=0. Pentru corpul A:



$\vec{G}_A+\vec{T}_1=0\Rightarrow T_1=m_Ag$

Pentru corpul C: $\vec{G}_C+\vec{T}_2+\vec{N}_C+\vec{F}_{fC}=0$

$\Rightarrow T_2=F_{fC}=\mu_CG_C=10$ N

Pentru corpul B:

$\vec{G}_B+\vec{T}_2+\vec{T}_1+\vec{N}_B+\vec{F}_{fB}=0$. Astfel pe Ox:

$T_1-T_2-G_B\sin\alpha-F_{fB}=0$ şi pe Oy: $N_B=G_B\cos\alpha$ şi $F_{fB}=\mu_BN_B\Rightarrow$

$T_1=\mu_CG_C+G_B(\sin\alpha+\mu_B\cos\alpha)=40$ N

b. $m_A=T_1/g=4$ kg

c. Sistemul se mişcă accelerat în acelaşi sens ca la punctul **a.**, astfel că pentru m_A: $\vec{G}_A+\vec{T}_1=m_A\vec{a}$ şi scalar pe Ox: $m_Ag-T_1=m_Aa$ (1)

Pentru m_B: $\vec{G}_B+\vec{T}_2+\vec{T}_1+\vec{N}_B+\vec{F}_{fB}=m_B\vec{a}$. Pe Ox: $T_1-T_2-G_B\sin\alpha-F_{fC}=m_Ba$

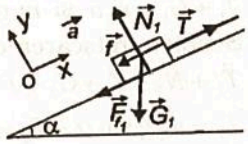
PeOy: $N_B-G_B\cos\alpha=0$ şi $F_{fB}=\mu_BN_B\Rightarrow T_1-T_2-G_B\sin\alpha-\mu_BG_B\cos\alpha=m_Ba$ (2)

Pentru m_C: $\vec{G}_C+\vec{T}_2+\vec{N}_C+\vec{F}_{fC}=m_Ca\Rightarrow$pe Ox: $T_2-\mu_CG_C=m_Ca$ (3)

Din (1)+(2)+(3)$\Rightarrow G_A-G_B(\sin\alpha+\mu_B\cos\alpha)-\mu_CG_C=(m_A+m_B+m_C)a\Rightarrow$

$$G_A=\frac{[G_B(\sin\alpha+\mu_B\cos\alpha)+\mu_CG_C]g+(G_B+G_C)a}{g-a}=70\ \text{N}\Rightarrow m_A=\frac{G_A}{g}=7\ \text{kg}$$

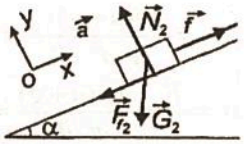
71. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: Studiem mişcarea corpului m_1: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}+\vec{f}=m_1\vec{a}$. Pe Ox:



$T-F_{f_1}-m_1g\sin\alpha-f=m_1a$ şi pe Oy: $N_1-m_1g\cos\alpha=0\Rightarrow$

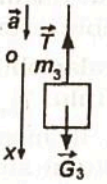
$F_{f_1}=\mu N_1\Rightarrow T-\mu m_1g\cos\alpha-m_1g\sin\alpha-f=m_1a$ (1)

Studiem mişcarea corpului m_2: $\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}+\vec{f}=m_2\vec{a}$, astfel că pe *Ox*: $f-F_{f2}-m_2g\sin\alpha=m_2a$ şi pe *Oy*: $N_2-m_2g\cos\alpha=0\Rightarrow F_{f2}=\mu N_2\Rightarrow$



$f-\mu m_2g\cos\alpha-m_2g\sin\alpha=m_2a$ (2)

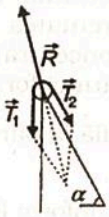
Studiem mişcarea corpului m_3: $\vec{T}+\vec{G}_3=m_3\vec{a}$, astfel că scalar $m_3g-T=m_3a$ (3). Adunând cele trei ecuaţii obţinem: $m_3g-(m_1+m_2)g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)=(m_1+m_2+m_3)a$ =2 m/s².



b. Forţa cu care corpul de masă m_1 împinge corpul de masă m_2 este $f=m_2(\mu g\cos\alpha+g\sin\alpha+a)$=12 N

c. Tensiunea în firul de legătură este $T=m_3(g-a)$=24 N.

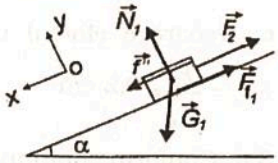
Calculăm reacţiunea în axul scripetelui impunând acestuia condiţia de echilibru: $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0\Rightarrow\vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2)\Rightarrow$



$R^2=T_1^2+T_2^2+2T_1T_2\cos(90-\alpha)$. Cum $T_1=T_2=T\Rightarrow$

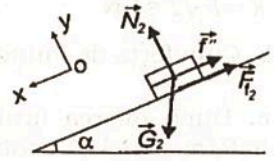
$R^2=2T^2+2T^2\sin\alpha\Rightarrow R=T\sqrt{2(1+\sin\alpha)}\approx 42{,}93$ N

d. Impunem condiţia de mişcare uniformă pentru sistemul de corpuri m_1 şi m_2, dacă acestea se mişcă în acelaşi sens, astfel că acceleraţia este nulă. Cum $T=F_1$, obţinem pentru corpul m_1: $F_1-\mu m_1g\cos\alpha-m_1g\sin\alpha-f'=0$ şi pentru corpul m_2 obţinem: $f'-\mu m_2g\cos\alpha-m_2g\sin\alpha=0$.



Astfel prin adunare obţinem $F_1=(m_1+m_2)g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$=20 N.

Dacă corpurile îşi schimbă sensul de mişcare, se schimbă sensul forţelor de frecare, astfel că pentru corpul m_1 obţinem: $m_1g\sin\alpha-\mu m_1g\cos\alpha+f''-F_2=0$ şi pentru corpul m_2 obţinem: $m_2g\sin\alpha-\mu m_2g\cos\alpha-f''=0$. Astfel prin adunare obţinem $F_2=(m_1+m_2)g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$=4 N.

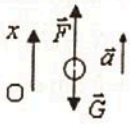


2.4. Legea lui Hooke. Forţa elastică.

1.a. Din legea lui Hooke $\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell}{\ell_0}\Rightarrow F=SE\frac{\Delta\ell}{\ell_0}$. Cum forţa de întindere este greutatea corpului $F=mg\Rightarrow m=\frac{SE\Delta\ell}{g\ell_0}=\frac{\pi\cdot d^2E\Delta\ell}{4g\ell_0}\approx 1{,}5$ kg.

b. Efortul unitar din cablu este $\sigma=\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell}{\ell_0}\approx 1{,}9\cdot 10^7$ N/m²

c. Impunem condiţia de mişcare accelerată a corpului: $\vec{F}+\vec{G}=m\vec{a}$. Pe *Ox*: $F-mg=ma\Rightarrow F=m(a+g)$.



Cum $\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell_1}{\ell_0}\Rightarrow\Delta\ell_1=\frac{m(a+g)\ell_0}{S\cdot E}$. Cum $S=\frac{\pi\cdot d^2}{4}\Rightarrow$

$\Delta\ell_1 = \dfrac{4m(a+g)\ell_0}{\pi \cdot d^2 \cdot E} = \dfrac{(a+g)\Delta\ell}{g} = 2{,}124$mm. Efortul unitar din cablu este:

$\sigma_1 = \dfrac{F}{S} = \dfrac{4m(a+g)}{\pi \cdot d^2} = \dfrac{\sigma(a+g)}{g} = 2{,}27 \cdot 10^7$ N/m²

2.a. Aflăm masa cablului de susținere $m_c = m_0\ell = 48$ kg și masa totală ridicată de cablu este: $m_t = m + m_c = 1024$ kg. Conform principiului al doilea al dinamicii, scalar obținem tensiunea maximă care apare în cablu la pornirea accelerată a liftului: $T_{max} - m_t g = m_t a \Rightarrow T_{max} = m_t(a+g) = 11{,}776$ kN

b. În momentul pornirii cablul este alungit atât de greutatea lui cât și de a liftului suspendat. Datorită distribuției uniforme a masei cablului de-a lungul acestuia forța de întindere datorită numai greutății acestuia este 1/2 din greutatea cablului. Astfel cablul poate fi considerat un punct material cu masa concentrată în centrul de greutate. Deoarece liftul și cablul pornesc accelerat, atunci forța maximă de întindere a firului se obține când liftul se

află la parter: $F - \left(\dfrac{m_c}{2} + m\right)g = \left(\dfrac{m_c}{2} + m\right)a \Rightarrow F = \left(\dfrac{m_c}{2} + m\right)(g+a) = 11{,}5$ kN

Conform legii lui Hooke $\dfrac{F}{S} = E\dfrac{\Delta\ell}{\ell_0} \Rightarrow \Delta\ell = \dfrac{F \cdot \ell_0}{S \cdot E} = 5{,}75$ mm.

c. Deoarece efortul unitar nu depășește pe cel maxim admisibil σ_a, atunci

$S_{min} = \dfrac{F}{\sigma_a} = 0{,}2$ cm²

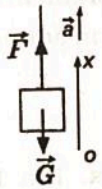
3.a. Conform compunerii vectorilor, forța rezultantă este $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \Rightarrow$

$R = F\sqrt{2} = 4$ N

b. Cum forța de întindere a firului este R, din $\dfrac{R}{S} = E\dfrac{\Delta\ell}{\ell_0} \Rightarrow E = \dfrac{R\ell_0}{S\Delta\ell} = 10^{11}$ N/m²

c. După tăierea firului, corpul se va mișca uniform accelerat cu accelerația $a = R/m$, astfel că $v = at = 4$ m/s

4.a. Considerăm sistemul un corp cu masa $m_t = M + m$. Acest corp se va mișca accelerat, astfel că $\vec{F} + \vec{G} = (M+m)\vec{a}$, iar scalar

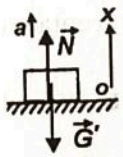


$F - (M+m)g = (M+m)a \Rightarrow a = \dfrac{F}{M+m} - g = 2$ m/s².

Impunem condiția de mișcare manșonului: $\vec{N} + \vec{G}' = m\vec{a}$ și scalar

$N - mg = ma \Rightarrow N = m(a+g) = 36$ N

b. Cum $a = \Delta v/\Delta t \Rightarrow \Delta t = \Delta v/a = 3$ s

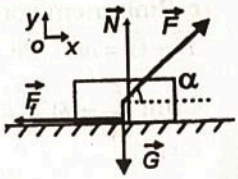


c. Prin definiție efortul unitar este $\sigma = \dfrac{F}{S} = \dfrac{4F}{\pi \cdot d^2} \approx 1{,}2\ 10^9$ N/m²

5.a. Impunem condiția de mișcare rectilinie uniformă corpului, astfel

$\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Pe Ox: $F\cos\alpha - F_f = 0$ iar pe Oy:

$N + F\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha)$



$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = 0 \Rightarrow F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 80$ N

b. Conform legii lui Hooke: $\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell}{\ell_0}$ şi $\varepsilon=\frac{\Delta\ell}{\ell_0}\Rightarrow E=\frac{4F}{\pi\cdot d^2\varepsilon}$ =8 10^9 N/m²

c. Reacţiune normală la suprafaţă este $N=\frac{mg\cos\alpha}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$ =160 N

6.a. Deoarece distanţa dintre cele două ziduri este mai mare decât suma lungimilor cablurilor nedeformate, ambele cabluri sunt întinse, iar forţele de întindere sunt egale. Pe baza principiului acţiunii şi reacţiunii, tensiunile din cele două cabluri sunt egale, astfel că $F_1=F_2=F$. Conform legii lui Hooke

$$\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell_1}{\ell_1}\Rightarrow\Delta\ell_1=\frac{F\ell_1}{SE},\Delta\ell_2=\frac{F\ell_2}{SE}\Rightarrow\ell=\ell_1+\Delta\ell_1+\ell_2+\Delta\ell_2=\ell_1+\frac{F\ell_1}{SE}+\ell_2+\frac{F\ell_2}{SE}$$

$$\Rightarrow\frac{F(\ell_1+\ell_2)}{SE}=\ell-\ell_1-\ell_2\Rightarrow F=\frac{SE(\ell-\ell_1-\ell_2)}{\ell_1+\ell_2}=270\text{ kN}$$

b. Alungirile absolute ale cablurilor sunt:

$$\Delta\ell_1=\frac{F\ell_1}{SE}=\frac{\ell_1(\ell-\ell_1-\ell_2)}{\ell_1+\ell_2}\approx 9{,}8\text{ cm şi }\Delta\ell_2=\frac{F\ell_2}{SE}=\frac{\ell_2(\ell-\ell_1-\ell_2)}{\ell_1+\ell_2}\approx 10{,}2\text{ cm}$$

c. Eforturile unitare la care sunt supuse cablurile sunt egale cu $\sigma_1=\sigma_2=\sigma=\frac{F}{S}=2{,}7\cdot10^9$ N/m²

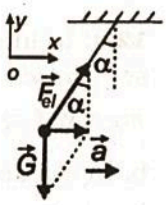
7.a. Legea lui Hooke este valabilă atât timp cât alungirea este direct proporţională cu forţa de întindere. Observăm că o creştere a alungirii cu $\Delta\ell$=6 mm se obţine atunci când forţa de întindere creşte cu ΔF=5 N. Acest lucru este valabil până ce resortul se alungeşte cu $\Delta\ell$=2,4 mm, deci până când forţa de întindere devine F=20 N. După ce forţa de întindere depăseşte valoarea de 20 N, când aceasta creşte alungirea coardei creşte mai mult ca înainte, astfel nu se mai respectă legea $F=k\Delta\ell$. Domeniul de valori ale forţelor de întindere pentru care este valabilă legea lui Hooke este $F\in[0,20]$N.

b. Din $F=k\Delta\ell\Rightarrow k=F/\Delta\ell$=833,33 N/m, deoarece F=5 N şi $\Delta\ell$=6 mm

c. Studiem mişcarea uniformă a coardei, astfel că $F-F_f=0\Rightarrow F=\mu N=\mu mg=k\Delta\ell\Rightarrow$ $\Delta\ell=\mu mg/k$=6 mm

8.a. Din grafic se observă că atunci când x=8 cm, forţa elastică corespunzătoare este F =64 N. Atunci constanta elastică a resortului este $k=F/x$=800 N/m

b. Din condiţia de echilibru impusă corpului $\vec{G}+\vec{F}_{el}=0$, scalar obţinem $G=F_{el}\Rightarrow mg=kx\Rightarrow x=mg/k$ =2,5 mm

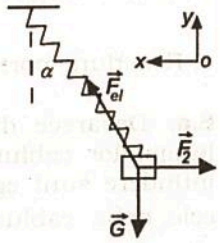


c. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului. Vectorial $\vec{F}_{el}+\vec{G}=m\vec{a}$. Proiectăm pe axa Ox: $F_{el}\sin\alpha=ma$ şi pe Oy: $F_{el}\cos\alpha-mg=0\Rightarrow F_{el}=m\sqrt{a^2+g^2}=kx_1\Rightarrow x_1$=2,75 mm

9.a. Impunem condiţia de echilibru corpului: $\vec{G}+\vec{F}_{el}=0$, iar scalar $G=F_{el}\Rightarrow$ $mg=k\Delta l=k(\ell-\ell_0)=k\ell_0 f$, deoarece lungimea resortului devine $\ell=\ell_0(1+f)$. Dacă se acţionează asupra bilei prinse de resort cu o forţă verticală, atunci $\vec{G}+\vec{F}_{el}'+\vec{F}_1=0$, iar scalar $G+F_1=F_{el}'\Rightarrow mg+F_1=k2\Delta\ell\Rightarrow mg+F_1=2mg\Rightarrow m=F_1/g$ $\Rightarrow m$=0,5 kg

b. Din $mg=k\ell_0 f\Rightarrow k=\frac{mg}{f\cdot\ell_o}=\frac{F_1}{f\cdot\ell_0}$ =500 N/m

c. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului: $\vec{G}+\vec{F}_{el}+\vec{F}_2=0$. Scalar pe *Ox*. $F_{el}\sin\alpha-F_2=0$ și pe *Oy*:



$F_{el}\cos\alpha-mg=0\Rightarrow F_{el}=\sqrt{F_2^2+(mg)^2}=kx\Rightarrow$

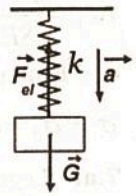
$x=\dfrac{\sqrt{F_2^2+(mg)^2}}{k}$=1,2 cm

10.a. Studiem mișcarea accelerată a liftului în sus: $\vec{G}+\vec{F}_{el}=m\vec{a}$. Scalar $F_{el}-mg=ma\Rightarrow F_{el}=m(a+g)=10{,}8$ N

Deformația resortului este $x_1=\dfrac{F_{el}}{k}=5{,}4$ cm

b. Studiem coborârea accelerată a liftului: $\vec{G}+\vec{F}_{el}=m\vec{a}$

Scalar $mg-F_{el}=ma\Rightarrow F_{el}=m(g-a)=9{,}2$ N, iar deformația resortului este $x_2=\dfrac{F_{el}}{k}=\dfrac{m(g-a)}{k}=4{,}6$ cm



c. În cazul mișcării uniforme a liftului, accelerația acestuia este zero. $\vec{G}+\vec{F}_{el}=0\Rightarrow F_{el}=G=mg=10$ N, iar $x_3=\dfrac{F_{el}}{k}=\dfrac{mg}{k}=5$ cm.

11.a. Studiem echilibrul corpului aflat pe cântar $\vec{G}+\vec{F}_{el}=0$, iar scalar $G=F_{el}\Rightarrow mg=kx\Rightarrow k=\dfrac{mg}{x}=1{,}5\cdot10^4$ N/m

b. Dacă în locul copilului pe cântar se urcă adultul, atunci $G_a=F'_{el}\Rightarrow Mg=kx'\Rightarrow x'=\dfrac{Mg}{k}=\dfrac{M}{m}x=6$ cm

c. Pentru adultul aflat pe cântarul din liftul care coboară frânat $\vec{G}+\vec{F}_{el}=M\vec{a}$. Viteza liftului este orientată în jos, iar accelerația acestuia este orientată în sus, astfel că $F_{el}-Mg=Ma\Rightarrow F_{el}=M(a+g)$.

Forța elastică determină acul cântarului să arate eronat mai mult, astfel că masa indicată este $M_1=\dfrac{F_{el}}{g}=95{,}4$ kg

12.a. În intervalul de timp $t\in(1,9)$s, a=0 m/s și prin urmare corpul de iluminat se mișcă rectiliniu și uniform, astfel că $\vec{G}+\vec{F}_{el}=0\Rightarrow G=F_{el}\Rightarrow$ $mg=k\Delta\ell\Rightarrow k=mg/\Delta\ell$=500 N/m

b. În cea de-a treia etapă a mișcării accelerația corpului este $a_3=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=-6$ m/s².

Studiem mișcarea corpului: $\vec{G}+\vec{F}_{el}=m\vec{a}_3$, iar scalar obținem:

$mg-k\Delta\ell_3=m|a_3|\Rightarrow\Delta\ell_3=m(g-|a_3|)/k=4$ mm$\Rightarrow\ell=\ell_0+\Delta\ell_3$=20,4 cm

c. Calculăm distanța parcursă de ascensor cu ajutorul ariei cuprinse între curba vitezei și axa timpului. Astfel d=54 m. Numărul de etaje ale clădirii este $N=\dfrac{d}{h_0}+1$=19, deoarece la numărul de nivele ale clădirii se obține adunând parterul la numărul de etaje parcurse de lift.

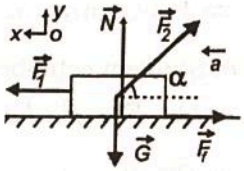
13.a. Din grafic se observă că $\Delta\ell = kt$, astfel că $\frac{\Delta\ell}{\Delta\ell_m} = \frac{t}{t_m} \Rightarrow \Delta\ell = \frac{\Delta\ell_m t}{t_m}$=3 cm, astfel că forța elastică este $F_{el} = k\Delta\ell$=6 N, deoarece la momentul t_m=5 s, deformația maximă a resortului este $\Delta\ell_m$=5 cm

b. Când $\Delta\ell$=2 cm, corpul se află în repaus, deoarece până când deformația resortului devine $\Delta\ell_m$=5 cm alungirea și forța elastică cresc. Astfel vectorial $\vec{G} + \vec{F}_{el} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$. Scalar $F_{el} - F_f = 0 \Rightarrow F_f = k\Delta\ell$=4 N

b. Corpul începe să alunece când forța de frecare devine maximă și egală cu forța elastică maximă. Astfel $F_{el}' = F_f' \Rightarrow k\Delta\ell_m = \mu mg \Rightarrow \mu = \frac{k\Delta\ell_m}{mg}$=0,2

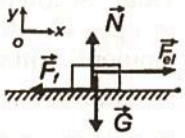
14.a. Din $F_1 = k\Delta\ell \Rightarrow k = F_1/\Delta\ell$=7 cm

b. Impunem condiția de echilibru corpului cu masă *m*. Vectorial $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Deoarece $F_1 > F_2\cos\alpha$, corpul se va deplasa spre stânga accelerat. Proiectăm pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $F_1 - F_2\cos\alpha - F_f = ma$ și pe *Oy*: $F_2\sin\alpha + N - mg = 0$. Cum $F_f = \mu N = \mu(mg - F_2\sin\alpha) \Rightarrow$ $F_1 - F_2(coa\alpha - \mu\sin\alpha) - \mu mg = ma \Rightarrow a$=1,94 m/s²



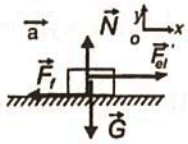
c. Pentru ca acest corp să nu apese pe planul orizontal trebuie ca $N = 0 \Rightarrow$ $F_2 = \frac{mg}{\sin\alpha}$=20 N

15.a. Studiem mișcarea rectilinie uniformă a corpului: $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $F_{el} - F_f = 0 \Rightarrow F_{el} = F_f$ și pe *Oy*: $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow kx_0 = \mu mg \Rightarrow \mu = \frac{kx_0}{mg}$=0,1



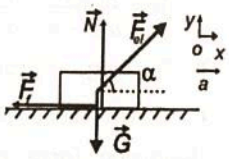
b. Studiem mișcarea accelerată a corpului când alungirea resortului este de trei ori mai mare decât în cazul mișcării uniforme. În acest caz: $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Pe *Ox*: $F_{el}' - F_f = ma$ și pe *Oy*: $N - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow 3kx_0 - \mu mg = ma$

Cum $kx_0 = \mu mg \Rightarrow 2kx_0 = ma \Rightarrow a = \frac{2kx_0}{m}$ = 2 m/s²



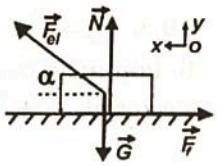
c. Reprezentăm forțele asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Proiectăm pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $F_{el}\cos\alpha - F_f = ma$ și pe *Oy*: $N + F_{el}\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F_{el}\sin\alpha \Rightarrow F_f = \mu N \Rightarrow$

$F_f = \mu(mg - F_{el}\sin\alpha) \Rightarrow F_{el}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg = ma \Rightarrow x = \frac{m(a + \mu g)}{k(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$=2 cm



16.a. Impunem condiția de echilibru corpului suspendat m_1: $\vec{G}_1 + \vec{F}_{el} = 0 \Rightarrow G_1 = F_{el} \Rightarrow m_1 g = kx \Rightarrow x = m_1 g/k$=6 cm

b. Impunem condiția de echilibru cubului cu masa $m_2 = \rho V = \rho(\ell^3 - \ell_1^3)$=7,488 kg. Vectorial $\vec{F}_{el} + \vec{G}_2 + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$.



Proiectăm pe axa Oy: $N + F_{el}\sin\alpha - m_2 g = 0 \Rightarrow N = g(m_2 - m_1\sin\alpha) \approx 59{,}88$ N

c. Pe Ox: $F_{el}\cos\alpha - F_f = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow \mu = \dfrac{m_1\cos\alpha}{m_2 - m_1\sin\alpha} \approx 0{,}43$

17.a. Deoarece corpul se află în echilibru, rezultanta forțelor este nulă. Scalar $G = F_{el} \Rightarrow mg = kx \Rightarrow x = \dfrac{mg}{k} = 5$ mm

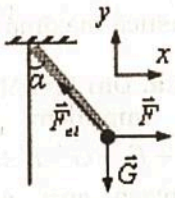
b. Studiem echilibrul corpului, după reprezentarea forțelor: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{F} = 0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:

pe Ox: $F - F_{el}\sin\alpha = 0$ și

pe Oy: $F_{el}\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow kx\cos\alpha = mg \Rightarrow x = \dfrac{mg}{k\cos\alpha} = 1$cm

$\Rightarrow F = kx\sin\alpha = m\cdot g\cdot tg\,\alpha = 0{,}865$ N

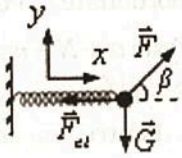


c. Studiem echilibrul corpului: $\vec{F}_{el} + \vec{F} + \vec{G} = 0$.

pe Ox: $F\cos\beta - F_{el} = 0 \Rightarrow F\cos\beta = kx$ și

pe Oy: $F\sin\beta - mg = 0 \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{mg}{F} = \dfrac{1}{tg\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \Rightarrow x = \dfrac{F\cos\beta}{k} = 7{,}06$ mm



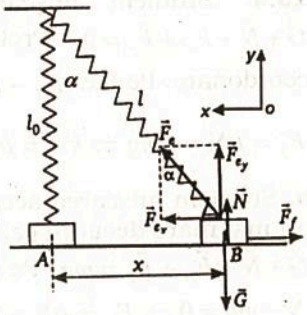
18.a. Studiem mișcarea corpului. Deoarece corpul începe să se deplaseze, considerăm că în acel moment mișcarea corpului este uniformă, iar rezultanta forțelor este nulă: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:

pe Ox: $F_{el}\sin\alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = F_{el}\sin\alpha$;

pe Oy: $F_{el}\cos\alpha + N - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F_{el}\cos\alpha$.

$F_f = \mu N = \mu(mg - F_{el}\cos\alpha) \Rightarrow \mu = \dfrac{F_{el}\sin\alpha}{mg - F_{el}\cos\alpha}$.



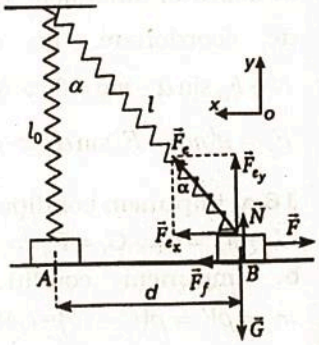
Dar $F_{el} = k\Delta l = k(\ell - \ell_0)$ și cum $\cos\alpha = \dfrac{\ell_0}{\ell} \Rightarrow \ell = \dfrac{\ell_0}{\cos\alpha} \Rightarrow F_{el} = \dfrac{k\ell_0(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow \mu = \dfrac{k\ell_0(1-\cos\alpha)tg\alpha}{mg - k\ell_0(1-\cos\alpha)} = 0{,}5$

b. $N = mg - F_{el}\cos\alpha = mg - k\ell_0(1-\cos\alpha) = 8{,}65$ N

c. Când trece prin poziția verticală $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$, deoarece forța elastică este nulă pentru că resortul este nedeformat.

Scalar $-\mu mg = ma \Rightarrow a = -\mu\cdot g \Rightarrow a = -5$ m/s²



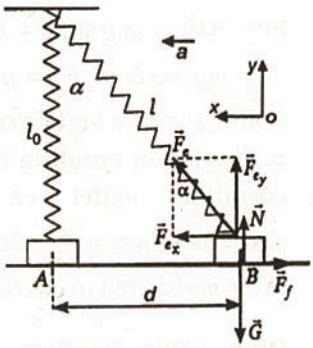
19.a. $F_{el} = k(\ell - \ell_0) = k\left(\sqrt{\ell_0^2 + d^2} - \ell_0\right) = 7{,}8$ N

b. Impunem condiția de echilibru corpului în poziția B.

Vectorial $\vec{F} + \vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe Ox:

$F_{el}\sin\alpha - F + F_f = 0$ şi pe Oy: $F_{el}\cos\alpha + N - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg - F_{el}\cos\alpha)$
$\Rightarrow F = F_{el}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + \mu mg \approx 5{,}056\text{N}$,

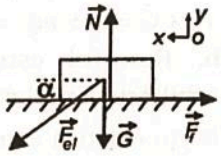
$\sin\alpha = \dfrac{d}{\sqrt{d^2+\ell_0^2}} = 0{,}6$ şi $\cos\alpha = \dfrac{\ell_0}{\sqrt{d^2+\ell_0^2}} = 0{,}8$



c. În momentul în care este eliberat în poziţia B corpul se va mişca accelerat, astfel că $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$.
Vectorial obţinem pe Ox:
$F_{el}\sin\alpha - F_f = ma \Rightarrow F_{el}\sin\alpha - \mu(mg - F_{el}\cos\alpha) = ma \Rightarrow$

$a = \dfrac{F_{el}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m} - \mu\cdot g \approx 4{,}304\ \text{m/s}^2$

20.a. Considerăm că acest corp porneşte într-o mişcare uniformă şi prin urmare rezultanta forţelor care acţionează asupra corpului este nulă. Vectorial: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$.
Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox:
$F_{el}\cos\alpha - F_f = 0 \Rightarrow kx\cos\alpha = F_f$ şi pe Oy:
$N - mg - F_{el}\sin\alpha = 0 \Rightarrow N = mg + kx\sin\alpha$.



Cum $F_f = \mu N \Rightarrow kx\cos\alpha = \mu mg + \mu kx\sin\alpha \Rightarrow x = \dfrac{\mu mg}{k(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)} = 3{,}525$ cm.

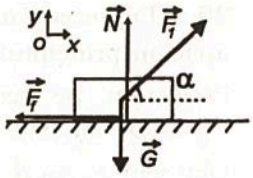
b. $F_{el}' = kx' = kx\sqrt{2} = 1{,}5$ N

c. Impunem condiţia de mişcare corpului $\vec{F}_{el}' + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Scalar pe Ox:
$F_{el}'\cos\alpha - F_f = ma \Rightarrow kx\sqrt{2}\cos\alpha - F_f = ma$. Înlocuind x şi forţa de frecare $F_f = \mu N = \mu(mg + kx\sqrt{2}\sin\alpha)$, obţinem $a = \mu g(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}82\ \text{m/s}^2$

21. a. Deoarece $F = k\Delta\ell$, atunci $\dfrac{\Delta\ell_2}{\Delta\ell_1} = \dfrac{F_2}{F_1} = 1{,}2$

b. Impunem condiţia de echilibru corpului: $\vec{F}_1 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Pe Ox: $F_1\cos\alpha - F_f = 0$ iar pe Oy:
$N + F_1\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg - F_1\sin\alpha) \Rightarrow$

$\mu = \dfrac{F_1\cos\alpha}{mg - F_1\sin\alpha} = 0{,}25$



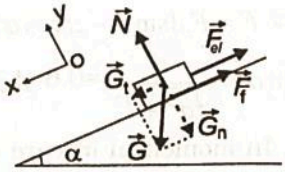
c. Sub acţiunea forţei F_2, vectorial obţinem $\vec{F}_2 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}$.
Pe Ox: $F_2\cos\alpha - F_f = ma$ şi pe Oy: $N + F_1\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow$

$F_f = \mu N = \mu(mg - F_2\sin\alpha) \Rightarrow a = \dfrac{F_2(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{m} - \mu g = 0{,}5\ \text{m/s}^2$

d. Deoarece corpul nu mai apasă pe suprafaţă $N=0 \Rightarrow F_3 = \dfrac{mg}{\sin\alpha} \approx 7{,}05$ N

22.a. Deoarece corpul este în repaus, atunci $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} = 0$, iar scalar pe Ox:
$mg\sin\alpha = k(\ell - \ell_0) \Rightarrow \ell = \ell_0 + mg\sin\alpha / k = 90$ cm

b. În prezența forțelor de frecare $\vec{F}_{el}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$

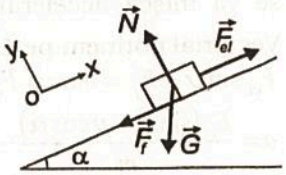


Pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F_f - k(\ell'-\ell)=0$ și pe *Oy*:

$N = mg\cos\alpha \Rightarrow F_f = \mu mg\cos\alpha$.

Astfel $\ell' = \ell_0 + mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/k = 84$ cm

c. Impunem condiția de mișcare rectilinie și uniformă corpului, astfel că $\vec{F}_{el}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$. Pe *Ox*:

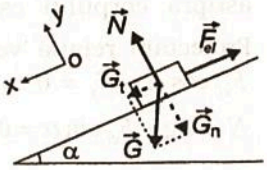


$k\Delta\ell = mg\sin\alpha + F_f$. Cum $F_f = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow$

$\Delta\ell = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)/k = 16$ cm

23.a. Din condiția de echilibru impusă corpului suspendat obținem: $\vec{F}_{el}+\vec{G}=0 \Rightarrow mg = k(\ell-\ell_0) \Rightarrow k = mg/(\ell-\ell_0) = 100$ N/m

b. Resortul este comprimat, iar corpul se află în echilibru, astfel că $\vec{F}_{el}+\vec{G}+\vec{N}=0$.



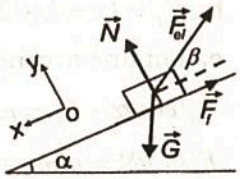
Forța elastică este $F_{el} = k(\ell_0 - \ell_1) = 0{,}5$ N

c. Proiectăm pe *Ox* relația vectorială:și obținem:

$mg\sin\alpha - k(\ell_0 - \ell_1) = 0 \Rightarrow \sin\alpha = F_{el}/mg = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 30^0$

24.a. Impunem condiția de echilibru corpului. $\vec{F}_{el}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$.

Proiectăm pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F_{el}\cos\beta - F_f = 0$ și pe *Oy*:



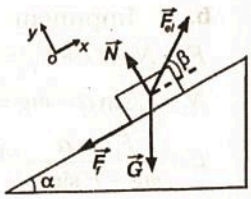
$F_f = \mu(mg\cos\alpha - F_{el}\sin\beta) \Rightarrow F_{el} = \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\beta - \mu\sin\beta} \approx 2{,}3$ N

b. Alungirea resortului este $\Delta\ell = F_{el}/k = 2{,}28$ cm

c. Forța de apăsare normală este:

$N = mg\cos\alpha - F_{el}\sin\beta \approx 0{,}126$ N

25.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra schiorului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}_{el}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$.



Proiectăm pe axele de coordonate și obținem: pe *Ox*: $F_{el}\cos\beta - mg\sin\alpha - F_f = 0$ și pe *Oy*: $N + F_{el}\sin\beta - mg\cos\alpha = 0$

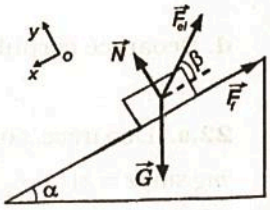
Obținem $F_{el}\cos\beta - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + \mu F_{el}\sin\beta = 0 \Rightarrow$

$F_{el} = \dfrac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \approx 697{,}3$ N și obținem $\Delta\ell = \dfrac{F_{el}}{k} \approx 10$ cm

b. Apăsarea schiorului asupra pârtiei este $N = mg\cos\alpha - F_{el}\sin\beta \approx 148{,}4$ N

c. Timpul necesar urcării pârtiei este $\Delta t = \dfrac{D}{v} = 20{,}8$ m/s

d. Reprezentăm forțele care acționează asupra achiorului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}_{el}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$.



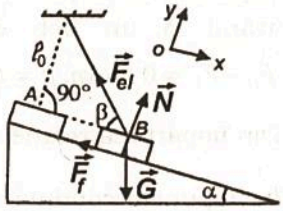
Proiectăm pe axele de coordonate și obținem: pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F_f - F_{el}\cos\beta = 0$ și pe *Oy*:

$N + F_{el}\sin\beta - mg\cos\alpha = 0$

Obținem $mg\sin\alpha - F_{el}\cos\beta - \mu mg\cos\alpha + \mu F_{el}\sin\beta = 0 \Rightarrow$

$\Delta\ell' = \frac{F_{el}}{k} = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{k(\cos\beta - \mu\sin\beta)} \approx 9{,}35$ cm

26. a. Alungirea firului în poziția de echilibru B este $\Delta\ell = \ell - \ell_0$, unde $\ell = \ell_0 / \sin\beta$, astfel că $\Delta\ell = \ell_0(1/\sin\beta - 1) \approx 16{,}4$ cm



b. Studiem echilibrul corpului: $\vec{F}_{el} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$.

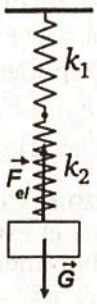
Proiectând pe Oy: $F_{el}\sin\beta + N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow$ $N = mg\cos\alpha - F_{el}\sin\beta$ și proiectând pe Ox obținem: $mg\sin\alpha - F_{el}\cos\beta - F_f = 0$.

Cum $F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha - F_{el}\sin\beta)$ obținem: $F_{el} = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\beta - \mu\sin\beta} \approx 3{,}1$ N

c. Din $F_{el} = k\Delta\ell \Rightarrow k = \frac{F_{el}}{\Delta\ell} \approx 18{,}9$ N/m

d. $N = mg\cos\alpha - F_{el}\sin\beta \approx 1$ N

27.a. Legăm cele două resorturi în serie. Suspendăm de resortul de jos un corp cu masa m, astfel ca forța de întindere este $F = mg = k_2x_2$, deoarece corpul se află în echilibru. Cum resorturile sunt alungite cu x_1 și respectiv x_2, forțele de întindere în cele două resorturi sunt egale (conform principiului acțiunii și reacțiunii), astfel că $F = k_1x_1 = k_2x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{F}{k_1}$ și $x_2 = \frac{F}{k_2}$. Înlocuind cele două resorturi trebuie să obținem un singur resort cu constanta elastică k_s, astfel ca la aceeași forță de întindere alungirea finală să fie $x_s = x_1 + x_2$.

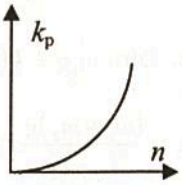


Cum $F = k_sx_s \Rightarrow x_s = \frac{F}{k_s} \Rightarrow \frac{F}{k_s} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \Rightarrow k_s = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2} = 7{,}5$ N/m

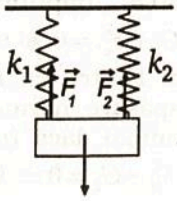
b. Legăm cele două resorturi în paralel și suspendăm un corp cu masa m, astfel că cele două resorturi se vor întinde identic deformându-se la fel cu x, astfel că $F = F_1 + F_2 = k_1x + k_2x = (k_1 + k_2)x$.

Înlocuim cele două resorturi cu un singur resort, acesta se va alungi identic sub acțiunea aceleiași forțe de întindere F.

$F = k_px \Rightarrow k_p = k_1 + k_2 = 40$ N/m



c. Putem considera resortul inițial ca o legare în serie a "n" resorturi identice, cu constanta elastică k. Cum $\frac{1}{k_1} = \sum\frac{1}{k} = \frac{n}{k} \Rightarrow k = nk_1$. Legăm apoi cele "$n$" resorturi identice în paralel și se va obține un resort cu constanta elastică: $k_p = \sum k = nk = n^2k_1$. Reprezentarea grafică a lui k_p în funcție de "n" este o parabolă.



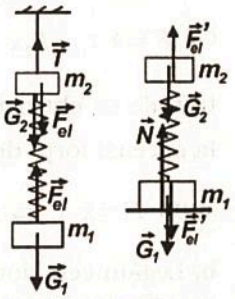
28.a. Impunem condiția de echilibru gândăcelului când acesta face n_1 pași din momentul în care ineluşul începe să opună

rezistență. Astfel $\vec{F}_{el}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$, iar scalar pe Ox: $F_{el}-F_f=0 \Rightarrow kn_1p=\mu mg$ (1), unde p reprezintă lungimea unui pas, iar m este masa gândăcelului.
Impunem condiția de echilibru gândăcelului când acesta trage din nou dar având și un bob de orez în brațe: $\vec{F}_{el}'+\vec{G}'+\vec{N}'+\vec{F}_f'=0$. Scalar pe Ox: $F_{el}'-F_f'=0 \Rightarrow kn_2p=\mu(m+m_0)g$ (2).

Din împărțirea relației (2) la (1) obținem: $m=\dfrac{n_1m_0}{n_2-n_1}$ =0,125 g

b. Impunem condiția de echilibru gândăcelului când acesta atârnă la marginea mesei suspendat de cui prin intermediul ineluşului. Astfel $\vec{F}_{el0}+\vec{G}=0$, iar scalar $mg=kn_0p$ (3). Din (1) şi (3) obținem: $\mu=n_1/n_0$=0,25

c. Dacă ineluşul se taie şi rămâne fixat de cui atunci cele două jumătăți ale ineluşului vor fi legate în serie. Constanta elastică a firului este k', astfel că $\dfrac{1}{k'}=\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{2}{k_1} \Rightarrow k'=\dfrac{k_1}{2}$, unde k_1 reprezintă constanta elastică a unei jumătăți de ineluş. Cum inițial cele două jumătăți de ineluş erau legate în paralel, atunci $k=k_1+k_1=2k_1 \Rightarrow k_1=k/2 \Rightarrow k'=k/4$.
Impunem condiția de echilibru gândăcelului când începe să alunece. $F_{3/3}-F_f=0 \Rightarrow k'n_3p=\mu mg \Rightarrow kn_3p/4=\mu mg$ (4).
Din (1) şi (4) obținem: $n_3=4n_0$=40 paşi



29.a. Considerăm cazul în care corpul m_2 este suspendat şi de el este prins corpul m_1. În acest caz resortul este alungit. Impunem condiția de echilibru corpului cu masa m_1. $\vec{G}_1+\vec{F}_{el}=0$. Scalar $m_1g=k(\ell_1-\ell_0)$ (1). Din condiția de echilibru pentru corpul m_2 $\vec{T}+\vec{F}_{el}+\vec{G}_2=0$, iar scalar $T=m_2g+k(\ell_1-\ell_0)=(m_1+m_2)g$ =4 N

b. Considerăm cazul în care corpul cu masa m_1 este aşezat pe masă iar corpul m_2 comprimă resortul. Din condiția de echilibru pentru corpul cu masa m_2: $\vec{F}_{el}'+\vec{G}_2=0 \Rightarrow m_2g=k(\ell_0-\ell_2)$ (2).

Împărțind relația (1) la (2) obținem: $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{\ell_1-\ell_0}{\ell_0-\ell_2} \Rightarrow \ell_0=\dfrac{m_1\ell_2+m_2\ell_1}{m_1+m_2}$ =35 cm

c. Din $m_1g=k(\ell_1-\ell_0)$ şi $\ell_0=\dfrac{m_1\ell_2+m_2\ell_1}{m_1+m_2}$ obținem valoarea constantei elastice

$k=\dfrac{(m_1+m_2)g}{\ell_1-\ell_2}$ =20 N/m

30.a. Impunem condiția de echilibru corpului cu masa m_1: $\vec{G}_1+\vec{F}_{el}=0$ şi scalar $m_1g=kx \Rightarrow k=m_1g/x$=250 N/m

b. Pentru ca m_2 să se desprindă de suprafață trebuie ca forța de apăsare normală să fie nulă N=0. Acest lucru se poate întâmpla numai dacă resortul este alungit. Astfel pentru corpul cu masa m_2 $\vec{F}_{el}+\vec{G}_2=0 \Rightarrow kx'=m_2g \Rightarrow x'=m_2g/k$. Corpul cu masa m_1 se

deplasează pe verticală pe distanța $d = x + x' = (m_1 + m_2)g / k$. Deoarece corpul cu masă m_1 se deplasează uniform intervalul de timp după care corpul m_2 se desprinde de suprafață este $\Delta t = \frac{(m_1 + m_2)g}{vk}$ =15 s

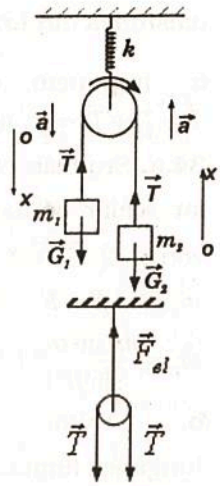
c. La momentul t=10 s sistemul de corpuri se află așezat pe suprafață. Deplasarea resortului este $d_1 = vt$=2 cm. Resortul se deplasează în sus pe distanța x pentru a se decomprima, iar apoi se alungește cu $x_1 = d_1 - x$=1 cm.

Impunem condiția de echilibru corpului m_1, astfel că $\vec{F} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{el} = 0$.

Scalar $F = m_1 g + kx_1$ =5 N

31.a. Din condiția de echilibru impusă corpului cu masă m_1 obținem $T' = m_1 g$, iar din condiția de echilibru impusă corpului cu masă m_2 obținem $T' = F_{el2} + m_2 g$, deoarece resortul k_2 este inițial alungit.

Astfel cum $k_2(\ell - \ell_0) = (m_1 - m_2)g \Rightarrow \ell = \ell_0 + \frac{(m_1 - m_2)g}{k_2}$ =27 cm



b. Studiem mișcarea fiecărui corp.

Pentru m_1 pe axa Ox obținem: $m_1 g - T = m_1 a$ (1)

Pentru m_2 pe axa Ox obținem: $T - m_2 g = m_2 a$ (2)

Din (1)+(2): $g(m_1 - m_2) = a(m_1 + m_2) \Rightarrow a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$ =5 m/s²

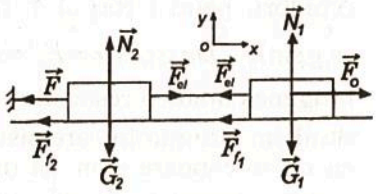
c. Tensiunea din fir este $T = m_2(a + g) = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$ =1,5 N

d. Impunem condiția de echilibru scripetelui.

$\vec{F}_{el1} + \vec{T} + \vec{T} = 0 \Rightarrow F_{el1} = 2T = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$

Cum $F_{el1} = k_1 x \Rightarrow x = \frac{4m_1 m_2 g}{(m_1 + m_2)k_1}$ =6 cm

32.a. Studiem echilibrul corpurilor. Pentru corpul 1 $\vec{F}_o + \vec{F}_{el} + \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$, iar scalar pe Ox: $F_0 - F_{el} - \mu m_1 g = 0$ (1).



Pentru corpul 2: $\vec{F} + \vec{F}_{el} + \vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f2} = 0$, iar scalar pe Ox: $F_{el} - F - \mu m_2 g = 0$ (2).

Din (1)+(2) obținem: $F_o = F + \mu(m_1 + m_2)g$ =4,4 N

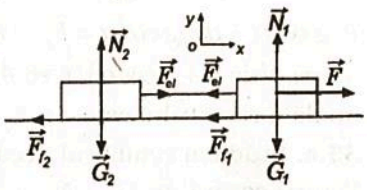
b. Studiem mișcarea rectilie uniformă a sistemului de corpuri. Pentru corpul 1:

$\vec{F} + \vec{F}_{el} + \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$, iar scalar pe Ox:

$F - F_{el} - \mu m_1 g = 0$ (1). Pentru corpul 2:

$\vec{F}_{el} + \vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f2} = 0$, iar scalar pe Ox:

$F_{el} - \mu m_2 g = 0$ (2).

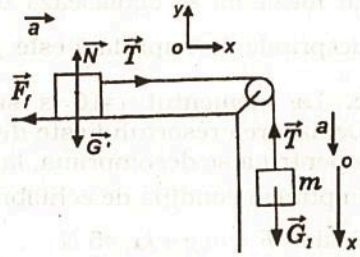


Din (1)+(2) obținem: $F = \mu(m_1 + m_2)g$ =2,4 N

c. Din $F_{el} = F_{f_2} = \mu m_2 g$ și $F_{el} = kx \Rightarrow \mu m_2 g = kx \Rightarrow x = \frac{\mu m_2 g}{k}$ = 1,6 cm

33.a. Studiem mişcarea corpului cu masa m:

$\vec{G}+\vec{T}=m\cdot\vec{a}$, iar scalar: $mg-T=ma$ (1)



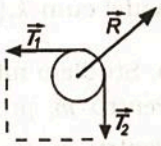
Studiem mişcarea corpului cu masa M: $\vec{T}+\vec{G}'+\vec{N}+\vec{F}_f=M\vec{a}$. Proiectăm pe Ox: $T-F_f=Ma$ şi pe Oy: $N-Mg=0$.

Cum $F_f=\mu N=\mu Mg \Rightarrow T-\mu Mg=Ma$ (2).

$(1)+(2)\Rightarrow g(m-\mu M)=(m+M)a \Rightarrow a=\dfrac{g(m-\mu M)}{m+M}\Rightarrow$

a=6 m/s²

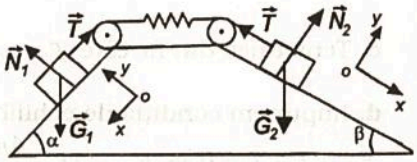
b. $T=m(g-a)=\dfrac{mM(1+\mu)g}{M+m}=16$ N. Deoarece resortul este întins chiar de tensiunea din fir, atunci $T=kx\Rightarrow x=\dfrac{mM(1+\mu)g}{(M+m)k}=3{,}2$ cm.



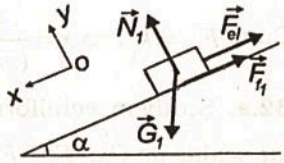
c. Impunem condiţia de echilibru scripetelui. Vectorial $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0$, iar scalar $R=T\sqrt{2}\approx 22{,}56$ N, deoarece $T_1=T_2=T$

34.a. Studiem echilibrul sistemului de corpuri. Pentru corpul 1 $\vec{G}_1+\vec{N}_1+\vec{F}_{el}=0$, iar scalar pe axa Ox: $m_1g\sin\alpha=F_{el}$ (1). Pentru corpul 2 $\vec{G}_2+\vec{N}_2+\vec{F}_{el}=0$, iar scalar pe axa Ox: $m_2g\sin\beta=F_{el}$ (2). Din (1) şi (2) obţinem:

$m_2=\dfrac{m_1\sin\alpha}{\sin\beta}=1{,}41$ kg



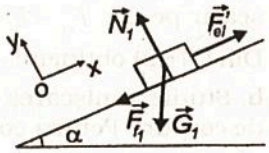
b. Cum $m_1g\sin\alpha=F_{el}=kx\Rightarrow x=m_1g\sin\alpha/k$ lungimea finală a resortului este $\ell=\ell_0+x=87{,}05$ cm



c. Studiem situaţia în care sistemul de corpuri are tendinţa ca m_1 să coboare şi m_2 să urce. Din condiţia de echilibru pentru corpul 1 $\vec{G}_1+\vec{N}_1+\vec{F}_{el}'+\vec{F}_{f1}=0$ pe Ox:

$m_1g\sin\alpha-\mu m_1g\cos\alpha=F_{el}'=kx'\Rightarrow x'=m_1g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)/k\Rightarrow x'=5{,}64$ cm iar lungimea finală a resortului este $\ell=\ell_0+x'=85{,}64$ cm

Studiem situaţia în care sistemul de corpuri are tendinţa ca m_2 să coboare şi m_1 să urce. Din condiţia de echilibru pentru corpul 1 $\vec{G}_1+\vec{N}_1+\vec{F}_{el}'+\vec{F}_{f1}=0$ iar scalar pe Ox:



$m_1g\sin\alpha+\mu m_1g\cos\alpha=F_{el}'=kx'\Rightarrow$

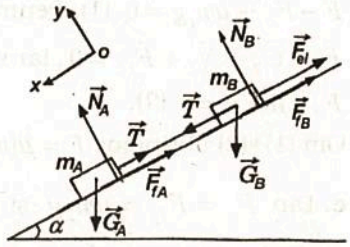
$x'=m_1g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)/k=8{,}46$ cm, iar lungimea finală a resortului este $\ell=\ell_0+x'=88{,}46$ cm

35.a. Studiem echilibrul fiecărui corp.

Pentru corpul m_A $\vec{G}_A+\vec{N}_A+\vec{F}_{fA}+\vec{T}=0$.

Prin proiecţia pe axele de coordonate obţinem pe Ox: $m_Ag\sin\alpha-F_{fA}-T=0$, iar pe Oy:

$N_A-m_Ag\cos\alpha=0$. Cum $F_{fA}=\mu N_A\Rightarrow$



$m_A g\sin\alpha - \mu \cdot m_A g\cos\alpha - T = 0 \Rightarrow T = m_A g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$=7 N

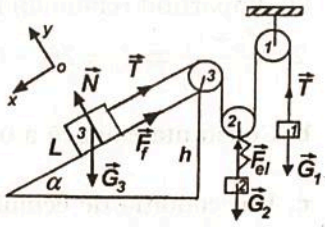
b. Pentru corpul m_B $\vec{G}_B + \vec{N}_B + \vec{F}_{fB} + \vec{T} + \vec{F}_{el} = 0$. Prin proiecția pe axele de coordonate obținem pe *Ox*: $m_B g\sin\alpha - F_{fB} + T - F_{el} = 0$, iar pe *Oy*:

$N_B - m_B g\cos\alpha = 0$. Cum $F_{BA} = \mu N_B \Rightarrow m_B g\sin\alpha - \mu m_B\cos\alpha + T - F_{el} = 0$ (2)

$F_{el} = (m_A + m_B)g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = kx \Rightarrow x = (m_A + m_B)g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/k$ =7cm

c. Dacă se schimbă între ele pozițiile celor două corpuri alungirea resortului nu se modifică, deoarece pe baza calculului de la punctul **b.** alungirea resortului este $x = (m_A + m_B)g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/k$, independentă de poziția corpurilor pe plan

36.a. Valorile minime ale maselor m_1 și m_2 pentru care sistemul se află în echilibru se obțin pentru situația în care corpul cu masa m_3 are tendința să coboare. Din condiția de echilibru pentru m_3 $\vec{G}_3 + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe axa *Ox* obținem: $m_3 g\sin\alpha - T - F_f = 0$, unde sinα=*h*/*L*=0,5 Din condiția de echilibru pentru m_1: $T=m_1 g \Rightarrow m_1=m_3\sin\alpha - F_f/g$=1,3 kg, iar din condiția de echilibru pentru m_2: $m_2 g=F_{el}$.



Cum scripetele mobil 2 este în echilibru $F_{el}=2T \Rightarrow m_2=2(m_3\sin\alpha - F_f/g)$=2,6 kg

b. $F_{el} = 2T = kx \Rightarrow 2(m_3 g\sin\alpha - F_f) = k\Delta\ell \Rightarrow k = 2(m_3 g\sin\alpha - F_f)/\Delta\ell$ =2000 N/m

c. Deorece corpul m_3 urcă uniform pe plan forța de frecare are sens contrar astfel că vectorial $\vec{G}_3 + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe *Ox*: $T - F_f - m_3 g\sin\alpha = 0$

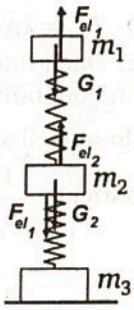
Din condiția de echilibru pentru corpul m_1: $m_1 g = T \Rightarrow m_1 = m_3\sin\alpha + F_f/g$ =1,7kg

Din condiția de echilibru pentru corpul m_2

$m_2 g = F_{el} = 2T = 2(m_3 g\sin\alpha + F_f) \Rightarrow m_2 = 2(m_3 g\sin\alpha + F_f)/g$ =3,4 kg

37.a. Studiem echilibrul corpului 1 $\vec{G}_1 + \vec{F}_{el1} = 0$, iar scalar

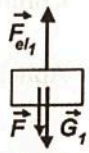
$m_1 g = k_1\Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \dfrac{m_1 g}{k_1}$ (1)



Studiem echilibrul corpului 2. Asupra corpului 2, forța elastică exercitată de primul resort este orientată în jos conform principiului acțiunii și reacțiunii, deoarece corpul 2 îl împinge pe primul corp prin intermediul resortului 1 în sus: $\vec{G}_2 + \vec{F}_{el1} + \vec{F}_{el2} = 0$, iar scalar

$m_2 g + k_1\Delta\ell_1 = k_2\Delta\ell_2 \Rightarrow \Delta\ell_2 = \dfrac{(m_1 + m_2)g}{k_2}$ (2)

Prin împărțirea relației (1) la (2) obținem: $\dfrac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\cdot\dfrac{k_2}{k_1} = 1{,}2.$

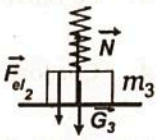


b. Studiem echilibrul corpului 1 după aplicarea forței *F*. Vectorial:

$\vec{F} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{el1} = 0$, iar scalar $k_1\Delta\ell_1 = F + m_1 g \Rightarrow \Delta\ell_1 = \dfrac{F + m_1 g}{k_1}$

Studiem echilibrul corpului 2. Vectorial: $\vec{G}_2 + \vec{F}_{el1} + \vec{F}_{el2} = 0$,

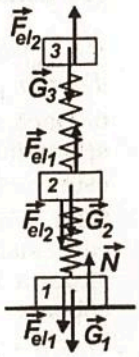
iar scalar $m_2 g + k_1\Delta\ell_1 = k_2\Delta\ell_2 \Rightarrow \Delta\ell_2 = \dfrac{(m_1 + m_2)g + F}{k_2}$.



$\dfrac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = \dfrac{F + m_1 g}{F + (m_1 + m_2)g}\cdot\dfrac{k_2}{k_1}$. Cum $\dfrac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = 2 \Rightarrow F = 4$ N.

c. Studiem echilibrul corpului 3. Vectorial: $\vec{N}+\vec{F}_{el2}+\vec{G}_3=0$, iar scalar $N=m_3g+k_2\Delta\ell_2=m_3g+m_2g+k_1\Delta\ell_1 \Rightarrow N=(m_1+m_2+m_3)g+F=14$ N.

38.a. Studiem echilibrul corpurilor. Notăm cu ℓ_0 lungimea inițială a resorturilor. Resorturile sunt comprimate, cel inferior 1 este mai comprimat decât cel superior 2.



Pentru corpul 3 $\vec{G}_3+\vec{F}_{el2}=0$, iar scalar $mg=k(\ell_0-\ell_2)$ (1)

Pentru corpul 2 $\vec{G}_2+\vec{F}_{el1}+\vec{F}_{el2}=0$, iar scalar $mg+F_{el2}+F_{el1}=0$

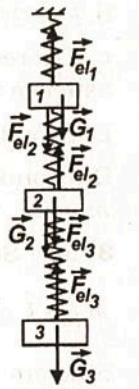
$mg+k(\ell_0-\ell_2)=k(\ell_0-\ell_1)$ (2). Din (1) și (2) obținem $2mg=k(\ell_0-\ell_1)$ (3). Împărțind relația (3) la relația (1) obținem

$2=\dfrac{\ell_0-\ell_1}{\ell_0-\ell_2} \Rightarrow \ell_0=2\ell_2-\ell_1$=24 cm

b. Constanta elastică a unui resort este $k=\dfrac{mg}{\ell_2-\ell_1}$=500 N/m

c. Din condiția de echilibru impusă corpului 1 așezat pe masă, $\vec{N}+\vec{F}_{el1}+\vec{G}_1=0$, scalar obținem $N=mg+k(\ell_0-\ell_1)$. Utilizând relația (3) obținem $N=3mg$=90 N

39.a. Resorturile se alungesc cu $\Delta\ell_1$, $\Delta\ell_2$ și $\Delta\ell_3$. Alungirea totală este $\Delta\ell=\Delta\ell_1+\Delta\ell_2+\Delta\ell_3$. Studiem echilibru corpurilor 1, 2 și 3.



Pentru corpul 3: $\vec{G}_3+\vec{F}_{el3}=0$, iar scalar $mg=k\Delta\ell_3$ (1). Pentru corpul 2 $\vec{G}_2+\vec{F}_{el3}+\vec{F}_{el2}=0 \Rightarrow mg+k\Delta\ell_3=k\Delta\ell_2 \Rightarrow k\Delta\ell_2=2mg$ (2), iar pentru corpul 1: $\vec{G}_1+\vec{F}_{el1}+\vec{F}_{el2}=0 \Rightarrow mg+k\Delta\ell_2=k\Delta\ell_1 \Rightarrow k\Delta\ell_1=3mg$ (3)

Din (1), (2) și (3) obținem $\Delta\ell=6mg/k \Rightarrow \Delta\ell_3=\Delta\ell/6$=2 cm

b. $F_{el2}=k\Delta\ell_2=2mg=k\Delta\ell/3$=8 N

c. Dacă două resorturi se leagă în paralel, se formează un nou resort cu constanta elastică $k_p=2k$. Acest nou resort se leagă în serie cu cel de-ai treilea resort, se formează un resort cu constanta echivalentă k_e, astfel că $\dfrac{1}{k_e}=\dfrac{1}{k_p}+\dfrac{1}{k} \Rightarrow k_e=\dfrac{kk_p}{k+k_p} \Rightarrow k_e$=2k/3=133,33 N/m

2.5. Legea atracției universale

1. Conform legii atracției universale: $F=k\dfrac{m_1m_2}{r^2}\approx 4{,}27\cdot 10^{-7}$ kg.

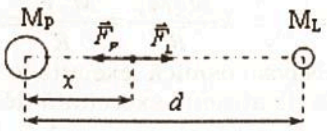
2. Aplicăm legea atracției universale $F=k\dfrac{mM}{R_{PS}^2}=3{,}557\cdot 10^{22}$ N.

3. Pe baza legii atracției universale $F=k\dfrac{m_lm_p}{r^2}=\dfrac{1840k\cdot m_l^{\,2}}{r^2}=3{,}618\cdot 10^{-49}$ N.

4. Conform datelor problemei $M=\dfrac{M_P}{9}$, iar $R=\dfrac{R_P}{4}$. Forța de atracție exercitată de planetă asupra cosmonautului este $F=k\dfrac{Mm}{R^2}=16\dfrac{kM_Pm}{9R_P^2}=\dfrac{16}{9}\cdot G$,

unde G reprezintă greutatea corpului pe Pământ. Deoarece G este forța cu care Pământul atrage corpul aflat pe suprafața sa, atunci $G = k\frac{M_P m}{R_P^2} = mg_0 \Rightarrow F = \frac{16}{9}mg_0 \Rightarrow F$=1393,77 N.

5. Deoarece cosmonautul este în imponderabilitate înseamnă că rezultanta forțelor care se exercită asupra acestuia este nulă. Asupra cosmonautului se exercită forțe de atracție atât de către Pământ, cât și de către Lună, astfel că cele două forțe sunt opuse: $\vec{F}_P + \vec{F}_L = 0 \Rightarrow F_P = F_L \Rightarrow k\frac{mM_P}{x^2} = k\frac{mM_L}{(d-x)^2}$, unde



cu m am notat masa corpului. Astfel $81M_L(d-x)^2 = M_L x^2 \Rightarrow 9(d-x) = x \Rightarrow$ x=9d/10=3,42·10^5 km

6. Prin definiție accelerația gravitațională este $g = \frac{F}{m} = k\frac{M_P}{r^2} = k\frac{M_P}{(R_P+h)^2}$.

La suprafața Pământului $h = 0 \Rightarrow g_0 = \frac{kM_P}{R_P^2}$. Cum $g = \frac{g_0}{2} \Rightarrow k\frac{M_P}{(R_P+h)^2} = \frac{kM_P}{2R_P^2}$ $\Rightarrow h = R_P(\sqrt{2}-1) = 2611$ km

7. Pe baza definiției accelerației gravitaționale: $g_L = k\frac{M_L}{R_L^2} = \frac{kM_P}{81R_L^2}$.

Cum $d_L = \frac{3}{11}d_P \Rightarrow R_L = \frac{3}{11}R_P \Rightarrow g_L = \frac{121kM_P}{729R_P^2} = \frac{121}{729}g_0 \approx 1{,}63$ m/s²

8. Conform definiției: $g_1 = \frac{kM_1}{R_1^2}$ și $g_2 = \frac{kM_2}{R_2^2} \Rightarrow \frac{g_1}{g_2} = \frac{M_1}{M_2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

9. Prin definiție densitatea unui corp este $\rho = \frac{m}{V}$. Conform definiției accelerația gravitațională la suprafața Pământului este $g_0 = k\frac{M_P}{R_P^2} \Rightarrow M_P = \frac{g_0 R_P^2}{k}$. Considerând Pământul o sferă, volumul acestuia este $V = \frac{4\pi R_P^3}{3} \Rightarrow \rho = \frac{3g_0}{4\pi \cdot kR_P} = 5483$ kg/m³

10. Conform problemei precedente $\rho = \frac{3g}{4\pi \cdot kR}$ la suprafața planetei, iar pe Pământ $\rho_P = \frac{3g_0}{4\pi \cdot kR_P} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_P} = \frac{gR_P}{g_0 R}$. Cum $g = 2{,}5 \cdot g_0$ și $R = 3R_P \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_P} = 0{,}833$

11. Dacă un om sare pe verticală cu viteza inițială v_0, mișcarea corpului este uniform frânată cu accelerația gravitațională a planetei. Înălțimea maximă la care se ridică corpul se obține din ecuația lui Galilei: $v^2 = v_0^2 - 2gh$ și din v=0 $\Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$. Pe planetă $h' = \frac{v_0^2}{2g'} = \frac{15v_0^2}{2g} = 15h \Rightarrow \frac{h'}{h} = 15 \Rightarrow$ detenta omului pe

planetă în condițiile în care viteza inițială este tot v_0, este de 15 ori mai mare decât detenta aceluiaşi om pe Pământ.

12. În timpul mişcării Pământului în jurul Soarelui, forța de atracție exercitată de Soare joacă rol de forță centripetă, astfel că

$$F_a = F_{cp} \Rightarrow k\frac{M_S M_P}{R^2} = \frac{M_P v^2}{R} \Rightarrow M_S = \frac{v^2 R}{k} = 2\cdot 10^{30}\ \text{kg}$$

13. Nava cosmică execută o mişcare de rotație în jurul Pământului, deoarece forța de atracție exercitată de Pământ joacă rol de forță centripetă.

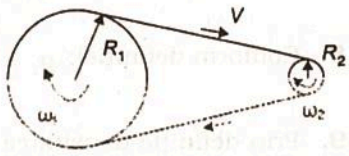
$$F_a = F_{cp} \Rightarrow k\frac{M_P \cdot m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k\cdot M_P}{r}} = \sqrt{\frac{k\cdot M_P}{2R_P}}\text{, deoarece } r = 2R_P.$$

Cum $g_0 = \frac{kM_P}{R_P^2} \Rightarrow kM_P = g_0 R_P^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 R_P}{2}} = 5{,}6\ \text{km/s}$

14. Satelitul geostaționar execută o mişcare de rotație cu perioada de rotație egală cu cea proprie a Pământului. Forța de atracție exercitată de Pământ joacă rol de forță centripetă. Astfel $F_a = F_{cp} \Rightarrow k\frac{M_P \cdot m}{r^2} = m\omega^2 r$. Cum $\omega = \frac{2\pi}{T}$ iar

$$g_0 = \frac{kM_P}{R_P^2} \Rightarrow kM_P = g_0 R_P^2 \Rightarrow \frac{g_0 R_P^2}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r \Rightarrow r = \left(\frac{g_0 R_P^2 T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 42222\ \text{km}$$

2.6. Mişcarea circular uniformă



1. Deoarece lanțul leagă cele două roți, roata mare aflată în mişcare de rotație va antrena şi roata mică tot în mişcare de rotație. Viteza liniară a lanțului este aceeaşi, astfel că: $\upsilon_1=\upsilon_2 \Rightarrow \omega_1 R_1=\omega_2 R_2 \Rightarrow \omega_1=\omega_2 R_2/R_1=5$ rad/s.

2. Pe baza relației dintre perioada de rotație T şi viteza unghiulară ω, obținem: $\omega=2\pi/T=72{,}68\cdot 10^{-6}$ rad/s. Pe baza relației dintre viteza liniară v şi viteza unghiulară ω: $\upsilon=\omega R=2\pi R/T=465{,}18$ m/s.

3. Pe baza relației dintre viteza liniară υ şi viteza unghiulară ω: $\upsilon=\omega R \Rightarrow \omega=\upsilon/R=0{,}8$ rad/s. La efectuarea unui cerc întreg, distanța parcursă de avion este $s=2\pi R=6{,}28$ km.

4. Aflăm viteza unghiulară cu care se roteşte polizorul: $\omega=\upsilon/R$. Cum relația dintre viteza unghiulară şi frecvență este $\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \upsilon = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\nu}{2\pi R} = 5$ rot/s.

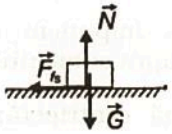
5. Aflăm perioada de rotație împărțind timpul t la numărul de rotații N astfel că: $T=t/N=0{,}5$ s. Cum $T=2\pi/\omega \Rightarrow \omega=2\pi/T=12{,}56$ rad/s.

6. Minutarul efectuează o rotație completă într-un interval de timp T=1h=60min. Dacă într-o perioadă T, vârful minutarului descrie un cerc cu lungimea $L=2\pi\ell$, atunci în intervalul de timp Δt, vârful minutarului descrie un arc de cerc cu lungimea: $s=(2\pi\ell\cdot\Delta t)/T=1{,}046$ mm.

7. Deoarece avionul se deplasează spre vest şi Soarele rămâne staționar față de avion, înseamnă că avionul se roteşte odată cu Pământul cu viteza unghiulară a acestuia $\omega=2\pi/T$, unde T este perioada proprie de rotație a Pământului. Viteza avionului se calculează cu ajutorul relației: $v = \omega\cdot R$, unde $R=R_P+h$, reprezintă

distanța de la centrul Pământului până la punctul unde se află avionul, astfel că $v=\frac{2\pi}{T}(R_P+h)$=465,18 m/s.

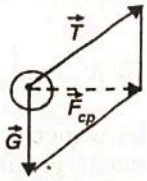
8. Reprezentăm forțele care acționează asupra mașinii și ținem cont că rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_{fs}=\vec{F}_{cp}$. Cum $\vec{N}+\vec{G}=0 \Rightarrow F_{fs}=F_{cp}$, adică forța de frecare statică joacă rol de forță centripetă, astfel că:



$F_{fs}=\frac{mv^2}{R}$. Condiția ca mașina să nu derapeze este ca forța de frecare statică să fie mai mică sau cel mult egală cu forța de frecare la alunecare:

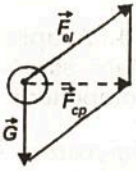
$F_{fs}\le F_{fl} \Rightarrow \frac{mv^2}{R}\le \mu mg \Rightarrow v\le\sqrt{\mu gR}$=15,81m/s=56,92 km/h.

9. Asupra motociclistului acționează normala și greutatea, astfel că rezultanta lor joacă rol de forță centripetă, deoarece motociclistul execută un viraj. Vectorial: $\vec{N}+\vec{G}=\vec{F}_{cp}$



Din figura alăturată: $tg\alpha=\frac{F_{cp}}{G}=\frac{mv^2}{Rmg}=\frac{v^2}{Rg}$=0,578⇒α=30°.

10. Dacă corpul este suspendat în vagon prin intermediul unui dinamometru, corpul se va roti odată cu vagonul descriind un cerc în plan orizontal, astfel că rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă: $\vec{F}_{el}+\vec{G}=\vec{F}_{cp}$. Greutatea aparentă este forța indicată de dinamometru, adică forța elastică.



$$F_{el}=G_a=\sqrt{F_{cp}^2+G^2}=\sqrt{\left(\frac{mv^2}{R}\right)^2+(mg)^2}=m\sqrt{g^2+\frac{v^4}{R^2}}$$

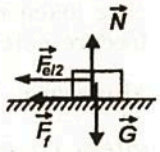
Calculăm cu cât la sută este mai mare greutatea aparentă decât greutatea reală:

$\frac{G_a-G}{G}=\sqrt{1+\frac{v^4}{g^2R^2}}-1$=96,6·10⁻³≈0,1=10%

11. Negijăm căderea pe verticală a glontelui. Pe orizontală între cele două discuri acesta are o mișcare rectilinie și uniformă cu viteza v, astfel că distanța parcursă este $d=vt$, unde t este timpul de mișcare al glontelui între cele două discuri. După ce glontele produce primul orificiu prin pătrunderea prin primul disc, până la pătrunderea prin discul al doilea, discul al doilea se rotește cu unghiul α, astfel că $\alpha=\omega t=2\pi nt$. Cum $t=d/v \Rightarrow \alpha=2\pi nd/v \Rightarrow v=2\pi nd/\alpha$=300 m/s

12. Considerăm cazul în care nu există frecare. În acest caz rezultanta forțelor este forța centripetă: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_{el1}=\vec{F}_{cp1}$, iar scalar forța elastică joacă rol de forță centripetă, astfel că: $k\Delta\ell_1=m\omega^2\ell_1 \Rightarrow k(\ell_1-\ell_0)=m\omega^2\ell_1 \Rightarrow k\ell_0=\ell_1(k-m\omega^2)\Rightarrow$

$\ell_1=\frac{k\ell_0}{k-m\omega^2}$, iar $\Delta\ell_1=\ell_1-\ell_0=\frac{m\omega^2\ell_0}{k-m\omega^2}$ (1).

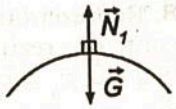


În cazul existenței forței de frecare, vectorial: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_{el2}+\vec{F}_f=\vec{F}_{cp2}$, iar scalar: $k\Delta\ell_2+F_f=m\omega^2\ell_2$, unde $F_f=\mu mg \Rightarrow$

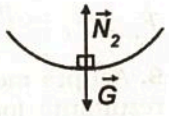
$k(\ell_2-\ell_0)+\mu mg=m\omega^2\ell_2 \Rightarrow \ell_2=\frac{k\ell_0-\mu mg}{k-m\omega^2} \Rightarrow \Delta\ell_2=\ell_2-\ell_0=\frac{m(\omega^2\ell_0-\mu g)}{k-m\omega^2}$ (2).

Împărțind cele două relații obținem: $\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2}=\frac{\omega^2\ell_0}{\omega^2\ell_0-\mu g}$ =1,33.

13. Impunem condiția ca rezultanta forțelor ce acționează asupra camionului în punctul superior al podului să joace rol de forță centripetă: $\vec{N}_1+\vec{G}=\vec{F}_{cp}$, iar scalar $mg-N_1=\frac{mv^2}{R}$, dacă corpul se deplasează pe podul convex, astfel $N_1=m\left(g-\frac{v^2}{R}\right)$=38,75 kN.

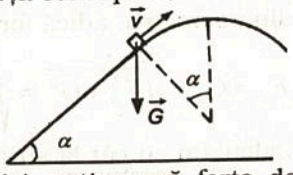


În cazul deplasării pe un pod concav, în punctul inferior al podului vectorial: $\vec{N}_2+\vec{G}=\vec{F}_{cp}$, iar scalar $N_2-mg=\frac{mv^2}{R}$, astfel că $N_2=m\left(g+\frac{v^2}{R}\right)$=61,25 kN.

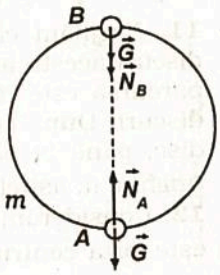


În punctul inferior al podului concav forța de apăsare normală este mai mare decât greutatea corpului, iar în punctul superior al podului convex forța de apăsare normală este mai mică decât greutatea corpului.

14. Asupra seminței când intră pe tambur acționează greutatea și normala. Dacă sămânța se desprinde de bandă, forța de apăsare normală este nulă, iar componenta greutății de-a lungul normalei joacă rol de forță centripetă, astfel că: $mg\cos\alpha=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow v=\sqrt{gR\cos\alpha}$=1m/s⇒dacă viteza maximă nu depășește valoarea de 1 m/s, atunci sămânța rămâne pe bandă.



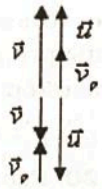
15. În punctele inferior (*A*) și superior (*B*) ale traiectoriei, acționează forța de apăsare normală asupra scaunului și greutatea, astfel că rezultanta lor joacă rol de forță centripetă, astfel că vectorial: $\vec{N}+\vec{G}=\vec{F}_{cp}$. În punctul inferior al traiectoriei scalar obținem: $N_A-mg=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow N_A=m\left(g+\frac{v^2}{R}\right)$=4800 N, iar în punctul superior al traiectoriei proiectând relația vectorială obținem: $N_B+mg=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow N_B=m\left(\frac{v^2}{R}-g\right)$=3200 N.



16. Asupra motociclistului aflat la periferia platformei acționează forța de frecare care joacă rol de forță centripetă. Deoarece motociclistul nu derapează forța de frecare este statică și este mai mică sau cel mult egală cu forța de frecare la alunecare, astfel că: $F_{fs}=F_{cp}\Rightarrow F_{cp}\le F_{fl}\Rightarrow\frac{mv^2}{R}\le\mu\cdot mg$, unde v reprezintă viteza cu care se mișcă motociclistul față de sol și se obține prin adunarea vectorială a vitezei platformei la periferie $v_p=\omega R=2\pi\cdot nR$ și a vitezei motociclistului față de platformă u, astfel că: $\vec{v}=\vec{v}_p+\vec{u}$.

Dacă motociclistul se deplasează în același sens cu platforma, atunci:

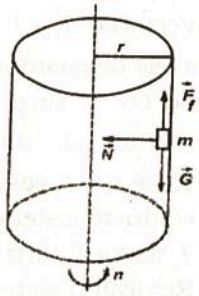
$$v = v_p + u = 2\pi \cdot nR + u \Rightarrow \mu \geq \frac{(2\pi \cdot nR + u)^2}{gR} = 0{,}777.$$



Dacă motociclistul se deplasează în sens contrar cu platforma, atunci:

$$v = v_p - u = 2\pi \cdot nR - u \Rightarrow \mu \geq \frac{(2\pi \cdot nR - u)^2}{gR} = 0{,}358.$$

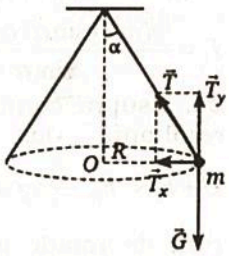
17. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului, iar rezultanta acestora joacă rol de forță centripetă, astfel că: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = \vec{F}_{cp}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $N = F_{cp} \Rightarrow N = m\omega^2 R$ și pe Oy: $F_f - G = 0 \Rightarrow mg = F_f$. Conform legii frecării:



$$F_f = \mu N \Rightarrow F_f = \mu \cdot m\omega^2 R \Rightarrow mg = \mu \cdot m\omega^2 R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\mu R}}.$$

Cum $\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\mu R}} \approx 1$ rot/s.

18.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului: greutatea și tensiunea din fir, astfel că rezultanta acestora joacă rol de forță centripetă. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$.



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

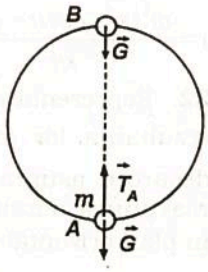
Pe Ox: $T\sin\alpha = F_{cp} = m\omega^2 R$ (1) și pe Oy: $T\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = mg$ (2)

Împărțind cele două relații obținem: $tg\alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{\omega^2 R}{g}$.

Din geometrie raza de rotație R este: $R = \ell\sin\alpha$, astfel că $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\alpha}}$, iar perioada de rotație este: $T' = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} \approx 0{,}77$ s.

b. Tensiunea în fir este: $T = \frac{mg}{\cos\alpha} = 2$ N.

19.a. Deoarece apa nu curge din găleată în niciun punct al traiectoriei, înseamnă că nu curge nici când găleata se află în punctul superior al traiectoriei cu gura în jos. În acest caz, considerăm că greutatea apei joacă rol de forță centripetă, deoarece considerăm că. $G = F_{cp} \Rightarrow m_a g = m_a\omega^2\ell$, iar cum $\omega = 2\pi\upsilon$ obținem $g = 4\pi^2\upsilon^2\ell \Rightarrow \upsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \approx 0{,}712$ rot/s

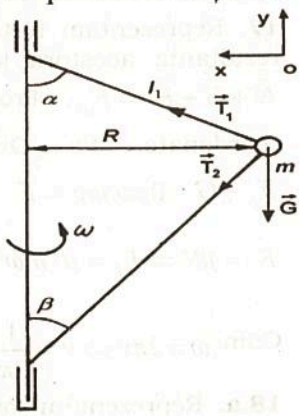


b. Datorită condiției de la punctul precedent obținem că în punctul superior al traiectoriei tensiunea în fir este nulă. În punctul inferior al traiectoriei rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă $\vec{T} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar scalar $T - mg = m\omega^2\ell \Rightarrow T = 2mg = 80$ N. Deci în punctul inferior al traiectoriei tensiunea în sfoară are valoarea maximă.

c. Dacă frecvența se dublează $\nu' = 2\nu \Rightarrow \omega' = 2\pi\nu' = 2\omega$. În punctul superior asupra găleții acționează și tensiunea T', alături de greutate,astfel că rezultanta acestora este forța centripetă: $\vec{G} + \vec{T}' = \vec{F}'_{cp}$. Scalar obținem:

$G + T' = F'_{cp} \Rightarrow mg + T' = m\omega'^2\ell = 4m\omega^2\ell \Rightarrow mg + T' = 4mg \Rightarrow T' = 3mg = 120$ N.

20. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și impunem condiția ca rezultanta forțelor să joace rol de forță centripetă. Vectorial $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:



pe Ox: $T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = m\omega^2 R$, unde R este raza de rotație și din geometrie $R = \ell_1 \sin\alpha$ și pe Oy: $T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta - mg = 0$.

Obținem sistemul de ecuații:

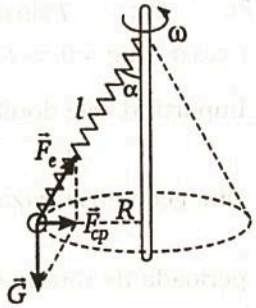
$T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = m\omega^2 \ell_1 \sin\alpha$ și $T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta = mg$.

Rezolvând sistemul de ecuații obținem:

$$T_2 = \frac{m(\omega^2 \ell_1 \cos\alpha - g)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \approx 0{,}865 \text{ N și}$$

$$T_1 = \frac{m(\omega^2 \ell_1 \sin\alpha\cos\beta + g\sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \approx 5{,}5 \text{ N.}$$

21. Asupra corpului acționează atât greutatea cât și forța elastică, astfel că rezultanta lor joacă rol de forță centripetă:

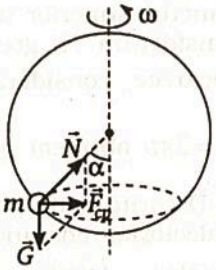


$\vec{G} + \vec{F}_{el} = \vec{F}_{cp} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{m\omega^2 R}{mg}$, iar $R = \ell \sin\alpha$ reprezintă raza de rotație în plan orizontal, iar ℓ reprezintă noua lungime a resortului, astfel că $\ell = \ell_0 + \Delta\ell = \ell_0 + \frac{F_{el}}{k}$.

Deoarece $\cos\alpha = \frac{mg}{F_{el}} \Rightarrow F_{el} = \frac{mg}{\cos\alpha} \Rightarrow \ell = \ell_0 + \frac{mg}{k\cos\alpha}$. Din geometrie: $tg\alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{m\omega^2 R}{mg} = \frac{\omega^2}{g}(\ell_0 + \frac{mg}{k\cos\alpha})\sin\alpha \Rightarrow$

$$1 = \frac{\omega^2(k\ell_0\cos\alpha + mg)}{kg} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{kg}{k\ell_0\cos\alpha + mg}} \approx 6{,}32 \text{ rad/s}$$

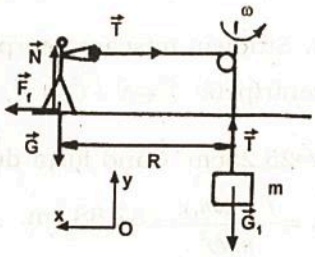
22. Reprezentăm forțele care acționează asupra bilei, iar rezultanta lor joacă rol de forță centripetă: $\vec{N} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, deoarece asupra bilei acționează atât greutatea ei cât și reacțiunea normală exercitată de inel. Bila execută un cerc în plan orizontal cu raza R_1.



Din desen $tg\,\alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{m\omega^2 R_1}{mg}$, unde $R_1 = R\sin\alpha \Rightarrow$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 R\sin\alpha}{g} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°.$$

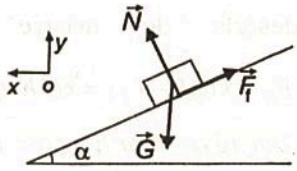
23. Studiem mişcarea accelerată în sus a corpului cu masa m: $\vec{T}+\vec{G}_1=m\cdot\vec{a}$, iar scalar $T-mg=ma$. Studiem mişcarea de rotaţie a omului aflat pe platformă. Reprezentăm forţele care acţionează asupra lui şi impunem condiţia ca rezultanta forţelor să joace rol de forţă centripetă. Vectorial se obţine $\vec{T}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=\vec{F}_{cp}$ şi prin proiecţia relaţiei vectoriale pe axele de coodonate obţinem: pe Ox: $T-F_f=F_{cp}=M\omega^2R$ şi pe Oy: $N-Mg=0\Rightarrow N=Mg\Rightarrow F_f=\mu N=\mu Mg\Rightarrow$



$T=M(\omega^2R+\mu g)\Rightarrow a_{max}=\frac{M}{m}(\omega^2R+\mu g)-g=50$ m/s². Studiem celălalt caz, când asupa omului forţa de frecare îşi schimbă sensul, astfel că $T+F_f=F_{cp}=M\omega^2R\Rightarrow T=M(\omega^2R-\mu g)\Rightarrow a_{min}=\frac{M}{m}(\omega^2R-\mu g)-g=10$m/s².

Dacă acceleraţia cu care omul ridică masa m este cuprinsă între $a\in(10,50)$m/s² atunci omul rămâne în repaus faţă de platformă.

24. Reprezentăm forţele care acţionează asupra motociclistului şi impunem condiţia ca rezultanta forţelor să joace rol de forţă centripetă. Vectorial: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=\vec{F}_{cp}$.

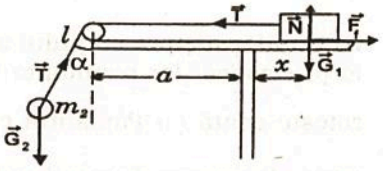


Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate.
Pe Ox: $N\sin\alpha-F_f\cos\alpha=m\omega^2R$ şi pe Oy:
$N\cos\alpha+F_f\sin\alpha-mg=0$.

Conform legii frecării: $F_f=\mu N\Rightarrow N(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)=mg\Rightarrow N=\frac{mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\Rightarrow$

$N(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)=m\omega^2R\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{R(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}}\approx1{,}825$ rad/s, iar acceleraţia centripetă este $a_{cp}=\omega^2R\approx6{,}66$ m/s².

25. Studiem mişcarea de rotaţie în plan orizontal a corpului cu masa m_2. Rezultanta tensiunii şi a greutăţii joacă rol de forţă centripetă, astfel că: $\vec{T}+\vec{G}_2=\vec{F}_{cp}$.



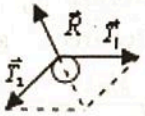
Din geometrie: $\cos\alpha=\frac{m_2g}{T}\Rightarrow T=\frac{m_2g}{\cos\alpha}=2$ N.

Reprezentăm forţele care acţionează asupra axului scripetelui şi deoarece acesta este ideal şi nu are masă rezultanta acestora este nulă:

Astfel: $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0\Rightarrow\vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2)$. Scalar: $R^2=T_1^2+T_2^2+2T_1T_2\cos(90+\alpha)$.

Cum $T_1=T_2=T\Rightarrow R=T\sqrt{2(1-\sin\alpha)}\approx1{,}04$ N.

b. Dar pentru corpul m_2 $T\sin\alpha=F_{cp}\Rightarrow m_2g\,tg\,\alpha=m_2\omega^2R$, unde R este raza de rotaţie a corpului cu masa m_2.



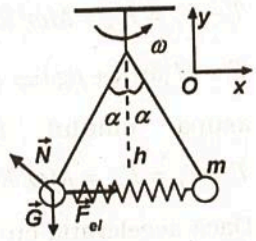
Din geometrie $R=a+\ell\sin\alpha\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{g\cdot tg\,\alpha}{a+\ell\sin\alpha}}\approx5{,}63$ rad/s

c. Studiem mişcarea corpului cu masa m_1. Rezultanta forţelor joacă rol de forţă centripetă: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}_1+\vec{F}_f=\vec{F}_{cp}$, iar scalar: $T-F_f=m_1\omega^2x \Rightarrow x=\dfrac{T-\mu m_1 g}{m_1\omega^2} \Rightarrow$

x=25,25cm. Când forţa de frecare acţionează în sens contrar, $T+F_f=m_1\omega^2x \Rightarrow$

$x=\dfrac{T+\mu m_1 g}{m_1\omega^2}\approx 37{,}88$ cm.

26. Reprezentăm forţele care acţionează asupra fiecărei bile şi impunem condiţia ca rezultanta lor să joace rol de forţă centripetă: $\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_{el}=\vec{F}_{cp}$.



Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate:

pe Ox: $F_{el}-N\cos\alpha=F_{cp}=m\omega^2R$ şi

pe Oy: $N\sin\alpha-mg=0 \Rightarrow N=\dfrac{mg}{\sin\alpha}$.

Cum $F_{el}=kx \Rightarrow kx-mg\cdot ctg\,\alpha=m\omega^2R$, unde R este raza cercului orizontal descris de fiecare bilă. Din geometrie $tg\,\alpha=\dfrac{R}{h} \Rightarrow R=h\cdot tg\,\alpha$, iar

$F_{el}=k(2R-\ell_0)=k(2h\cdot tg\,\alpha-\ell_0) \Rightarrow k(2h\cdot tg\,\alpha-\ell_0)-mg\cdot ctg\,\alpha=m\omega^2h\cdot tg\,\alpha \Rightarrow$

$2kh\cdot tg\,\alpha-m\omega^2h\cdot tg\,\alpha=k\ell_0+mg\cdot ctg\,\alpha \Rightarrow h=\dfrac{k\ell_0+mg\cdot ctg\,\alpha}{(2k-m\omega^2)\cdot tg\,\alpha}\approx 65{,}63$ cm.

27. Greutatea unui corp se determină prin suspendarea acestuia de un dinamometru şi forţa indicată de dinamometru este greutatea măsurată a corpului. Dacă suspendăm corpul de dinamometru la pol, în imediata vecinătate a Pământului, greutatea corpului este egală cu forţa elastică, astfel că la pol dinamometrul indică greutatea reală $G=mg_0$, unde g_0 reprezintă accelerația gravitaţională în imediata vecinătate a Pământului.

La pol la altitudinea h, greutatea este $G_p=F_{el}$ şi din legea atracţiei universale forţa de atracţie este: $F_a=G_P=\dfrac{kmM}{(R_p+h)^2}$, astfel că $F_{el}=\dfrac{kmM}{(R_p+h)^2}$.

La ecuator asupra corpului acţionează atât forţa de atracţie a Pământului cât şi forţa elastică, iar rezultanta lor joacă rol de forţă centripetă, deoarece corpul se roteşte odată cu Pământul cu viteza unghiulară $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ a Pământului. T este perioada proprie de rotaţie a Pământului.

Astfel: $F_{a_E}-F_{el}=F_{cp} \Rightarrow F_{el}=F_{a_E}-m\omega^2R_p$. La ecuator forţa de atracţie în imediata vecinătate a Pământului este: $F_{a_E}=\dfrac{kmM}{R_p^2}$, deoarece se consideră Pământul sferic cu raza R_p.

Deoarece greutatea unui corp este aceeaşi ca la ecuator, atunci

$$\frac{kmM}{(R_p+h)^2}=\frac{kmM}{R_p^2}-m\omega^2R_p \Rightarrow R_p+h=\sqrt{\frac{kMR_p^2}{kM-\omega^2R_p^3}} \Rightarrow h=R_p\left(\sqrt{\frac{kM}{kM-\omega^2R_p^3}}-1\right)$$

Cum $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho V = \rho \frac{4\pi R_p^3}{3} \Rightarrow h = R_p\left(\sqrt{\frac{k\rho T^2}{k\rho T^2 - 3\pi}} - 1\right) \approx 11$ km

28. La ecuatorul asteroidului forța de atracție compusă cu forța indicată de dinamometru (greutatea măsurată) joacă rol de forță centripetă, deoarece corpul execută o mișcare de rotație împreună cu asteroidul și cu perioada de rotație a acestuia. Vectorial: $\vec{F}_{el} + \vec{F}_a = \vec{F}_{cp}$. Deoarece corpul pare fără greutate resortul dinamometrului nu este întins și prin urmare $F_{el} = 0$, iar $F_a = F_{cp} \Rightarrow k\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R \Rightarrow \frac{kM}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}R$, unde M reprezintă masa asteroidului. Obținem $M = \rho\frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow \rho = \frac{3\pi}{kT^2} = 1210$ kg/m³.

29. Asupra satelitului acționează forța de atracție care joacă rol de forță centripetă, astfel că: $F_a = F_{cp} \Rightarrow k\frac{mM}{R^2} = m\frac{v^2}{R_p} = mg_0 \Rightarrow v = \sqrt{g_0 R_p} \approx 7{,}9$ km/s.

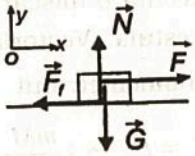
Valoarea υ=7,9 km/s reprezintă prima viteză cosmică, adică viteza unui satelit care se roteşte chiar la suprafața Pământului.

30. Impunem condiția ca forța de atracție exercitată de planetă asupra navei cosmice să joace rol de forță centripetă, astfel că: $F_a = F_{cp} \Rightarrow$ $k\frac{mM}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{R+h} \Rightarrow kM = v^2(R+h)$, unde M este masa planetei si R raza ei. Din definiția accelerației gravitaționale: $g = \frac{F_a}{m} = \frac{kM}{R^2} = \frac{v^2(R+h)}{R^2} \approx 1{,}4$ m/s².

3.1. Lucrul mecanic. Puterea mecanică

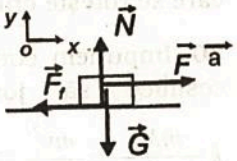
1.a. Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a mașinii este $L_G = 0$, deoarece greutatea este perpendiculară pe direcția de mișcare.

b. Studiem mișcarea uniformă a mașinii de spălat: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = 0$. Scalar pe *Ox*: $F - F_f = 0 \Rightarrow F = F_f$ și pe *Oy*: $N - G = 0$. Cum $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow F = \mu mg \Rightarrow$ lucrul mecanic efectuat de forța de împingere este $L_F = Fd = \mu mgd = 2400$ J



c. În cazul forței de frecare $L_{F_f} = F_f d \cos 180^0$, deoarece forța de frecare își deplasează punctul de aplicație pe direcția de deplasare pe distanța *d*, dar are sens opus. Astfel $L_{F_f} = -\mu mgd = -2400$ J. Deoarece mașina de spălat se mișcă uniform, lucrul mecanic al forței de împingere este compensat de lucrul mecanic al forței de frecare.

2.a. Studiem mișcarea corpului: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem: pe *Ox*: $F - F_f = ma$ și pe *Oy*: $N - mg = 0$.



Cum $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow a = \dfrac{F - \mu mg}{m} = \dfrac{F}{m} - \mu g = 4$ m/s².

Aflăm distanța pe care se deplasează corpul în timpul *t* din relația: $d = v_m \cdot t = \dfrac{v}{2} \cdot t = \dfrac{at^2}{2}$, deoarece mișcarea corpului este rectilinie uniform accelerată și din definiție: $a_m = a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v}{t} \Rightarrow v = a \cdot t \Rightarrow L_F = F \cdot d = \dfrac{Fat^2}{2} = 20$ J

b. Lucrul mecanic al forței de frecare este $L_{F_f} = -\mu mgd = -\dfrac{\mu \cdot mgat^2}{2} = -4$ J.

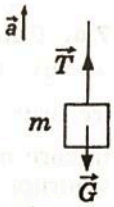
c. Prin definiție puterea mecanică instantanee este $P = \dfrac{L}{\Delta t} = \dfrac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, deoarece pentru un interval de timp foarte scurt $\Delta t \to 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{d} / \Delta t$.
Din $v = at \Rightarrow P = Fat_1 = 20$ W, deoarece vectorul fortă și vectorul viteză au aceeași direcție și sens

3.a. Conform definiției lucrului mecanic efectuat de greutatea unui corp: $L_G = mgh$, unde *h* este înălțimea pe care coboară corpul. Cum corpurile cad liber sub acțiunea greutății cu accelerația *g*, după timpul *t*, $h = v_m t = \dfrac{gt^2}{2}$, deooarece $v_m = \dfrac{v}{2} = \dfrac{gt}{2}$, astfel că $L_G = \dfrac{mg^2t^2}{2} \Rightarrow \dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{m_1 t_1^2}{m_2 t_2^2} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$.

b. Prin definiție puterea medie este $P_m = \frac{L}{\Delta t}$, iar în cazul greutății este

$$P_m = \frac{mgh}{t} = \frac{mg^2t}{2} \Rightarrow \frac{P_{m1}}{P_{m2}} = \frac{m_1t_1}{m_2t_2} = 0{,}25$$

c. Lucrul mecanic total al greutății care acționează asupra corpului 1 este $L_G = L_c + L_u$, unde L_c reprezintă lucrul mecanic efectuat de greutate la coborârea corpului 1 și L_u reprezintă lucrul mecanic efectuat de greutate la urcarea corpului 1. Astfel $L_c = mgh$, deoarece la coborâre greutatea ajută la mișcare și este o forță motoare, iar $L_h = -mgh$, deoarece la urcare greutatea nu ajută la mișcare și este o forță rezistivă. Astfel $L_G = 0$, deoarece greutatea este o forță de tip conservativ iar lucrul ei mecanic pe un drum închis este zero.

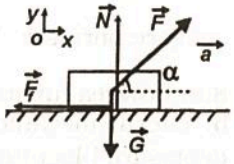


4.a. Conform definiției lucrului mecanic efectuat de tensiunea din cablu: $L = TH$, cu $H = 5h$, unde h este înălțimea medie a unui etaj, iar T este tensiunea în cablul de susținere al liftului. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G} = m\vec{a}$, iar scalar $T - mg = ma \Rightarrow T = m(a+g) \Rightarrow L = 5m(a+g)h = 44$ kJ

b. $L_G = -mgH = -5mgh = -40$ kJ

c. Prin definiție puterea medie este $P_m = \frac{L}{\Delta t} = \frac{TH}{\Delta t} = Tv_m$, unde v_m reprezintă viteza medie a liftului. Cum $H = v_m t = at^2/2 \Rightarrow t = \sqrt{2H/a}$, deoarece

$$v_m = \frac{v}{2} = \frac{at}{2} = \frac{\sqrt{2aH}}{2} \Rightarrow P_m = m(g+a)\frac{\sqrt{2aH}}{2} = 8{,}8 \text{ kW}$$



5.a. Studiem mișcarea corpului. Vectorial: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem: pe Ox: $F\cos\alpha - F_f = ma$ și pe Oy:

$$F\sin\alpha + N - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha) \Rightarrow$$

$$F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\sin\alpha = ma \Rightarrow F = \frac{m(a+\mu g)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \Rightarrow$$

$$L_F = Fd_1\cos\alpha = \frac{m(a+\mu g)d_1}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\cos\alpha = \frac{m(a+\mu g)d_1}{1+\mu tg\alpha} \approx 9{,}45 \text{ J}$$

b. Lucrul mecanic al normalei este $L_N = 0$, deoarece forța normală este în permanență perpendiculară pe direcția de mișcare

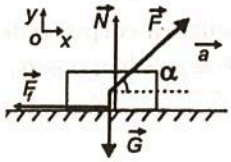
c. Lucrul mecanic al forței de frecare este $L_{F_f} = F_f d_3 \cos 180^0 = -\mu N d_3$

$$N = mg - F\sin\alpha = mg - \frac{m(a+\mu g)\sin\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \frac{m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \Rightarrow$$

$$L_{F_f} = -\frac{\mu m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)d_3}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = -2{,}67 \text{ J}$$

6.a. Lucrul mecanic efectuat de forța F este $L = Fd\cos\alpha = 207{,}6$ J

b. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{Ff} = F_f d\cos 180 = -F_f d$.



Cum $F_f = \mu N \Rightarrow L_{Ff} = -\mu N d$. Din proiecția pe axa Oy:

$$F\sin\alpha + N = mg \Rightarrow L_{Ff} = -\mu(mg - F\sin\alpha)d = -8 \text{ J}$$

c. Utilizăm formula puterii medii: $P_m = \frac{L}{\Delta t} = \frac{Fd\cos\alpha}{\Delta t} = Fv_m\cos\alpha = \frac{Fv}{2}\cos\alpha$, unde $v_m = \frac{v}{2} = \frac{at}{2}$. Studiem mişcarea corpului: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}$.

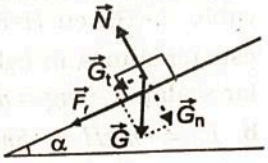
Din proiecţia pe axa *Ox* obţinem:

$F\cos\alpha - F_f = ma \Rightarrow F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg = ma \Rightarrow a = F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)/m - \mu g$

$\Rightarrow a \approx 12{,}475$ m/s².

Cum $d = v_m t = \frac{at^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{a}} \Rightarrow v_m = \frac{\sqrt{2ad}}{2} \approx 5$m/s, astfel că $P_m \approx 259{,}5$W

7.a. Conform definiţiei lucrului mecanic al forţei de frecare este: $L_{F_f} = F_f d\cos 180 = -F_{f_m} d$. Conform legii frecării: $F_f = \mu_m N = \mu_m mg\cos\alpha$, unde coeficientul de frecare mediu μ_m se calculează prin media aritmetică a valorilor coeficienţilor de frecare din punctul de lansare şi punctul de oprire. Deoarece coeficientul de frecare descreşte uniform, valoarea medie este:



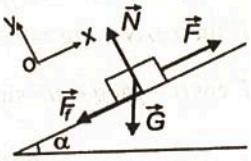
$\mu_m = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \Rightarrow L_{F_f} = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} mgd\cos\alpha = -8{,}65$ J

b. Lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate este $L_G = -mgd\sin\alpha = -25$ J, deoarece greutatea este o forţă rezistivă şi nu ajută la mişcarea corpului

c. Lucrul mecanic efectuat de forţa de apăsare este $L_N = 0$, deoarece forţa de apăsare normală $\vec{N}$ este perpendiculară pe traiectorie

8.a. Puterea furnizată de motor este $P = F\upsilon = 20$ kW

b. Lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare în timpul deplasării blocului de piatră este $L_{Ff} = F_f d\cos 180 = -F_f d$.

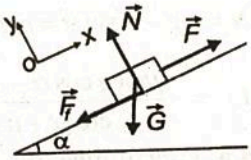


Deoarece blocul de piatră este tras uniform: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Scalar pe *Ox*:

$F - F_f - G\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_f = F - G\sin\alpha \Rightarrow L_{Ff} = -(F - G\sin\alpha)d = -20$ kJ

c. Lucrul mecanic efectuat de forţa rezultantă care acţionează asupra blocului pe distanţa *OA* este nulă, deoarece blocul este ridicat uniform, astfel că rezultanta forţelor care acţionează asupra blocului este nulă.

9.a. Deoarece corpul este ridicat uniform pe planul înclinat,atunci rezulanta forţelor este nulă, astfel că $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, unde *F* reprezintă o forţă de tracţiune paralelă cu planul. Proiectăm pe *Ox*: $F - mg\sin\alpha - F_f = 0$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0$.

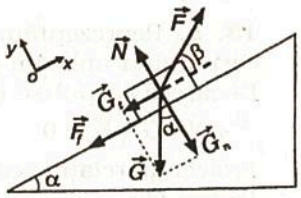


Cum $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$. Astfel puterea necesară ridicării corpului de-a lungul planului, cu viteza constantă este $P = Fv \Rightarrow$ $P = mgv(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$=3,75 W

b. Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la ridicarea acestuia până în vârful planului înclinat este $L_G = -mgh = -5$ J, deoarece greutatea este o forță rezistivă neajutând la urcarea corpului

c. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{Ff} = F_f d\cos 180 = -\mu Nd \Rightarrow$ $L_{Ff} = -\mu mghctg\alpha = -2{,}5$ J, deoarece între distanța parcursă de corp pe plan și înălțimea planului există relația $h = d\sin\alpha$

10.a. Lucrul mecanic efectuat de forța F este $L_F = Fd\cos\beta$. Impunem condiția de mișcare uniformă a corpului $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = 0$.



Proiectăm pe axa Ox: $F\cos\beta - mg\sin\alpha - F_f = 0$ și pe axa Oy: $F\sin\beta + N - mg\cos\alpha = 0$.

Din $F\cos\beta - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin\beta = 0 \Rightarrow$

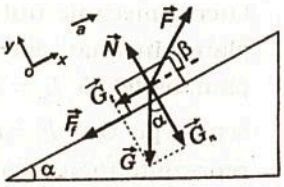
$$F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha - F\sin\beta) \Rightarrow F = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \Rightarrow$$

$$L_F = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} d\cos\beta \approx 2{,}57 \text{ J}$$

b. $L_G = -G_t d = -mgd\sin\alpha = -2$ J, deoarece greutatea corpului nu ajută la mișcarea corpului

c. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{Ff} = F_f d\cos 180 = -F_f d$. Deoarece forța de tracțiune este paralelă cu planul, atunci β=0, astfel că $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow L_{Ff} = -\mu mgd\cos\alpha = -1$ J

11.a. Studiem mișcarea corpului: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}$.



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem pe Ox: $F\cos\beta - mg\sin\alpha - F_f = ma$ și pe Oy: $F\sin\beta + N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow$

Cum $F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha - F\sin\beta) \Rightarrow$

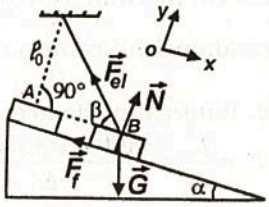
$$F\cos\beta - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin\beta = ma \Rightarrow F = \frac{m(a + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \Rightarrow$$

$F \approx 20{,}163$ N $\Rightarrow L = Fd\cos\beta \approx 71{,}07$ J.

b. $L_N = 0$, deoarece normala este perpendiculară pe direcția de deplasare.

c. $L_{F_f} = F_f \cdot d \cdot \cos 180^0 = -\mu Nd = -\mu(mg\cos\alpha - F\sin\beta)d \approx -3{,}61$ J.

12.a. Alungirea firului în poziția de echilibru este $\Delta\ell = \ell - \ell_0$, unde $\ell = \ell_0 / \sin\beta$, astfel că $\Delta\ell = \ell_0(1/\sin\beta - 1)$=20,5 cm



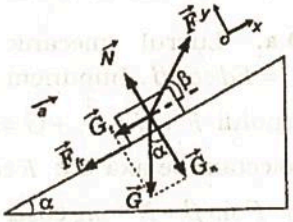
b. Lucrul mecanic al greutății corpului este $L_G = mgh = mgAB\sin\alpha$, unde $AB = \ell_0 ctg\beta$, astfel că $L_G = mg\ell_o ctg\beta\sin\alpha$=2,5 J

c. Studiem echilibrul corpului: $\vec{F}_{el}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$. Proiectăm pe *Oy*:

$F_{el}\sin\beta+N-mg\cos\alpha=0\Rightarrow N=mg\cos\alpha-k\Delta\ell\sin\beta\approx 5{,}76$ N

d. Proiectând ecuația vectorială pe *Ox* obținem: $mg\sin\alpha-F_{el}\cos\beta-F_f=0$.

Cum $F_f=\mu N\Rightarrow\mu=\dfrac{mg\sin\alpha-k\Delta\ell\cos\beta}{mg\cos\alpha-k\Delta\ell\sin\beta}\approx 0{,}366$



13. a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Deoarece corpul se mișcă uniform, vectorial obținem $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe axa *Oy*:

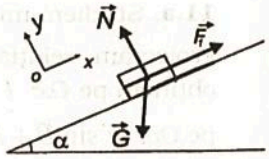
$N+F\sin\beta-mg\cos\alpha=0\Rightarrow N=mg\cos\alpha-F\sin\beta$=900 N.

b. Pe axa *Ox*: $F\cos\beta-F_f-mg\sin\alpha=0\Rightarrow F_f=F\cos\beta-mg\sin\alpha$=200 N, astfel că din legea a doua a forței de frecare $F_f=\mu N$ obținem $\mu=\dfrac{F_f}{N}\approx 0{,}22$

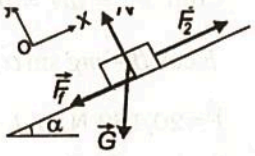
c. Puterea dezvoltată de motor este $P=Fv\cos\beta$=800 W

14.a. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{Ff}=F_f\ell\cos 180=-\mu N\ell=-\mu mg\ell\cos\alpha$=−1,25 kJ

b. Prin definiție randamentul unui plan înclinat este definit prin raportul dintre lucrul mecanic util și lucrul mecanic consumat: $\eta=\dfrac{L_u}{L_c}$.



Lucrul mecanic util este efectuat de o forță $\vec{F}_1$ paralelă cu planul înclinat, care ridică unifom și fără frecare corpul pe plan, astfel că $L_u=F_1\ell$. Cum $\vec{F}_1+\vec{N}+\vec{G}=0$, scalar pe *Ox*: $F_1=mg\sin\alpha\Rightarrow L_u=mg\ell\sin\alpha=mgh$, unde h reprezintă înălțimea la care urcă corpul.



Dacă corpul se deplasează uniform cu frecare pe aceeași distanță ℓ sub acțiunea forței $\vec{F}_2$ paralelă cu planul înclinat, lucrul mecanic consumat este $L_c=F_2\ell$. Cum $\vec{F}_2+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$, scalar prin proiecția relației pe axele de coordonate obținem pe *Ox*: $F_2-mg\sin\alpha-F_f=0$ și pe *Oy*: $N-mg\cos\alpha=0$. Cum $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha\Rightarrow F_2=mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$.

Lucrul mecanic consumat este $L_c=mg\ell(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)=mgh(1+\mu ctg\alpha)\Rightarrow$

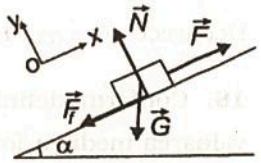
randamentul rampei este: $\eta=\dfrac{1}{1+\mu\cdot ctg\,\alpha}\approx 66{,}66\%$

c. Puterea medie necesară ridicării lăzii pe rampă este:

$P_m=\dfrac{L_c}{\Delta t}=\dfrac{mg\ell(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{\Delta t}$=187,5 W

15.a. Lucrul mecanic util pentru urcarea uniformă a unui corp se efectuează împotriva greutății corpului, astfel că $L_u = -L_G = mgh = mg\ell\sin\alpha$, unde ℓ reprezintă distanța urcată de corp pe planul înclinat.

Lucrul mecanic consumat este lucrul mecanic efectuat de o forță constantă paralelă cu planul care determină urcarea uniformă cu frecare a corpului pe planul înclinat.



Astfel $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$. Proiectând pe Ox obținem: $F - mg\sin\alpha - F_f = 0$ și pe Oy: $N - mg\cos\alpha = 0$.

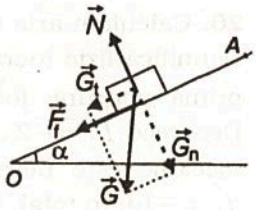
Cum $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

$L_c = mg\ell(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = mg\ell\sin\alpha + \mu mg\ell\cos\alpha = L_u - L_f$=2500 J

b. Prin definiție randamentul unui plan înclinat este definit prin raportul dintre lucrul mecanic util și lucrul mecanic consumat: $\eta = \frac{L_u}{L_c}$=80%

c. Din $L_u = -L_G = mgh \Rightarrow h = \frac{L_u}{mg}$=20 m

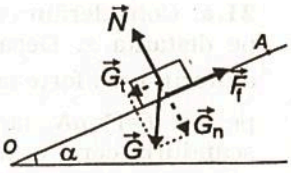
16.a. Studiem mișcarea corpului pe planul înclinat. Astfel $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f = m\vec{a}_u$, iar scalar pe direcția de mișcare



$-mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_u \Rightarrow a_u = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ (1)

Din grafic determinăm accelerația corpului la urcare $a_u = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{v_0}{t_u} = -3$ m/s², deoarece v_0=9 m/s și t_u=3 s

Studiem coborârea corpului pe planul înclinat. Astfel $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f = m\vec{a}_c$, iar scalar pe direcția de mișcare



$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_c \Rightarrow a_c = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ (2).

Din grafic determinăm accelerația corpului la coborâre $a_c = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t_c} = 1{,}2$ m/s², deoarece v=6 m/s și t_c=5 s

Din (1)+(2) obținem $\sin\alpha = \frac{|a_u| + a_c}{2g}$=0,21

b. Din (1)-(2) obținem $\mu = \frac{|a_u| - a_c}{2g\cos\alpha} \approx 0{,}092$, deoarece $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \approx 0{,}978$

c. Calculăm distanța parcursă de corp la urcare cu ajutorul ariei triunghiului delimitat de axa vitezei, axa timpului și graficul vitezei. Astfel d_u=13,5 m, iar la coborâre distanța parcursă este d_c=15 m, adică aria dintre graficul vitezei, axa timpului și ordonata construită în punctul t=8 s. Astfel lucrul mecanic total efectuat de forța de frecare este $L_{Ff} = F_f(d_u + d_c)\cos 180$

$L_{Ff} = -\mu mg(d_u + d_c)\cos\alpha = -2{,}56$ J

17. Deoarece forța nu este constantă, dar este reprezentată în funcție de coordonată, aria cuprinsă între curba forței, axa de coordonate Ox și ordonatele duse prin extremitățile x_1 și x_2 reprezintă fizic lucrul mecanic, În cazul nostru

figura geometrică este un trapez, astfel că aria acestuia este: $L=\frac{(F_1+F_2)(x_2-x_1)}{2}$.

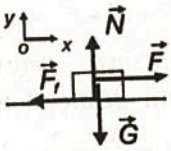
Deoarece $F_1=ax_1 \Rightarrow a=\frac{F_1}{x_1}$, iar $F_2=ax_2=\frac{F_1x_2}{x_1} \Rightarrow L=\frac{F_1\left(x_2^2-x_1^2\right)}{2x_1}=1{,}2$ J.

18. Conform definiției lucrului mecanic: $L=F_m(x_2-x_1)$, unde F_m reprezintă valoarea medie a forței. Deoarece forța F depinde liniar de coordonată, valoarea medie a forței F se calculează cu ajutorul mediei aritmetice a valorilor de la capetele intervalului, astfel că: $F_m=\frac{F(x_1)+F(x_2)}{2}=5$N, deoarece pentru x_1=1m$\Rightarrow F_1$=8 N și pentru x_2=4 m$\Rightarrow F_2$=2 N. Prin urmare obținem L=15 J.

19. Conform interpretării geometrice a lucrului mecanic, dacă forța F este reprezentată grafic în funcție de coordonată, aria cuprinsă între curba forței și axa coordonatelor reprezintă fizic lucrul mecanic. Obținem: $L_F=14$ J.

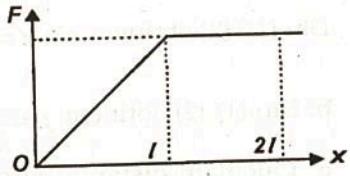
20. Calculăm aria cuprinsă între curba forței și axa coordonatelor. Această arie semnifică fizic lucrul mecanic, astfel că: $L_F=L_1+L_2+L_3$. Astfel $L_1=8$ J $\Rightarrow$ pe prima porțiune forța este motoare, deoarece lucrul ei mecanic este pozitiv. Deoarece $L_2=-2$ J$\Rightarrow$ pe a doua porțiune forța este rezistivă, deoarece lucrul ei mecanic este negativ și pe treia porțiune forța este tot rezistivă, astfel că $L_3=-1$J. În total $L_F=5$ J.

21.a. Considerăm cazul în care scândura a pătruns pe asfalt pe distanța x. Deoarece scândura se deplasează uniform cu ajutorul unei forțe orizontale, atunci $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$. Scalar pe Ox: $F=F_f=\mu N$, iar pe Oy: $N=G_x$, unde m_x reprezintă masa scândurii care a intrat pe asfalt. Deoarece scândura este omogenă, masa ei este uniform distribuită pe lungimea ei, astfel că masa porțiunii cu lungimea ℓ este



$m_x=\frac{mx}{\ell} \Rightarrow F=F_f=\frac{\mu mgx}{\ell}$.

Deoarece forța depinde direct proporțional de x reprezentarea ei grafică este redată în figura alăturată.



Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic, acesta este egal cu aria cuprinsă între curba forței, axa Ox și ordonatele construite prin extremități. Când $x_1=\ell/3 \Rightarrow F=\mu mg/3$, iar aria este un triunghi dreptunghic, astfel că $L=Fx_1/2=\mu mg\ell/18$=30 mJ

b. Când scândura pătrunde în întregime pe asfalt forța cu care trage elevul scândura atinge valoarea maximă $F_{max}=\mu mg$, astfel lucrul ei mecanic total este $L_t=\mu mg\ell/2$=0,27 J

c. După ce pătrunde pe lungimea ℓ pe asfalt, forța cu care trage elevul scândura pentru ca aceasta să se miște uniform este $F=F_{max}=\mu mg$=const, astfel că lucrul mecanic suplimentar efectuat de elev astfel ca scândura să mai pătrundă pe distanța $x=\ell$ este $L_s=\mu mg\ell$. Lucrul mecanic total este $L=L_t+L_s=3\mu mg\ell/2$=0,81 J

22.a. Deoarece forța de tracțiune este egală cu forța de deformare elastică, atunci $F=kx \Rightarrow k=F/x=100$ N/m

b. În timpul deplasării uniforme a corpului $\vec{F}_{el}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$, astfel că scalar

$F=F_{el}=F_f \Rightarrow kx_m=\mu mg \Rightarrow x_m=\dfrac{\mu mg}{k}$=4 cm.

c. Pe baza interpretării grafice a lucrului mecanic lucrul mecanic efectuat de forța F care trage de resort, în timpul deformării resortului de la x_1 la x_2 reprezintă aria trapezului cuprins între forță, axa Ox și cele două ordonate construite prin x_1 și x_2, astfel că $L=\dfrac{(F_1+F_2)(x_2-x_1)}{2}$=60 mJ

23. Lucrul mecanic efectuat pentru a alungi un resort cu o treime din alungirea maximă $\Delta\ell$ este $L_1=\dfrac{k}{2}\left(\dfrac{\Delta\ell}{3}\right)^2=\dfrac{k\Delta\ell^2}{18}$.

Lucrul mecanic efectuat pentru a alungi resortul cu restul de două treimi este $L_2=\dfrac{k\Delta\ell^2}{2}-\dfrac{k\Delta\ell^2}{18}=\dfrac{4}{9}k\Delta\ell^2$. Împărțim cele două lucruri mecanice și obținem: $\dfrac{L_1}{L_1}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow L_1=\dfrac{L_2}{8}\Rightarrow$lucrul mecanic efectuat pentru a alungi un resort cu o treime din alungirea maximă este de opt ori mai mic decât lucrul mecanic efectuat pentru a alungi resortul cu restul de două treimi.

24. Pentru a alungi un resort cu $\Delta\ell$, lucrul mecanic efectuat este $L=\dfrac{k\Delta\ell^2}{2}$.

Pentru a alungi resortul cu $3\Delta\ell$, lucrul mecanic efectuat este $L'=\dfrac{9k\Delta\ell^2}{2}$ și deci lucrul mecanic suplimentar este $L_s=L'-L=4k\Delta\ell^2$.

Cum $F=k\Delta\ell \Rightarrow k=\dfrac{F}{\Delta\ell}\Rightarrow L_s=4F\Delta\ell=0{,}08$ J.

25.a. Deoarece puterea dezvoltată de forța de tracțiune este constantă, din $P=F_{t1}v_1 \Rightarrow F_{t1}=\dfrac{P}{v_1}$=4 kN. Studiem mișcarea corpului când asupra acestuia acționează R_1. Deoarece Vectorial $\vec{F}_{t1}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{R}_1=m\vec{a}_1$ și scalar

$F_{t1}-R_1=ma_1 \Rightarrow a_1=\left(\dfrac{P}{v_1}-R_1\right)/m$=5 m/s²

b. Când autoturismul are viteza v_2, $F_{t2}-R_2=ma_2 \Rightarrow R_2=F_{t2}-ma_2 \Rightarrow$

$R_2=P/v_2-ma_2$=2 kN

c. Când autoturismului atinge valoarea maximă v_3, rezultanta forțelor care se opun mișcării devine R_3. În acest caz forța de tracțiune este egală cu R_3, asftel că $F_{t3}=R_3$. Din expresia puterii $P=F_{t3}v_3=R_3v_3 \Rightarrow v_3=\dfrac{P}{R_3}$=20 m/s

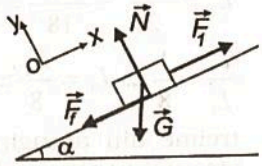
26.a. Studiem miscarea uniformă a camionului în cazul în care drumul este orizontal. Vectorial $\vec{F}_{t0}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{R}=0$, astfel că scalar pe direcția mișcării se obține $F_{t0}=R$. Cum $P_0=F_{t0}v_0$, relația cerută este $P_0=Rv_0$ (1).

b. Studiem miscarea uniformă a camionului în cazul în care acesta urcă drumul de pantă *p*. Vectorial $\vec{F}_{t1}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{R}=0$, iar scalar în sensul mişcării se obţine: $F_{t1}-G\sin\alpha-R=0$, unde sinα=*p*. Din $P_1=F_{t1}v_0$ obţinem relaţia cerut $P_1=(Gp+R)\cdot v_0$ (2).

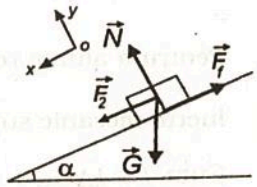
c. Studiem miscarea uniformă a camionului în cazul în care acesta coboară drumul de pantă *p*. Vectorial $\vec{F}_{t2}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{R}=0$, iar scalar în sensul mişcării se obţine: $F_{t1}+G\sin\alpha-R=0$, unde sinα=*p*. Din $P_2=F_{t2}v_0$ obţinem relaţia cerută $P_2=(R-Gp)\cdot v_0$ (3).

d. Adunând relaţiile (2) cu (3) obţinem $R=\dfrac{P_1+P_2}{2v_0}$ astfel că introducând în relaţia (1) obţinem $P_0=\dfrac{P_1+P_2}{2}$=118 kW

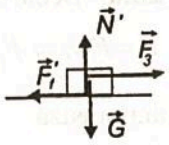
27.a. Studiem mişcarea maşinii de urcare a pantei. Deoarece maşina urcă uniform panta: $\vec{F}_1+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$, iar scalar pe *Ox*: $F_1-F_f-mg\sin\alpha=0$ şi pe *Oy*: $N-mg\cos\alpha=0$. Cum $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha$, atunci $F_1=mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$. Puterea maşinii la urcarea pantei este: $P=F_1\cdot v_1=mgv_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$ (1)



b. Studiem cazul când maşina coboară uniform aceeaşi pantă. Vectorial $\vec{F}_2+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$, iar scalar pe *Ox*: $F_2+mg\sin\alpha-F_f=0\Rightarrow F_2=mg(-\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$.
Puterea maşinii la coborârea pantei este: $P=F_2v_2=mgv_2(-\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$ (2)



c. În cazul în care maşina se deplasează pe orizontală uniform vectorial obţinem $\vec{F}_3+\vec{N}'+\vec{G}+\vec{F}_f'=0$.
Scalar $F_3=F_f'=\mu N'=\mu mg$, iar puterea dezvoltată de motorul maşinii este $P=F_3v_3=\mu mgv_3\Rightarrow v_3=\dfrac{P}{\mu mg}$



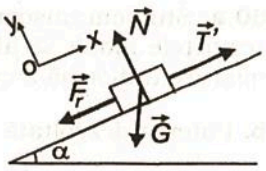
Din (1) şi (2)$\Rightarrow \mu mg=\dfrac{P(v_2+v_1)}{2v_1v_2\cos\alpha}\Rightarrow v_3=\dfrac{2v_1v_2\cos\alpha}{v_2+v_1}$.

Cum α este foarte mic, $\cos\alpha\approx 1\Rightarrow v_3=\dfrac{2v_1v_2}{v_2+v_1}=12$ m/s.

28.a. Puterea necesară pentru a tracta remorca pe drumul orizontal este: *P*=*Tv*=6 kW

b. Lucrul mecanic efectuat de forţa de rezistenţă pe drum orizontal este $L=F_rd\cos180=-F_rd$. Deoarece remorca este tractată cu viteză constantă, atunci rezultanta forţelor vcare acţionează asupra ei este nulă, astfel că $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_r=0$. Scalar pe direcţia de mişcare *T*=*Fr*, astfel că *L*=−*Td*=−6 kJ

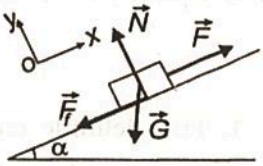
c. Puterea necesară pentru a tracta remorca pe pantă este $P' = T'v$, unde noua valoare a forței de tracțiune a remorcii este T'. Deoarece remorca urcă uniform pe pantă, atunci $\vec{T}' + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$.



Scalar pe Ox: $T' = F_r + mg\sin\alpha = T + mg\sin\alpha$, astfel că

$P' = (T + mg\sin\alpha)v = 16$ kW

29.a. Studiem mișcarea uniformă a saniei pe planul înclinat: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe Ox:



$F = mg\sin\alpha + F_f$.

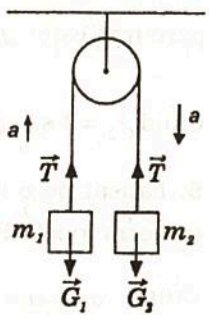
Cum $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ reprezintă forța de tracțiune dezvoltată de cal.

Puterea activă dezvoltată de cal este $P_{activă} = F \cdot v = mgv(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 338{,}4$ W

b. Alte puteri care intervin sunt puterea forței de frecare: $P_{F_f} = -F_f \cdot v = -\mu mgv\cos\alpha$ și puterea greutății $P_G = -mgv\sin\alpha$. Bilanțul puterilor este $P_{activă} = |P_{F_f}| + |P_G|$, deoarece puterea activă dezvoltată de forța de tracțiune a calului se consumă atât sub formă de putere pentru învingerea forțelor de frecare cât și pentru învingerea greutății saniei.

c. $\dfrac{|P_{F_f}|}{P_{activă}} = \dfrac{\mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = \dfrac{\mu}{tg\alpha + \mu} \approx 16{,}66\ \%$

30.a. Deoarece corpul cu masa m_2 are masa mai mare comparativ cu corpul cu masa m_1, corpul m_1 urcă, iar corpul cu masa m_2 coboară, deci tensiunea care acționează asupra corpului 2 ajută la mișcare, astfel că lucrul ei mecanic este $L_T = Th$.



Studiem mișcarea fiecărui corp. Pentru corpul cu masa m_2: $m_2g - T = m_2a$, iar pentru corpul cu masa m_1:

$T - m_1g = m_1a \Rightarrow a = \dfrac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \Rightarrow T = m_1(a + g) = \dfrac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2} \Rightarrow$

$L_T = \dfrac{2m_1m_2gh}{m_1 + m_2} = 8$ J

b. $L_{Gtotal} = L_{G_2} + L_{G_1} = m_2gH - m_1gH = (m_2 - m_1)gH = 12$J,

deoarece corpul 2 coboară și $\vec{G}_2$ este forță motoare, iar corpul 1 urcă și $\vec{G}_1$ este forță rezistivă.

c. Prin definiție $P_m = \dfrac{L_t}{\Delta t}$, unde L_t reprezintă lucrul mecanic al tuturor forțelor și Δt reprezintă intervalul de timp după care corpul m_2 ajunge pr sol.

Deoarece lucrul mecanic total al celor două tensiuni este nul, deoarece o tensiune este forță motoare iar cealaltă tensiune este forță rezistivă, atunci $L_t = L_{Gtotal}$. Dar $H = v_m\Delta t = \dfrac{v\Delta t}{2}$, unde $v = a\Delta t$, astfel că $H = \dfrac{a(\Delta t)^2}{2} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\dfrac{2H}{a}} \Rightarrow$

$\Delta t = 0{,}6$ s $\Rightarrow P_m = \dfrac{(m_2 - m_1)gH}{\Delta t} = 20$ W

30.a. Studiem mişcarea uniformă a corpului 2, astfel că $T_2=m_2g$. Din condiţia ca scripetele mobil să aibă o mişcare uniformă obţinem $T_2=2T_1$, iar din condiţia de mişcare uniformă a corpului 1: $F+m_1g=T_1 \Rightarrow F=(m_2/2-m_1)g=200$ N.

b. Puterea dezvoltată de forţa F este $P=\frac{L}{t}=\frac{Fh}{t}=20$ W

c. Cum $P=Fv \Rightarrow v=P/F=0{,}1$ m/s

3.2. Energia cinetică şi potenţială*

1. Prin definiţie energia cinetică: $E_c=\frac{mv^2}{2}$. Cum $E_{c_1}=E_{c_2} \Rightarrow \frac{m_1v_1^2}{2}=\frac{m_2v_2^2}{2}$, şi cum $v_2=2v_1$ deoarece al doilea sportiv aleargă de două ori mai repede, obţinem că: $m_1=4m_2$.

2. Cum $E_c=\frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow m=\frac{2E_c}{v_0^2}=4$ kg

3. Pe verticală săgeata are o mişcare uniform încetinită datorită acţiunii greutăţii cu viteza iniţială v_0, astfel că $v=v_0-gt \Rightarrow$ la o secundă de la lansare viteza este $v=10$ m/s $\Rightarrow E_c=\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}(v_0-gt)^2=2$ J

4. Deoarece corpul se mişcă uniform accelerat din repaus, accelerația medie coincide cu cea instantanee, astfel că $a_m=a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v}{t} \Rightarrow v=at$, iar distanţa parcursă este: $d=v_mt=\frac{v}{2}t=\frac{at^2}{2} \Rightarrow a=\frac{2d_1}{t_1^2}=2$ m/s².

Când $t_2=2$ s, $v_2=at_2=\frac{2d_1}{t_1^2}t_2=4$ m/s $\Rightarrow E_c=\frac{mv_2^2}{2}=8$ J

5. Lansat pe o suprafaţă orizontală cu o viteză iniţială v_0, corpul are o mişcare uniform încetinită, astfel $F_f=-ma \Rightarrow \mu N=-ma \Rightarrow \mu mg=-ma \Rightarrow a=-\mu g$.

Cum $a_m=a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v-v_0}{t} \Rightarrow v=v_0+at \Rightarrow v=v_0-\mu gt \Rightarrow$ energia cinetică este $E_c=\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}(v_0-\mu gt)^2=81$ J

6. Conform definiţiei energia potenţială gravitaţională este: $E_p=mgd=mg\frac{h}{4}=5$J

7. Cum energia potenţială gravitaţională este: $E_p=mgh \Rightarrow \frac{E_{p_2}}{E_{p_1}}=\frac{m_2gh}{m_1gh}=4$.

8. Corpul aruncat pe verticală de jos în sus are o mişcare uniform încetinită cu accelerația g, astfel că $v=v_0-gt$, iar la înălţimea maximă $v=0$, astfel că timpul de oprire este $t_{op}=\frac{v_0}{g}$. Înălţimea maximă la care ajunge corpul este

$h_{max} = v_m t_{op} = \frac{v_0}{2} t_{op} = \frac{v_0^2}{2g}$. La jumătate din înălțimea maximă, energia potențială gravitațională este: $E_p = mg\frac{h_{max}}{2} = \frac{mv_0^2}{4} = 20$ J.

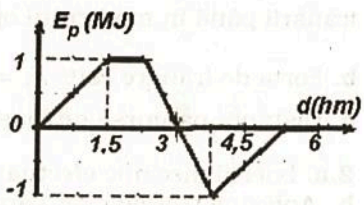
9. Din grafic $h = 2$ m și $E_p = 30$ J, iar conform definiției energiei potențiale gravitaționale: $E_p = mgh \Rightarrow m = \frac{E_p}{gh} = 1{,}5$ kg.

10.a. Când drumul este orizontal energia potențială gravitațională este constantă. Prin urmare cum E_p=*const* obținem intervalele de timp în care drumul este orizontal $\Delta t \in [0{,}2;0{,}3]$ min când E_p=1 MJ și $\Delta t \in [0{,}7;0{,}8]$ min când E_p=0 MJ.

b. Camionul începe să coboare când energia potențială a lui începe să scadă, adică după t=0,3 min. Cum $\Delta E_p = mg\Delta h$, atunci diferența de nivel dintre punctul din care a plecat camionul și punctul din care acesta începe să coboare este $\Delta h = \Delta E_p/(mg)$=10 m.

c. Calculăm distanța parcursă de camion într-un interval de timp Δt=0,1 min. Astfel $d_1 = v\Delta t$=75 m.

Reprezentarea grafică a energiei potențiale E_p a camionului, în funcție de distanța parcursă d este redată în figura alăturată.



d. Din grafic observăm că după ce camionul parcurge o distanță egală cu 375 m față de punctul de pornire, energia potențială este E_{pf}=−1MJ. Astfel variația energiei potențiale a camionului din momentul plecării până ajunge la 375 m este $\Delta E_p = E_{pf} - E_{pi}$=−1 MJ, deoarece E_{pi}=0

11. Conform definiției energia potența lă elastică este: $E_p = \frac{kx^2}{2}$.

Cum $F_{el} = kx \Rightarrow k = \frac{F}{x} \Rightarrow E_p = \frac{Fx}{2} = 0{,}5$ J.

12. Din definiția energiei potențiale elastice: $E_p = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{E_p}{x^2} = \frac{k}{2}$, deci panta dreptei este $\frac{k}{2}$, adică jumătate din valoarea constantei elastice a resortului.

13. Pe baza definiției energiei potențiale elastice $E_p = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_1 x_1^2}{k_2 x_2^2}$.

Când cele două resorturi sunt legate în serie forțele elastice cu care acționează unul asupra celuilalt sunt egale, conform principiului acțiunii și reacțiunii, astfel că $F_{el_1} = F_{el_2} \Rightarrow k_1 x_1 = k_2 x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{k_2}{k_1} \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_2}{k_1} = 2$

14. Energie potențială elastică este: $E_p = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{x_1^2}{x_2^2}$.

Deoarece resorturile sunt legate în paralel, sub acțiunea unei forțe deformatoare ele se vor deforma la fel, astfel că $x_1 = x_2 = x \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_1}{k_2} \approx 0{,}333$.

15.a. Din grafic determinăm constantele elastice pentru fiecare resort. Pentru primul resort când $x_1^2 = 8$ cm², $E_{p_1} = 16$ J $\Rightarrow k_1 = \frac{2E_{p_1}}{x_1^2} = 4 \cdot 10^4$ N/m.

Pentru al doilea resort când $x_2^2 = 4$ cm², $E_{p_2} = 32$ J $\Rightarrow k_2 = \frac{2E_{p_2}}{x_2^2} = 16 \cdot 10^4$ N/m.

b. Când se leagă în serie resorturile se alungesc cu x_1 şi respectiv x_2, astfel că alungirea totală este $x = x_1 + x_2$. La legarea în serie forţele elastice are apar în cele două resorturi sunt egale, astfel că:

$$F_{el_1} = F_{el_2} \Rightarrow k_1 x_1 = k_2 x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{k_2 x_2}{k_1} \Rightarrow x = x_2\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) \Rightarrow x_2 = \frac{k_1 x}{k_1 + k_2} = 4 \text{ cm.}$$

3.3. Teorema de variaţie a energiei cinetice

1.a. Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru maşină din momentul frânării până în momentul opririi, astfel că $\Delta E_c = L_{Ff} \Rightarrow L_{Ff} = -\frac{mv^2}{2} \Rightarrow L_{Ff} = -10^5$ J

b. Forţa de frânare este $F_f = ma = m\Delta v / \Delta t = mv / \Delta t = 500$ N

c. Distanţa parcursă de maşină până la oprire este $d = v_m \Delta t = v\Delta t/2 = 200$ m

2.a. Lucrul mecanic efectuat de pescar pe distanţa d este $L = Fd = 180$ J

b. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru sistemul format din barcă, prieten, fetiţă şi soţie din momentul pornirii până în momentul când acesta parcurge distanţa d: $\Delta E_c = L = L_{Fi} + L_{Ff}$, unde $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 250$kg

$$\frac{mv^2}{2} = (F - F_r)d \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(F - F_r)d}{m}} = 0{,}894 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru barcă din momentul încetării acţiunii forţei F până în momentul opririi, astfel că $\Delta E_c = L_{Fr} \Rightarrow$

$$-\frac{mv^2}{2} = -F_r s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{mv^2}{2F_r} = \frac{(F - F_r)d}{F_r} = 1{,}25 \text{ m}$$

3.a. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corp din momentul pornirii până în momentul t, $\Delta E_c = L \Rightarrow E_C = Fd \Rightarrow d = \frac{E_C}{F} = 2$ m

b. Cum $E_C = \frac{mv^2}{2}$ şi din $F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = m\frac{v}{\Delta t}$ prin împărţirea relaţiilor obţinem

$$\frac{E_C}{F} = \frac{v\Delta t}{2} \Rightarrow v = \frac{2E_C}{F\Delta t} = 2 \text{ m/s}$$

c. Din $E_C = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow m = \frac{2E_C}{v^2} = \frac{F^2\Delta t^2}{2E_C} = 4$ kg

d. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corp din momentul aplicării forţei suplimentare până în momentul opririi $\Delta E_c = L = L_F + L_{Fs}' \Rightarrow$

$$-\frac{mv^2}{2} = FD - F_s D \Rightarrow F_s = F + \frac{mv^2}{2D} = 20 \text{ N}$$

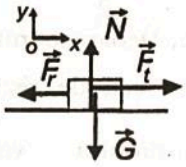
4.a Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru intervalul de timp Δt, astfel că $\Delta E_c = L_t = L_{Ft} + L_{Fr} + L_N + L_G \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = L_{Ft} - F_f d \Rightarrow$ lucrul mecanic efectuat forța de tracțiune este $L_{tr} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} + F_f d$=72 J

b. Din definiție $L_{Ft} = F_t d \Rightarrow F_t = \frac{L_{Ft}}{d}$. Deoarece puterea medie dezvoltată de forța de tracțiune este $P_m = \frac{L}{\Delta t} = \frac{F_t d}{\Delta t} = F_t v_m = \frac{(v_1 + v_2)L_{Ff}}{2d}$=14,4 W.

Din $P_m = \frac{L_{Ft}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L_{ft}}{P_m}$=5 s.

c. Din expresia forței de frecare $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow \mu = F_f/(mg)$=0,1

5.a. Deoarece inițial autoturismul se deplasa cu viteza constantă înseamnă că rezultanta forțelor care acționau asupra automobilului este nulă. Astfel vectorial $\vec{F}_t + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$, iar scalar F_t=F_r. Cum P=$F_t v$ $\Rightarrow F_t$=P/v. După ce motorul se oprește datorită forțelor de rezistență autoturismul se oprește. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L \Rightarrow L = -\frac{mv^2}{2}$=-90 kJ



b. Cum $L = F_r d \cos 180 = -F_r d = -Pd/v \Rightarrow d = -Lv/P$=90 m

c. Din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{v}{t} \Rightarrow t = -\frac{v}{a}$. Studiind mișcarea autoturismului obținem: $-F_r = ma \Rightarrow a = -F_r/m = -P/(mv) \Rightarrow t = mv^2/P$=12 s

6.a. Lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență este $L = F_r d \cos 180 = -F_r d = -fmgd$=-24 MJ

b. Puterea mecanică dezvoltată de locomotivă este P=$F_t v$. Deoarece trenul se deplasează cu viteză constantă, atunci $\vec{F}_t + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$, iar scalar F_t=F_r=$fmg \Rightarrow v$=$P/((fmg)$=20 m/s. Lucrul mecanic efectuat de locomotivă este L=$P\Delta t$=48 MJ

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru ultimul vagon. $\Delta E_c = L \Rightarrow 0 - \frac{mv^2}{2} - F_r d_1 = -fmgd_1 \Rightarrow d_1 = \frac{v^2}{2fg}$=2 km

7.a. Din formula puterii $P = Fv \Rightarrow F = \frac{P}{v}$= 5 kN.

b. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului, astfel că $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$ și prin proiecție pe axa Ox obținem: $F - fmg = ma \Rightarrow$ $a = \frac{F}{m} - fg$ =4 m/s².

c. Viteza maximă pe care o poate atinge automobilul se obține când acesta se mișcă rectiliniu și uniform, astfel că forța de tracțiune devine $F' = fmg$, astfel că din $P = F' \cdot v_{max} \Rightarrow v_{max} = \frac{P}{F'} = \frac{P}{fmg}$ =35 m/s

d. Variația energiei cinetice a automobilului, de la plecare până la atingerea vitezei maxime este:

$$\Delta E_c = \frac{mv_{max}^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = 58{,}8 \text{ kJ}$$

8. a. Puterea mecanică dezvoltată de tren în timpul mișcării sale uniforme este $P = Fv = 1{,}26$ MW

b. Energia cinetică a trenului înainte de decuplarea vagonului este:

$$E_c = \frac{Mv^2}{2} = 94{,}5 \text{ MJ}$$

c. Deoarece inițial trenul se deplasa uniform, atunci forța de tracțiune era egală cu cea de rezistență, astfel că: $F = F_r = kMg \Rightarrow k = \frac{F}{Mg}$. După desprinderea ultimului vagon trenul se va mișca accelerat, astfel că:

$$F - k(M-m)g = (M-m)a \Rightarrow a = \frac{F}{M-m} - kg = \frac{Fm}{M(M-m)} = 0{,}01 \text{ m/s}^2$$

d. Vagonul desprins va avea o mișcare uniform încetinită astfel că pe baza teoremei de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L_{Fr} \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = -kmgs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v^2}{2kg} = \frac{Mv^2}{2F} = 2{,}25 \text{ km.}$$

9.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru intervalul de timp Δt, astfel că $\Delta E_c = L_t = L_{Ft} + L_{Fr} + L_N + L_G \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = L + L_{Fr} \Rightarrow$

$$L_{Fr} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} - L = -75 \text{ kJ}$$

b. Din formula puterii medii $P = F_t v_m = \frac{F_t(v_1 + v_2)}{2}$ obținem forța de tracțiune dezvoltată de motor $F_t = \frac{2P}{v_1 + v_2}$ =6 kN. Studiem mișcarea corpului, astfel că $\vec{F}_t + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = m\vec{a}$. Scalar $F_t - F_r = ma \Rightarrow F_r = F_t - ma$.

Din $L = P\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{P}$ =5 s și cum $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$ =3 m/s² $\Rightarrow F_r$=1,2 kN

c. Distanța parcursă de camionetă în intervalul de timp Δt este $d = v_m \Delta t = (v_1 + v_2)\Delta t/2$=62,5 m

10.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru tren între punctul în care mecanicul oprește alimentarea cu energia electrică și punctul de oprire:

$\Delta E_c = L = L_{F_r} + L_{F_f}$, unde $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = -\frac{mv_0^2}{2}$, deoarece în final trenul se opreşte şi viteza finală este nulă, $L_{F_r} = -F_r d = -f_1 mgd$, deoarece forţa de rezistenţă apare pe tot parcursul mişcării pe distanţa d de la întreruperea alimentării cu energie electrică şi este o forţă cu caracter rezistiv, iar $L_{F_f} = -F_f s = -f_2 mgs$, deoarece forţa de frânare apare din momentul punerii în acţiune a sistemului de frânare şi acţionează pe distanţa s având caracter rezistiv. Înlocuind formulele în teorema de variaţie a energiei cinetice obţinem:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -f_1 mgd - f_2 mgs \Rightarrow s = \frac{v_0^2}{2f_2 g} - \frac{f_1 d}{f_2} = 288 \text{ m.}$$

b. Lucrul mecanic efectuat de forţa de frânare este $L_{Ff} = -F_f s = -f_2 mgs \Rightarrow$

$$L_{ff} = -\frac{mv_0^2}{2} + f_1 mgd = -36 \text{ MJ}$$

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru tren între punctul în care mecanicul opreşte alimentarea cu energia electrică şi punctul aflat la distanţa d_1: $\Delta E_c = L = L_{F_r} + L_{F_f}$, unde $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$. Lucrul mecanic al forţei de rezistemţă este $L_{F_r} = -F_r d_1 = -f_1 mgd_1$, iar al forţei de frânare $L_{F_f} = -F_f(s - d + d_1) = -f_2 mg(s - d + d_1)$, deoarece trenul frânează pe distanţa s-d+d_1. Astfel se obţine $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -f_1 mgd_1 - f_2 mg(s - d + d_1) \Rightarrow$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2f_1 d_1 g - 2f_2 g(s - d + d_1)} \approx 16{,}43 \text{ m/s}$$

11.a. Energia cinetică a corpului în momentul lansării este $E_{c0} = \frac{mv_0^2}{2}$ =0,04 J

b. Pe baza teoremei de variaţie a energiei cinetice $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$, cum L_G=0 şi L_N=0, atunci $L_{Ff} = E_{cf} - E_{c0} = -\frac{mv_0^2}{2} = -0{,}04$ J

c. Deoarece sub acţiunea forţei de frecare corpul are o mişcare uniform încetinită, atunci distanţa parcursă de corp până la oprire este

$$d = v_m t_{op} = \frac{v}{2} t_{op} = 10 \text{ m}$$

d. Pe baza definiţiei lucrului mecanic al forţei de frecare

$$L_{Ff} = -F_f d \Rightarrow F_f = -\frac{L_{Ff}}{d} = 4 \text{ mN}$$

12. a. Pe baza teoremei de variaţie a energiei cinetice $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$, cum L_G=0 şi L_N=0, atunci $L_{Ff} = E_{cf} - E_{c0} = -\frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{-\frac{2L}{m}}$ =20 m/s

b. Din principiul al doilea al dinamicii $-F_f = ma \Rightarrow -\mu mg = ma \Rightarrow a = -\mu g$, astfel că din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v = v_0 - \mu g t$ şi din condiţia de oprire v=0, obţinem $\mu = \frac{v_0}{g t_{op}}$ =0,2

c. Spaţiul parcurs de corp până la oprire este $s_{op} = v_m t_{op} = \frac{v_0}{2} t_{op}$ =100 m

d. După t_1=3 s din momentul lansării viteza corpului este $v_1 = v_0 - \mu g t_1$=14 m/s, astfel că energia cinetică a corpului este $E_c = \frac{m v_1^2}{2}$=196 J

13. a. Energia mecanică a copilului la ieşirea de pe tobogan este $E_m = E_c + E_p = \frac{m v^2}{2} + mgh$=342 J

b. Lucrul mecanic efectuat de copil pentru a urca până în vârful toboganului este efectuat împotriva greutăţii, astfel că $L = -L_G = mgH$ =900 J

c. Puterea medie dezvoltată de copil în timpul urcării toboganului este $P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{mgH}{\Delta t}$ =90 W

d. Conform teoremei de variaţie a energiei cinetice $\Delta E_c = L_G + L_{Ff}$ şi cum $\Delta E_c = \frac{m v^2}{2}$, $L_G = mg(H - h)$ obţinem $L_{Ff} = \frac{m v^2}{2} - mg(H - h) = -558$ J

14. a. Energia mecanică a schiorului aflat în vârful A al trambulinei este $E_{mA} = E_{pA} = mgh$ =37,6 kJ

b. Energia cinetică a schiorului în punctul B este $E_{cB} = \frac{m v^2}{2}$ =36 kJ

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele A şi B: $\Delta E_{c_{AB}} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}$. Cum $L_{N,AB} = 0$, $L_{G,AB} = mgh$ iar $\Delta E_{c_{AB}} = \frac{m v^2}{2}$ obţinem: $\frac{m v^2}{2} = mgh + L_{Ff,AB} \Rightarrow L_{Ff,AB} = m\left(\frac{v^2}{2} - gh\right) = -1{,}6$ kJ

d. Din definiţia lucrului mecanic al forţei de frecare $L_{Ff,AB} = -F_f AB = -\mu mgAB\cos\alpha$ obţinem $\mu = \frac{2gh - v^2}{2g\ell}$=0,04, deoarece $\ell = AB\cos\alpha$, α fiind unghiul planului înclinat

15.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru avion între punctele A și B: $\Delta E_c = L = L_{Fr} + L_G$. Deoarece avionul planează cu viteză constantă, atunci $\Delta E_c=0$, astfel că $L_{Fr}=-L_G=-mg(h_1-h_2)=-25$ MJ

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru avion la întoarcerea acestuia, astfel că $\Delta E_c = L = L_{Fr} + L_G + L_F$. Deoarece avionul se întoarce cu viteză constantă, atunci $\Delta E_c=0$, astfel că lucrul mecanic dezvoltat de motor este $L_F = -L_G - L_{Fr} = 2mgh$=50 MJ, deoarece greutatea este o forță rezistivă

c. Deoarece $d=v\Delta t \Rightarrow \Delta t=d/v$, astfel că puterea dezvoltată de motor este $P=L/\Delta t=Lv/d=2\cdot 10^5$ W

16.a. Lucrul mecanic efectuat de greutatea jucăriei suspendate este $L_G = MgH$ =13,5 J, deoarece greutatea este forță de tip conservativ și lucrul ei mecanic depinde doar de poziția inițială și de cea finală

b. Reprezentăm forțele care acționează asupra sistemului format din elicopter și jucărie, astfel că $\vec{F}+\vec{G}=(m+M)\vec{a}$. Doarece sistemul de corpuri va coborî, aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri din momentul pornirii și până ce este scăpată jucăria, astfel că

$$\Delta E_c = L = L_G + L \Rightarrow \frac{(m+M)v^2}{2} = (m+M)gh - Fh \Rightarrow v = \sqrt{2\left(g - \frac{F}{m+M}\right)h} \approx 6{,}32\text{m/s}$$

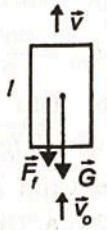
c. Din momentul în care scapă jucăria elicopterul se va mai mișca în jos pe distanța x după care se oprește. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul în care scapă jucăria și punctul unde elicopterul se oprește. Astfel:

$$\Delta E_c = L = L_G + L \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = mgx - Fx \Rightarrow x = \frac{mv^2}{2(mg-F)} = 2 \text{ m}$$

Energia potențială minimă a elicopterului este $E_{Pmin}=mg(H-h-x)$=1,5 J

17.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice:

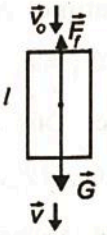
$\Delta E_c = L = L_G + L_F$, unde $L_G = -mg\ell$, deoarece când glontele se deplasează de jos în sus greutatea glontelui nu ajută la mișcarea acestuia și prin urmare greutatea este o forță rezistivă, iar $L_{F_f} = -F_f\ell$, deoarece și forța de frecare este o forță rezistivă.



$$\Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg\ell - F_f\ell \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2\ell}{m}(mg + F_f)} = 400 \text{ m/s}.$$

b. Dacă glontele este tras de sus în jos, pe baza teoremei de variație a energiei cinetice, $\Delta E_c = L \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell - F_f\ell$, deoarece în acest caz greutatea ajută la mișcarea glontelui și este o forță motoare $\Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\ell}{m}(mg - F_f)} = 400{,}1$ m/s.



c. Dacă glontele este tras pe orizontală, pe baza teoremei de variație a energiei cinetice, $\Delta E_c = L \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -F_f\ell \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2F_f\ell}{m}} \approx 400$ m/s

18.a. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru bilă din momentul acţiunii forţei F până în momentul în care acţiunea forţei încetează.

$$\Delta E_c = L = L + L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = L + mg(h - h_0) \Rightarrow h = h_0 + \frac{2L - mv^2}{2mg} = 4{,}2 \text{ m}$$

b. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru bilă din momentul în care acţiunea forţei încetează până în momentul în care bila atinge înălţimea maximă. Astfel $\Delta E_c = L_G \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = -mg(H - h) \Rightarrow H = h + \frac{v^2}{2g} = 5$ m

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru bilă din momentul în care bila atinge înălţimea maximă până în momentul în care trece prin punctul iniţial $\Delta E_c = L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mg(H - h_0) \Rightarrow v = \sqrt{2g(H - h_0)} \approx 8{,}94$ m/s

19.a. Din definiţie $\Delta E_{P2} = -L_{G2} = -m_2 g h_2 = -200$ J

b. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru un corp care cade liber de la înălţimea h, între punctul de plecare şi punctul în care corpul atinge solul. Astfel obţinem $\Delta E_c = L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \approx 1{,}41$

c. Cum $v = g\Delta t \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \approx 1{,}41$

20.a. Energia mecanică iniţială este $E_{mi} = mgH$. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corpul care cade liber de la înălţimea H, între punctul de plecare şi punctul impactului cu solul. Astfel obţinem:

$\Delta E_c = L = L_G + L_{Fr} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mgH + L_{Fr} \Rightarrow L_{Fr} = \frac{mv^2}{2} - mgH$. Energia mecanică totală pe care o are corpul imediat înaintea impactului cu solul este

$$E_{mf} = \frac{mv^2}{2} = fE_{mi} = fmgH \Rightarrow L_{Fr} = -(1 - f)mgH = -300 \text{ J}$$

b. Din relaţia precedentă obţinem viteza corpului la atingerea solului $v = \sqrt{2fgH} \approx 42{,}42$ m/s

c. Cum $L_{Fr} = -F_r H \Rightarrow F_r = -L_{Fr} / H = 3$ N

21. a. Din grafic viteza maximă atinsă de corpul A în timpul căderii este: $v_{Amax} = 4$ m/s

b. Deoarece când se atinge viteza maximă se obţine când corpul cade uniform, atunci rezultanta forţelor care acţionează asupra acestuia este nulă. Astfel

$$G_A = F_{rA} \Rightarrow m_A g = kv_{A\max} \Rightarrow k = \frac{m_A g}{v_{A\max}} = 0{,}125 \text{ Ns/m}$$

c. Din condiţia de mişcare rectilinie şi uniformă a corpului B, obţinem

$$G_B = F_{rB} \Rightarrow m_B g = kv_{B\max} \Rightarrow m_B = \frac{kv_{B\max}}{g} = m_A \frac{v_{B\max}}{v_{A\max}} = 25 \text{ g, deoarece } v_{Bmax} = 2 \text{ m/s}$$

d. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corpul A din momentul lansării până la momentul $t = 1{,}4$ s când corpul a ajuns la mişcare rectilinie şi uniformă. Astfel:

$$\Delta E_c = L_G + L_{Fr} \Rightarrow \frac{m_A v_{A\max}^2}{2} = m_A gd + L_{Fr} \Rightarrow L_{Fr} = m_A\left(\frac{v_{A\max}^2}{2} - gd\right) = -1{,}6\ \text{J}$$

22.a. Lucrul mecanic al forței de frecare este:

$$L_{Ff} = -F_f d = -\mu_m mgd = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} mgd = -80\ \text{J}$$

b. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$, cum L_G=0 și L_N=0, atunci $0 - \frac{mv^2}{2} = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} mgd \Rightarrow v = \sqrt{(\mu_1 + \mu_2)gd}$ =4 m/s

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$, cum L_G=0 și L_N=0, $L_{Ff} = -F_f' d = -\mu_m' mgd = -\frac{\mu_1 + \mu_2'}{2} mgd$, unde coeficientul de frecare la distanța d_1 se află ținând cont că scade liniar cu distanța.

Astfel cum $\mu = ax + b$, iar pentru $x = 0 \Rightarrow b = \mu_1$ și pentru $x = d \Rightarrow \mu_2 = ad + \mu_1$. obținem $a = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{d} \Rightarrow \mu = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{d} x + \mu_1$. Pentru x=d_1 se obține μ_2'=0,05.

Din $\frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} mgd_1 \Rightarrow v' = \sqrt{v^2 - (\mu_1 + \mu_2)gd_1} \approx 3{,}24$ m/s

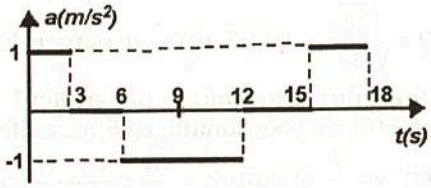
23.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L$.

Cum $\Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$, deoarece $v_0 = 0 \Rightarrow L = \frac{mv^2}{2}$. Deoarece din grafic când t=40 s viteza corpului este v=30 m/s obținem L=4500 J

b. Deoarece lucrul mecanic este: $L = F_m d$, forța medie este $F_m = L/d$, unde d reprezintă distanța parcursă de mobil în primele 40 s de la începerea mișcării. Din grafic distanța parcursă se calculează cu aria cuprinsă între curba vitezei și axa timpului până ce $t = 40\ \text{s} \Rightarrow d = 600\ \text{m} \Rightarrow F_m = 7{,}5$ N.

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L \Rightarrow L = 0$, deoarece vitezele inițială și finală sunt nule la momentele $t_1 = 0$ s și $t_2 = 90$ s

24.a. Se utilizează definiția accelerației $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ pe diferitele porțiuni.



Reprezentarea grafică a accelerației corpului pe durata întregii mișcări este redată în figura alăturată.

b. Distanța parcursă de corp este modulul ariei cuprinse între graficul vitezei și axa timpului. Obținem d_{dus}=18 m, $d_{întors}$=18 m $\Rightarrow d = d_{dus} + d_{întors}$=36 m.

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L \Rightarrow L = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow$ L=−0,45 J, deoarece la momentul t_2, v_2=0 m/s și la momentul t_1, v_1=3 m/s

25.a. Din grafic valoarea vitezei inițiale a corpului este v_0=4,8 m/s,astfel că energia cinetică inițială a corpului este $E_{c0}=\frac{mv_0^2}{2}$=11,52 J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare și cel de revenire, astfel că $\Delta E_c = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum L_N=0, L_G=0, deoarece corpul revine în acelaşi punct obținem $L_{Ff}=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-8{,}64$ J

c. Distanța parcursă de corp pe planul înclinat este una din ariile triungiurilor, conform interpretării geometrice al spațiului parcurs de un corp, astfel că d=A=7,2 m. Din definiția lucrului mecanic al forțelor de frecare $L_{Ff}=-2F_f d \Rightarrow F_f=-\frac{L_{Ff}}{2d}$=0,6 N

d. La momentul t=3 s corpul se află în repaus şi are doar energie potențială. Astfel $E_m = E_c + E_p = E_p = mgh$. Aflăm înălțimea la care urcă corpul pe planul înclinat din teorema de variație a energiei cinetice scrisă pentru punctual de plecare şi cel de oprire: $\Delta E_c = L_G + L'_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_c = -\frac{mv_0^2}{2}$, $L_G = -mgh$, $L_N = 0$ şi $L'_{F_f}=\frac{L_{Ff}}{2}$, obținem $-\frac{mv_0^2}{2}=-mgh+\frac{L_{Ff}}{2} \Rightarrow E_m=\frac{mv_0^2}{2}+\frac{L_{Ff}}{2}$=7,2 J

26.a. Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic obținem lucrul mecanic efectuat de forța F ca fiind aria trapezului L=140 J

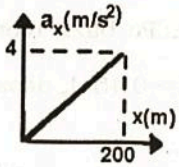
b. Forța medie este F_m=L/d=14 N

c. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_1 \Rightarrow L_1=\frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow$ $v_1=\sqrt{\frac{2L_1}{m}} \approx 6{,}32$ m/s, deoarece lucrul mecanic pe primii 4 m reprezintă aria triunghiului determinat de graficul forței, axa Ox şi ordonata construită prin punctual de coordonată x_1=4 m, astfel că L_1=40 J

d. Aflăm viteza corpului în punctul de coordonată x_2=6 m, astfel că $v_2=\sqrt{\frac{2L_2}{m}} \approx 10{,}95$ m/s, deoarece lucrul mecanic pe primii 6 m reprezintă aria trapezului determinat de graficul forței, axa Ox şi ordonata construită prin punctul de coordonată x_2=8 m, astfel că L_2=120 J.

Din $a=\frac{F}{m}$ şi cum $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t=\frac{v_2-v_1}{a}=\frac{m(v_2-v_1)}{F} \approx 0{,}463$ s

27.a. Din grafic pe primii 200 m forța F_x depinde direct proporțional de coordonata x, astfel că F_x=bx, unde b=20 N/m. Cum F_s=$ma_x \Rightarrow a_x$=$bx/m \Rightarrow a_x$=0,02x. Reprezentarea grafică a proiecției accelerației a_x pe direcția mişcării automobilului, în funcție de coordonata x, este redată în figura alăturată.



b. Viteza devine maximă în momentul în care automobilul nu mai accelerează. Astfel pe primii 200 m automobilul are o mişcare accelerată cu accelerația crescătoare, pe următorii 100 m are o mişcare

uniform accelerată, iar pe următorii 100 m are o mişcare accelerată cu accelerație descrescătoare. Astfel la 400 m, $F_x=0 \Rightarrow a_x=0$. La coordonata x_m=400m viteza automobilului devine maximă.

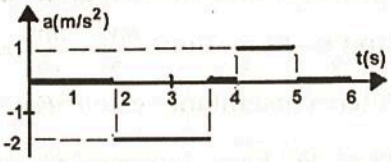
c. Lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă reprezintă aria cuprinsă între graficul forței, axa coordonatei şi ordonata construită în punctul de coordonată x=300 m, astfel că $L=8\cdot10^5$ J

d. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L \Rightarrow L = \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2L}{m}} = 40 \text{ m/s}$$

28.a. În primele 3 s viteza corpului este pozitivă, ceea ce arată că mobilul se deplasează în sensul pozitiv al axei Ox. Distanța parcursă în primele 3 s este d=5 m, astfel că dacă presupunem că mobilul porneşte din originea axei Ox, după 3 s acesta ajunge în punctul de coordonată $x_1=d$=5 m (aria trapez). În următoarele 2 s viteza corpului este negativă, ceea ce arată că mobilul se deplasează în sensul negativ al axei Ox, parcurgând distanța d_2=1,25 m (aria trapez de sub axa timpului). Astfel după 5s, coordonata finală este x_f=3,75m. Viteza medie este $v_m=\Delta x/\Delta t=x_f/\Delta t$=0,75 m/s

b. Deoarece accelerația este $a=\Delta v/\Delta t$, reprezentarea grafică a accelerației în funcție de timp în intervalul $t\in(0,6)$s în figura alăturată.



c. Lucrul mecanic al rezultantei forțelor se află pe baza teoremei de variație a energiei cinetice, astfel că $\Delta E_c = L \Rightarrow L = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$=−15 J, deoarece la momentul t_1=2s, viteza este v_1=2 m/s şi la momentul t_1=3,5 s, viteza este v_2=−1 m/s.

29.a. Inițial corpul se mişcă aceelerat, iar după ce acțiunea forței de tracțiune încetează asupra corpului se va exercita numai forța de frecare. Astfel forța de frecare este F_f=20 N. Cum pentru $x\in[100,500]$m $R_x=F_t-F_f$, obținem valoarea forței de tracțiune $F_t=R_x+F_f$=60 N.

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de coordonată x_0=100 m şi punctul de coordonată x_1=500 m: $\Delta E_c = L_{Ft} + L_{Ff}$.

Din interpretarea geometrică a lucrului mecanic $L=L_{Ft}+L_{Ff}$=16 kJ, astfel că

$$\frac{mv_1^2}{2} = L \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2L}{m}} = 80 \text{ m/s}$$

c. Puterea medie dezvoltată de motor este $P_m=F_tv_m=F_tv_1/2$=2400 W

d. Din $P_m = \frac{L}{\Delta t}$ obținem $\Delta t = \frac{L}{P_m} = \frac{F_t(x_1 - x_o)}{P_m} = 10$ s

e. Analog $\Delta E_c = L_{Ff} \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -F_f(x_2 - x_1) \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2F_f(x_2 - x_1)}{m}}$=60 m/s

30.a. Lucrul mecanic efectuat de motorul ascensorului este $L_1=F_1y_1$=60 kJ

b. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_1 + L_G \Rightarrow$

$$\frac{mv_1^2}{2} = L_1 - mgy_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2}{m}(L_1 - mgy_1)} \approx 6{,}32 \text{ m/s}$$

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_2 + L_G \Rightarrow$ $\frac{mv_2^2}{2} = L_2 - mgy_2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2}{m}(L_2 - mgy_2)}$=8m/s, deoarece lucrul mecanic efectuat de motorul ascensorului reprezintă aria de sub graficul forței, axa coordonatei și ordonata construită când y_2=22 m, astfel că L_2=126 kJ.
Puterea instantanee a motorului în punctul de coordonată y_2=22 m este $P=F_2v_2$=40 kW

31.a. Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic, lucrul mecanic total efectuat de forță este egal cu aria de sub graficul forței, axa coordonatei și ordonata construită când x=25 m. Se obține: L=112,5 J.
b. Observăm că pentru $x \in (10,25)$ m forța scade liniar cu x, astfel că $F=ax+b$. Cum pentru x_1=10 m, F_1=10 N, iar pentru x_2=25 m, F_2=−5 N obținem valorile a=−1 N/m și b=20 m. Pentru x_3=12 m obținem F_3=8 N
c. Cu ajutorul teoremei de variație a energiei cinetice, $\Delta E_c = L_1$, unde L_1=93 J reprezintă aria de sub graficul forței, axa coordonatei și ordonata construită când x_3=12 m. Cum $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = L_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2L_1}{m}}$ =10 m/s
Puterea instantanee este $P=F_3v_1$=80 W

32.a. Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic, lucrul mecanic efectuat de forță este egal cu aria de sub graficul forței și axa coordonatei Ox. Se obține: L=100 J.
b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L + L_{Ff}$ și cum $L_{Ff} = -\mu Nx = -\mu mgx$ obținem $\frac{mv^2}{2} = L - \mu mgx \Rightarrow v = \sqrt{2\left(\frac{L}{m} - \mu gx\right)}$=4 m/s
c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul în care încetează acțiunea forței F și punctul în care corpul se oprește, astfel că $\Delta E_c = L_{Ff} \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = -\mu mgs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v^2}{2\mu g}$ =4 m

33.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_{Ff} \Rightarrow L_{Ff} = -\frac{mv_0^2}{2} = -1$J
b. Considerăm cazul în care scândura a pătruns pe astfalt pe distanța x.. Din legea frecării $F_f=\mu N=\mu m_x g$, unde m_x reprezintă masa scândurii care a intrat pe asfalt. Deoarece scândura este omogenă, masa ei este uniform distribuită pe lungimea ei, astfel că masa porțiunii cu lungimea ℓ este $m_x = \frac{mx}{\ell} \Rightarrow F_f = \frac{\mu mgx}{\ell}$.
Deoarece forța de frecare depinde direct proporțional de x lucrul ei mecanic este $L_{Ff} = -F_{fm}d = -\frac{\mu mgd^2}{2\ell}$, deoarece forța de frecare medie reprezintă media aritmetică a valorilor pentru x=0 și pentru x=d, d fiind distanța pe care pătrunde scândura pe asfalt. Din cele două relații pentru lucrul mecanic al forțelor de frecare obținem: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{\mu mgd^2}{2\ell}$ (1). Obținem $d = v_0\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}$ =0,5 m

c. Dacă scândura este de două ori mai lungă pentru a pătrunde pe asfalt pe aceeaşi distanţă ca şi prima trebuie îndeplinită relaţia $\frac{m'v_{01}^2}{2} = \frac{\mu m' g d^2}{2\ell'}$ (2).

Prin împărţirea relaţiei (2) la (1) obţinem $\frac{v_{01}^2}{v_0^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow v_{01} = \frac{v_0\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ m/s

34.a. Energia cinetică a corpului în momentul iniţial este $E_c = \frac{mv_0^2}{2}$ =72 J

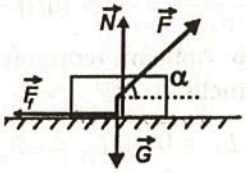
b. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare şi punctul de la capătul liber al platformei, astfel că $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff}$. Cum $\Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$, iar lucrurile mecanice sunt $L_{Ff} = -F_f\ell = -\mu mg\ell$, L_G=0, L_N=0.

Obţinem $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mg\ell \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g\ell}$ =5 m/s

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de la capătul liber al platformei şi punctul în care corpul loveşte solul, astfel că $\Delta E_c = L_G \Rightarrow$

$\frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow v' = \sqrt{v^2 + 2gh}$ =7 m/s

35.a. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice: $\Delta E_c = L = L_F + L_N + L_{F_f} + L_G$.



$\Delta E_c = \frac{mv^2}{2}$, deoarece iniţial corpul se află în repaus.

Din definiţia lucrului mecanic $L_F = Fd\cos\alpha$, $L_N = 0$ şi $L_G = 0$, deoarece aceste două forţe sunt perpendiculare pe direcţia de mişcare. Lucrul mecanic al forţei de frecare este $L_{F_f} = -F_f d = -\mu Nd$.

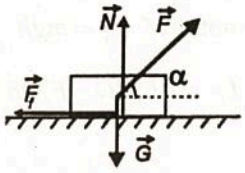
Din proiecţia relaţiei vectoriale pe verticală obţinem: $N + F\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F\sin\alpha \Rightarrow L_{F_f} = -\mu(mg - F\sin\alpha)d$

$\frac{mv^2}{2} = Fd\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)d \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2d}{m}[F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu \cdot g]} \approx 4{,}57$m/s

b. $E_c = \frac{mv^2}{2} = Fd(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg \approx 20{,}95$ J.

c. Prin definiţie puterea medie este: $P_m = \frac{L_F}{\Delta t} = \frac{Fd\cos\alpha}{\Delta t}$ şi cum $d = v_m\Delta t \Rightarrow P_m = Fv_m\cos\alpha$. Deoarece sub acţiunea forţei F, corpul va avea o mişcare uniform accelerată, viteza medie se calculează prin media artimetică a valorilor de la capetele intervalului $v_m = \frac{0+v}{2} = \frac{v}{2} \Rightarrow P_m = \frac{Fv\cos\alpha}{2} \approx 29{,}69$W.

36.a. Din $L = Fd\cos\alpha \Rightarrow d = L/(F\cos\alpha)$=2 m

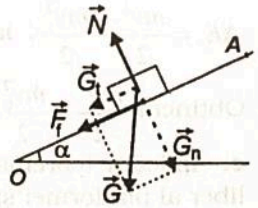


b. Lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare este $L_{F_f} = -F_f d = -\mu Nd$. Proiectând forţele pe verticală:

$N + F\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow L_{F_f} = -\mu(mg - F\sin\alpha)d = -4$ J

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L = L_F + L_N + L_{F_f} + L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = L + L_{Ff} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(L + L_{Ff})}{m}}$ =4 m/s. Viteza medie $v_m = v/2$, astfel că puterea medie dezvoltată de forța F este $P_m = Fv_m \cos\alpha = \frac{Fv\cos\alpha}{2}$ =20 W. Obținem $P_m = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{P_m}$ =1 s

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pemtru corp între marginea masei și sol, astfel că $\Delta E_c = L_G \Rightarrow \frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow E_{Cf} = \frac{mv^2}{2} + mgh \Rightarrow E_{Cf}$=36 J.



37.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea corpului pe planul înclinat: $\Delta E_{c_{OA}} = L_G + L_{F_f} + L_N$.

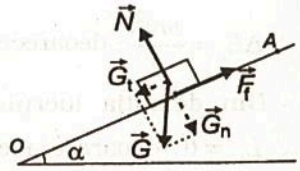
Cum $\Delta E_{c_{OA}} = E_{c_A} - E_{c_O} = -\frac{mv_0^2}{2}$, unde v_0 este viteza cu care este lansat corpul de jos din O în sus spre A.

$L_G = -mgh = -mg\ell\sin\alpha$, $L_N = 0$ și $L_{F_f} = -F_f\ell = -\mu N\ell = -\mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow$ obținem

$-\frac{mv_0^2}{2} = -mg\ell\sin\alpha - \mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \approx 14{,}14$ m/s.

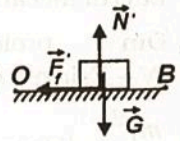
b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la coborârea corpului pe planul înclinat: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. $L_G = mgh = mg\ell\sin\alpha$,

$L_N = 0$ și $L_{F_f} = -F_f\ell = -\mu N\ell = -\mu mg\ell\cos\alpha$.



Cum $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv^2}{2}$ obținem:

$\frac{mv^2}{2} = mg\ell\sin\alpha - \mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow v = \sqrt{2g\ell(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = 10$ m/s.



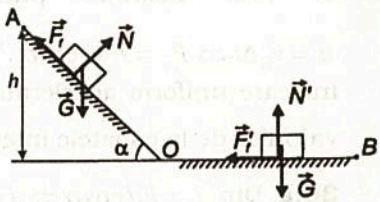
c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice în cazul mișcării corpului pe planul orizontal: $\Delta E_{c_{OB}} = L_{F'_f} + L_{N'} + L_G$,

$\Delta E_{c_{OB}} = E_{c_B} - E_{c_O} = -\frac{mv^2}{2}$; $L_{N'} = 0$; $L_G = 0$; $L_{F'_f} = -F'_f d = -\mu' N'\ell = -\mu' mgd \Rightarrow$

$-\frac{mv^2}{2} = -\mu' mgd \Rightarrow d = \frac{v^2}{2\mu' g} = \frac{\ell(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\mu'} = 50$ m.

38.a. Aplicăm între punctele A și B teorema de variație a energiei cinetice:

$\Delta E_{c_{AB}} = L = L_G + L_{F_f} + L_N$.



Deoarece corpul pornește din repaus și în final se oprește $\Delta E_{c_{AB}} = 0$. Deoarece greutatea este o forță motoare $L_G = mgh$, L_N=0 și

$L_{F_f} = -F_f AO - F'_f OB = -\mu N\frac{h}{\sin\alpha} - \mu N'\left(d - \frac{h}{tg\,\alpha}\right)$, deoarece $AO = \frac{h}{\sin\alpha}$ și cum

$$OB = d - \frac{h}{tg\,\alpha} \Rightarrow L_{F_f} = -\mu mgh\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \mu mg\left(d - \frac{h}{tg\,\alpha}\right) = -\mu mgd\,.$$

Obținem: $0 = mgh - \mu mgd \Rightarrow \mu = \frac{h}{d} = 0{,}2.$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și O: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_{c_{AO}} = E_{co} = \frac{mv^2}{2}$; $L_G = mgh$, L_N=0, $L_{F_f} = -\mu mghctg\alpha$

obținem $\frac{mv^2}{2} = mgh - mghctg\alpha \Rightarrow v = \sqrt{2gh(1-\mu ctg\alpha)} \approx 6{,}32$ m/s

c. Puterea medie a forței de frecare la coborârea saniei pe pârtie este $P_m = F_f v_m \cos 180 = -\frac{\mu mgv\cos\alpha}{2} \approx -24{,}54$ W, deoarece $v_m = \frac{v}{2}$ și din $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ obținem $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \approx 0{,}97$

39.a. Studiem urcarea cărămizii pe scândură. Astfel $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}_u$, iar pe direcția de mișcare $-mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_u \Rightarrow a_u = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ (1)

Studiem coborârea cărămizii pe scândură. Astfel $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}_c$, iar scalar pe direcția de mișcare $mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_c \Rightarrow a_c = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ (2).

Deoarece $|a_u| = 2a_c \Rightarrow g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \Rightarrow \mu = tg\alpha/3 \approx 0{,}33$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea cărămizii pe scândură: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2}$, $L_N = 0$

$L_G = -mgh = -mgs_{op}\sin\alpha$ și $L_{F_f} = -F_f s_{op} = -\mu N s_{op} = -\mu mgs_{op}\cos\alpha$.

Obținem: $-\frac{mv_o^2}{2} = -mgs_{op}\sin\alpha - \mu mgs_{op}\cos\alpha \Rightarrow s_{op} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \approx 0{,}85$ m

c. Randamentul scândurii înclinate este $\eta = \frac{1}{1+\mu ctg\alpha}$ =75%

40.a. Din definiția lucrului mecanic al forței de frecare obținem $L_{Ff,AB} = -F_f AB = -\mu NAB = -\mu mg\cos\alpha\frac{h_1}{\sin\alpha} = -\mu mgh_1 ctg\alpha = -2$ J

b. Aplicăm între punctele A și B teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_{c_{AB}} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}$. Cum $L_{N,AB} = 0$, $L_{G,AB} = mgh_1$ iar $\Delta E_{c_{AB}} = \frac{mv_B^2}{2}$

obținem: $\frac{mv_B^2}{2} = mgh_1 - \mu mgh_1 ctg\alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh_1(1-\mu ctg\alpha)}$ =6 m/s

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și baza planului: $\Delta E_c = L_G + L_{F_f} + L_N$.

Cum $\Delta E_c = \frac{mv^2}{2}$ $L_N = 0$, $L_G = mgh_2$, $L_{Ff} = -\mu mgh_2 ctg\alpha$ obținem:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh_2 - \mu mgh_2 ctg\alpha \Rightarrow h_2 = \frac{v^2}{2g(1-\mu ctg\alpha)} = 3{,}125 \text{ m}$$

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare *A* și punctul *C* de pe planul orizontal unde se oprește corpul: $\Delta E_{c_{AC}} = L_G + L_{F_f} + L_N$.

Cum $\Delta E_{c,AC} = 0$, $L_N = 0$, $L_{G,AC} = L_{G1} + L_{G2} = mgh_2$ și

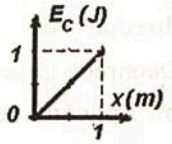
$L_{Ffotal} = L_{Ff} + L'_{Ff} = -\mu mgh_2 ctg\alpha - \mu_1 mgd$ obținem:

$0 = mgh_2 - \mu mgh_2 ctg\alpha - \mu_1 mgd \Rightarrow d = \frac{h_2(1-\mu ctg\alpha)}{\mu_1} = 11{,}25$ m, astfel că distanța totală parcursă de corp este $D = d + \frac{h_2}{\sin\alpha} \approx 15{,}65$ m

41.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare și un punct aflat pe plan la coordonata *x*, astfel că $\Delta E_c = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_c = E_c$, $L_N = 0$, $L_G = mgh = mgx\sin\alpha$ și $L_{F_f} = -F_f x = -\mu Nx = -\mu mgx\cos\alpha$ obținem $E_c = mgx\sin\alpha - \mu mgx\cos\alpha = mgx(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

b. Pe baza tabelului de valori reprezentăm grafic dependența energiei cinetice E_c de coordonata *x* la care se găsește corpul.

x(m)	0	0,25	0,5	0,75	1
E_c(J)	0	0,25	0,5	0,75	1



c. Alegem o valoare a lui *x*=1 m și valoarea corespunzătoare a energiei cinetice E_c=1 J. Astfel $\mu = tg\alpha - \frac{E_C}{mgx\cos\alpha} \approx 0{,}346$

42.a. Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului de la lansarea corpului până la revenirea acestuia în locul de lansare este 0, deoarece greutatea este o forță conservativă astfel că lucrul ei mecanic pe o traiectorie închisă este nul.

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea corpului pe planul înclinat: $\Delta E_{c_{OA}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2}$, $L_N = 0$; $L_G = -mgh$, unde *h* reprezintă înălțimea la care urcă corpul pe planul înclinat, $L_{F_f} = -F_f s_{op} = -\mu N s_{op} = -\mu mgs_{op}\cos\alpha = -\mu mghctg\alpha$ cu $\sin\alpha = h/s_{op}$.

$$-\frac{mv_o^2}{2} = -mgh - \mu mghctg\alpha \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g(1+\mu ctg\alpha)} \Rightarrow E_p = \frac{mv_0^2}{2(1+\mu ctg\alpha)} = \frac{E_{co}}{1+\mu ctg\alpha} \Rightarrow$$

E_p=312,5 J, deoarece $ctg\alpha$=4

c. $L_{F_f} = -\mu mghctg\alpha = -\frac{\mu E_{co}}{\mu + tg\alpha} = -187{,}5$ J

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare *O* și punctul de coborâre *O*. $\Delta E_{c_{OA}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_{c_{OO}} = E'_{co} - E_{co}$; $L_N = 0$;

$L_G = 0$ și $L_{F_f} = -2\mu mghctg\alpha = -\frac{2\mu E_{co}}{\mu + tg\alpha}$, astfel că: $E'_{co} = E_{co}\frac{tg\alpha - \mu}{tg\alpha + \mu} = 125$ J.

43.a. Conform definiției energia mecanică a schiorului în vârful A al pantei este $E_{mA} = E_{pA} = mgh_{AB} = mg\ell\sin\alpha$ =42 kJ

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul de oprire C, aftel că $\Delta E_{c,AC} = L_{G,AC} + L_{N,AC} + L_{Ff,AC}$.

Cum $\Delta E_{c,AC} = 0$, $L_{N,AC} = 0$, $L_{G,AC} = mg\ell\sin\alpha$ și

$L_{Ff,AC} = L_{Ff,AB} + L_{Ff,BC} = -\mu mg\ell\cos\alpha - \mu mgd = -\mu mg(\ell\cos\alpha + d)$ obținem:

$0 = mg\ell\sin\alpha - \mu mg(\ell\cos\alpha + d) \Rightarrow \mu = \dfrac{\ell\sin\alpha}{\ell\cos\alpha + d}$ =0,375, cu cosα=0,8

c. Din $\Delta E_{c,AB} = L_{G,AB} + L_{N,AB} + L_{Ff,AB}$, cum $\Delta E_{c,AB} = \dfrac{mv_B^2}{2}$, $L_{G,AB} = mg\ell\sin\alpha$ și

$L_{Ff,AB} = -\mu mg\ell\cos\alpha$ obținem $v_B = \sqrt{2g\ell(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} \approx 24{,}5$ m/s

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul C și punctul A, astfel că: $\Delta E_{c,CA} = L_{F,CA} + L_{G,CA} + L_{Ff,CA} + L_{N,CA}$.

Cum $\Delta E_{c,CA} = 0$, $L_{G,CA} = -mg\ell\sin\alpha$, $L_{N,CA} = 0$ și

$L_{Ff,CA} = L_{Ff,CB} + L_{Ff,BC} = -\mu mgd - \mu mg\ell\cos\alpha = -\mu mg(\ell\cos\alpha + d) = -mg\ell\sin\alpha$

obținem: $0 = L_{F,CA} - 2mg\ell\sin\alpha$. Puterea dezvoltată de motorul teleschiului este

$P = \dfrac{L_F}{\Delta t} = \dfrac{2mg\ell\sin\alpha}{\Delta t}$ =350 W

44.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare O și punctul A, astfel că $\Delta E_{c_{OA}} = L_G \Rightarrow E_{cA} = mg(H-h)$=160 J.

b. După ciocnirea cu planul energia cinetică a corpului este $E'_{cA} = E_{cA}(1-f)$, astfel energia mecanică totală a corpului imediat după ciocnirea cu planul este $E'_{mA} = E'_{cA} + E_{pA} = mg(H-h)(1-f) + mgh$=80 J.

c. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul B, astfel că $\Delta E_{cAB} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_c'$, L_N=0, $L_G = mgh$ și $L_{Ff} = -F_f\ell$ obținem $E_{cB} = mg(H-h)(1-f) + mgh - F_f\ell$ =64 J $\Rightarrow$ $v = \sqrt{2E_{cB}/m}$ =8 m/s.

d. Din $F_f = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow \mu = \dfrac{F_f}{mg\cos\alpha} \approx 0{,}23$, deoarece $\sin\alpha = \dfrac{h}{\ell}$ =0,5 $\Rightarrow \alpha$ =30°

45.a. $L_{fAB} = F_f d\cos 180 = -\mu_1 Nd = -\mu_1 mgd$ =−125 J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum L_G=0; L_N=0; $L_{fAB} = -\mu_1 mgd$ și $\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_{cA}$ obținem $E_{cB} = \dfrac{mv_0^2}{2} - \mu_1 mgd$ =125 J

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele B și C $\Delta E_{cBC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Dar $\Delta E_{cBC} = E_{cC} - E_{cB} = -E_{cB}$; $L_G = -mgh$; L_N=0 și $L_{Ff} = -F_f BC = -\mu_2 mgBC\cos\alpha = -\mu_2 mghctg\alpha$ obținem: $E_{cB} = mgh + \mu_2 mghctg\alpha$

$$\Rightarrow h = \frac{E_{cB}}{mg(1+\mu_2 ctg\alpha)} = 1{,}25 \text{ m}$$

d. Randamentul planului înclinat este $\eta = \frac{1}{1+\mu_2 ctg\alpha} = 50\%$.

46.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și C $\Delta E_{cAC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Dar $\Delta E_{cAC} = E_{cC} - E_{cA} = 0$; $L_G = mgh$ și L_N=0. Astfel $L_{Ff} = -mgh = -mg\ell \sin\alpha = -360$ J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele B și C $\Delta E_{cBC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $L_G = mgh$; L_N=0; $L_{Ff} = -F_f \ell = -\mu mg\ell \cos\alpha$ și

$$\Delta E_{cBC} = E_{cC} - E_{cB} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_0^2}{8} = \frac{3mv_0^2}{8} \Rightarrow \frac{3mv_0^2}{8} = mg\ell \sin\alpha - \mu mg\ell \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\mu = tg\alpha - \frac{3v_0^2}{8g\ell \cos\alpha} = 0{,}125, \text{ deoarece } \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = 0{,}8$$

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice între punctele A și B $\Delta E_{cAB} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Dar $\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_{cA} = \frac{mv_0^2}{8} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{3mv_0^2}{8}$; L_G=0; L_N=0 și $L_{Ff} = -F_f \ell = -\mu mgAB$. Astfel $\frac{3mv_0^2}{8} = \mu mgAB \Rightarrow AB = \frac{3v_0^2}{8\mu g} = 120$ m

d. Considerăm că E_{pC}=0, astfel că variația energiei mecanice totale a corpului între punctele B și C este $\Delta E_{mBC} = E_{mC} - E_{mB}$, unde $E_{mC} = E_{cC} = \frac{mv_0^2}{2}$ și

$$E_{mB} = E_{cC} + E_{pC} = \frac{mv_0^2}{8} + mgh \Rightarrow \Delta E_{mBC} = E_{mC} - E_{mB} = \frac{3mv_0^2}{8} - mg\ell \sin\alpha = -60 \text{ J}.$$

Calculăm lucrul mecanic al forței de frecare pe porțiunea BC, $L_{FfBC} = -\mu mg\ell \cos\alpha = -60$ J. Observăm că $\Delta E_{mBC} = -L_{FfBC}$.

47.a. Lucrul mecanic al forțelor de frecare la deplasarea corpului din C în A este $L_{Ff} = F_f(CB + BA)\cos 180 = -2\mu mgCB\cos\alpha = -2\mu mghctg\alpha = -48$ J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele C și A $\Delta E_{cCA} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece L_N=0 și L_G=0, pentru că acest corp urcă până la aceeași înălțime și din $\Delta E_{cCA} = E_{cA} - E_{cC} = -E_{cC} = -\frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow \frac{mv_C^2}{2} = 2\mu mghctg\alpha$

$$\Rightarrow v_C = 2\sqrt{\mu ghctg\alpha} \approx 6{,}92 \text{ m/s}$$

c. Variația energiei mecanice a corpului între punctele A și D este

$$\Delta E_{mAD} = E_{mD} - E_{mA} = E_{cD} + E_{pD} - E_{pA} = \frac{mv_D^2}{2} + \frac{mgh}{4} - mgh, \text{ deoarece } E_{pB}=0$$

Aflăm viteza corpului în punctul D pe seama teoremei de variație a energiei cinetice între punctele A și D, astfel că: $\Delta E_{cAD} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Din

$L_G = mg(h_A - h_D) = \frac{3mgh}{4}$; L_N=0; $L_{Ff} = -F_f AD = -\mu mgAD\cos\alpha = -\frac{3\mu mghctg\alpha}{4}$ și

$\Delta E_{cAD} = E_{cD} = \frac{mv_D^2}{2}$ obținem $\frac{mv_D^2}{2} = \frac{3mgh}{4}(1-\mu ctg\alpha) \Rightarrow \Delta E_{mAD} = -\frac{3\mu mghctg\alpha}{4} = -18J$

48.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul B de pe primul derdeluș $\Delta E_{cAB} = L_G + L_N \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh_1 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh_1}$

$\Rightarrow v_B = 12$ m/s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul B și punctul C de pe suprafață orizontală, astfel că $\Delta E_{cBC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $L_N=0$ și $L_G=0$,

obținem $\frac{mv_c^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = -\mu mg\ell \Rightarrow v_C = \sqrt{v_B^2 - 2\mu g\ell} = 11$ m/s

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele C și D de pe al doilea derdeluș $\Delta E_{cCD} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $L_G = -mgh_2$, $L_N=0$,

$L_{Ff} = -F_f CD = -\mu' mgCD\cos\alpha = -\mu' mgh_2 ctg\alpha$ și $\Delta E_{cCD} = -E_{cC} = -\frac{mv_C^2}{2}$, astfel că

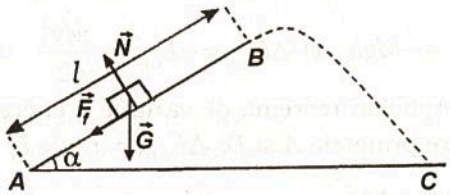
$\frac{mv_C^2}{2} = mgh_2 + \mu' mgh_2 ctg\alpha \Rightarrow \mu' = \left(\frac{v_C^2}{2gh_2} - 1\right) tg\alpha = 0{,}21$

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul B și același punct când corpul se întoarce. Astfel $\Delta E_{cBB} = L_G + L_{F_f} + L_N$, unde $L_G=0$, $L_N=0$ și

$L_{Ff} = -2\mu mg\ell - 2\mu' mgh_2 ctg\alpha$, iar $\Delta E_{cBB} = \frac{mv'^2_B}{2} - \frac{mv_B^2}{2}$. Obținem:

$\frac{mv'^2_B}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = -2\mu mg\ell - 2\mu' mgh_2 ctg\alpha \Rightarrow v'_B = \sqrt{v_B^2 - 4g(\mu\ell + \mu' h_2 ctg\alpha)} \approx 7{,}48$ m/s

49.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea corpului pe planul înclinat $\Delta E_{c_{AB}} = L_{F_f} + L_G + L_N$.



$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$,

$L_G = -mgh = -mg\ell\sin\alpha$; $L_N = 0$ și

$L_{F_f} = -F_f\ell = -\mu N\ell = -\mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow$

$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg\ell\sin\alpha - \mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2g\ell(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = 8$ m/s.

b. $L_{F_f} = -\mu mg\ell\cos\alpha = -6$ J.

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul B unde corpul părăsește planul și punctul C unde corpul lovește solul:

$\Delta E_{c_{BC}} = L_G \Rightarrow \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mgh = mg\ell\sin\alpha$, deoarece numai greutatea efectuează lucru mecanic. Obținem: $v_C = \sqrt{v^2 + 2g\ell\sin\alpha} \approx 9{,}7$ m/s

d. Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului între punctele A și C este $L_{G,AC} = -mgh_{max} + mgh_{max} = 0$.

50.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la coborârea corpului pe planul înclinat $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_N \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh} \approx 4{,}47$ m/s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele *B* și *C* de pe porțiunea orizontală: $\Delta E_{c_{BC}} = L_{F_f} + L_G + L_N$. Cum $\Delta E_{c_{BC}} = E_{c_C} - E_{c_B} = \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2}$, L_G=0, L_N=0 și $L_{Ff} = -F_f d = -\mu mgd$ obținem $\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = -\mu mgd \Rightarrow$

$v_C = \sqrt{v_B^2 - 2\mu gd} = \sqrt{2g(h - \mu d)} \approx 2{,}82$ m/s

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele *C* și *D*: $\Delta E_{c_{CD}} = L_G + L_N \Rightarrow -\frac{mv_C^2}{2} = -mgh_{CD} \Rightarrow h_{CD} = \frac{v_C^2}{2g} = h - \mu d = 0{,}4$ m

d. Corpul se oprește pe porțiunea orizontală în punctul *F*. Aflăm distanța parcursă de corp pe planul orizontal, astfel că aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare *A* și punctul *F*: $\Delta E_{c_{AF}} = L_{F_f} + L_G + L_N$.

Cum $\Delta E_{c_{AF}} = 0$, L_N=0, L_G=mgh și $L_{Ff} = -F_f d_t = -\mu mgd_t$ obținem: $0 = mgh - \mu mgd_t \Rightarrow d_t = h/\mu \approx 3{,}33$ m. Astfel porțiunea *BC* este parcursă integral o singură dată iar corpul se oprește în *F*, $CF \approx 1{,}33$ m $\Rightarrow BF \approx 0{,}67$ m

51.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea schiorului pe pantă $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_N \Rightarrow -\frac{Mv_A^2}{2} = -MgH \Rightarrow v_A = \sqrt{2gH}$ =8 m/s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea schiorului pe pantă între punctele *A* și *C*: $\Delta E_{c_{AC}} = L_{F_f} + L_G + L_N$. Din $L_{Ff} = fL_G = -fMgh_C$, L_N=0, $L_G = -Mgh_C$ și $\Delta E_{c_{AC}} = -E_{cA} = -\frac{Mv_A^2}{2}$, obținem $h_c = \frac{v_A^2}{2g(1+f)} \approx 2{,}91$ m

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea schiorului pe pantă între punctele *A* și *D*: $\Delta E_{cAD} = L_{F_f} + L_G + L_N \Rightarrow$

$$\frac{Mv_D^2}{2} - \frac{Mv_A^2}{2} = L_{Ff} - Mgh_D \Rightarrow L_{Ff} = M\left(gh_D + \frac{v_D^2 - v_A^2}{2}\right) = -360 \text{ J}$$

52. a. Din definiție $L_{G,AD} = mg(h - h_1)$=400 J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul D: $\Delta E_{c,AD} = L_{G,AD} + L_{F_f,AD} + L_{N,AD}$. Cum $\Delta E_{c,AD} = E_{c,D} - E_{c,A} = 0$, $L_{N,AD} = 0$ obținem: $0 = mg(h - h_1) + L_{Ff,AD} \Rightarrow L_{Ff,AD} = -mg(h - h_1) = -400$ J

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și C, astfel că:

$\Delta E_{c,AC} = L_{G,AC} + L_{F_f,AC} + L_{N,AC}$. Cum $\Delta E_{c,AC} = E_{c,C} - E_{c,A} = -\frac{mv_A^2}{2}$, $L_{N,AC} = 0$,

$L_{G,AC} = mg(h_C - h_A) = 0$ și $L_{F_f,AC} = L_{Ff,AB} + L_{Ff,BC} = 2L_{Ff,AB}$ obținem: $-\frac{mv_A^2}{2} = 2L_{Ff,AB}$.

Aflăm lucrul mecanic al forței de frecare pe porțiunea AB din teorema de variație a energiei cinetice pe porțiunea AB, astfel că:

$$\Delta E_{c,AB} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB} \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh + L_{Ff,AB} \Rightarrow L_{Ff,AB} = \frac{mv_B^2}{2} - mgh \approx -320\text{J},$$

astfel că $v_A = 2\sqrt{-\frac{L_{Ff,AB}}{m}}$ =4 m/s

d. Din definiție $P_m = \frac{L_{G,AB}}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t}$ =3,2 kW

53.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctul de plecare A și punctul D: $\Delta E_{cAD} = L_G + L_N$. Deoarece L_N=0, $L_G = mg(h_A - h_D)$ și $\Delta E_{cAD} = E_{cD} - E_{cA} = -\frac{mv_A^2}{2}$ obținem $v_A = \sqrt{2g(h_D - h_A)}$. Cum arcul AB este egal cu 1/3 dintr-un cerc, atunci unghiul AOB=120°, astfel că $h_A = R(1-\cos 60) = R/2$ =2 m. Obținem $\upsilon_A \approx 4{,}47$ m/s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele A și B: $\Delta E_{cAB} = L_G + L_N + L_{Ff}$. Deoarece L_G=0, L_N=0 și $\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_{cA} = -\frac{(M+m)v_A^2}{2}$ obținem $-\frac{(M+m)v_A^2}{2} = L_{Ff} \Rightarrow v_A = \sqrt{-\frac{2L_{Ff}}{M+m}}$ =8m/s

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele A și C: $\Delta E_{cAC} = L_G + L_N + L_{Ff}$. Cum $L_G = (M+m)g(h-h')$, L_N=0 și

$$\Delta E_{cAC} = E_{cC} - E_{cA} = -\frac{(M+m)v_0^2}{2} \Rightarrow -\frac{(M+m)v_0^2}{2} = (M+m)g(h-h') + L_{Ff} \Rightarrow$$

$$L_{Ff} = (M+m)\left[-\frac{v_0^2}{2} + g(h'-h)\right] = -2025 \text{ J}$$

54.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele M și C: $\Delta E_{c_{MC}} = L_{F_f} + L_G + L_N$. Din $L_G = mgh_1$, L_N=0, $L_{Ff} = -\mu mgd$ și $\Delta E_{c_{MC}} = E_{cC} = \frac{mv_C^2}{2}$ obținem $\frac{mv_C^2}{2} = mgh_1 - \mu mgd \Rightarrow v_C = \sqrt{2g(h_1 - \mu d)}$ =5 m/s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele C și N: $\Delta E_{c_{CN}} = L_G + L_N \Rightarrow -\frac{mv_C^2}{2} = -mgh_2 \Rightarrow h_2 = \frac{v_C^2}{2g} = h_1 - \mu d$ =1,25 m

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctul de plecare M și punctul de oprire F: $\Delta E_{c_{MF}} = L_{F_f} + L_G + L_N$. Cum L_N=0, $L_G = mgh_1$ și $\Delta E_{c_{MF}} = 0$ obținem $0 = mgh_1 + L_{Ff} \Rightarrow L_{Ff} = -mgh_1 = -1715$ J

d. Din $L_{Ff} = -\mu mgD$ calculăm distanța totală parcursă de sportiv pe porțiunea orizontală, astfel că $D = -\frac{L_{Ff}}{\mu mg} = \frac{h_1}{\mu}$ =24,5 m. Astfel corpul parcurge porțiunea BC de $N = \left[\frac{D}{d}\right]$ =2 ori, astfel că sportivul se oprește definitiv la 0,5 m de punctul B.

55. a. Energia mecanică a corpului în momentul în care este lăsat liber este $E_{mi} = E_{Ci} + E_{pi} = E_{pi} = m_2 g\ell$=0,64 J

b. Aplicăm teorema de variație a de variație a energiei cinetice între punctul de plecare şi punctul A, astfel că $\Delta E_c = L_G \Rightarrow \frac{mv_A^2}{2} = mg\ell \Rightarrow v_A = \sqrt{2g\ell}$ =4 m/s

c. Aplicăm teorema de variație a de variație a energiei cinetice între punctele *A* şi *C*, astfel că $\Delta E_{c,AC} = L_{G,AC} + L_{F_f,AC} + L_{N,AC}$.

$\Delta E_{c,AC} = E_{c,C} - E_{c,A} = \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$, $L_{N,AC} = 0$, $L_{G,AC} = 0$ şi $L_{Ff,AC} = -\mu_1 mgd_1$,

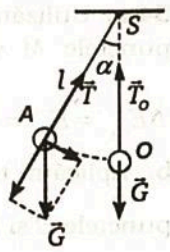
obținem $\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = -\mu_1 mgd_1 \Rightarrow v_C = \sqrt{v_A^2 - 2\mu_1 gd_1} \Rightarrow v_C \approx 3{,}16$ m/s

d. Aplicăm teorema de variație a de variație a energiei cinetice între punctele *C* şi *E*, astfel că $\Delta E_{c,CE} = L_{G,CE} + L_{F_f,CE} + L_{N,CE}$, iar $\Delta E_{c,CE} = E_{c,E} - E_{c,C} = 0 - \frac{mv_C^2}{2}$, $L_{N,CE} = 0$, $L_{G,CE} = 0$ şi $L_{Ff,CE} = -\mu_m mgCE$. Deoarece coeficientul de frecare creşte liniar atunci coeficientul de frecare mediu este $\mu_m = \frac{\mu + \mu'}{2}$, unde μ' este coeficientul de frecare după parcugerea distanței *CE*.

Cum $\mu = ax$, iar când $x = d_2 \Rightarrow \mu_2 = ad_2$ obținem constanta $a = \frac{\mu_2}{d_2}$, astfel că

$\mu' = \frac{\mu_2 CE}{d_2} \Rightarrow \mu_m = \frac{\mu_2 CE}{2d_2}$. Obținem $-\frac{mv_C^2}{2} = -\frac{\mu_2 mgCE^2}{2d_2} \Rightarrow CE = v_C\sqrt{\frac{d_2}{\mu_2 g}}$ =2,5 m.

56.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare *A* şi poziția verticală *O*: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_T$. Dar:



$\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2}$, $L_G = mgh = mg\ell(1-\cos\alpha)$ şi $L_T = 0$, deoarece tensiunea este în permanență perpendiculară pe traiectorie. Obținem: $\frac{mv_0^2}{2} = mg\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} \Rightarrow$

v_0=2 m/s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul *A* şi punctul *B* în care firul formează un unghi β=30° cu verticala, astfel că $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_T$.

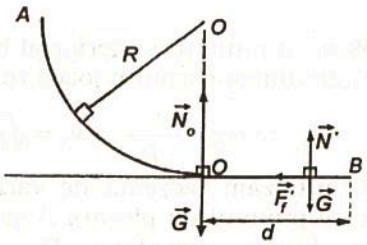
Cum $L_G = mg(h_A - h_B) = mg[\ell(1-\cos\alpha) - \ell(1-\cos\beta)] = mg\ell(\cos\beta - \cos\alpha)$, L_T=0 şi $E_{cAB} = E_{cB}$ obținem $E_{cB} = mg\ell(\cos\beta - \cos\alpha)$=0,292 J

c.* Deoarece corpul are o traiectorie circulară, impunem condiția ca în punctul inferior al traiectoriei, rezultanta forțelor să joace un rol de forță centripetă:

$\vec{T}_0 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar scalar $T_0 - mg = \frac{mv_0^2}{\ell} \Rightarrow T_0 = m\left(g + \frac{v_0^2}{\ell}\right) \Rightarrow T_0 = mg(3 - 2\cos\alpha) \Rightarrow$

T_0=4 N $\Rightarrow$ Dacă tensiunea este cel mult egală cu 4 N, firul nu se rupe când corpul trece prin poziția verticală.

57.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pe porțiunea de jgheab:



$\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_N + L_{F_f}$.

$\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2}$; $L_G = mgR$, iar $L_N = 0$.

$\frac{mv_0^2}{2} = mgR + L_{F_f} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2}{m}\left(mgR + L_{F_f}\right)} = 2\text{m/s}$

b.* Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului în poziția verticală O și impunem condiția ca rezultanta lor să joace rol de forță centripetă, deoarece corpul execută o traiectorie circulară. Vectorial: $\vec{N}_0 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$.

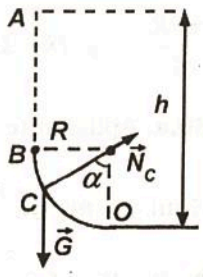
Scalar: $N_0 - mg = \frac{mv_0^2}{R} \Rightarrow N_0 = m\left(g + \frac{v_0^2}{R}\right) \approx 2{,}33$ N.

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la mișcarea pe planul orizontal: $\Delta E_{c_{OB}} = L_{N'} + L_G + L_{F_f'}$. Deoarece $L_{F_f'} = -F_f' d = -\mu N' d = -\mu mgd$, $L_{N'} = 0$; $L_G = 0$

și $\Delta E_{c_{OB}} = E_{c_B} - E_{c_O} = -\frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow -\frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgd \Rightarrow d = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 2$ m.

58.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul în care corpul ajunge pe jgheab B: $\Delta E_{c_{AB}} = L_G \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mg(h-R) \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(h-R)}$

$\Rightarrow v_B \approx 4{,}47$m/s.



b.* Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și impunem condiția ca pe direcția formată de corp și centrul jgheabului, rezultanta forțelor pe această direcție să joace rol de forță centripetă. Scalar se obține:

$N_C - mg\cos\alpha = \frac{mv_C^2}{R} \Rightarrow N_C = m\left(\frac{v_C^2}{R} + g\cos\alpha\right)$.

Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și C:

$\Delta E_{c_{AC}} = L_G + L_N$. Cum $\Delta E_{c_{AC}} = E_{c_C} - E_{c_A} = \frac{mv_C^2}{2}$; $L_G = mg(h - R + R\cos\alpha)$; $L_N = 0$

obținem: $\frac{mv_C^2}{2} = mg(h - R + R\cos\alpha) \Rightarrow v_C^2 = 2g(h - R + R\cos\alpha) \Rightarrow$

$N_C = mg\left(\frac{2h}{R} + 3\cos\alpha - 2\right) = 25$ N.

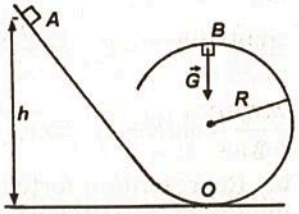
Valoarea maximă a forței de apăsare pe jgheab se obține când corpul se află în poziția O, astfel că α=0. Obținem $N_O = mg\left(\frac{2h}{R} - 1\right) = 55$ N

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul O, unde corpul se oprește, deoarece pe jgheab mișcarea se face cu frecare: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_N + L_{F_f}$. Dar $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = 0$; $L_G = mgh$ și $L_N = 0$

obținem: $0 = mgh + L_{F_f} \Rightarrow L_{F_f} = -mgh = -15$ J, deoarece forța de frecare este o forță cu caracter rezistiv.

59.a. În punctul superior al buclei, corpul nu mai apasă asupra acesteia, astfel că greutatea corpului joacă rol de forță centripetă. Astfel obținem:

$$G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow v_B = \sqrt{gR} \approx 2{,}236 \text{ m/s}$$



b.* Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul cel mai de sus al buclei circulare B: $\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G$. Cum

$$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv_B^2}{2};\ L_N = 0 \text{ și } L_G = mg(h-2R)$$

obținem: $\frac{mgR}{2} = mg(h-2R) \Rightarrow h = \frac{5R}{2} = 1{,}25$ m.

c. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare și punctul superior al buclei circulare: $\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f}$.

$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mgR}{2}$, deoarece în punctul superior al buclei circulare corpul nu apasă asupra jgheabului și $v_B^2 = gR$.

Cum $L_N = 0$ și $L_G = mg(H-2R)$ obținem:

$$\frac{mgR}{2} = mg(H-2R) + L_{F_f} \Rightarrow L_{F_f} = mg\left(\frac{5R}{2} - H\right) = -2{,}5 \text{ J}.$$

60.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Pt$

Cum $v = nv_0 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2}(n^2-1) = Pt \Rightarrow t = \frac{mv_0^2(n^2-1)}{2P} = 150$ s.

b. $P = Fv = Fnv_0 \Rightarrow F = \frac{P}{nv_0} = 100$ N.

c. Cum $P = Fv \Rightarrow F = \frac{P}{v}$, adică forța depinde invers proporțional de viteză, astfel că pentru $v_0 = 10$ m/s $\Rightarrow F_0 = 400$ N.

Reprezentarea grafică a forței în funcție de viteză este fig 1

Din teorema de variație a energiei cinetice: $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Pt \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2Pt}{m}}$.

Cum $t = 0 \Rightarrow v = v_0 = 10$ m/s, atunci reprezentarea grafică a vitezei în funcție de timp este fig 2.

Fig. 1

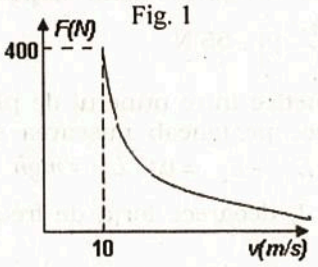
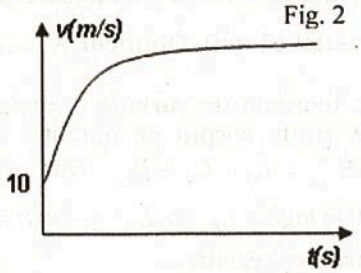


Fig. 2



61.a. Aplicăm pentru sistemul de corpuri teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L = L_{G_1} + L_{G_2} + L_{T_1} + L_{T_2}$. Lucrurile mecanice ale celor două tensiuni se compensează întrucât tensiunea care acționează asupra corpului m_1 este motoare, deoarece corpul 1 se ridică, iar tensiunea care acționează asupra corpului m_2 este rezistivă, deoarece corpul 2 coboară.

Astfel: $L_{T_1} + L_{T_2} = -Th + Th = 0 \Rightarrow \Delta E_c = L_{G_1} + L_{G_2} \Rightarrow E_c = L_{G_1} + L_{G_2}$.

Deoarece $L_{G_1} = -m_1 gh_1$ și $L_{G_2} = m_2 gh_1$ obținem: $E_c = (m_2 - m_1)gh_1$=0,8 J

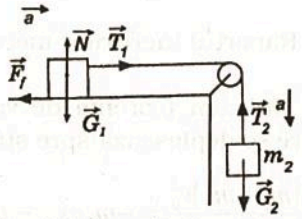
b. $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} \Rightarrow \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = (m_2 - m_1)gh \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2}}$

$\Rightarrow$ υ=2 m/s.

c. Când corpul cu masa m_2 ajunge pe sol, corpul cu masa m_1 se află la înălțimea $2h$=2 m față de sol. Cum corpul 1 are viteza orientată în sus, iar firul se slăbește, aplicând teorema de variație a energiei cinetice, aflăm înălțimea pe care mai urcă corpul 1, ținând cont că asupra acestuia acționează numai greutatea. Din $\Delta E_c = L_G \Rightarrow E_{c_f} - E_{c_i} = -m_1 gh_1 \Rightarrow 0 - \frac{m_1 v^2}{2} = -m_1 gh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{v^2}{2g} = 0{,}2$ m

Înălțimea maximă măsurată față de sol la care se oprește corpul 1 este: $h_{max} = 2h + h_1 = 2{,}2$ m.

62.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri din momentul pornirii până în momentul ruperii firului, astfel că: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_2} + L_{T_1} + L_N + L_{G_1} + L_{F_f}$.



$L_{T1} + L_{T2} = Td - Td = 0$, deoarece tensiunea care acționează asupra corpului m_1 este forță motoare, iar tensiunea care acționează asupra corpului m_2 este forță rezistivă. Cum L_{G1}=0, L_N=0, $L_{Ff} = -\mu m_1 gd$ și $L_{G_2} = m_2 gd$ obținem:

$$\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = m_2 gd - \mu m_1 gd \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gd(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2}} \approx 1{,}58 \text{ m/s}$$

b. După ce firul se rupe corpul m_1 are o mișcare uniform încetinită, astfel că aplicând teorema de variație a energiei cinetice pentru acest corp obținem:

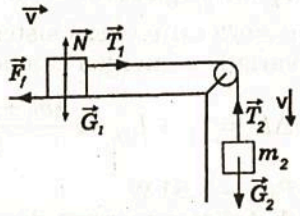
$$\Delta E_{c1} = L_{G_1} + L_{T_1} + L_N + L_{F_f} \Rightarrow -\frac{m_1 v^2}{2} = -\mu m_1 g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{d(m_2 - \mu m_1)}{\mu(m_1 + m_2)} = 0{,}625 \text{ m}$$

Distanța parcursă până la oprire de corpul m_1 măsurată din momentul pornirii este $d_f = d + s_{op}$=1,125 m

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul m_2 din momentul ruperii firului până în momentul ajungerii acestuia la sol, astfel că:

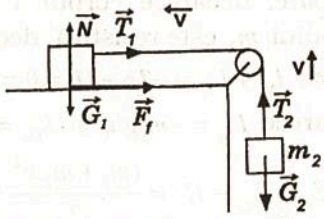
$$\Delta E_{c2} = L_{total2} = L_{G_2} \Rightarrow \frac{m_2 v'^2}{2} - \frac{m_2 v^2}{2} = m_2 gh \Rightarrow$$

$$v' = \sqrt{v^2 + 2gh} \approx 5{,}15 \text{ m/s}$$



63.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri când m_2 coboară pe distanța h_1, iar m_1 se deplasează spre dreapta: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_2} + L_{T_1} + L_N + L_{G_1} + L_{F_f}$. Din

$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = -\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}$, $L_{G_1} = 0$, $L_N = 0$,



$L_{T_2} + L_{T_1} = 0$, $L_{G_2} = m_2gh_1$ și $L_{Ff} = -\mu m_1gh_1$.

Obținem: $-\frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = m_2gh_1 - \mu m_1gh_1$ (1)

Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri când corpul m_1 se deplasează spre stânga pe distanța h_2: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_2} + L_{T_1} + L_N + L_{G_1} + L'_{F_f}$.

Deoarece $\Delta E_c = -\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}$, $L_{G_2} = -m_2gh_2$; $L_N = 0$; $L_{G_1} = 0$; $L'_{F_f} = -\mu m_1gh_2$,

iar $L_{T_1} + L_{T_2} = 0$ obținem: $-\frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = -m_2gh_2 - \mu m_1gh_2$ (2).

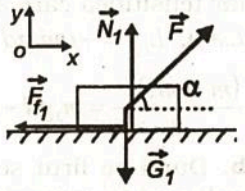
Din (1) și (2) $\Rightarrow$ $m_2gh_1 - \mu m_1gh_1 = -m_2gh_2 - \mu m_1gh_2 \Rightarrow \mu = \frac{m_2(h_1+h_2)}{m_1(h_1-h_2)} = 0{,}3.$

b. Raportul lucrurilor mecanice ale forțelor de frecare este $\frac{L_{Ff}}{L'_{Ff}} = \frac{h_1}{h_2} = 5$

c. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri care se deplasează spre stânga: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_2} + L_{T_1} + L_N + L_{G_1} + L'_{F_f} \Rightarrow$

$-\frac{(m_1+m_2)v_0^2}{2} = -m_2gs_{op} - \mu m_1gs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{(m_1+m_2)v_0^2}{2g(m_2+\mu m_1)} = 3$ m

64.a. Din formula lucrului mecanic obținem:



$L_F = Fd\cos\alpha \Rightarrow F = \frac{L_F}{d\cos\alpha} = 20$ N

b. Lucrul mecanic total al forțelor de frecare este $L_{Ff} = L_{Ff1} + L_{Ff2}$, cu $L_{Ff2} = -\mu N_2 d = -\mu m_2 gd$.

Proiectând forțele care acționează asupra corpului m_1 pe verticală: $N_1 - m_1g + F\sin\alpha = 0 \Rightarrow L_{Ff1} = -\mu N_1 d = -\mu(m_1g - F\sin\alpha)d$.

Obținem: $L_{Ff} = -\mu[(m_1+m_2)g - F\sin\alpha]d \Rightarrow \mu = -\frac{L_{Ff}}{[(m_1+m_2)g - F\sin\alpha]d} = 0{,}1$

c. Puterea medie disipată prin frecare de corpul cu masa m_2 este $P_m = F_{f2}v_m\cos 180 = -\mu \cdot m_2gv_m$, unde v_m este viteza medie a sistemului și este $v_m = v/2$ cu v viteza sistemului după parcurgerea distanței d. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri:

$\Delta E_c = L_F + L_{Ff} \Rightarrow \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = L_F + L_{Ff} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(L_F + L_{Ff})}{m_1+m_2}} \approx 11{,}24$ m/s $\Rightarrow$

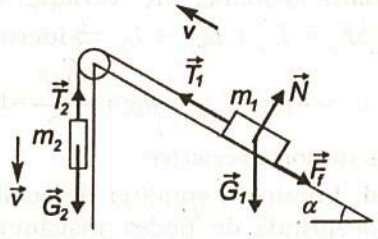
$P_m \approx -2{,}81$ W

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri:

$$\Delta E_c = L_F + L_{Ff} \Rightarrow \frac{(m_1+m_2)v'^2}{2} = FD\cos\alpha - \mu[(m_1+m_2)g - F\sin\alpha]D \Rightarrow$$

$$v' = \sqrt{\frac{2D[F(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)-\mu(m_1+m_2)g]}{m_1+m_2}} \approx 15{,}9 \text{ m/s}$$

65.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri, astfel că: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_1} + L_{T_1} + L_{T_2} + L_{G2} + L_{F_f} + L_N$, unde



$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{(m_1+m_2)v^2}{2}$, $L_{G2} = m_2gh$,

deoarece corpul m_2 coboară, iar greutatea lui este o forță motoare; $L_{T_1} + L_{T2} = 0$, deoarece $T_1 = T_2 = T$, T_1 este forță motoare, T_2 este o forță rezistivă și ambele își deplasează punctele de aplicație pe aceeași distanță h, $L_N = 0$, $L_{G_1} = -m_1gh\sin\alpha$ și $L_{F_f} = -\mu m_1gh\cos\alpha$. Obținem: $\frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = m_2gh - m_1gh\sin\alpha - \mu m_1gh\cos\alpha \Rightarrow$

$$v = \sqrt{\frac{2gh(m_2 - m_1\sin\alpha - \mu m_1\cos\alpha)}{m_1+m_2}} \approx 2{,}31 \text{ m/s}.$$

b. Aflăm distanța parcursă de corpul m_1, aflat pe planul înclinat, până la oprire, după ce corpul m_2 ajunge pe sol și tensiunea nu mai acționează. Corpul se mișcă pe distanța d. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L_{G_1} + L_{F_f} + L_N \Rightarrow -\frac{m_1v^2}{2} = -m_1gd\sin\alpha - \mu m_1gd\cos\alpha \Rightarrow d = \frac{v^2}{2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}$$

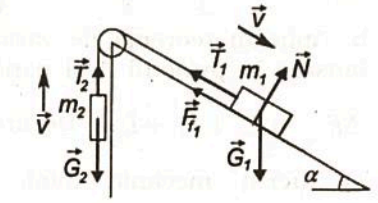
$\Rightarrow d$=40 cm. Distanța totală parcursă până la oprire este $D=d+h$=1 m

c. $L_{F_f} = -F_f(h+d) = -\mu m_1g(h+d)\cos\alpha = -3{,}33$ J

66.a. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{F_f} = -\mu m_1g\ell\cos\alpha = -8$J

b. Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate este $L_{G2} = -m_2g\ell = -40$ J.

c. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_1} + L_{T_1} + L_{T_2} + L_{G2} + L_{F_f} + L_N$, unde $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{(m_1+m_2)v^2}{2}$, T_2 este o forță motoare iar T_1 o forță rezistivă și ambele își deplasează punctele de aplicație pe aceeași distanță h, astfel că $L_{T_1} + L_{T2} = 0$, $L_N = 0$, $L_{G_A} = m_1g\ell\sin\alpha$. Obținem:



$$\frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = m_1g\ell\sin\alpha - \mu m_1g\ell\cos\alpha - m_2g\ell \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2g\ell(m_1\sin\alpha - \mu m_1\cos\alpha - m_2)}{m_1+m_2}} \approx 2{,}658 \text{ m/s}.$$

67. a. Variația energiei potențiale gravitaționale a sistemului ladă-Pământ este $\Delta E_p = -L_G = mgh$=100 J.

b. Lucrul mecanic efectuat de forța elastică este $L_{F_{el}} = -\frac{kh^2}{2} = -25$ J.

c. Deoarece lada este ridicată cu viteză constantă atunci $\Delta E_c = 0$, astfel că pe baza teoremei de variație a energiei cinetice pentru sistemul ladă-resort $\Delta E_c = L_G + L_{Fel} + L_F \Rightarrow$ lucrul mecanic efectuat de om pentru a ridica lada este $L_F = -L_G - L_{Fel} = mgh + \frac{kh^2}{2}$ =125 J, deoarece şi greutatea lăzii şi forța elastică sunt forțe rezistive

d. Impunem condiția de echilibru omului: $\vec{N} + \vec{F} + \vec{G} = 0$. Deoarece omul nu se desprinde de podea înseamnă că $N \geq 0$. Considerăm cazul cel mai defavorabil când N=0, astfel că forța cu care trage omul de fir este F=Mg. Din condiția de echilibru impusă lăzii $\vec{F}_{el} + \vec{F} + \vec{G}' = 0$ obținem $F = kx' + mg \Rightarrow x' = \frac{(M-m)g}{k}$ =3m, practic este imposibil să deformăm resortul atât pentru ca omul să se ridice de pe podea

68. a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A şi punctul B aflat la baza planului înclinat. $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_N$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = E_{cB}$, $L_G = mgh = mgd\sin\alpha$ şi L_N=0 obținem $E_{cB} = mgd\sin\alpha$ =50 J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între B aflat la baza planului înclinat şi punctul C imediat înainte ca obiectul să atingă resortul, astfel

$$\Delta E_{cBC} = L_G + L_N + L_{Ff} \Rightarrow E_{cC} - E_{cB} = -\mu mg\ell \Rightarrow \frac{mv_C^2}{2} - mgd\sin\alpha = -\mu mg\ell \Rightarrow$$

$$v_C = \sqrt{2g(d\sin\alpha - \mu\ell)} \approx 7{,}07 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele C şi D în care corpul se opreşte: $\Delta E_{c_{Cd}} = L_G + L_N + L_{Fel} \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = -\frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = v\sqrt{\frac{m}{k}}$ =10 cm.

69.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru a afla viteza cu care este lansat corpul prin destinderea resortului:

$$\Delta E_c = L \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow v = x\sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ m/s}$$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corp imediat după lansare în punctul A şi până când ajunge la înălțimea maximă în punctul B:

$\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f}$. Deoarece $\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = -\frac{mv^2}{2}$, $L_N = 0$, $L_G = -mgh$ şi lucrul mecanic total al forței de frecare este $L_{Ff} = L_{Ff_{AO}} + L_{Ff_{OC}} \Rightarrow$

$L_{F_f} = -\mu mg\ell - \mu mg\cos\alpha\frac{h}{\sin\alpha} = -\mu mg\ell - \mu mghctg\alpha$ obținem:

$$\frac{mv^2}{2} = -mgh - \mu mg\ell - \mu mghctg\,\alpha \Rightarrow h = \frac{v^2 - 2\mu g\ell}{2g(1+\mu\cdot ctg\,\alpha)} \approx 1{,}57 \text{ m}$$

c. Lucrul mecanic total al forței de frecare este $L_{F_f} = -\mu mg(\ell + hctg\alpha) = -3{,}43$J

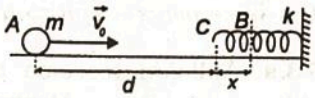
70.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare al corpului A și punctul de la baza planului B, astfel că: $\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f}$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} = \frac{mv_B^2}{2}$, $L_G = mgh$, $L_{F_f} = -\mu mg\frac{h}{\sin\alpha}\cos\alpha = -\mu mgh \cdot ctg\,\alpha$, și $L_N = 0$ obținem $\frac{mv_B^2}{2} = mgh - \mu mghctg\,\alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh(1-\mu ctg\alpha)} \approx 4{,}47$ m/s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A al corpului și punctul C în care comprimarea resortului este maximă și corpul se oprește: $\Delta E_{c_{AC}} = L_N + L_G + L_{F_f} + L_{F_{el}}$. Cum $\Delta E_{c_{AC}} = E_{c_C} - E_{c_A} = 0$, $L_N = 0$; $L_G = mgh$, $L_{F_f} = -\mu mg\frac{h}{\sin\alpha}\cos\alpha = -\mu mghctg\,\alpha$ și $L_{F_{el}} = -\frac{kx^2}{2}$ obținem:

$$0 = mgh - \mu mghctg\,\alpha - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}(1-\mu ctg\,\alpha)} = 10 \text{ cm}$$

c. Lucrul mecanic al forței elastice este $L_{Fel} = -\frac{kx^2}{2} = -2$ J

71.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul inițial A când vagonul se desprinde de tren și punctul B când resortul este comprimat la maxim și vagonul se oprește: $\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f} + L_{F_{el}}$.



Deoarece $\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = -\frac{mv_0^2}{2}$ și lucrurile mecanice sunt $L_G = 0$ și $L_N = 0$, $L_{F_f} = -\mu mg(d+x) = -\mu mgs_{op}$ unde $s_{op} = d + x$ și $L_{F_{el}} = -\frac{kx^2}{2}$, obținem:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgs_{op} - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow s_{op} = \frac{mv_0^2 - kx^2}{2\mu mg} = 60 \text{ m.}$$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de desprindere A și punctul C imediat înaintea ciocnirii resortului, astfel că: $\Delta E_{c_{AC}} = L_N + L_G + L_{F_f}$.

Dearece $\Delta E_{c_{AC}} = E_{c_C} - E_{c_A} = \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$, $L_G = 0$, $L_N = 0$ și $L_{F_f} = -\mu mgd$ obținem $\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgd \Rightarrow v_C = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd} \approx 2$m/s, deoarece: $d = s_{op} - x = 59{,}9$ m.

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele B și C:

$$\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f} + L_{F_{el}} \Rightarrow \frac{mv'^2_C}{2} = -\mu mgx + \frac{kx^2}{2} \Rightarrow v'_C = \sqrt{\frac{kx^2 - 2\mu mgx}{m}} \approx 1{,}95\text{m/s}$$

72.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul A în care resortul este comprimat și punctul B unde comprimarea dispare, astfel că $\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_{el}}$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = \frac{mv_B^2}{2}$, $L_G = 0$, $L_N = 0$ și $L_{F_{el}} = \frac{kx^2}{2}$ obținem:

$$\frac{mv_B^2}{2}=\frac{kx^2}{2}\Rightarrow v_B=x\sqrt{\frac{k}{m}}\approx 1{,}41\ \text{m/s}$$

b. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul B în care resortul este decomprimat și punctul C unde se oprește corpul pe suprafața sferică, astfel că $\Delta E_{cBC}=L_N+L_G$. Cum $\Delta E_{cBC}=-\frac{mv_B^2}{2}$, $L_N=0$ și $L_G=-mgh\Rightarrow$

$$-\frac{mv_B^2}{2}=-mgh\Rightarrow h=\frac{v_B^2}{2g}=\frac{kx^2}{2mg}=10\ \text{cm}.$$

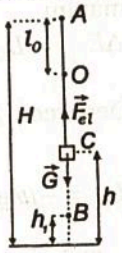
Dar $h=R(1-\cos\alpha)\Rightarrow\cos\alpha=1-\frac{h}{R}=\frac{1}{2}$. Obținem $\alpha=60^o$.

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și D unde se va opri corpul: $\Delta E_{c_{AD}}=L_N+L_G+L_{F_f}+L_{F_{el}}$.

Deoarece $\Delta E_{c_{AD}}=0$, $L_N=0$, $L_G=-mgh$ și $L_{Ff}=-\mu mgx$ și $L_{F_{el}}=\frac{kx^2}{2}$ obținem:

$$0=\frac{kx^2}{2}-\mu mgx-mgh\Rightarrow\mu=\frac{kx^2-2mgh}{2mgx}=0{,}25$$

73.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B: $\Delta E_{c_{AB}}=L_G+L_{F_{el}}$. Deoarece $\Delta E_{c_{AB}}=E_{c_B}-E_{c_A}=0$ iar lucrurile mecanice ale forțelor sunt $L_G=mg(H-h_1)$ și



$L_{F_{el}}=-\frac{k\Delta\ell^2}{2}=-\frac{k(H-\ell_0-h_1)^2}{2}$ obținem:

$0=mg(H-h_1)-\frac{k(H-\ell_0-h_1)^2}{2}\Rightarrow mg(H-h_1)=\frac{k(H-\ell_0-h_1)^2}{2}$ (1), unde cu ℓ_0 am notat lungimea nealungită a corzii elastice.

Impunem condiția de echilibru corpului $\vec{F}_{el}+\vec{G}=0\Rightarrow k(H-h-\ell_0)=mg$ (2)

Din (1) și (2) obținem: $2(H-h_1)(H-h-\ell_0)=(H-\ell_0-h_1)^2$. Înlocuind valorile obținem: $56(20-\ell_0)=(28-\ell_0)^2$. Rezolvând obținem: $\ell_0\approx 18{,}33$ m

b. Sportivul atinge viteza maximă atât timp cât cade sub acțiunea greutății până ce coarda elastică începe să se alungească, iar forța elastică frânează sportivul. Astfel aplicând teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și O obținem $\Delta E_{c_{Ao}}=L_G\Rightarrow\frac{mv_O^2}{2}=mg\ell_0\Rightarrow v_O=\sqrt{2g\ell_0}\approx 19{,}15$ m/s

c. Din $k(H-h-\ell_0)=mg\Rightarrow k=\frac{mg}{H-h-\ell_0}\approx 35{,}928$ kN/m

74.a. Din condiția de echilibru impusă corpului: $\vec{F}_{el}+\vec{G}+\vec{F}=0$, scalar obținem $F_{el}=F+mg=40$ N

b. Comprimarea resortului este $\Delta\ell=F_{el}/k=8$ cm, astfel că lungimea resortului este $\ell=\ell_0-\Delta\ell=92$ cm

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul B de oprire al corpului, astfel că: $\Delta E_{c,AB} = L_G + L_{F_{el}}$. Deoarece greutatea este forță rezistivă lucrul ei mecanic este $L_G = mgh$ și forța elastică este o forță motoare $L_{F_{el}} = \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow 0 = -mgh + \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow h = \frac{k\Delta\ell^2}{2mg}$ =16 cm. Înălțimea maximă față de sol la care va urca corpul dacă acțiunea forței F încetează este $h_{sol}=\ell+h$=108 cm

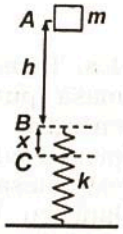
75.a. Din condiția de echilibru impusă corpului $\vec{F}_{el} + \vec{G} = 0 \Rightarrow kx = mg$ obținem constanta elastică a resortului $k=mg/x$=100 N/m

b. Din condiția de echilibru impusă corpului după ce resortul se apasă $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{F} = 0$ obținem $F + mg = kx' = 2kx \Rightarrow F = mg$ =2 N

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul A după încetarea acțiunii forței F și punctul B de oprire al corpului, astfel că: $\Delta E_{c,AB} = L_G + L_{F_{el}} \Rightarrow 0 = -mgh + \frac{kx'^2}{2} \Rightarrow h = \frac{kx'^2}{2mg} = \frac{2kx^2}{mg} = 2x = 4$ cm.

76.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul B în care corpul lovește resortul, astfel că: $\Delta E_{c,AB} = L_G \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh} \approx 2{,}83$ m/s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul C unde comprimarea resortului x este maximă. Obținem: $\Delta E_{c,AB} = L_G + L_{F_{el}}$. Deoarece corpul pornește din repaus și în ajunge în final în repaus $\Delta E_{c,AB} = E_{c_B} - E_{c_A} = 0$ iar lucrurile mecanice sunt $L_G = mg(h+x)$, deoarece greutatea ajută la mișcare și $L_{F_{el}} = -\frac{kx^2}{2}$, deoarece forța elastică se opune mișcării, obținem:



$$0 = mg(h+x) - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{kx^2}{2} - mgx - mgh = 0 \Rightarrow x = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k} = 20 \text{ cm.}$$

c. Lucrul mecanic al forței elastice este $L_{F_{el}} = -\frac{kx^2}{2} = -0{,}6$ J

77.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice din momentul lăsării libere a corpului și până în momentul alungirii firului elastic. Astfel $\Delta E_{c,AB} = L_{G,AB}$.

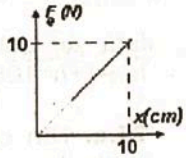
Cum $\Delta E_{c,AB} = E_{c,B} - E_{c,A} = \frac{mv_B^2}{2}$ și $L_{G,AB} = mg\ell_0 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell_0 \Rightarrow v_B = \sqrt{2g\ell_0}$. Cum $g = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_B}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{v_B}{g} = \sqrt{\frac{2\ell_0}{g}} \approx 0{,}28$ s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice din momentul lăsării libere a corpului din punctul A și până în momentul în care corpul se oprește. Astfel

$\Delta E_{c,AC} = L_{G,AC} + L_{Fe,AC}$. Cum $\Delta E_{c,AC} = 0$, $L_{G,AC} = mg(\ell_0 + x)$ şi

$$L_{Fe,AC} = -\frac{kx^2}{2} \Rightarrow 0 = mg(\ell_0 + x) - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2kmg\ell_0}}{k} = 10 \text{ cm}$$

c. Cum forţa elastică este $|F_{el}| = kx$, reprezentarea grafică a dependenţa modulului forţei elastice din fir de alungirea acestuia până când firul se alungeşte la maximum este redată grafic în figura alăturată. Când x=10 cm forţa elastică maximă este $F_{el,max}$=10 N.



78.a. Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului este $L_G = -mgh = -20$ J.

b. Din $h=v_m t$ cu viteza medie $v_m=(v+v_0)/2$ şi cum $v=v_0-gt$ obţinem

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} = 0{,}4 \text{ s}$$

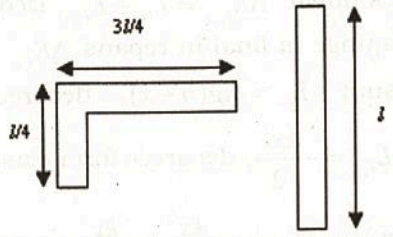
c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul A şi punctul C în care corpul se opreşte. Astfel: $\Delta E_{c_{AC}} = L_G + L_{F_{el}}$. Deoarece $L_G = -mg(h+x)$,

$L_{F_{el}} = -\frac{kx^2}{2}$ şi $\Delta E_{c_{AC}} = -E_{c_A} = -\frac{mv_0^2}{2}$ obţinem: $-\frac{mv_0^2}{2} = -mg(h+x) - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow$

$$x = \frac{-mg + \sqrt{m^2g^2 + mk(v_0^2 - 2gh)}}{k} \approx 16{,}8 \text{ cm}$$

3.4. Conservarea energiei mecanice

1.a. Deoarece nu există frecări între lanţ şi masă putem aplica legea de conservare a energiei mecanice. Alegem valoarea zero pentru energia potenţială la nivelul mesei. m este masa întregului lanţ. Iniţial porţiunea de lanţ cu lungime $\ell/4$ care atârnă poate fi considerată un punct material cu masa $m/4$ şi cu întreaga masă concentrată în centrul de greutate, deci la $\ell/8$ de suprafaţa mesei. Energia potenţială iniţială a lanţului este $E_{p_i} = -\frac{m}{4} g \frac{\ell}{8} = -\frac{mg\ell}{32}$. Când lanţul alunecă de pe masă şi devine vertical, el are energia potenţială $E_{p_f} = -mg\frac{\ell}{2}$, deoarece centrul de greutate al lanţului în care considerăm concentrată întreaga masă a lanţului se află la distanţa $\ell/2$ faţă de masă. Energia cinetică a lanţului când acesta părăseşte masa este



$$E_c = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow -\frac{mg\ell}{32} = -\frac{mg\ell}{2} + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{15g\ell}}{4} = 3 \text{ m/s}.$$

b. Lucrul mecanic necesar urcării porţiunii de lanţ care atârnă se efectuează pentru a urca centrul de greutate al lanţului care atârnă la nivelul mesei, astfel că $L_{ef} = -\Delta E_{p,grav} = \frac{mg\ell}{32} = 0{,}6$ J

2.a. Deoarece asupra corpului se exercită numai forţa de greutate, care este forţă de tip conservativ pentru sistemul corp-Pământ, putem aplica legea de

conservare a energiei mecanice între punctele A şi B: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$, unde $E_{c_A} = 0$, deoarece corpul porneşte din repaus. Alegem nivel de referinţă pentru energia potenţială punctul O, aflat pe sol, astfel că $E_{p_0} = 0$.

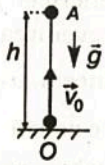
Cum $E_{c_B} = \frac{E_{p_B}}{4} \Rightarrow E_{p_A} = \frac{E_{p_B}}{4} + E_{p_B} = \frac{5}{4}E_{p_B} \Rightarrow mgh = \frac{5}{4}mgh' \Rightarrow h' = \frac{4h}{5} = 80$ m

b. Utilizăm legea conservării energiei între punctele A şi C, astfel că $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow mgh = \frac{mv_C^2}{2} + mgh_C \Rightarrow v_C = \sqrt{2g(h - h_C)}$ =40 m/s

c. Pe baza conservării energiei mecanice $E_{p_A} = E_{c_O} \Rightarrow E_{c_O} = mgh$ şi deoarece imediat după ciocnirea cu solul, energia cinetică a corpului reprezintă o fracţiune f din valoarea energiei cinetice imediat înainte de ciocnire atunci $E'_{c_O} = fE_{c_O} = fmgh$ şi din legea conservării energiei obţinem înălţimea la care se ridică din nou corpul: $E'_{c_O} = E_{p_D} \Rightarrow fmgh = mgh_D \Rightarrow h_D = fh$ =40 m

3.a. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice în cazul aruncării mingii pe verticală de jos în sus. La sol mingea are doar energie cinetică (E_{Psol}=0) iar la înălţimea maximă doar energie potenţială, astfel că:

$E_{csol} = E_{p\max} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{\max} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh_{\max}} \approx 4{,}47$ m/s



b. Prin definiţie $E_m = E_c + E_p$. Pe baza legii de conservare a energiei mecanice $E_m = E_{m_{sol}} = E_{c_{sol}} = mgh_{\max}$ =5 J

c. Din $E_{csol} = E_{p\max} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$ Dacă viteza mingii se dublează $v = 2v_0 \Rightarrow h'_{\max} = \frac{v^2}{2g} = 4\frac{v_0^2}{2g} = 4h_{\max}$ =4 m, astfel că mingea se va ridica mai mult cu $\Delta h = h'_{\max} - h_{\max} = 3h$ =3 m

4.a. Aflăm înălţimea maximă la care urcă corpul, aplicând legea de conservare a energiei mecanice între punctele O şi A: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_A} + E_{p_A}$. Deoarece $E_{p_O} = mgh$ şi în punctul de înălţime maximă $E_{c_A} = 0$, astfel că $E_{c_O} = E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = h + \frac{v_0^2}{2g}$ =5,8 m

b. În punctul B aflat la o pătrime din înălţimea maximă la care se ridică corpul, $h_B = \frac{h_{\max}}{4}$, aflăm energia cinetică pe baza conservării energiei mecanice între punctele A şi B astfel că: $E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow E_{c_B} = E_{p_A} - E_{p_B} \Rightarrow$

$E_{c_B} = mgh_{\max} - mgh_B = \frac{3mgh_{\max}}{4}$ =4,35 J

c. Conservând energia mecanică între punctul de înălţime maximă A şi punctul de pe sol C, obţinem: $E_{p_A} = E_{c_C} \Rightarrow mgh_{\max} = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{2gh_{\max}} \approx 10{,}77$ m/s

5.a. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele O şi M:

$$E_{c_O} = E_{p_M} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgH \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gH} = 20 \text{ m/s}$$

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele M şi P:

$$E_{p_M} = E_{c_P} + E_{p_P} \Rightarrow mgH = \frac{mv_P^2}{2} - mgh \Rightarrow v_P = \sqrt{2g(H+h)} \approx 24{,}49 \text{ m/s}$$

c. Lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate pe toată durata deplasării pietrei este $L_G = L_{G_{OM}} + L_{G_{MP}} = -mgH + mg(H+h) = mgh = 20$ J

6.a. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare O şi punctul A în care corpul ajunge la înălţimea maximă, astfel

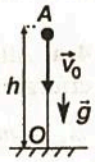
$$E_{c_O} = E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = 3{,}2 \text{ m}$$

b. Pe baza legii conservării energiei mecanice $E_{c_O} = E_{c_B} + E_{p_B}$ şi cum $E_{c_B} = E_{p_B}/3$ obţinem $E_{c_O} = 4E_{c_B} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{4mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \frac{v_0}{2} = 4$ m/s

c. Dacă frecarea cu aerul nu este neglijabilă aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare aflat pe sol O şi acelaşi punct la revenirea corpului, astfel că $\Delta E_c = L_G + L_{Ff}$. Deoarece $\Delta E_c = E'_{co} - E_{co}$, lucrul mecanic al greutăţii este nul $L_G = 0$ şi $L_{Ff} < 0$ pentru că forţa de frecare este rezistivă obţinem $E'_{co} < E_{co} \Rightarrow v'_0 < v_0$. Viteza cu care corpul atinge solul la coborâre este mai mică decât viteza iniţială v_0, dacă frecarea cu aerul nu este neglijabilă.

7.a. Energia mecanică a ghiozdanului este:

$$E_m = E_c + E_p \Rightarrow E_m = \frac{mv_0^2}{2} + mgh = 288 \text{ J}$$



b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele A şi O: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 12$ m/s

c. Pe baza conservării energiei dacă ghiojdanul este lăsat liber din punctul B de la înălţimea h' obţinem:

$$E_{p_B} = E_{c_O} \Rightarrow mgh' = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = mgh' \Rightarrow h' = h + \frac{v_0^2}{2g} = 7{,}2 \text{ m}$$

8.a. Energia potenţială corespunţătoare înălţimii maxime este

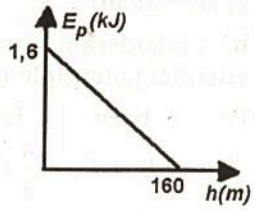
$$E_{p_{\max}} = E_p + E_c = mgh + \frac{mv_0^2}{2} = 1{,}6 \text{ kJ}$$

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistem între punctul de plecare A şi punctul B: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Deoarece $E_{c_B} = 3E_{p_B}$ obţinem: $\frac{mv_0^2}{2} + mgh = 4mgh_B \Rightarrow h_B = \frac{h}{4} + \frac{v_0^2}{8g} = 20$ m.

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între vârful turnului A aflat la înălțimea h de sol și punctul O de pe sol. Alegem pe sol $E_{p_0} = 0$. Obținem:

$$E_{c_O} = E_{c_A} + E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgh \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 40 \text{ m/s}.$$

9.a. Deoarece la sol energia potențială este nulă $E_{p_0} = 0$, atunci dependenței energiei potențiale gravitaționale a pachetului în funcție de înălțimea h este $E_p = E_{p0} - mgh = 1600 - 10h$. Reprezentarea grafică a funcției este redată în figura alăturată.

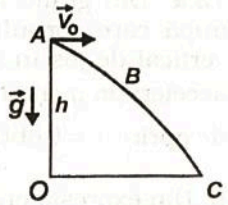


b. Pentru sistemul pachet–sol aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele A și O. Obținem:

$$E_{p_A} + E_{c_A} = E_{c_O} \Rightarrow mgh + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 60 \text{ m/s}.$$

c. Dacă pachetul se aruncă oblic în jos aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul de aruncare și punctul în care corpul lovește solul, astfel că:

$$E_{p_A} + E_{c_A} = E_{c_O} \Rightarrow mgh + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 60\text{m/s}$$



Pachetul ajunge la sol cu aceeași viteză fie că este lăsat să cadă pe verticală în jos sau este aruncat oblic în jos, numai că ajunge la sol cu viteze orientate pe direcții diferite, vertical când pachetul cade vertical și oblic când este aruncat sub un unghi.

10.a. Timpul în care este ridicat coletul cu materiale este $t = \frac{h}{v}$ =50 s

b. Puterea dezvoltată de macara este $P = Fv = mgv$=2 kW

c. Pe baza legii conservării energiei între punctul de plecare și sol, considerând că la sol energia potențială este nulă, obținem

$$E_{mA} = E_{mB} \Rightarrow E_{pA} = E_{cB} \Rightarrow mgh = \frac{mv'^2}{2} \Rightarrow v' = \sqrt{2gh} \approx 14{,}1 \text{ m/s}$$

d. După desprindere din colet piesa are o mișcare uniform accelerată, astfel că viteza medie de deplasare este $v_m = \frac{v'}{2}$. Din $h = v_m t' = \frac{v't'}{2} \Rightarrow t' = \frac{2h}{v'} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 1{,}41\text{s}$

11.a. Din grafic când corpul se află la sol $h = 0$ și $E_{c\,\max} = 24$ J. Lansat pe verticală de jos în sus corpul este supus acțiunii greutății, care este forță de tip conservativ. Aplicând legea conservării energiei mecanice, energia cinetică a corpului se transformă la înălțimea maximă în energia potențială, astfel că $E_{p_{\max}} = E_{c\max} = 24$ J.

b. Din grafic $h_{\max} = 6$ m. Cum $E_{p_{\max}} = mgh_{\max} \Rightarrow m = \frac{E_{p_{\max}}}{gh_{\max}} = 400$ g.

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice și obținem:

$$E_{c\max} = E_{c_1} + E_{p_1} \Rightarrow E_{c\max} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2(E_{c\max} - mgh_1)}{m}} = \sqrt{2g(h_{\max} - h)} \Rightarrow$$

v_1=4 m/s.

12.a. Din grafic la înălțimea maximă h_{max} =6 m, energia potențială are valoarea $E_{p_{max}}$ = 18 J. Considerând că pe sol, energia potențială este nulă, pe baza conservării energiei mecanice $E_{c_{max}} = E_{p_{max}} \Rightarrow$ energia cinetică maximă este la sol și are valoarea $E_{c_{max}}$ =18 J

b. Considerăm punctul în care energia cinetică este o treime din valoarea energiei potențiale în acel punct, astfel că $E_c = E_p/3$

Pe baza legii de conservare a energiei mecanice:

$$E_{c_{max}} = E_c + E_p = \frac{4}{3}E_p \Rightarrow E_{p_{max}} = \frac{4}{3}E_p \Rightarrow mgh_{max} = \frac{4}{3}mgh \Rightarrow h = \frac{3}{4}h_{max} = 4{,}5 \text{ m}$$

c. $E_c = \frac{E_p}{3} = \frac{E_{p_{max}}}{4} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{mgh_{max}}{4} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{gh_{max}}{2}} \approx 5{,}48$ m/s

13.a. Din grafic aflăm valoarea inițială a energiei cinetice E_c=400 J și timpul după care corpul ajunge la înălțimea maximă t_u=2 s. Deoarece corpul lansat vertical de jos în sus în câmp gravitațional are o mișcare uniform încetinită cu accelerația g și cu viteza inițială v_0, conform legii vitezei $v = v_0 - gt$ și din condiția de oprire $v = 0$ obținem viteza inițială a corpului $v_0 = gt_u$ =20 m/s

b. Din expresia energiei cinetice $E_c = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow m = \frac{2E_c}{v_0^2} = \frac{2E_c}{g^2t_u^2}$ =2 kg

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice, astfel că $E_{csol} = E_{p\max} \Rightarrow$

$E_c = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = E_c/(mg)$ =20 m

d. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul de pe sol O și punctul cerut A, astfel că: $E_{c_0} = E_{p_A} + E_{c_A}$. Deoarece $E_{c_A} = fE_{p_A}$ obținem:

$$E_{c_0} = E_{p_A}(1+f) \Rightarrow E_{p_A} = \frac{E_{c_O}}{1+f} \Rightarrow E_{c_A} = \frac{fE_{c_O}}{1+f} = \frac{mv_A^2}{2} \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2fE_{c_O}}{m(1+f)}} \approx 8{,}16 \text{ m/s}$$

14.a. Energia mecanică a bilei este $E_m = E_p = mgh_0$. Deoarece neglijăm frecările cu aerul energia mecanică a bilei se conservă în procesul căderii acesteia, astfel că la sol energia are aceeași valoare. În urma ciocnirii cu suprafața plană bila pierde f=10% din energia mecanică, astfel că energia mecanică imediat după ciocnire devine $E_{m1} = (1-f)E_m = (1-f)mgh_0$. Pe baza legii conservării energiei mecanice după ciocnire obținem

$E_{m1} = E_{p\max_1} \Rightarrow (1-f)mgh_0 = mgh_1 \Rightarrow h_1 = (1-f)h_0$ =90 cm

b. După cea de-a doua ciocnire cu suprafața plană noua valoare a energiei mecanice este $E_{m2} = (1-f)E_{m1} = (1-f)^2E_m = (1-f)^2mgh_0$. Imediat după cea de-a doua ciocnire viteza v_2 a bilei se obține din $\frac{mv_2^2}{2} = (1-f)^2mgh_0 \Rightarrow$

$v_0 = (1-f)\sqrt{2gh_0} \approx 4{,}02$ m/s

c. După cea de-a treia ciocnire cu suprafața plană energia mecanică a bilei este $E_{m3} = (1-f)E_{m2} = (1-f)^3E_m = (1-f)^3mgh_0$ =2,916 J

15.a. Deoarece corpul este aruncat vertical de jos în sus pe baza conservării energiei mecanice, considerând că la nivelul solului $E_{psol}=0$, atunci

$$E_{c_{sol}} = E_{p_{max}} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 20 \text{ m}$$

b. După prima ciocnire viteza corpului devine $v'_0 = 10$ m/s, astfel că energia mecanică este $E_{m2} = E'_{csol} = \frac{mv'^2_0}{2}$, astfel că fracțiunea pierdută din energia mecanică este $f = \frac{E_{csol} - E'_{csol}}{E_{csol}} = 1 - \frac{v'^2_0}{v_0^2} = 75\%$

c. Variația energiei mecanice după cea de-a de-a doua ciocnire este

$$\Delta E_{m2} = E_{m_2} - E_{m_1} = E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{mv''^2_0}{2} - \frac{mv'^2_0}{2} = -7{,}5 \text{ J, deoarece } v''_0 = 5 \text{ m/s}$$

16.a. Deoarece jgheabul este lucios neghijăm frecările şi utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare *A* şi punctul *B* unde corpul părăşeşte jgheabul. Considerăm nulă energia potențială la nivelul solului.

Obținem: $E_{m_A} = E_{m_B} \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mgH = \frac{mv_B^2}{2} + mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(H-h)} \Rightarrow$

$v_B = 10$ m/s

b. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul *A* şi punctul unde corpul loveşte solul *C*:

$$E_{mA} = E_{m_C} \Rightarrow E_{pA} = E_{c_C} \Rightarrow mgH = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{2gH} \approx 12{,}65 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm teorema de conservare a energiei mecanice între punctul *A* şi punctul *D* aflat la înălțimea $h_D = fH$, astfel că: $E_{m_A} = E_{mD} \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_D} + E_{p_D} \Rightarrow$

$$mgH = \frac{mv_D^2}{2} + mgh_D \Rightarrow v_D = \sqrt{2g(H-h_D)} = \sqrt{2gH(1-f)} \approx 11{,}31 \text{ m/s}$$

17.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele *A* şi *B*, astfel că $\Delta E_{c_{AB}} = L_{F_f} + L_N + L_G$. Deoarece $L_{F_f} = -F_f \ell = -\mu mg\ell$, $L_G = 0$, $L_N = 0$ şi

$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ obținem $\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mg\ell \Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g\ell} \Rightarrow$

$v_B \approx 5{,}47$ m/s

b. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele aflate pe jgheab *B* şi *C*. Considerăm nulă energia potențială în punctul *B*. Astfel:

$$E_{m_B} = E_{m_C} \Rightarrow E_{c_B} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_C^2}{2} + mgR \Rightarrow v_C = \sqrt{v_B^2 - 2gR} \approx 4{,}47 \text{ m/s}$$

c. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul *B* şi punctul *D* până la care urcă bila: $E_{m_B} = E_{m_D} \Rightarrow E_{c_B} = E_{p_D} \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh_D$ $h_D = \frac{v_B^2}{2g} = 1{,}5$ m

18.a. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru punctele aflate pe suprafață curbă *A* şi *B* considerând că în *B* energia potențială este nulă.

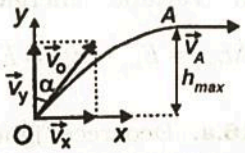
$$E_{m_A} = E_{m_B} \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_B} \Rightarrow mgH = \frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gH} = 10 \text{ m/s}$$

b. Lucrul mecanic efectuat de greutate la deplasarea corpului între punctele *A* şi *B* este $L_G = mgH = 50$ J

c. Energia mecanică totală iniţială este $E_{m_A} = E_{p_A} = mgH$. În punctul *C* energia mecanică este $E_{m_C} = E_{m_A}/4 = mgH/4$. Cum $E_{m_C} = E_{c_C}$ putem aplica între punctele *A* şi *C* teorema de variaţie a energiei cinetice: $\Delta E_{c_{AC}} = L_G + L_N + L_{Ff}$.

Deoarece $\Delta E_{c_{AC}} = E_{c_C} = \frac{mgH}{4}$, $L_G = mgH$, $L_N = 0$ şi $L_{Ff} = -F_f BC = -\mu mgBC$ obţinem:

$$\frac{mgH}{4} = mgH - \mu mgBC \Rightarrow BC = \frac{3H}{4\mu} = 18{,}75 \text{ m}$$



19.a. Componentele vectorului viteză pe axele de coordonate *Ox* şi *Oy* sunt $v_{0x} = v_0 \cos\alpha \approx 8{,}65$ m/s şi $v_{oy} = v_0 \sin\alpha = 5$ m/s

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pe axa verticală între punctul de plecare *O* şi punctul în care corpul se opreşte. Se consideră nulă energia potenţială gravitaţională în punctul de pe sol. Astfel că

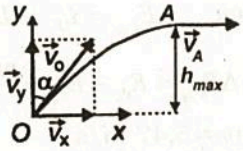
$$E_{mO} = E'_m \Rightarrow E_{c,Oy} = E_p \Rightarrow \frac{mv_{oy}^2}{2} = mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_{oy}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 1{,}25 \text{ m}$$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei între punctul de plecare *O* şi punctul *A* în care corpul ajunge la înălţimea maximă. Astfel că:

$$E_{mO} = E_{mA} \Rightarrow E_{c,O} = E_{cA} + E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_o^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mgh_{\max} \Rightarrow \frac{mv_o^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + \frac{mv_{0y}^2}{2} \Rightarrow$$

$$v_A = v_0 \cos\alpha \approx 8{,}65 \text{ m/s}$$

d. Lucrul mecanic al forţei de greutate din momentul lansării şi până când corpul atinge solul este $L_{G,total} = L_{G,urcare} + L_{G,coborâre} = -mgh_{\max} + mgh_{\max} = 0$



20.a. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistemul minge-Pământ între punctul *O* aflat pe sol şi punctul *A* aflat la înălţimea maximă: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_A} + E_{p_A}$, cu $E_{p_O} = 0$, deoarece alegem pe sol valoarea zero pentru energia potenţială

În punctul de înălţime maximă, vectorul viteză este orizontal. Pe orizontală mingea are o mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $v_0 \cos\alpha$, astfel că $v_A = v_0 \cos\alpha \Rightarrow v_0 = \frac{v_A}{\cos\alpha} \Rightarrow E_{c_O} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2\cos^2\alpha} = \frac{E_{c_A}}{\cos^2\alpha} = 90$ J

b. Când mingea formează cu orizontala un unghi β, astfel că $v_B \cos\beta = v_A$, deoarece pe orizontală mişcarea mingii este rectilinie şi uniformă $v_B = \frac{v_A}{\cos\beta}$ şi

$$E_{c_B} = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2\cos^2\beta} = \frac{E_{C_A}}{\cos^2\beta} = 60 \text{ J}.$$

c. Aplicând legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare de pe sol *O* şi punctul *B*, unde mingea formează cu orizontala un unghi β.

Considerând că pe sol energia potențială este nulă, aflăm energia potențială în *B*.

Din $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_B} + E_{p_B}$ și cum $E_{p_O} = 0 \Rightarrow E_{p_B} = E_{c_O} - E_{c_B} = \frac{E_{c_A}}{\cos^2\alpha} - \frac{E_{c_A}}{\cos^2\beta} = 30\text{J}$

21.a. Aplicăm între punctul de plecare *O* și punctul în care energia cinetică este o fracțiune *f* din energia cinetică inițială, legea de conservare a energiei mecanice, astfel că: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_c + E_p$. Considerăm că în punctul de lansare *O*, energia potențială este nulă. Astfel obținem: $E_{c_O} = E_c + E_p \Rightarrow$

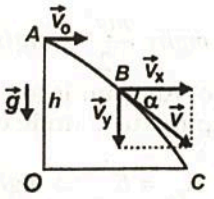
$$E_p = E_{c_O} - E_c = E_{c_O} - fE_{c_O} = E_{c_O}(1-f) \Rightarrow mgh = \frac{mv_0^2}{2}(1-f) \Rightarrow h = \frac{v_0^2(1-f)}{2g} \approx 0{,}65 \text{ m}$$

b. Deoarece pe orizontală mișcarea corpului este rectilinie și uniformă $v_0\cos\alpha = v\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{v_0\cos\alpha}{v}$.

Cum $E_c = fE_{c_0} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = f\frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v^2 = fv_0^2 \Rightarrow v = v_0\sqrt{f} \Rightarrow \cos\beta = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{f}} = 0{,}625.$

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul *O* și punctul *A* în care corpul ajunge la înălțimea maximă: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_A} + E_{p_A}$. Deoarece pe orizontală corpul are o mișcare rectilinie și uniformă cu viteza $v_A = v_0\cos\alpha$ energia potențială maximă este $E_{p_A} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2} = 6{,}75$ J

22.a. Considerăm că pe sol, în punctul *O*, energia potențială este nulă. Energia mecanică totală a corpului este formată din energia cinetică și energia potențială, astfel:



$$E_m = E_{c_A} + E_{p_A} = \frac{mv_0^2}{2} + mgh = 70 \text{ J}$$

b. Deoarece pe orizontală corpul se mișcă uniform, întrucât asupra corpului acționează numai greutatea care este verticală, atunci

$$v_0 = v_B\cos\alpha \Rightarrow v_B = \frac{v_0}{\cos\alpha} \Rightarrow E_{c_B} = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2\cos^2\alpha} = 40 \text{ J}$$

Pe baza legii de conservare a energiei mecanice între punctele *A* și *B* obținem:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow E_{p_B} = E_m - E_{c_B} = mgh - \frac{mv_0^2}{2}tg^2\alpha = 30 \text{ J}$$

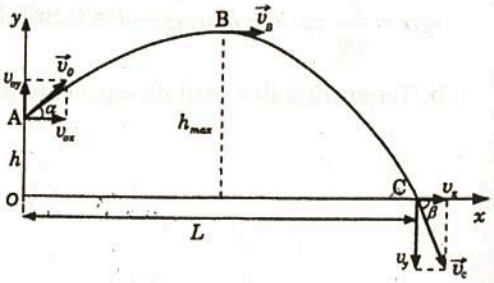
c. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare *A* și punctul de sosire de pe sol *C*: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C}$

Cum

$$E_{p_C} = 0 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow$$

$$v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \approx 26{,}46 \text{ m/s}$$

23.a. Pe baza definiției energiei mecanice totale: $E_m = E_{c_A} + E_{p_A} = mgh + \frac{mv_0^2}{2} = 100$ J



b. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul *A* și punctul cel

mai înalt al traiectoriei B, astfel că: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Pe orizontală mişcarea corpului este rectilinie şi uniformă, astfel că:

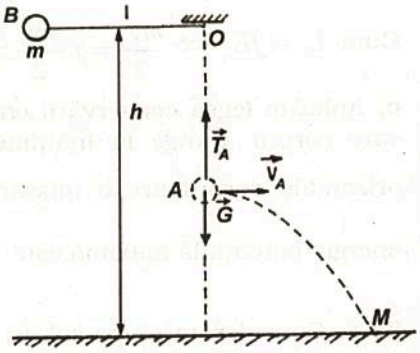
$$v_0 \cos\alpha = v_B \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = mgh_{max} + \frac{mv_0^2 \cos^2\alpha}{2} \Rightarrow h_{max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 16{,}25 \text{ m}$$

c. Aplicăm între punctul de plecare A şi punctul de sosire la sol C, legea de conservare a energiei mecanice: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C}$.

Cum $E_{p_C} = 0 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 20$ m/s.

d. Pe orizontală, corpul se mişcă uniform astfel că $v_0 \cos\alpha = v_C \cos\beta \Rightarrow$

$$\cos\beta = \frac{v_0 \cos\alpha}{v_C} \approx 0{,}4325.$$



24.a. $E_m = E_c + E_p = mgh = 18$ J, deoarece în poziţia iniţială corpul nu are energie cinetică şi are doar energie potenţială, iar pe sol alegem valoarea zero pentru energia potenţială gravitaţională.

b. Aplicăm între punctul de plecare B şi punctul când corpul se află în poziţia verticală A legea de conservare a energiei mecanice: $E_{c_B} + E_{p_B} = E_{c_A} + E_{p_A} \Rightarrow$

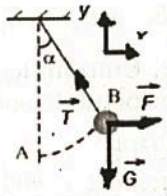
$$mgh = \frac{mv_A^2}{2} + mg(h - \ell) \Rightarrow v_A = \sqrt{2g\ell} = 4 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare B şi punctul C unde corpul ajunge pe sol.

$$E_{p_B} = E_{c_{sol}} \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 6 \text{ m/s}.$$

d*. Impunem condiţia ca în poziţia verticală A rezultanta tensiunii şi a greutăţii să joace un rol de forţă centripetă, deoarece corpul are o traiectorie circulară.

Scalar: $T_A - mg = \frac{mv_A^2}{\ell} \Rightarrow T_A = m\left(g + \frac{v_A^2}{\ell}\right) = 3mg = 30$ N $\Rightarrow$ firul se rupe pe verticală când tensiunea ajunge la valoarea 30 N.



25.a. Impunem condiţia de echilibru bilei în poziţia B, astfel că $\vec{T} + \vec{F} + \vec{G} = 0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate Ox: $F - T\sin\alpha = 0$ şi pe Oy: $T\cos\alpha - mg = 0$. Împărţind cele două relaţii obţinem:

$$tg\alpha = \frac{F}{mg} \Rightarrow F = mgtg\alpha \Rightarrow F \approx 0{,}865 \text{ N}$$

b. Tensiunea din firul de care este legată bila în poziţia B este $T = \frac{mg}{\cos\alpha} = 1$ N

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele A şi B: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Considerăm nulă energia potenţială în punctul cel mai de jos al traiectoriei, adică punctul A. Astfel $E_{p_B} = E_{c_A} \Rightarrow mg\ell(1-\cos\alpha) = \frac{mv_A^2}{2} \Rightarrow$

$v_A = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} \approx 1{,}41$ m/s

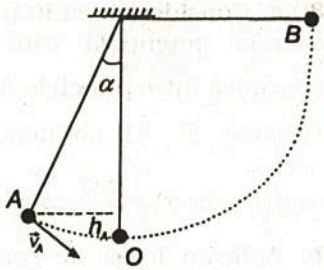
26.a. Aplicăm între punctul O în care se află corpul iniţial şi punctul A când firul devine orizontal, legea de conservare a energiei mecanice. Considerăm că în punctul O energia potenţială este nulă, astfel că $E_{p_O} = 0$.

Astfel: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_A} + E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mg\ell \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 - 2g\ell} = 4$ m/s.

b. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul A şi punctul unde se opreşte corpul B: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Deoarece $E_{c_B} = 0$ obţinem:

$E_{c_B} = 0 \Rightarrow mg\ell + \frac{mv_A^2}{2} = mgh_B \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_B \Rightarrow h_B = \frac{v_0^2}{2g} = 1{,}25$ m.

c. $L_T = 0$, deoarece forţa de tensiune este orientată perpendicular pe traiectorie şi $L_G = -mgh_B = -2{,}5$ J, deoarece greutatea nu ajută la mişcare şi prin urmare este o forţă cu caracter rezistiv.



27.a. Aplicăm între punctul de plecare A şi punctul B, legea de conservare a energiei mecanice. Considerăm că în punctul cel mai de jos al traiectoriei energia potenţială este nulă $E_{p_O} = 0$.

Obţinem: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$.

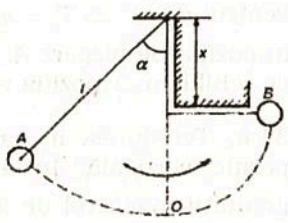
Cum $E_{p_A} = mg\ell(1-\cos\alpha)$ şi $E_{c_B} = 0$, deoarece în punctul B corpul se opreşte, se obţine:

$\frac{mv_A^2}{2} + mg\ell(1-\cos\alpha) = mg\ell \Rightarrow v_A = \sqrt{2g\ell\cos\alpha} \Rightarrow v_A = 2$ m/s.

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul O şi punctul B: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Cum $E_{p_O} = 0$ şi $E_{c_B} = 0$ obţinem:

$E_{c_O} = E_{p_B} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell} \approx 2{,}83$ m/s.

c. Energia iniţială a corpului este $E_m = E_c + E_p = \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell = 0{,}4$ J.



28.a. Considerăm că în punctul cel mai de jos al traiectoriei energia potenţială este nulă. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare A şi punctul B, când firul devine orizontal: $E_{p_A} + E_{c_A} = E_{p_B} + E_{c_B}$. Deoarece corpul porneşte din repaus şi ajunge în final în repaus $E_{c_A} = 0$ şi $E_{c_B} = 0$, astfel $E_{p_A} = E_{p_B} \Rightarrow mgh_A = mgh_B \Rightarrow h_B = h_A = \ell(1-\cos\alpha)$

$\Rightarrow h_B = 20$ cm $\Rightarrow$ corpul urcă până la înălţimea de la care a plecat.

b. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul A şi poziţia verticală O: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$. Cum $E_{c_A} = 0$ şi $E_{p_O} = 0$ obţinem:

$$mg\ell(1-\cos\alpha) = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} = 2 \text{ m/s}.$$

c. $L_G = L_{G_{AO}} + L_{G_{OB}} = mgh_A - mgh_B = mg(h_A - h_B) = 0$, deoarece punctul A şi punctul B se află pe aceeaşi orizontală, astfel că $h_A = h_B$.

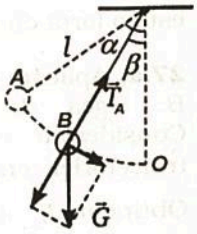
29.a. Lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate este $L_G = mg\ell(1-\cos\alpha)$=5J

b. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare A şi poziţia de echilibru O: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$. Deoarece $E_{c_A} = 0$ şi $E_{p_A} = 0$ obţinem $mg\ell(1-\cos\alpha) = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} \approx 3{,}16$ m/s

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între poziţia de echilibru O şi punctul în care E_c=E_p, astfel că $E_{c_O} + E_{p_O} = E_c + E_p \Rightarrow E_{c_O} = 2E_p \Rightarrow$

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2mgh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{\ell(1-\cos\alpha)}{2} = 25 \text{ cm}$$

30.a. Considerăm că în punctul cel mai de jos al traiectoriei O, energia potenţială este nulă $E_{p_O} = 0$. Conservăn energia mecanică între punctele A şi O: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$.



Deoarece $E_{c_A} = 0$ obţinem:

$$mg\ell(1-\cos\alpha) = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} = 3 \text{ m/s}.$$

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele A şi B:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mg\ell(1-\cos\alpha) = \frac{mv_B^2}{2} + mg\ell(1-\cos\beta) \Rightarrow$$

$$v_B = \sqrt{2g\ell(\cos\beta - \cos\alpha)} \approx 2{,}56 \text{ m/s}.$$

c*. În punctul B impunem condiţia ca rezultanta forţelor pe direcţia firului să joace rol de forţă centripetă. Scalar obţinem:

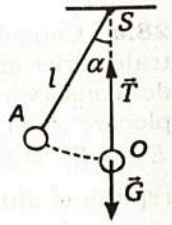
$$T_B - mg\cos\beta = \frac{mv_B^2}{\ell} \Rightarrow T_B = m\left(\frac{v_B^2}{\ell} + g\cos\beta\right) \Rightarrow T_B = mg(3\cos\beta - 2\cos\alpha).$$

Particularizăm pentru: $\beta = \alpha = 60^0 \Rightarrow T_A = mg\cos\alpha = 0{,}5$ N.

Pentru $\beta = 30^0 \Rightarrow T_B = mg(3\cos\beta - 2\cos\alpha) = 1{,}595$ N.

Pentru $\beta = 0^0 \Rightarrow T_O = mg(3 - 2\cos\alpha) = 2$ N.

În poziţia de plecare A, tensiunea în fir este minimă, iar în poziţia de echilibru O (poziţia verticală), tensiunea în fir este maximă.



31.a. Tensiunea în cablu este maximă când cablul se află în poziţie verticală. În această poziţie, rezultanta tensiunii şi a greutăţii joacă rol de forţă centripetă. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar

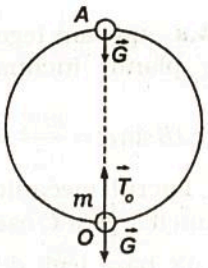
scalar: $T - mg = \frac{mv_0^2}{\ell}$, unde ℓ este lungimea firului.

Cum $T = 2mg \Rightarrow mg = \frac{mv_0^2}{\ell} \Rightarrow v_0 = \sqrt{g\ell}$ =10 m/s

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele *O* şi *A*, unde se opreşte corpul. Considerăm că $E_{p_O} = 0$ şi deoarece $E_{c_A} = 0$, obţinem

$$E_{c_O} = E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v_0^2}{2g\ell} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0.$$

c. Pentru ca acest corp să poată să descrie cercul în plan vertical, trebuie ca în *A*, tensiunea în cablu să fie mai mare sau cel puţin egală cu zero. Considerăm cazul cel mai defavorabil când tensiunea din cablu în *A* este nulă. În acest caz în punctul *A*, greutatea joacă rol de forţă centripetă, astfel că:



$G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_A^2}{\ell} \Rightarrow v_A^2 = g\ell$. Aplicăm între punctele *A* şi *O* legea de conservare a energiei mecanice. $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$ şi deoarece $E_{p_O} = 0$ obţinem

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mg2\ell \Rightarrow v_0^2 = v_A^2 + 4g\ell = 5g\ell.$$

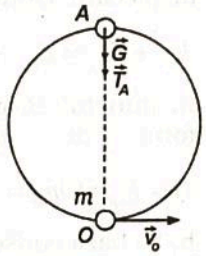
Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului în punctul *O* şi impunem condiţia ca rezultanta forţelor să joace rol de forţă centripetă: $\vec{T}_0 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar scalar obţinem

$T_0 - mg = \frac{mv_0^2}{\ell} \Rightarrow T_0 = mg + \frac{mv_0^2}{\ell} = 6mg = 1{,}2$ kN$\Rightarrow$ pentru ca acesst corp să poată să descrie un cerc în plan vertical trebuie ca firul să suporte o forţă de rupere minimă de cel puţin şase ori mai mare decât greutatea corpului susţinut.

32.a. Deoarece E_{P_O}=0 energia iniţială a corpului este $E_{m_0} = E_{c_0} + E_{p_0} = \frac{mv_0^2}{2} = 10$ J

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare *O* şi punctul cel mai de sus al traiectoriei *A*. Obţinem: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_A} + E_{p_A}$

$$\Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + 2mg\ell \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 - 4g\ell} \approx 8{,}944 \text{ m/s}.$$



c*. Reprezentăm forţele care se exercită aupra corpului în punctul superior al traiectoriei şi impunem condiţia ca rezultanta lor să joace rol de forţă centripetă: $\vec{T}_A + \vec{G} = \vec{F}_{cpA}$, iar scalar obţinem:

$$T_A + mg = \frac{mv_A^2}{\ell} \Rightarrow T_A = m\left(\frac{v_A^2}{\ell} - g\right) = m\left(\frac{v_0^2}{\ell} - 5g\right) = 30 \text{ N}.$$

33*.a. Alegem $E_{p_0} = 0$ şi aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele *A* şi *O*: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$.

Cum $E_{c_A} = 0 \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_0} \Rightarrow mg\ell = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell} = 3$ m/s.

b. Pentru a putea descrie cercul cu raza $\ell - x$, corpul trebuie să ajungă în punctul superior al cercului. Considerăm că în punctul B tensiunea în fir este nulă, iar greutatea joacă rol de forță centripetă, astfel că: $G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_B^2}{\ell - x} \Rightarrow v_B^2 = g(\ell - x)$. Aplicăm între punctele A și B legea de conservare a energiei mecanice astfel că: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow$

$mg\ell = \frac{mv_B^2}{2} + 2mg(\ell - x) \Rightarrow x = \frac{3\ell}{5} = 27$ cm, deoarece raza cercului este ℓ-x.

c. Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate este: $L_G = mg(\ell - OB) = mg(2x - \ell) = \frac{mg\ell}{5} = 0{,}9$ J.

34.a. Aplicăm legea de conservare a energiei cinetice între punctele A și B aflate pe planul înclinat: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Cum $E_{c_A} = 0$ și $E_{p_B} = 0$ obținem:

$mgAB\sin\alpha = \frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gAB\sin\alpha} \approx 8{,}94$ m/s

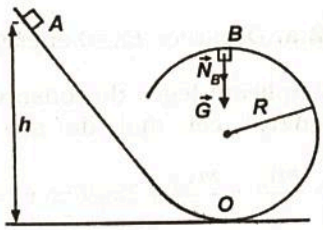
b. Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la deplasarea acestuia între punctele A și C este: $L_{G_{AC}} = mg(h - R) = mg(AB\sin\alpha - R) = 15$ J

c. Pe baza legii de conservare a energiei cinetice între punctele A și C obținem: $E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow E_{c_C} = mg(AB\sin\alpha - R) = 15$ J

d. Utilizăm legea de conservare a energiei cinetice între punctele A și punctul D în care energia cinetică este egală cu energia potențială: $E_{p_A} = E_{c_D} + E_{p_D} \Rightarrow$

$E_{p_A} = 2E_{p_D} \Rightarrow mgAB\sin\alpha = 2mgh_D \Rightarrow h_D = \frac{AB\sin\alpha}{2} = 2$ m

35*.a. Considerăm că în punctul cel mai de jos al buclei energia potențială este nulă, astfel că $E_{p_0} = 0$. Deoarece mișcarea montagne rousse-ului decurge fără frecare, aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele A și B, unde B este punctul cel mai sus al buclei, iar punctul A este cel de plecare. Obținem:



$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mgh = \frac{mv_B^2}{2} + 2mgR$ (1)

În punctul B, greutatea joacă rol de forță centripetă deoarece presupunem că forța de apăsare asupra șinei este nulă. Scalar obținem:

$G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow v_B^2 = gR$ (2). Din (1) și (2) obținem: $h = \frac{5R}{2} = 10$ m.

b. Pe baza conservării energiei mecanice între punctele A și B obținem:

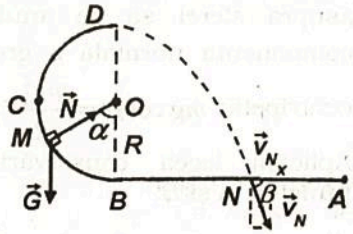
$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mv_B^2}{2} + 2mgR \Rightarrow v_B = \sqrt{v^2 + 2g(h - 2R)} \Rightarrow$

$v_B = \sqrt{v^2 + gR} = 7$ m/s.

c. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului în punctul B și impunem condiția ca rezultanta forțelor să joace rol de forță centripetă. Vectorial: $\vec{G}+\vec{N}_B=\vec{F}_{cp}$, iar scalar:

$$G+N_B=F_{cp}\Rightarrow mg+N_B=\frac{mv_B^2}{R}\Rightarrow N_B=m\left(\frac{v_B^2}{R}-g\right)=\frac{mv^2}{R}=1845\text{ N}$$

36*.a. Alegem valoarea zero a energiei potențiale pentru toate punctele planului orizontal. Pentru ca acest corp să poată să descrie jgheabul semicircular BCD, în punctul D, greutatea corpului trebuie să joace rol de forță centripetă, deoarece presupunem că acest corp nu apasă asupra jgheabului. Scalar obținem:



$$G=F_{cp}\Rightarrow mg=\frac{mv_D^2}{R}\Rightarrow v_D^2=gR$$

Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele A și D. Obținem:

$$E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_D}+E_{p_D}\Rightarrow\frac{mv_A^2}{2}=\frac{mv_D^2}{2}+2mgR\Rightarrow v_A=\sqrt{5gR}=5\text{ m/s}.$$

b. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului în punctul M și impunem condiția ca rezultanta forțelor pe direcția normalei să joace rol de forță centripetă. Obținem: $N_M-mg\cos\alpha=\frac{mv_M{}^2}{R}\Rightarrow N_M=m\left(\frac{v_M{}^2}{R}+g\cos\alpha\right)$.

Aplicăm conservarea energiei mecanice între punctele A și M:

$$E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_M}+E_{p_M}\Rightarrow\frac{mv_A^2}{2}=\frac{mv_M^2}{2}+mgR(1-\cos\alpha)\Rightarrow v_M{}^2=v_A^2-2gR(1-\cos\alpha)\Rightarrow$$

$$v_M{}^2=gR(3+2\cos\alpha)\Rightarrow N_M=3mg(1+\cos\alpha)=9\text{ N}.$$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare A și punctul N unde corpul lovește solul: $E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_N}+E_{p_N}$.

Cum $E_{p_A}=E_{p_N}=0\Rightarrow E_{c_A}=E_{c_N}\Rightarrow v_N=v_A=5$ m/s $\Rightarrow$ corpul lovește solul cu aceeași viteză cu care a plecat, dar direcția vectorului viteză este diferită.

d. Din desen $\cos\beta=\frac{v_{N_x}}{v_N}$. Cum pe orizontală, după ce părăsește jgheabul semicircular, corpul are o mișcare rectilinie și uniform cu viteza $v_{N_x}=v_D=\sqrt{gR}\Rightarrow\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0{,}447$

37.a. Lucrul mecanic efectuat de greutate la deplasarea corpului din A în B este $L_G=mgh_{AB}=mg(h_A-h_B)=mg(2R-h)$=32 mJ

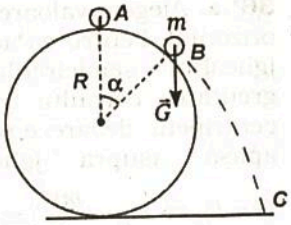
b. Utilizăm legea de legea de conservare a energiei mecanice între punctele A și B. $E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_B}+E_{p_B}\Rightarrow mg2R=\frac{mv_B^2}{2}+mgh\Rightarrow v_B=\sqrt{2g(2R-h)}\approx 1{,}79$ m/s

c. Utilizăm legea de legea de conservare a energiei mecanice între punctul A și punctul C aflat pe sol. Obținem: $E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_C}+E_{pC}\Rightarrow mg2R=\frac{mv_C^2}{2}\Rightarrow$

$v_B = 2\sqrt{gR} \approx 4{,}38$ m/s

d. Pe baza legii conservării energiei mecanice, energia totală a corpului când acesta se află față de sol la o înălțime egală cu raza sferei este $E_m = E_{p_A} = 2mgR = 192$ mJ

38*.a. Pentru ca să se poată desprinde de sferă în punctul *B*, trebuie ca forța de apăsare exercitată de corp asupra sferei să se anuleze, astfel că $N_B = 0$, iar componenta normală a greutății să joace rol de forță centripetă: $mg\cos\alpha = \frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow v_B^2 = gR\cos\alpha$ (1)



Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele *A* și *B*:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mg2R = \frac{mv_B^2}{2} + mg(R + R\cos\alpha) \quad (2)$$

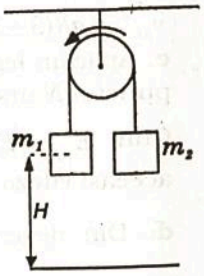
Din (1) și (2) $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \approx 2{,}83$ m/s.

b. $h_B = R(1+\cos\alpha) = 2$ m, reprezintă înălțimea față de sol la care se desprinde corpul de sferă.

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare *A* și punctul în care corpul ajunge la sol *C*, deoarece mișcarea se face fără frecare:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow 2mgR = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{4gR} \approx 6{,}93 \text{ m/s}.$$

39.a. Energia totală a sistemului de corpuri, considerând că la sol energia potențială este nulă este: $E_t = (m_1 + m_2)gH = 100$ J, deoarece corpurile se află în repaus și au doar energie potențială.



b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistemul de corpuri. La sol energia totală a sistemului de corpuri este $E_t = E_c + E_p = \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} + m_1 g2H$, deoarece când ajunge la sol corpul al doilea, ambele corpuri au aceeași viteză, iar corpul m_1 se află la înălțimea $2H$ față de sol. Obținem:

$$(m_1+m_2)gH = \frac{(m_1+m_2)}{2}v^2 + 2m_1gH \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(m_2-m_1)gH}{m_1+m_2}} = 2 \text{ m/s}.$$

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul 1, care se află la înălțimea $2H$ și se mișcă vertical în sus. Astfel $E_i = E_f \Rightarrow E_c + E_p = E_{p_f} \Rightarrow$

$$\frac{m_1v^2}{2} + 2m_1gH = m_1gh \Rightarrow h = 2H + \frac{v^2}{2g} = H\left(2 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right) = \frac{H(3m_2+m_1)}{m_1+m_2} = 2{,}2 \text{ m}.$$

40.a. Cum $F_1 = kx_1$ constanta elastică a resortului este $k = F_1 / x_1 = 500$ N/m

b. Lucrul mecanic efectuat de forța elastică în procesul comprimării cu x_1 este

$$L = -F_{el_m}x_1 = -\frac{kx_1^2}{2} = -\frac{F_1x_1}{2} = -2{,}5 \text{ J}$$

c. Deoarece forța elastică este o forță de tip conservativ, pentru sistemul corp-resort se aplică legea conservării energiei mecanice, astfel că energiea potențială de deformare a resortului se transformă în energia cinetică a corpului. Astfel

$$E_p = E_c \Rightarrow \frac{kx_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = x_1\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{F_1 x_1}{m}} = 10 \text{ m/s}$$

41.a. Aplicăm conservarea energiei mecanice între punctul *O* de pe sol și punctul A, astfel că $E_{mO} = E_{mA} \Rightarrow E_{cO} = E_{cA} + E_{pA} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mgh \Rightarrow$

$$v_A = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \approx 6{,}32 \text{ m/s}$$

b. Distanța parcursă de corp pe planul înclinat este $AB = \frac{h}{\sin\alpha} - \ell_0 = 4{,}8$ m

Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele *A* și *B*:

$\Delta E_{c_{AB}} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$, $L_{N,AB} = 0$,

$L_{G,AB} = mgh_{AB} = mgAB\sin\alpha$ și $L_{F_f,AB} = -F_f AB = -\mu NAB = -\mu mgAB\cos\alpha$, obținem

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = mgAB\sin\alpha - \mu mgAB\cos\alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gAB(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = 8\text{m/s}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între capătul resortului *B* și punctul *C* în care resortul este comprimat la maxim, astfel că:

$\Delta E_{c,BC} = L_{G,BC} + L_{F_{el},BC} + L_{N,BC}$.

$\Delta E_{c,BC} = -\frac{mv_B^2}{2}$, $L_{N,BC} = 0$, $L_{G,BC} = mgx\sin\alpha$, $L_{F_{el},BC} = -F_{el,BCm}x = -\frac{F_{elC}}{2}x = -\frac{kx^2}{2}$

obținem: $-\frac{mv_B^2}{2} = mgx\sin\alpha - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = \frac{mg\sin\alpha + \sqrt{m^2g^2\sin^2\alpha + kmv_B^2}}{k} \approx 8$ cm.

Lungimea resortului comprimat este $\ell = \ell_0 - x \approx 1{,}12$ m

d. Deoarece după ce lovește resortul mișcarea corpului se efectuează fără frecare, corpul revine după destinderea resortului în punctul *B* cu aceeași viteză v_B=8 m/s, conform legii conservării energiei. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între capătul resortului *B* și punctul *D* unde se oprește corpul:

$\Delta E_{c,BD} = L_{G,BD} + L_{F_f,BD} + L_{N,BD}$. Cum $\Delta E_{c,BD} = -\frac{mv_B^2}{2}$, $L_{N,BD} = 0$,

$L_{G,BD} = -mgBD\sin\alpha$ și $L_{F_f,BD} = -F_f BD = -\mu mgBD\cos\alpha$ obținem:

$$-\frac{mv_B^2}{2} = -mgBD\sin\alpha - \mu mgBD\cos\alpha \Rightarrow BD = \frac{v_B^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \approx 4{,}26 \text{ m}$$

3.5. Impulsul punctului material. Teorema de variaţie a impulsului punctului material.

1. Conform definiţiei $E_c = \frac{mv^2}{2}$ şi $p = mv \Rightarrow m = \frac{p}{v} \Rightarrow E_c = \frac{pv}{2} \Rightarrow$

$v = \frac{2E_c}{p} = 10$ m/s şi $m = \frac{p^2}{2E_c} = 160$ g.

2. Cum $E_c = \frac{mv^2}{2}$ şi $p = mv \Rightarrow v = \frac{p}{m} \Rightarrow E_c = \frac{p^2}{2m}$. Dacă $p' = 3p$

$\Rightarrow E_c' = \frac{p'^2}{2m} = \frac{9p^2}{2m} = 9E_c \Rightarrow$ energia cinetică creşte de 9 ori.

3. După $t_1 = 2$ s, viteza corpului este $v = 10$ m/s şi impulsul corpului este $p = mv = 5$ Ns. $\Delta p = p - p_0$, unde p_0 reprezintă impulsul iniţial al corpului $p_0 = mv_0 = 10$ Ns, deoarece viteza iniţială la $t = 0$ este $v_0 = 20$ m/s $\Rightarrow \Delta p = -5$Ns, deoarece impulsul corpului scade în primele două secunde de la începerea mişcării

4. Conform legii cordonatei $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, prin metoda identificării coeficienţilor obţinem: $x_0 = 4$ m, $v_0 = -8$ m/s şi $a = 12$ m/s², astfel că la momentul iniţial de timp $t = 0$, impulsul corpului este $p_0 = mv_0 = -8$ Ns.
Legea vitezei este $v = v_0 + at = -8 + 12t$ şi prin urmare la momentul $t = 2$ s$\Rightarrow v = 16$ m/s, iar $p = mv = 16\ N \cdot s \Rightarrow \Delta p = p - p_0 = 24$ Ns.

5. Deoarece corpul are o mişcare uniform accelerată cu viteza iniţială v_0, legea vitezei este de forma $v = v_0 + at = 2 + 2t$, iar după $t = 4$ s de la începerea mişcării corpul are viteza $v = 10$ m/s$\Rightarrow p = mv = 2$ Ns.

6. Aplicăm pentru sistemul minge – sol legea conservării energiei mecanice, astfel că energia potenţială a mingii se transformă în energie cinetică la sol: $E_p = E_c \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 10$ m/s $\Rightarrow p = mv = 4$ Ns este impulsul corpului la sol.

7. Aflăm înăţimea maximă la care poate ajunge mingea aplicând legea conservării energiei mecanice, astfel că energia cinetică la sol a mingii de pinpong se transformă în energie potenţială gravitaţională: $E_{c_{sol}} = E_p \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$.

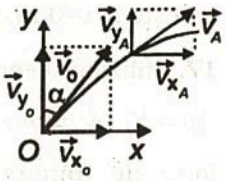
Aflăm viteza la înălțimea $h = \frac{h_{max}}{3} = \frac{v_0^2}{6g}$, aplicând legea de conservare a energiei mecanice între punctul aflat la sol și cel aflat la înălțimea h.

$$E_{c_{tot}} = E_c + E_p \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \pm v_0\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow p = \pm mv_0\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm 0{,}2 \text{ kg·m/s}.$$

Se obțin două valori ale impulsului corespunzătoare cazului de urcare și respectiv de coborâre prin punctul aflat la o treime din înălțimea maximă la care poate ajunge corpul.

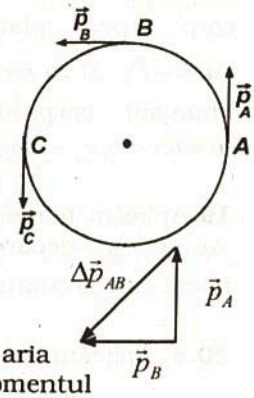
8. Mișcarea paharului corespunde aruncării pe orizontală a unui corp. Cum vectorul viteză este întotdeauna tangent la traiectorie, îl vom descompune în cele două componente v_x și v_y, astfel că $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Pe orizontală paharul se mișcă uniform cu viteza v_0, astfel că $v_x = v_0$, iar pe verticală cade liber cu accelerația gravitațională, astfel încât $v_y = gt \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2} \Rightarrow p = mv = m\sqrt{v_0^2 + g^2t^2} \Rightarrow$ p=0,447 N·s.

9. Mișcarea ventuzei este o aruncare sub un unghi, iar vectorul viteză tangent în permanență la traiectorie se descompune în două componente, una orizontală și una verticală. Pe orizontală ventuza are o mișcare rectilinie și uniformă astfel că $v_x = v_0 \cos\alpha$, iar pe verticală are o aruncare de jos în sus, astfel că $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt$.



$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0 gt\sin\alpha} \approx 5{,}2 \text{ m/s și } p = mv = 0{,}26 \text{ kg·m/s}.$$

10. Între punctele diametral opuse A și C, variația impulsului este $\Delta\vec{p}_{AC} = \vec{p}_C - \vec{p}_A$, iar scalar $|\Delta p_{AC}| = mv + mv = 2mv = 1280$ Ns, deoarece impulsurile sunt egale în modul ($p_C = p_A = mv$) și au sensuri contrare.



După ce atletul parcurge un sfert de pistă, între punctele A și B, $\Delta\vec{p}_{AB} = \vec{p}_B - \vec{p}_A$, iar scalar $|\Delta p_{AB}| = mv\sqrt{2} \approx 902{,}4$ Ns, deoarece impulsul în punctul B este perpendicular pe impulsul din punctul A, iar scalar $p_A = p_B = mv$.

11. Deoarece forța este reprezentată în funcție de timp, aria cuprinsă între curba forței, axa timpului și ordonata la momentul $t = 4$ s reprezintă fizic variația impulsului forței, astfel că: ΔH=21 Ns.

Pe baza teoremei de variație a impulsului: $\Delta p = \Delta H \Rightarrow p = \Delta H \Rightarrow mv = \Delta H$

deoarece inițial corpul se află în repaus și $p_0 = 0 \Rightarrow v = \frac{\Delta H}{m} = 21$ m/s.

12. Deoarece forța este reprezentată în funcție de timp, aria cuprinsă între curba forței și axa timpului semnifică fizic impulsul forței, astfel că: $\Delta H = \frac{F_0 \cdot t}{2}$.

Pe baza teoremei de variație a impulsului unui punct material:

$$\Delta H = \Delta p \Rightarrow p_f - p_i = \frac{F_0 \cdot t}{2} \Rightarrow mv - mv_0 = \frac{F_0 \cdot t}{2} \Rightarrow v = v_0 + \frac{F_0 \cdot t}{2m} = 15 \text{ m/s}.$$

13. Utilizând teorema de variație a impulsului unui punct material: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta p}{F} = 16$ s.

14. Aplicăm teorema de variație a impulsului unui punct material: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow mv = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = \frac{mv}{\Delta t} = 100$ N, deoarece inițial v_0=0m/s și p_0=0Ns

15. Aplicăm pentru glonte teorema de variație a impulsului: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow mv - mv_0 = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = \frac{m(v - v_0)}{\Delta t} = -750$ N. Semnul minus arată că această forță se opune mișcării glontelui și astfel îi micșorează acestuia impulsul.

16. Se utilizează teorema de variație a impulsului pentru tren: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow -mv_0 = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = -\frac{mv_0}{\Delta t} = -200$ kN, deoarece în final trenul se oprește și v=0 m/s. Semnul "–" ne arată că forța determinată frânează trenul.

17. Utilizăm teorema de variație a impulsului în cazul frânării mașinii: $\Delta p = F_f \cdot \Delta t \Rightarrow mv - mv_0 = F_f \cdot \Delta t \Rightarrow F_f = \frac{m(v - v_0)}{\Delta t} = -800$ N. Semnul "–" arată că forța de frânare micșorează impulsul mașinii, deoarece se opune mișcării acesteia.

18. Aplicăm teorema de variație a impulsului în cazul lansării cu frecare a unui corp pe plan orizontal. Vectorial: $\Delta \vec{p} = \vec{F}_f \cdot \Delta t$, iar scalar: $\Delta p = -F_f \cdot \Delta t \Rightarrow mv - mv_0 = -\mu mgt$, deoarece $F_f = \mu N = \mu mg$ și ea micșorează impulsul corpului pentru că se opune mișcării acestuia, astfel că $p = mv = mv_0 - \mu mgt = m(v_0 - \mu gt) = 1{,}6$ kg·m/s.

19. Aplicăm teorema de variație a impulsului în cazul căderii libere a corpului: $\Delta p = G \cdot \Delta t$, deoarece singura forță care acționează asupra corpului în cădere liberă este greutatea și $\Delta t = t \Rightarrow \Delta p = mgt = 15$ kg·m/s.

20. a. Aplicăm teorema de variație a impulsului $\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t \Rightarrow m(v - v_0) = F\Delta t$ (1) și cum $\Delta E_c = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2)$ (2) prin împărțirea relațiilor obținem:

$$\frac{\Delta E_c}{F\Delta t} = \frac{v + v_0}{2} \Rightarrow v = \frac{2\Delta E_c}{F\Delta t} - v_0 = 3 \text{ m/s}$$

b. Masa corpului este $m = \frac{F\Delta t}{v - v_0} = 1$ kg

c. Variația impulsului corpului este $\Delta p = F \cdot \Delta t = 2$ Ns

22.a. Aplicăm conservarea energiei mecanice între punctul A şi punctul B pentru corpul *m*. Alegem nulă energia potenţială gravitaţională în punctul B, astfel că

$$E_{mA} = E_{mB} \Rightarrow E_{pA} = E_{cB} \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 20 \text{ m/s}$$

b. Din definiţie lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare este $L_{Ff} = -F_f d = -\mu Mgd \Rightarrow L_{Ff} = -8 \text{ J}$

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul C şi punctul B pentru corpul *M*, astfel că: $\Delta E_{c,CB} = L_{G,CB} + L_{Ff,CB} + L_{N,CB}$.

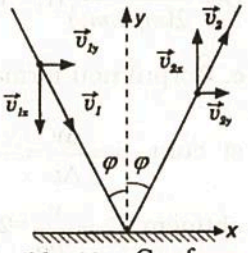
Cum $\Delta E_{c,CB} = -\frac{Mv_0^2}{2}$, $L_{G,CB} = 0$, $L_{N,CB} = 0$ şi $L_{Ff,CB} = -\mu Mgd$ obţinem

$$-\frac{Mv_0^2}{2} = -\mu Mgd \Rightarrow v_0 = \sqrt{2\mu gd} = 4 \text{ m/s}$$

d. Pe baza teoremei de variaţie a impulsului pentru corpul *m*, obţinem

$$F\Delta t = \Delta p = -mv \Rightarrow |F| = \frac{mv}{\Delta t} = 4 \text{ kN}$$

23.a. Variaţia impulsului mingii la ciocnirea normală cu podeaua este: $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = -2m\vec{v}_0 \Rightarrow |\Delta p| = 2mv_0$. Conform teoremei de variaţie a impulsului vectorial: $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$, iar scalar: $|\Delta p| = F\Delta t \Rightarrow F = \frac{|\Delta p|}{\Delta t} = \frac{2mv_0}{\Delta t} = 40$ kN, unde *F* este forţa pe care podeaua o exercită asupra mingii. Conform principiului al acţiunii şi reacţiunii al dinamicii mingea loveşte podeaua cu o forţă egală orientată perpendicular pe aceasta.



b. Ciocnirea mingii cu podeaua este perfect elastică şi mingea ricoşează cu o viteză egală şi sub un unghi egal faţă de normală. Observăm că în urma ciocnirii cu podeaua proiecţia vectorului viteză de-a lungul podelei, pe axa *Ox*, nu se modifică în timp ce proiecţia vectorului viteză pe o direcţie perpendiculară pe perete îşi schimbă sensul. Prin urmare impulsul mingii se modifică numai pe direcţia perpendiculară pe podea (axa *Oy*), ceea ce înseamnă că podeaua exercită asupra mingii o forţă perpendiculară pe ea. Conform principiului acţiunii şi reacţiunii mingea acţionează asupra podelei cu o forţă egală şi de sens contrar. Cum $\Delta p_y = -mv'_y - mv_y = -2mv_0\cos\varphi$ prin aplicarea teoremei de variaţie a impulsului obţinem:

$$|\Delta p_y| = F\Delta t \Rightarrow F = \frac{|\Delta p_y|}{\Delta t} = \frac{2mv_0\cos\varphi}{\Delta t} = 20 \text{ kN, deoarece } \varphi = 90^0 - \alpha = 60^0$$

3.6 Ciocniri plastice şi elastice

1.a. Energia cinetică iniţială a sistemului este $E_{ci} = \frac{mv^2}{2} = 112{,}5$ J

b. În urma procesului de ciocnire are loc un transfer de impuls de la corpul cu masa *m* spre corpul cu masa *M*. Din reprezentarea grafică a forţei în funcţie de

timp, se calculează impulsul transferat cu ajutorul ariei cuprinse între curba forței și axa timpului, astfel că $\Delta p = \frac{F_0 \cdot t}{2} = 10$ N·s.

Aplicăm teorema de variație a impulsului pentru fiecare corp. Pentru corpul cu masa m: $-\Delta p = mv'_1 - mv \Rightarrow v'_1 = v - \frac{\Delta p}{m} = 5$ m/s, deoarece acest corp transferă impulsul Δp corpului aflat în repaus și prin urmare viteza acestui corp scade.

Pentru corpul cu masa M: $-\Delta p = Mv'_2 \Rightarrow v'_2 = \frac{\Delta p}{M} = 2$ m/s.

b. Variația energiei cinetice a sistemului este: $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} \Rightarrow$

$\Delta E_c = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{Mv_2'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -90$ J $\Rightarrow$ pierderea energiei cinetice este de 90 J.

2.a. Aplicăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din cele două corpuri: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_c$, iar scalar obținem:

$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2} = 2$ m/s

b. Căldura degajată în acest proces provine din scăderea energiei cinetice a sistemului, astfel că: $Q = -\Delta E_c = E_{c_i} - E_{c_f} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} \Rightarrow$

$Q = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 + v_2)^2 = 24$ J

c. Corpul nou format are o mișcare uniform încetinită cu accelerația $a = \frac{F_f}{m} = \mu g$ și cum $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_c}{t} \Rightarrow v = v_c - \mu gt$. Când corpul se oprește $v=0$, astfel că obținem $t_{op} = \frac{v_c}{\mu g} = 2$ s

3.a. Aplicăm legea de conservare a impulsului pentru corpul nou format $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_c$. Deoarece corpurile se mișcă în sens contrar astfel că $\vec{v}_1 = \vec{v}$ și $\vec{v}_2 = -\vec{v}$ atunci $\vec{v}_c = 0$. Corpul nou format se oprește imediat după ciocnirea plastică a celor două corpuri.

b. Energia cinetică relativă totală este $E_{Crel} = \frac{2mv_{rel}^2}{2} = m(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = 4mv^2$. Vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire sunt $|v| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_{Crel}}{m}} = 2{,}5$ m/s

c. Călura degajată în procesul ciocnirii este:

$Q = -\Delta E_c = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v_c^2}{2} = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 = mv^2 = \frac{E_{Crel}}{4} = 25$ J

4.a. Aplicăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din glonte şi blocul de lemn: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m\vec{v}_o = (m+M)\vec{v}_c$, iar scalar: $mv_0 = (m+M)v_c \Rightarrow v_c = \frac{mv_0}{m+M}$ =2 m/s

b. Căldura degajată în urma ciocnirii este $Q = \frac{mM}{2(m+M)}v_0^2 = 198$ J

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corpul nou format între punctul de formare şi cel de oprire. $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow$ $-\frac{m_t v_c^2}{2} = -\mu m_t g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_c^2}{2\mu g}$ =2 m

5.a. Când proiectilul străbate blocul de lemn forţele care apar sunt de natură internă pentru sistem şi ele nu pot modifica impulsul total al sistemului. Deoarece în timpul interacţiunii cu proiectilului cu blocul neglijăm forţele de natură externă, conservăm impulsul sistemului. Astfel $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}_2$ şi scalar $m_1v_1 = m_1v'_1 + m_2v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1(v_1 - v'_1)}{m_2}$=0,8 m/s.

Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetrice pentru bloc între punctul de pornire şi cel de oprire $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow -\frac{m_2v_2^2}{2} = -\mu m_2 g d \Rightarrow \mu = \frac{v_c^2}{2gd}$ =0,16

b. Energia cinetică pierdută de proiectil este: $\Delta E = E_{cf} - E_{ci} = \frac{m_1}{2}(v'^2_1 - v_1^2) = -240$ J

c. $E_{C_{bloc}} = \frac{m_2v_2^2}{2}$ =0,32 J

6.a. Deoarece mişcarea vagonului se efectuează cu frecare, accelerația acestuia este $a = \frac{F_f}{m} = \mu g$. Utilizăm legea vitezei: $v = v_0 - a\Delta t = v_0 - \mu g t = 6$m/s

b. Aplicăm legea de conservare a impulsului la cuplarea vagoanelor şi aflăm viteza corpului nou format. Obţinem: $m_1v = (m_1 + m_2)v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1v}{m_1 + m_2} = 2$ m/s, iar căldura degajată prin ciocnire este:

$Q = |-\Delta E_c| = \frac{m_1v^2}{2} - \frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2} = \frac{m_1m_2v^2}{2(m_1+m_2)} = 1{,}2\ 10^5$ J.

c. Aplicăm pentru corpul nou format teorema de variaţie a energiei cinetice: $\Delta E_c = L_{F_f} \Rightarrow -\frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2} = -\mu(m_1+m_2)gs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_c^2}{2\mu g} = 20$ m.

7.a. Pentru a afla timpul după care corpurile se ciocnesc, scriem ecuaţiile coordonatelor şi impunem condiţia de întâlnire: $x_1 = x_2$. Alegem originea axelor de coordonate în punctul de unde porneşte corpul m_1.

Astfel: $x_1 = v_{01}t + \frac{a_1t^2}{2} = v_{01}t - \mu g\frac{t^2}{2}$, deoarece $a_1 = -\frac{F_{f_1}}{m_1} = -\mu g$ şi

$$x_2 = d - v_{02}t + \frac{a_2 t^2}{2} = d - v_{02}t + \frac{\mu g t^2}{2} \Rightarrow v_{01}t - \mu g\frac{t^2}{2} = d - v_{02}t + \frac{\mu g t^2}{2}$$

Din $x_1 = x_2 \Rightarrow \mu g t^2 - (v_{01} + v_{02})t + d = 0 \Rightarrow 2t^2 - 50t + 112{,}5 = 0$. Soluțiile ecuației sunt $t_1 = 2{,}5$ s și $t_2 = 22{,}5$ s. Soluția acceptată fizic este $t_1 = 2{,}5$ s, deoarece corpul 1 se oprește după $t_{op_1} = \frac{v_{01}}{\mu g} = 10$ s.

b. Aflăm vitezele corpurilor înainte de ciocnire, utilizând legile vitezei: $v_1 = v_{01} - \mu g t_i = 15$ m/s și $v_2 = -v_{02} + \mu g t_i = -25$ m/s

Aflăm viteza corpului nou format aplicând legea conservării impulsului:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 7 \text{ m/s}$$

Pentru a afla distanța parcursă până la oprire de corpul nou format se aplică teorema de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L \Rightarrow 0 - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = -\mu(m_1 + m_2)g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v^2}{2\mu g} = 12{,}25 \text{ m}$$

c. Variația energiei cinetice produsă la ciocnirea plastică este:

$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 = -1280 \text{ J},$$ unde semnul "–" arată că în procesul ciocnirii plastice energia cinetică a sistemului scade și se transformă în căldură

8.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul m_1

$$\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{m_1 v_0^2}{2} = -\mu m_1 g \ell \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g \ell} = 5 \text{ m/s}$$

b. Aplicăm legea de conservare a impulsului, astfel că $m_1 v = (m_1 + m_2)v_c \Rightarrow$

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 4 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul nou format între punctul de formare și sol: $E_c + E_p = E'_{c_{sol}} \Rightarrow \frac{m_t v^2}{2} + m_t g \ell = \frac{m_t v_{sol}^2}{2}$

$\Rightarrow v_{sol} = \sqrt{v^2 + 2g\ell}$. Impulsul noului corpul în momentul în care acesta atinge suprafața pământului este $p_{sol} = (m_1 + m_2)v_{sol} = (m_1 + m_2)\sqrt{v^2 + 2g\ell} = 10$ Ns

9.a. Corpul are o mișcare uniform încetinită, astfel că la un anumit moment se oprește. Cum $-g = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_o}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{v_0}{g} = 1$ s

b. Din teorema de variație a energiei cinetice între punctul *A* de pornire și punctul *B* unde se oprește corpul obținem lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului din momentul aruncării acestuia și până la anularea impulsului. Astfel:

$$\Delta E_{c,AB} = L_{G,AB} \Rightarrow L_{G,AB} = -\frac{m v_0^2}{2} = -10 \text{ J}$$

c. Aplicăm legea conservării energiei între punctul de plecare A şi punctul C unde corpul are viteza v_1. Astfel: $E_{mA} = E_{mC} \Rightarrow E_{cA} + E_{pA} = E_{cC} + E_{pC} \Rightarrow$

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_1^2}{2} + E_{pC} \Rightarrow \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_1^2}{2} + E_{pC} \Rightarrow E_{pC} = m\left(\frac{v_0^2 - v_1^2}{2}\right) + mgh = 10\text{J}$$

d. Deoarece $v_1 > v_0$ înseamnă că corpul se întoarce şi se deplasează spre Pământ, iar cele doi vectori viteză au sensuri diferite. Pe baza teoremei de variaţie a impulsului obţinem: $\Delta\vec{p} = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0$, iar scalar $\Delta p = m(v_0 + |v_1|)$=6 Ns

10.a. În procesul în care sare de pe scândură, broasca apasă scândura cu o forţă orientată vertical în jos, iar scândura acţionează vertical asupra broaştei cu o forţă orientată în sus şi egală conform principiului acţiunii şi reacţiunii. Aplicăm teorema de variaţie a impulsului broaştei pe verticală în momentul săriturii acesteia, pentru a determina forţa dezvoltată de scândură. Obţinem: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow mv_0 \sin\alpha = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = \frac{mv_0 \sin\alpha}{\Delta t} = 1$ kN, deoarece pe verticală impulsul iniţial al broaştei este zero (p_i=0).

b. Aplicăm conservarea impulsului pe direcţia orizontală pentru sistemul format din scândură şi broască, astfel că: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$.

Scalar: $0 = mv_0 \cos\alpha - Mv \Rightarrow v = \frac{mv_0 \cos\alpha}{M} \approx 2{,}16$ m/s

c. Energia cinetică a sistemului imediat după ce sare broasca este: $E_c = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}$=11,875 J.

11.a. Conform legilor de coordonate, corpurile au o mişcare rectilinie şi uniformă. Cum $x = x_0 + v_0 t \Rightarrow v_1 = 1$ m/s şi $v_2 = -3$ m/s reprezintă vitezele corpurilor în momentul întâlnirii.

b. Aplicăm legea conservării impulsului şi aflăm viteza corpului format după ciocnirea plastică: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -2$ m/s. Semnul – al vitezei comune arată că noul corp are viteza în sensul de mişcare al corpului 2.

Energia cinetică a sistemului imediat după ciocnire este $E_c = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = 8$ J.

c. Legea de mişcare a corpului nou format este: $x = x_i + v(t - t_i)$, unde x_i reprezintă coordonata la momentul întâlnirii t_i. Aflăm valoarea timpului de întâlnire din condiţia $x_1 = x_2 \Rightarrow 2 + t_i = 4 - 3t_i \Rightarrow t_i = 0{,}5$ s, iar $x_i = 2{,}5$ m. Obţinem legea de mişcare a corpului nou format $x = 2{,}5 - 2t$.

12.a. Primul corp are o mişcare rectilinie uniformă şi pe baza legii de mişcare $x_1 = x_{01} + v_1 t$ prin identificarea coeficienţilor obţinem viteza primului corp v_1=2 m/s. Al doilea corp are o mişcare uniform accelerată şi din legea coordonatei $x_2 = x_{02} + v_{02}t + a_2 t^2/2$ obţinem v_{02}=2 m/s şi a=10 m/s², astfel că viteza corpului

2 este $v_2 = v_{02} + at = 2 + 10t$. Aflăm momentul la care se ciocnesc corpurile din $x_1 = x_2 \Rightarrow t_f = 2$ s, astfel că v_2 =22 m/s

b. Pe baza legii conservării impulsului $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_c$, iar scalar: $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_c \Rightarrow v_c = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$ =12 m/s

c. Căldura degajată în ciocnire este $Q = \dfrac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_2 - v_1)^2 = \dfrac{m}{4}(v_2 - v_1)^2$ =50 J

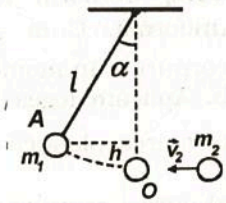
13.a. Deoarece ciocnirea dintre proiectil şi pendulul balistic este plastică, aplicăm legea conservării impulsului pentru sistem, astfel că $mv_0 = (M + m)v$, unde v_0 este viteza proiectilului. Datorită vitezei v, corpul nou format cu masa $M+m$ se ridică la înălţimea h. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru sistemul format din corpul cu masa $M + m$ şi Pământ. Astfel energia cinetică a sistemului se transformă în energie potenţială:

$E_c = E_p \Rightarrow \dfrac{(M + m)v^2}{2} = (M + m)gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$ =2 m/s.

b. Din cele două legi de conservare obţinem viteza iniţială a proiectilului $v_0 = \dfrac{(M + m)}{m}\sqrt{2gh} = 402$ m/s

c. Căldura care se degajă în procesul ciocnirii este

$Q = -\Delta E_c = E_{c_i} - E_{c_f} = \dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{(m + M)v^2}{2}$ =804 J



14.a. Aflăm viteza primului corp imediat înainte de ciocnire, aplicând legea de conservare a energiei mecanice. Considerând că E_{p0}=0, atunci $E_{p_A} = E_{c_O}$. Obţinem:

$m_1g\ell(1 - \cos\alpha) = \dfrac{m_1v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\alpha)} = 2$ m/s.

b. Utilizăm în cazul ciocnirii plastice conservarea impulsului pentru sistemul format din cele două corpuri: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$. Scalar: $m_1v_1 - m_2v_2 = 0$, deoarece în momentul ciocnirii corpul al doilea se deplasează în sens opus, iar după ciocnire sistemul de corpuri se opreşte. Obţinem $v_2 = \dfrac{m_1v_1}{m_2}$ =4 m/s.

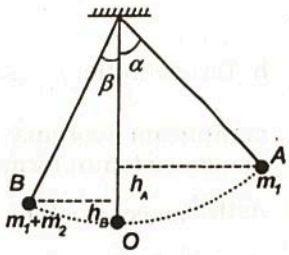
c. Căldura degajată în cursul ciocnirii plastice provine din scăderea energiei cinetice a sistemului de corpuri:

$Q = -\Delta E_c = E_{c_1} + E_{c_2} = \dfrac{m_1v_1^2}{2} + \dfrac{m_2v_2^2}{2} = 6$ J, deoarece $E_{cf} = 0$.

15.a. Aflăm viteza primului corp imediat înainte de ciocnire, aplicând legea de conservare a energiei mecanice. Considerăm că $E_{p_0} = 0 \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_O}$. Obţinem:

$m_1g\ell(1 - \cos\alpha) = \dfrac{m_1v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\alpha)} = 4$ m/s.

b. Aflăm viteza v a corpului nou format dacă după ciocnirea plastică acesta se ridică astfel că firul formează cu verticala unghiul β. Aplicăm pentru corpul nou format legea de conservare a energiei mecanice, astfel că



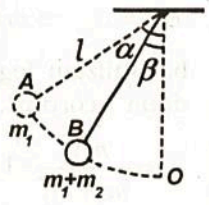
$E_{c_O} = E_{p_B} \Rightarrow \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = (m_1+m_2)g\ell(1-\cos\beta) \Rightarrow$

$v = \sqrt{2g\ell(1-\cos\beta)} \approx 2{,}07$ m/s.

Aflăm viteza corpului al doilea, dacă ciocnirea corpurilor este plastică. Utilizăm legea de conservare a impulsului: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}$. Considerăm primul caz în care după ciocnirea plastică firul deviază ca în figură.

Obținem scalar $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1+m_2)v \Rightarrow v_2 = \frac{m_1v_1-(m_1+m_2)v}{m_2} \approx 36{,}53$ m/s

Considerăm cazul în care după ciocnirea plastică firul deviază de aceeași parte a verticalei ca în figură.



$m_1v_1 - m_2v_2 = -(m_1+m_2)v \Rightarrow v_2 = \frac{m_1v_1+(m_1+m_2)v}{m_2} \approx 123{,}47$ m/s.

c. Calculăm căldura degajată în cele două cazuri:

$Q = -\Delta E_c = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2 \Rightarrow$

$Q = \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1+v_2)^2$, deoarece corpurile 1 și 2 se deplasează în sens opus.

Obținem: $Q_1 \approx 78{,}22$ J și $Q_2 \approx 773{,}74$ J.

16.a. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul m_1 între punctul de plecare și punctul inferior al traiectoriei astfel că: $E_c + E_p = E'_c \Rightarrow$

$\frac{m_1v_0^2}{2} + m_1g\ell = \frac{m_1v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2+2g\ell}$ =6 m/s

b. Utilizăm legea de conservare a impulsului $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 = (m_1+m_2)\vec{v}_c$ și scalar $m_1v_1 = (m_1+m_2)v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1v_1}{m_1+m_2}$ =4 m/s. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul nou format între punctul de formare și cel de oprire. Astfel $E'_c = E'_p \Rightarrow \frac{m_1v_c^2}{2} = m_1g\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v_c^2}{2g\ell} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0$

c. $\frac{E_{mi}}{E_{mf}} = \frac{m_1(v_0^2+2g\ell)}{(m_1+m_2)v_c^2}$ =1,5, deoarece prin ciocnire sistemul pierde energie care se degajă sub formă de căldură

17.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul și baza jgheabului. Astfel $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$. Cum $\Delta E_c = \frac{mv^2}{2}$, L_N=0 și $L_G = mg(h-h_0)$

obținem lucrul mecanic al forței de frecare $L_{Ff} = \frac{mv^2}{2} - mg(h-h_0) = -1$ kJ

b. Din definiție $L_{Ff} = -F_f d = -F_f \frac{h-h_0}{\sin\alpha} \Rightarrow F_f = -\frac{L_{Ff}\sin\alpha}{h-h_0} \approx 33{,}33$ N

c. Aplicăm teorema de conservare a impulsului numai pe direcția orizontală pentru sistemul format din sac și vagonet.

Astfel $mv\cos\alpha = (m+M)v_c \Rightarrow v_c = \frac{mv\cos\alpha}{m+M} \approx 1{,}44$m/s

d. Aplicăm teorema de variație a impulsului pentru sac pe direcția verticală. Astfel $\Delta p_y = F\Delta t \Rightarrow |F| = \frac{mv\sin\alpha}{\Delta t}$ =25kN, deoarece $\Delta p_y = p_{yf} - p_{yi} = 0 - mv\sin\alpha$

18.a. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele *A* și *C*:

$E_{mA} = E_{mC} \Rightarrow m_1 gh = \frac{m_1 v_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$ =4 m/s

b. Utilizăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din cele două corpuri: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 = (m_1+m_2)\vec{v}_c$, iar scalar: $m_1 v_1 = (m_1+m_2)v_c \Rightarrow$

$v_c = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}$ =1,6 m/s

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele *C* și *D* pentru sistemul nou format cu masa m_1+m_2.

Astfel $E_{cC} = E_{pD} \Rightarrow \frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2} = (m_1+m_2)g\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v_c^2}{2g\ell}$=0,744

19.a. Energia mecanică a corpului în vârful planului înclinat este

$E_{mA} = E_{cA} + E_{pA} = \frac{m_1 v_0^2}{2} + m_1 gh$ =80 J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele *A* și *B* pentru corpul m_1: $\Delta E_{c_{AB}} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = \frac{m_1 v_B^2}{2} - \frac{m_1 v_0^2}{2}$,

$L_{G,AB} = mgh = mg\ell\sin\alpha$ $L_{N,AB} = 0$, $L_{F_f,AB} = -F_f\ell = -\mu N\ell = -\mu m_1 g\ell\cos\alpha \Rightarrow$

$\frac{m_1 v_B^2}{2} - \frac{m_1 v_0^2}{2} = m_1 g\ell\sin\alpha - \mu m_1 g\ell\cos\alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 + 2g\ell(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$ =8m/s,

cu sinα=0,6 și cosα=0,8.

Energia mecanică la baza planului înclinat este $E_{mB} = E_{cB} = \frac{m_1 v_B^2}{2}$=64 J.

Diferența dintre E_{mB} și E_{mA} se explică prin existența forței de frecare care este o forță disipativă, astfel că o parte din energie se pierde. Se poate observa că $E_{mB} - E_{mA} = L_{Ff,AB}$.

c. Aplicăm conservarea impulsului în procesul de ciocnire perfect plastică, astfel că $\vec{p}_i = \vec{p}_f$, iar scalar $m_1 v_B = (m_1+m_2)v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1 v_B}{m_1+m_2}$ =1,6 m/s

d. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul nou format între punctul de jos şi punctul în care se opreşte sistemul de corpuri. Astfel $E_{mB} = E_{mC} \Rightarrow E_{cB} = E_{pC} \Rightarrow \frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2} = (m_1+m_2)gh' \Rightarrow h' = \frac{v_c^2}{2g}$ =12,8 cm.

S-a considerat nulă energia potenţială gravitaţională în punctul *B*.

20.a. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele *A* şi *C*, astfel că $\Delta E_{cAC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $\Delta E_{cAC} = E_{cC} - E_{cA} = \frac{m_1 v_1^2}{2}$, iar $L_N = 0$, $L_G = m_1 gh$ şi $L_{Ff} = L_{Ff_{AB}} + L_{Ff_{BC}} = -\mu_1 m_1 ghctg\alpha - \mu_2 m_1 gBC$, astfel că:

$\frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 gh - \mu_1 m_1 ghctg\alpha - \mu_2 m_1 gBC \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(h - \mu_1 hctg\alpha - \mu_2 BC)}$ =4 m/s

b. Căldura degajată la ciocnirea celor două corpuri este

$Q = -\Delta E_c = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1+m_2)}$ =9,6 J

c. Din legea conservării impulsului în procesul ciocnirii aflăm viteza comună a corpurilor: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 = (m_1+m_2)\vec{v}_c$, iar scalar: $m_1 v_1 = (m_1+m_2)v_c \Rightarrow$ $v_c = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}$ =1,6 m/s.

Aplicăm legea conservării energiei între punctul *C* şi punctul de pe jgheab în care corpul se opreşte. Astfel $E_{m_C} = E_{m_D} \Rightarrow \frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2} = (m_1+m_2)gh \Rightarrow h = \frac{v_c^2}{2g} \Rightarrow$

h=12,8 cm

21.a. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele *A* şi *B*: $\Delta E_{c_{AB}} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = \frac{mv_B^2}{2}$, $L_{N,AB} = 0$, $L_{G,AB} = mgh$ iar $L_{F_f,AB} = -F_f AB \Rightarrow L_{F_f,AB} = -\mu N \frac{h}{\sin\alpha} = -\mu mg\cos\alpha \frac{h}{\sin\alpha} = -\mu mghctg\alpha$ obţinem:

$\frac{mv_B^2}{2} = mgh - \mu mghctg\alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh(1-\mu ctg\alpha)}$ =4 m/s

b. Aplicăm conservarea impulsului la cuplarea corpurilor, astfel că $\vec{p}_i = \vec{p}_f$, iar scalar: $mv_B = (m+m')v \Rightarrow mv_B = \left(m + \frac{m}{3}\right)v \Rightarrow v = \frac{3v}{4}$ =3 m/s

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corpul nou format între punctele *B* şi *E*: $\Delta E_{c,BE} = L_{G,BE} + L_{F_f,BE} + L_{N,BE}$.

Cum $\Delta E_{c,BE} = \frac{m_t v^2}{2}$, $L_{N,BE} = 0$, $L_{G,BE} = -m_t gh_{BE} = -m_t gBE\sin\alpha$ şi

$L_{Ffotal} = L_{Ff,AC} + L_{Ff,CE} = -\mu m_t gd - \mu' m_t gCE\cos\alpha$, obţinem:

$\frac{m_t v^2}{2} = m_t gBE\sin\alpha - \mu m_t gd - \mu' m_t gCE\cos\alpha \Rightarrow CE = \frac{v^2 - 2\mu' gd}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$ =0,5m

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și D:

$\Delta E_{c,AD} = L_{G,AD} + L_{F_f,AD} + L_{N,AD}$, cu $\Delta E_{c,AD} = -\frac{mv_0^2}{2}$, $L_{G,AD} = mg(h_D - h_A) = 0$,

$L_{Ff,total} = L_{Ff,AB} + L_{Ff,BC} + L_{Ff,CD} = 2L_{Ff,AB} + L_{Ff,BC} = -2\mu mghctg\alpha - \mu' mgd \Rightarrow$

$-\frac{mv_0^2}{2} = -2\mu mghctg\alpha - \mu' mgd \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g(2\mu hctg\alpha + \mu' d)} \approx 3{,}16\text{m/s}$

22.a. Energia mecanică a corpului de masă m_1 este $E_m = E_c + E_p = E_p = m_1gh = m_1g\ell\sin\alpha \Rightarrow E_m$=1,2 J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul m_1 între punctul de plecare și baza planului înclinat, astfel că $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$. Cum

$\Delta E_c = \frac{m_1v_1^2}{2}$, L_N=0, $L_G = m_1gh = m_1g\ell\sin\alpha$ și $L_{Ff} = -F_f\ell = -\mu_1 N\ell = -\mu_1 m_1 g\ell\cos\alpha$,

obținem: $\frac{m_1v_1^2}{2} = m_1g\ell\sin\alpha - \mu_1 m_1 g\ell\cos\alpha \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)}$=2 m/s.

Deoarece corpul are o mișcare uniform accelerată, atunci

$\ell = v_m t = \frac{v_1}{2}t \Rightarrow t = \frac{2\ell}{v_1}$=0,8 s

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul nou format din momentul formării și până în momentul opririi. Astfel $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$, cu

$\Delta E_c = 0 - E_{ci} = -\frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2}$, $L_G = 0$, $L_N = 0$ și $L_{Ff} = -\mu_2(m_1+m_2)gd_2$. Obținem:

$-\frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2} = -\mu_2(m_1+m_2)gd_2 \Rightarrow v_c = \sqrt{2\mu_2 gd_2}$ =0,6 m/s

d. Aflăm viteza corpului m_1 imediat înainte de ciocnire. Aplicăm teorema de conservare a impulsului pentru sistemul de corpuri format prin ciconire. Astfel $\vec{p}_i = \vec{p}_f$, iar scalar, $m_1v_2 = (m_1+m_2)v_c = 3m_1v_c \Rightarrow v_2 = 3v_c$=1,8 m/s

Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul m_1 între baza planului înclinat și punctul de ciocnire. Astfel $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$, cu

$\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1} = \frac{m_1v_2^2}{2} - \frac{m_1v_1^2}{2}$, $L_G = 0$, $L_N = 0$ și $L_{Ff} = -\mu_2 m_1 gd_1$. Obținem:

$\frac{m_1v_2^2}{2} - \frac{m_1v_1^2}{2} = -\mu_2 m_1 gd_1 \Rightarrow d_1 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2\mu_2 g}$=38 cm

23.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul C_1 între punctel A și B, astfel că $\Delta E_{c_{AB}} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}$. Cum $L_{N,AB} = 0$, $L_{G,AB} = 0$,

$L_{F_f,AB} = -F_f AB = -\mu m_1 gd$ iar $\Delta E_{c_{AB}} = E_{cB} - E_{cA} = \frac{m_1v_B^2}{2} - \frac{m_1v_0^2}{2}$ obținem:

$\frac{m_1v_B^2}{2} - \frac{m_1v_0^2}{2} = -\mu m_1 gd \Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd} \Rightarrow v_B$=3 m/s

b. Energia mecanică inițială a corpului C_2 este:

$E_{mi} = E_{Ci} + E_{pi} = E_{pi} = m_2 g\ell$=0,48 J

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul C_2 între punctul de plecare și punctul C, astfel că:

$E_{mi} = E_{mf} \Rightarrow E_{pi} = E_{cf} \Rightarrow m_2 g\ell = \frac{m_2 v_2^2}{2} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2g\ell}$. Impulsul corpului C_2, imediat înainte de impact este $p_2 = m_2 v_2 = m_2\sqrt{2g\ell}$ =0,24 NS

d. Aplicăm conservarea impulsului în momentul ciocnirii dintre corpurile C_1 și C_2 în punctul C, astfel că $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_B + m_2\vec{v}_2 = 0$, iar scalar

$m_1 v_B - m_2 v_2 = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{m_1 v_B}{v_2}$ =80 g

24.a. Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic pe primii 7 m, lucrul mecanic este: $L_F = A_{trapez} - A_{triunghi} = \frac{(2+5)40}{2} - \frac{2\cdot 40}{2}$ =80 J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice, astfel că: $\Delta E_c = L_F + L_{Ff}$.

Cum $\Delta E_c = E_{cf} = \frac{mv^2}{2}$, iar $L_{Ff} = -F_f x = -\mu mgx$, obținem:

$v = \sqrt{\frac{2}{m}(L_F - \mu mgx)} \approx 19{,}1$ m/s.

c. Aplicăm legea de conservare a impulsului pentru a afla viteza comună a corpului nou format: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$, astfel că scalar obținem $mv = (m+m_1)v_c \Rightarrow$ v_c=10m/s.

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul nou format, astfel că $\Delta E_c = L_{Ff} \Rightarrow -\frac{m_c v_c^2}{2} = -\mu m_c g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_c^2}{2\mu g}$ =20 m.

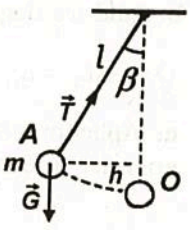
25.a. Aflăm viteza corpului lansat pe suprafața orizontală imediat înainte de ciocnire. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice:

$\Delta E_c = L_{F_f} \Rightarrow \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = -\mu Mgd \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd}$.

Aflăm viteza corpului nou format aplicând legea de conservare a impulsului:

$Mv = (M+m)v_c \Rightarrow v_c = \frac{Mv}{M+m} = 5$ m/s.

b. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru sistemul nou format, astfel că energia cinetică se transformă în energie potențială. Din $E_c = E_p \Rightarrow$



$\frac{(M+m)v_c^2}{2} = (M+m)g\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v_c^2}{2g\ell} = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 60°$.

c. Impunem condiția ca pe direcția firului rezultanta forțelor să joace rol de forță centripetă: $T - m_1 g\cos\beta = \frac{m_1 v_A^2}{\ell} \Rightarrow T = m_1\left(\frac{v_A^2}{\ell} + g\cos\beta\right)$. Aplicăm

pentru corpul cu masa $m_t = M + m$, legea conservării energiei mecanice: $E_{c_O} = E_{p_A} + E_{c_A} \Rightarrow \frac{m_t v_c^2}{2} = m_t g\ell(1-\cos\beta) + \frac{m_t v_A^2}{2}$

$\Rightarrow v_A^2 = v_c^2 - 2g\ell(1-\cos\beta) \Rightarrow T = (M+m)\left(\frac{v_c^2}{\ell} + 3g\cos\beta - 2g\right)$=4,785 N.

26.a. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corp între punctul de plecare şi punctul A. $E_p = E_c \Rightarrow mgR(1-\cos\alpha) = \frac{mv_A^2}{2} \Rightarrow$

$v_A = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha)} \approx 2{,}86$ m/s, deoarece $\alpha=45^0$

b. Utilizăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din cele două corpuri: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m\vec{v}_A = 2m\vec{v}_c$, astfel că $v_c=v_A/2$. Aplicăm pentru corpul nou format legea conserevării energiei mecanice între punctul A şi punctual de oprire: $E_{cA} = E_p \Rightarrow \frac{m_t v_c^2}{2} = m_t gh \Rightarrow h = \frac{v_A^2}{8g} = \frac{R(1-\cos\alpha)}{4} \approx 10{,}25$ cm

c. Căldura degajată în urma ciocnirii corpurilor este:

$Q = \frac{nv_A^2}{4} = \frac{mgR(1-\cos\alpha)}{2} \approx 41$mJ

27.a. Aplicăm legea de conservare a energiei pentru corpul care coboară din A în B, astfel că $E_{pA} = E_{cB} \Rightarrow mgR = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gR} \approx 4{,}47$ m/s

b. Pe baza conservării impulsului obţinem $mv_0 = 2mv \Rightarrow v = v_0/2 \approx 2{,}235$ m/s

c. Aplicăm legea de conservare a energiei pentru corpul nou format între punctul B şi punctul E: $E_{cB} = E_{pE} \Rightarrow \frac{m_t v^2}{2} = m_t gh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{v_0}{8g} = \frac{R}{4}$=25 cm

28.a. Aflăm viteza bilei lansată vertical de jos în sus imediat înainte de ciocnire. Aplicăm teorema de variaţie a impulsului:

$\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow m_1 v_1 - m_1 v_0 = -m_1 gt \Rightarrow v_1 = v_0 - gt = 40$ m/s. Aflăm viteza comună a corpului nou format în urma ciocnirii plastice utilizând legea de conservare a impulsului: $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 10$ m/s.

b. Căldura degajată la ciocnirea plastică este:

$Q = -\Delta E_c = E_{c_i} - E_{c_f} = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} v_1^2 = 600$ J

c. Aplicăm pentru corpul nou format prin ciocnirea plastică legea conservării energiei mecanice, considerând pe sol E_p=0 şi obţinem: $E_{c_i} + E_{p_i} = E_{p_f} \Rightarrow$

$\frac{m_1v^2}{2}+m_1gh=m_1gh_1 \Rightarrow h_1=h+\frac{v^2}{2g}$. Din legea coordonatei aflăm la ce înălțime urcă bila inainte de ciocnire: $h=v_0t-\frac{gt^2}{2}$=100 m. Obținem h_1=105 m.

29.a. Impunem condiția de întâlnire corpurilor: $x_1=x_2$ alegând originea axelor de coordonate pe sol. Cum $x_1=v_0t-\frac{gt^2}{2}$ și $x_2=h_{max1}-\frac{gt^2}{2}$, unde h_{max1} reprezintă înălțimea maximă la care poate ajunge primul corp. Din legea conservării energiei mecanice aflăm h_{max1}, astfel că

$E_c=E_p \Rightarrow \frac{m_1v_0^2}{2}=m_1gh_{max1} \Rightarrow h_{max1}=\frac{v_0^2}{2g}$. Obținem $v_0t-\frac{gt^2}{2}=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_f=\frac{v_0}{2g}$=2s

b. Aflăm vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire. Astfel $v_1=v_0-gt_i=\frac{v_0}{2}$ și $v_2=-gt_i=-\frac{v_0}{2}$.

Din legea conservării impulsului: $\vec{p}_i=\vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{v}_c$ și scalar $m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)v_c \Rightarrow v_c=\frac{(m_1-m_2)v_0}{2(m_1+m_2)}$=5 m/s

c. Căldura degajată în procesul ciocnirii este:

$Q=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2=\frac{m_1m_2v_0^2}{2(m_1+m_2)}$=20 J

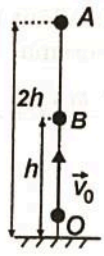
30.a. Alegând axa Ox cu originea pe sol și considerând origine de timp momentul pornirii primului corp atunci $x_1=v_0t-\frac{gt^2}{2}$ și $x_2=v_0(t-\Delta t)-\frac{g(t-\Delta t)^2}{2}$. Obținem condiția de întâlnire $x_1=x_2 \Rightarrow t_f=\frac{\Delta t}{2}+\frac{v_0}{2}$=3 s

b. Viteza corpului 1 imediat înainte de ciocnire este $v_1=v_0-gt_f=-10$ m/s. Pe baza teoremei de variație a impulsului obținem: $\Delta\vec{p}_1=m_1\vec{v}_1-m_1\vec{v}_0$, iar scalar $\Delta p_1=m_1(v_0+|v_1|)$=3 Ns

c. Viteza corpului 2 imediat înainte de ciocnire este $v_2=v_0-g(t_f-\Delta t)$=10 m/s. Pe baza legii conservării impulsului $\vec{p}_i=\vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{v}_c$ și scalar $m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)v_c \Rightarrow$ viteza corpului nou format dacă corpurile se ciocnesc plastic este v_c=0 m/s, deoarece $m_1=m_2=m$

d. Căldura degajată în procesul ciocnirii plastice este:

$Q=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{v}_2-\vec{v}_1)^2=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(v_2-v_1)^2=\frac{m}{4}(v_2-v_1)^2$=10 J



31.a. Din legea conservării energiei aflăm înălțimea la care se ridică corpul lansat de la sol $E_{cO}=E_{pB} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2}=mgh \Rightarrow h=\frac{v_0^2}{2g}$. Din legea

conservării energiei mecanice pentru corpul lăsat liber aflăm viteza acestuia înainte de ciocnire, astfel că:

$E_{pA} = E_{pB} + E_{cB} \Rightarrow mg2h = mgh + \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v_2^2 = gh = v_0^2 \Rightarrow v_2 = v_0$ =4 m/s

b. Din legea conservării impulsului obținem $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m\vec{v}_2 = 2m\vec{v}_c$, iar scalar $v_c = v_0/2 = 2$ m/s

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul format prin ciocnire între punctul de formare şi sol: $E_{pB} + E_{cB} = E_{csol} \Rightarrow E_{csol} = \frac{m_i v_c^2}{2} + m_i gh = \frac{5mv_0^2}{4} \Rightarrow$

E_{csol}=40 J

32.a. Impunem condiția de întâlnire: $x_1 = x_2$, astfel că deoarece $x_1 = h - \frac{gt^2}{2}$ şi $x_2 = v_{02}t - \frac{gt^2}{2}$ obținem $t_i = \frac{h}{v_{02}}$. Vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire sunt $v_1 = -gt_i = -\frac{gh}{v_{02}}$ şi $v_2 = v_{02} - gt_i = v_{02} - g\frac{h}{v_{02}}$. Pe baza legii conservării impulsului $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$ iar scalar $m_1v_1 + m_2v_2 = 0 \Rightarrow$

$-m_1\frac{gh}{v_{02}} + m_2\left(v_{02} - \frac{gh}{v_{02}}\right) = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)gh}{m_2}} \approx 46{,}24$ m/s

b. $\frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{m_1v_1^2}{m_2v_2^2} = \frac{m_1g^2h^2}{m_2\left(v_{02}^2 - gh\right)^2} = \frac{m_2}{m_1}$=0,6

c. Înălțimea la care s-a produs ciocnirea este $h_i = h - \frac{gt_i^2}{2} = \frac{m_1m_2h}{m_1+m_2}$=65 m

33.a. Aplicăm legea conservării energiei mecanice, astfel că energia cinetică în momentul lansării se transformă în energie potențială la înălțimea maximă: $E_c = E_p \Rightarrow \frac{m_1v_0^2}{2} = m_1gh_{max}$, astfel că înălțimea maximă la care ajunge primul corp este $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$. Aflăm viteza primului corp la înălțimea $h = \frac{3}{4}h_{max} = \frac{v_0^2}{8g}$, imediat înainte de ciocnire. Aplicăm legea conservării energiei mecanice: $E_{c_i} = E_{c_f} + E_{p_f} \Rightarrow \frac{m_1v_0^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + m_1gh \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \frac{v_0}{2} = 15$ m/s.

b. Aflăm timpul de mişcare al primului corp până momentul ciocnirii, aplicând teorema de variație a impulsului: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow m_1v_1 - m_1v_0 = -m_1g\Delta t \Rightarrow$

$-\frac{m_1v_0}{2} = -m_1g\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{v_0}{2g} = 1{,}5$ s.

c. Aflăm viteza corpului al doilea imediat înainte de ciocnirea plastică, dacă se cunoaşte că după ciocnire corpul nou format se opreşte. Aplicăm legea de conservare a impulsului: $p_i = p_f = 0 \Rightarrow m_1v_1 - m_2v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1v_1}{m_2} = 45$ m/s

34.a. Când omul urcă pe scară, forţele care apar sunt de natură internă pentru sistem, astfel că ele nu modifică impulsul total al sistemului. Prin urmare impulsul sistemului aerostat-om se conservă, astfel că: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$. Cum $\vec{p}_i = 0$, deoarece sistemul se află în repaus atunci $\vec{p}_f = 0 \Rightarrow m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2 = 0$, deoarece cu $\vec{v}_1$ am notat viteza omului faţă de sol şi cu $\vec{v}_2$ viteza aerostatului faţă de sol. Cum $\vec{u}$ este viteza relativă a omului în raport cu aerostatul, atunci $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + M(\vec{v}_1 - \vec{u}) = 0 \Rightarrow mv_1 + Mv_1 - Mu = 0$. Obţinem viteza omului faţă de sol $v_1 = \frac{Mu}{M+m}$ =0,36 m/s

b. Viteza aerostatului faţă de sol este $v_2 = -\frac{mu}{M+m} = -0{,}04$ m/s. Semnul minus apare deoarece aerostatul se deplasează în sens contrar sensului de deplasare al omului.

c. Lucrul mecanic dezvoltat de om prin punerea sistemului în mişcare este:

$$L = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} = \frac{Mm \cdot u^2}{2(M+m)} = 5{,}76 \text{ J}.$$

35.a. Când patinatorul aruncă rucsacul acţionează asupra acestuia cu o forţă, iar rucsacul reacţionează asupra patinatorului cu o forţă egală şi de sens contrar conform principiului acţiunii şi reacţiunii. Cum cele două forţe sunt de natură internă pentru sistem ele nu modifică impulsul total al acestuia. Astfel conservăm impulsul pentru sistem: $\vec{p}_i = \vec{p}_f = 0$.

Cum $\vec{p}_i = 0 \Rightarrow \vec{p}_f = 0 \Rightarrow M\vec{v}_1 + m\vec{v} = 0$, iar scalar $v_1 = -0{,}5$ m/s este viteza patinatorului după ce acesta aruncă bila. Semnul minus al vitezei arată că patinatorul se deplasează în sens opus sensului în care se mişcă rucsacul.

b. Lucrul mecanic efectuat de patinator pune în mişcare atât rucsacul cât şi pe el este: $L = E_{c_1} + E_{c_2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{m(M+m)v^2}{2M} = 210$ J.

c. Din momentul punerii în mişcare, patinatorul are o mişcare uniform frânată cu acceleraţia $a = \frac{F_f}{m} = \mu g$, astfel că utilizând teorema de variaţie a energiei cinetice obţinem distanţa parcursă de patinator până la oprire. Astfel:

$$\Delta E_c = L_{F_f} \Rightarrow 0 - \frac{mv_1^2}{2} = -\mu mgs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_1^2}{2\mu g} = 12{,}5 \text{ m}.$$

36.a. Din condiţia de echilibru impusă corpului suspendat de resortul vertical obţinem $mg = kx \Rightarrow k = \frac{mg}{x}$ =500 N/m

b. Energia potențială a resortului comprimat este $W = \frac{k(\ell - \ell_1)^2}{2} = 1{,}6$ J

c. Forțele elastice care acționează asupra corpurilor sunt forțe de natură internă pentru sistem și ele nu pot modifica impulsul total al sistemului. Cum $\vec{p}_i = 0$ atunci $\vec{p}_f = 0 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$. Scalar $m_1v_1 = m_2v_2$ (1). Energia eliberată la destinderea resortului este preluată de cele două corpuri, astfel că $W = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$ (2). Din (1) și (2) obținem: $v_1 = \sqrt{\frac{2m_2W}{m_1(m_1+m_2)}} \approx 1{,}46$ m/s și $v_2 = \sqrt{\frac{2m_1W}{m_2(m_1+m_2)}} \approx 0{,}73$ m/s

37.a. Filmată în sens invers explozia unui obuz, poate fi considerată o ciocnire plastică și prin urmare se poate aplica și exploziilor legea de conservare a impulsului: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow M\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. Scalar: $Mv = m_1v_1 + m_2v_2 \Rightarrow$ $v_2 = \frac{Mv - m_1v_1}{m_2} = \frac{Mv - m_1v_1}{M - m_1} = 375$ m/s. Deoarece viteza v_2 este pozitivă, fragmentul al doilea se deplasează în același sens cu obuzul.

b. Energia degajată în urma exploziei provine din scăderea energiei cinetice:

$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = \frac{m_1M}{2(M-m_1)}(v - v_1)^2 = 125 \text{ kJ}.$$

c. Fracțiunea din energia inițială degajată prin explozie este $f = \frac{\Delta E_c}{E_{ci}} \approx 1{,}56\%$.

deoarece $E_{Ci} = \frac{Mv^2}{2} = 8$ MJ

34.a. Din legea coordonatei: $x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$, pe baza identificării coeficienților, obținem: $x_0 = 10$ m, $v_0 = 20$ m/s și $a = -5$ m/s². Deoarece corpul are o mișcare uniform încetinită, $a = -\frac{F_f}{m} = -\mu g \Rightarrow \mu = -\frac{a}{g} = 0{,}5$.

b. Aflăm viteza corpului imediat înainte de explozie utilizând legea vitezei: $v = v_0 + at_1 = 15$ m/s, deoarece $t_1 = 1$ s. Aplicăm legea de conservare a impulsului în procesul exploziei: $mv = m_2v_2 - m_1v_1$, unde v_1 și v_2 reprezintă vitezele celor două fragmente imediat după explozie.

Cum vectorial $\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, scalar $v_r = v_1 + v_2$. Cum $m_1 = \frac{m}{4}$ și $m_2 = \frac{3m}{4}$ atunci $mv = \frac{3m}{4}v_2 - \frac{m}{4}(v_r - v_2) \Rightarrow v_2 = \frac{4v + v_r}{4} = 21$ m/s și $v_1 = \frac{3v_r - 4v}{4} = 3$ m/s.

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru fiecare fragment, pentru a afla distanța parcursă de fiecare fragment până la oprire. Pentru primul fragment: $\Delta E_{c_1} = L_{F_{f_1}} \Rightarrow -\frac{m_1 v_1^2}{2} = -\mu m_1 g s_{op_1} \Rightarrow s_{op_1} = \frac{v_1^2}{2\mu g} = 0{,}9$ m.

Analog pentru fragmentul al doilea obținem: $s_{op_2} = \frac{v_2^2}{2\mu g} = 44{,}1$ m. Distanța dintre cele două fragmente după ce acesta se opresc este: $d = s_{op_1} + s_{op_2} = 45$ m

39.a. Energia cinetică inițială a sistemului de vagoane este:

$E_c = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} = 887{,}5$ kJ

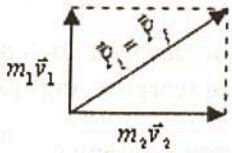
b. Primele se ciocnesc vagoanele 1 cu 2 și pe baza conservării impulsului obținem $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{12} \Rightarrow v_{12} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 3$ m/s

c. Consevăm impulsul pentru întreg sistemul:

$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = (m_1 + m_2 + m_3) v \Rightarrow v_{12} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 4$ m/s

40.a. Energia cinetică a sistemului imediat înainte de ciocnire este

$E_{Ci} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = 8{,}75$ J



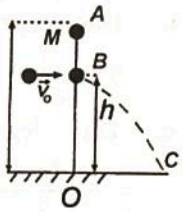
b. Aplicăm legea de conservare a impulsului:

$\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1'$ și scalar

$v_1' = \frac{1}{m_1}\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2} \approx 18{,}03$ m/s.

c. $\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2 (m_2 - m_1) v_2^2}{2m_1} = 7{,}5$J

41.a. Aflăm viteza cu care ajunge sfera la înălțimea h, utilizând legea de conservare a energiei mecanice: $E_{p_A} = E_{p_B} + E_{c_B}$, deoarece pe sol $E_{p_o} = 0$.



Astfel $MgH = Mgh + \frac{Mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(H-h)} \approx 8{,}94$ m/s.

b. Aplicăm legea de conservare a impulsului în procesul ciocnirii elastice: $M\vec{v}_B + m\vec{v}_0 = (M+m)\vec{v}$. Scalar obținem:

$M^2 v_B^2 + m^2 v_0^2 = (M+m)^2 v^2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{M^2 v_B^2 + m^2 v_0^2}}{M+m} = \frac{\sqrt{2M^2 g(H-h) + m^2 v_0^2}}{M+m} \approx 8{,}11$m/s

c. Aplicăm pentru corpul nou format legea de conservare a energiei mecanice:

$E_{c_B} + E_{p_B} = E_{c_c} \Rightarrow \frac{(M+m)v^2}{2} + (M+m)gh = \frac{(M+m)v_c^2}{2} \Rightarrow v_c = \sqrt{v^2 + 2gh} \approx 13{,}63$m/s

42.a. Din legea coordonatei $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ prin identificare găsim v_0=10 m/s şi a=−2 m/s², astfel legea vitezei este $v = v_0 + at = 10 - 2t$. La momentul t_1 viteza este v_1=4 m/s iar impulsul corpului $p_1 = m_1 v_1$=10 Ns

b. În ciocnirea perfect elastică se aplică legea de conservare a impulsului şi legea de conservare a energiei cinetice:

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$ (1) şi $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$ (2).

Din (1) şi (2) obţinem $v_1' = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_1$ şi $v_2' = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_2$.

Ţinând cont că $v_1 = v$ şi v_2=0 aflăm pe baza formulelor anterioare vitezele particulelor după ciocnirea perfect elastică.

$v_1' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2}$=1 m/s şi $v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}$=5 m/s. Deoarece $m_1 > m_2$, după ciocnire corpurile se mişcă în sensul în care s-a mişcat primul corp înainte de ciocnire

c. Energia cinetică a celui de-al doilea corp imediat după ciocnire este

$E'_{c2} = \frac{m_2 v'^2_2}{2} = \frac{2m_1^2 m_2 v^2}{(m_1 + m_2)^2}$=18,75 J

43.a. Din legile de conservare aplicate în cazul ciocnirii perfect elastice: legea de conservare a impulsului $m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$ şi legea de conservare a energiei cinetice: $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$ obţinem vitezele particulelor imediat după ciocnire $v_1' = \frac{2(m_1 v_1 - m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_1 = -\frac{3v_2 + v_1}{2} = -16$ m/s şi

$v_2' = \frac{2(m_1 v_1 - m_2 v_2)}{m_1 + m_2} + v_2 = \frac{v_1 - v_2}{2}$=8 m/s.

b. Dacă prima particulă se opreşte imediat după ciocnire atunci $v_1' = 0 \Rightarrow v_2 = -\frac{v_1}{3} \approx -6{,}66$ m/s.

c. Din legea de conservare a impulsului $m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow$ $v'_2 = \frac{v_1 - 3v_2 - v'_1}{3}$=1 m/s. Energia cinetică a sistemului înainte de ciocnire

$E_{ci} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1}{2}\left(v_1^2 + 3v_2^2\right)$ iar energia cinetică a sistemului după ciocnire

$E_{cf} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2} = \frac{m_1}{2}\left(v'^2_1 + 3v'^2_2\right)$.

Astfel $f = \frac{\Delta E_c}{E_{ci}} = \frac{E_{cf} - E_{ci}}{E_{ci}} = \frac{E_{cf}}{E_{ci}} - 1 \Rightarrow f = -93{,}75\%$

d. Fracțiunea din energia cinetică inițială a primei particule care este transferată particulei a doua este $f = \frac{E'_{c2}}{E_{c1}} = \frac{m_2 v'^2_2}{m_1 v_1^2}$.

Cum $v'_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$ deoarece v_2=0 obținem $f = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$ =75%

44.a. Pe baza legii de conservare a impulsului $mv_0 = mv'_1 + mv'_2$ și din legea de conservare a energiei cinetice: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv'^2_1}{2} + \frac{mv'^2_2}{2}$ obținem vitezele particulelor imediat după ciocnire $v'_1 = 0$ și $v'_2 = v_0$ =5 m/s. Deoarece corpurile au masele egale după ciocnirea perfect elastică ele schimbă vitezele între ele.

b. Datorită forței de frecare care acționează asupra corpului al doilea energia cinetică a acestui corp se degajă sub formă de căldură, astfel că $Q = \frac{mv'^2_2}{2}$ =6,25 J

c. Imediat după ciocnire primul corp se oprește. Din teorema de variație a energiei cinetice aflăm distanța parcursă se al doilea corp după ciocnire. Astfel

$$\Delta E_c = L_G + L_{F_f} + L_N \Rightarrow -\frac{mv'^2_2}{2} = -\mu mgs_2 \Rightarrow s_s = \frac{v'^2_2}{2\mu g} = 12{,}5 \text{ m}$$

45.a. Aflăm vitezele corpurilor după ciocnirea perfect elastică: $v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = 3$ m/s și $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = 8$ m/s pentru că v_2=0

Deoarece ambele viteze sunt pozitive înseamnă că după ciocnire corpurile se deplasează în același sens.

b. Energia cinetică a sistemului de corpuri imediat după ciocnire este $E'_c = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2}$ =5 J

c. Aflăm distanțele pe care le parcurg cele două corpuri după ciocnire până la oprire, aplicând teorema de variație a energiei cinetice pentru fiecare corp.

Pentru corpul cu masa m_1: $\Delta E_{c_1} = L_{F_{f_1}} \Rightarrow -\frac{m_1 v'^2_1}{2} = -\mu m_1 g s_1 \Rightarrow s_1 = \frac{v'^2_1}{2\mu g}$.

Pentru corpul cu masa m_2: $\Delta E_{c_2} = L_{F_{f_2}} \Rightarrow -\frac{m_2 v'^2_2}{2} = -\mu m_2 g s_2 \Rightarrow s_2 = \frac{v'^2_2}{2\mu g}$.

Distanța dintre corpuri când s-au oprit este: $d = s_2 - s_1 = \frac{v'^2_2 - v'^2_1}{2\mu g} = 27{,}5$ m.

46.a. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul cu masa m_1 între punctele A și B: $E_{pA} = E_{cA} \Rightarrow m_1 g\ell = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell}$ =4 m/s

b. Aflăm vitezele corpurilor imediat după ciocnirea perfect elastică: $v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = 2{,}4$ m/s și $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = 6{,}4$ m/s pentru că v_2=0

Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul al doilea între punctul B și punctul unde se oprește D. Astfel: $\Delta E_{cBD} = L_N + L_G + L_{Ff}$.

Deoarece L_N=0 și $L_G = -m_2gh$ și $L_{Ff} = -\mu_1 m_2 gBC - \mu_2 m_2 ghctg\alpha$ obținem:

$$-\frac{m_2 v'^2_2}{2} = -m_2gh - \mu_1 m_2 gBC - \mu_2 m_2 ghctg\alpha \Rightarrow h = \frac{v'^2_2 - 2\mu_1 gBC}{2g(1+\mu_2 ctg\alpha)} = 1 \text{ m}$$

c. Utilizăm legea de conservare a energiei cinetice pentru primul corp imediat după ciocnire, astfel că $E'_{cB} = E'_p \Rightarrow \frac{m_1 v'^2_1}{2} = m_1 g\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v'^2_1}{2g\ell}$ =0,64

47.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B pentru corpul m_1: $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 v_0^2}{2} = -\mu m_1 gd \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd}$ =1 m/s

b. Imediat după ciocnirea elastică, deoarece inițial bila se afla în repaus, aceasta va avea viteza: $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}$ =0,5 m/s

c. Aplicăm legea de conservare a energiei între punctul de lovire și punctul în care bila se oprește. Astfel $E_{cB} = E_{pC} \Rightarrow \frac{m_2 v'^2_2}{2} = m_2 gh \Rightarrow h = \frac{v'^2_2}{2g}$ =1,25 cm

48.a. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul cu masa m_1 între punctele A și B: $E_{pA} = E_{cB} \Rightarrow m_1 gR = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gR} \approx 6{,}32$ m/s. După ciocnirea perfect elastică a corpurilor obținem: $v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \Rightarrow$

$v'_1 \approx -2{,}1$ m/s și $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \approx 4{,}2$ m/s pentru că v_2=0

b. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru primul corp imediat după ciocnire, astfel că $E'_{cB} = E'_p \Rightarrow \frac{m_1 v'^2_1}{2} = m_1 gh \Rightarrow h = \frac{v'^2_1}{2g} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 R \Rightarrow$

$h \approx 22{,}22$ cm

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul al doilea imediat după ciocnire $\Delta E_{cBC} = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow -\frac{m_2 v'^2_2}{2} = -\mu m_2 gBC \Rightarrow BC = \frac{v'^2_2}{2\mu g} \Rightarrow$

$$BC = \frac{4m_1^2 R}{\mu(m_1 + m_2)^2} \approx 4{,}44 \text{ m}$$

49.a. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul cu masa m_1 între punctul de plecare și punctul înainte de ciocnire:

$$E_p = E \Rightarrow m_1 g\ell = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell} \approx 4{,}47 \text{ m/s}$$

b. Vitezele corpurilor după ciocnirea perfect elastică sunt $v'_1 = \frac{2m_1v}{m_1+m_2} - v = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v \approx -1{,}5$ m/s şi $v'_2 = \frac{2m_1v}{m_1+m_2} \approx 3$ m/s deoarece $v_2=0$. Utilizăm legile de conservare a energiei mecanice pentre cele două corpuri imediat după ciocnire. Pentru primul corp: $\frac{m_1v'^2_1}{2} = m_1gh_1 \Rightarrow$

$h_1 = \frac{v'^2_1}{2g} = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \ell \approx 11{,}11$ cm şi pentru corpul al doilea $\frac{m_2v'^2_2}{2} = m_2gh_2 \Rightarrow$

$h_2 = \frac{v'^2_2}{2g} = \frac{4m_1^2\ell}{(m_1+m_2)^2} \approx 44{,}44$ cm

c. Deoarece după ciocnire bilele se ridică la aceeaşi înălţime, atunci $h_1=h_2 \Rightarrow$ $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$

50.a. Aflăm viteza bilei m_1 imediat înainte de ciocnire aplicând legea de conservare a energiei mecanice: $E_c = E_p \Rightarrow m_1g\ell = \frac{m_1v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2g\ell}$. Aflăm vitezele bilelor imediat după ciocnire şi obţinem:

$v'_1 = \frac{2m_1v}{m_1+m_2} - v = \frac{(m_1-m_2)v}{m_1+m_2} = \frac{(m_1-m_2)\sqrt{2g\ell}}{m_1+m_2} = -2$ m/s şi

$v'_2 = \frac{2m_1v}{m_1+m_2} = \frac{2m_1\sqrt{2g\ell}}{m_1+m_2} = 2$ m/s.

Deoarece ecele două viteze au semne opuse, bila 1 se întoarce iar bila 2 se va deplasa în sensul în care a fost ciocnită.

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistemul format din bila m_1 şi Pământ. Astfel: $E'_{cB} = E'_p \Rightarrow \frac{m_1v'^2_1}{2} = m_1g\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v'^2_1}{2g\ell} \Rightarrow$

$\cos\alpha = 1 - \frac{(m_1-m_2)^2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} = 0{,}75$

c. Aplicăm pentru corpul cu masă m_2 teorema de variaţie a energiei cinetice:

$\Delta E_{c_2} = L = L_{F_f} + L_{F_{el}} \Rightarrow -\frac{m_2v'^2_2}{2} = -\mu m_2g\ell' - \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow k = \frac{m_2\left(v'^2_2 - 2\mu g\ell'\right)}{\Delta\ell^2} = 10{,}2$ kN/m

51.a. Aflăm vitezele corpurilor după ciocnirea perfect elastică:

$v_A = \frac{2m_1v_0}{m_1+m_2} - v_0 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_0 = -\frac{v_0}{3}$ şi $v_B = \frac{2m_1v}{m_1+m_2} = \frac{2v_0}{3}$, astfel că raportul vitezelor corpurilor imediat după ciocnire este $\frac{v_B}{v_A} = -2$

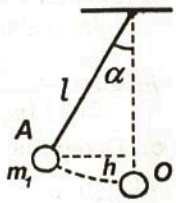
b. Raportul energiilor cinetice ale celor două corpuri, imediat după ciocnire este $\frac{E_{c_A}}{E_{c_B}} = \frac{mv_A^2}{2mv_B^2} = \frac{1}{8}$.

c. Aplicăm pentru sistemul corp B şi resort legea conservării energiei mecanice:

$$E_{c_B} = E_{p_{el}} \Rightarrow \frac{m_B v_B^2}{2} = \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow \Delta\ell = \sqrt{\frac{8mv_0^2}{9k}}.$$

Cum $E_{c_0} = \frac{mv_0^2}{2}$ obţinem $\Delta\ell = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{E_{c_0}}{k}} = 4$ cm.

52.a. Aflăm viteza bilei cu masa m_1 înainte de ciocnire aplicând legea de conservare a energiei mecanice:



$E_{pA} = E_{cO} \Rightarrow m_1 gh = \frac{m_1 v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$. Aflăm vitezele bilelor imediat după ciocnire: $v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{v}{2}$ şi $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = \frac{3}{2} v$. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru fiecare bilă: $E_c = E_p$. Pentru bila cu masa m_1: $\frac{m_1 v_1'^2}{2} = m_1 gh_1 \Rightarrow$ $h_1 = \frac{v_1'^2}{2g} = \frac{v^2}{8g} = \frac{h}{4} = 5$ cm şi pentru bila cu masa m_2: $\frac{m_2 v_2'^2}{2} = m_2 gh_2 \Rightarrow$ $h_2 = \frac{v_2'^2}{2g} = \frac{9v^2}{8g} = \frac{9h}{4} = 45$ cm. Astfel raportul înălţimilor este $\frac{h_2}{h_1} = 9$.

b. Deoarece bila m_1 ciocneşte perfect plastic o a doua bilă m_2, aflăm viteza corpului nou format după ciocnire utilizând legea de conservare a impulsului: $m_1 v = (m_1 + m_2) v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} = \frac{3v}{4}$. Utilizând legea conservării energiei mecanice pentru corpul nou format, astfel că:

$$E_c = E_p \Rightarrow \frac{(m_1 + m_2) v_c^2}{2} = (m_1 + m_2) gh' \Rightarrow h' = \frac{v_c^2}{2g} = \frac{9v^2}{32g} = \frac{9h}{16} = 11{,}25 \text{ cm}.$$

c. Căldura degajată în procesul ciocnirii plastice este:

$$Q = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{3m_2 gh}{4} = 1{,}5 \text{ J}$$

53.a. Viteza particulei a doua după ciocnirea perfect elastică este $v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}$, unde v este viteza inainte de ciocnire a primei bile. Fracţiune din energia cinetică iniţială a primei particulei transferată particulei a doua este:

$$f = \frac{E'_{c2}}{E_{c1}} = \frac{m_2 v_2'^2}{m_1 v^2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 75\%$$

b. Dacă ciocnirea este plastică viteza comună a particulelor este $v_c = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}$

Fracțiune din energia cinetică inițială a primei particulei transferată particulei a doua este: $f=\frac{E'_{c2}}{E_{c1}}=\frac{m_2v'^2_c}{m_1v^2}=\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$ =18,75%

c. Căldura degajată în ciocnirea plastică este $Q=\frac{m_1m_2v^2}{2(m_1+m_2)}$. Astfel fracțiunea din energia cinetică inițială a primei particulei care se transformă în căldură în cazul ciocnirii plastice este $f=\frac{Q}{E_{c1}}=\frac{m_2}{m_1+m_2}=75\%$

54.a. Ciocnirea moleculei cu pistonul este o ciocnire perfect elastică cu un corp cu masa foarte mare (cu un perete). Aflăm viteza moleculei după ciocnirea perfect elastică, ținând cont că $m_1=m$ și $m_2\to\infty$. Obținem viteza moleculei imediat după ciocnire: $v_1'=\frac{2(m_1v_1+m_2v_2)}{m_1+m_2}-v_1 \Rightarrow v_1'=\frac{2\frac{m_1}{m_2}v_1+v_2}{\frac{m_1}{m_2}+1}-v_1$

$v_1'=2v_2-v_1=-498$ m/s. Deoarece molecula are după ciocnirea cu pistonul viteza cu minus înseamnă că se întoarce după ciocnire.

b. Variația impulsului moleculei este:

$\Delta p=mv_1'-mv_1=m(v_1'-v_1)=2m(v_2-v_1)=-5\cdot10^{-23}$ Ns

c. Variația energiei cinetice a moleculei este:

$\Delta E_c=\frac{mv_1'^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=\frac{m}{2}\left(v_1'^2-v_1^2\right)=2mv_2(v_2-v_1)=10^{-22}$ J.

55.a. Deoarece corpul ciocnește perfect elastic un alt corp vitezele după ciocnire sunt: $v_1'=\frac{2(mv_1+Mv_2)}{m+M}-v_1$ și $v_2'=\frac{2(mv_1+Mv_2)}{m+M}-v_2$. Deoarece peretele are masă foarte mare astfel că $M\to\infty$ obținem viteza corpului imediat după ciocnirea cu peretele $v'_1=2v_2-v_1=-1$ m/s².

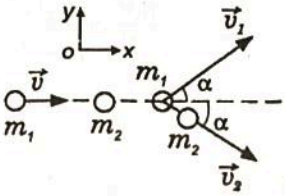
b. Pe baza principiului acțiunii și reacțiunii forța cu care peretele acționează asupra corpului este egală cu forța cu care corpul acționează asupra peretelui. Conform teoremei de variație a impulsului vectorial: $\Delta\vec{p}=\vec{F}\Delta t$, iar scalar: $|\Delta p|=F\Delta t \Rightarrow F=\frac{|\Delta p|}{\Delta t}=\frac{|p_f-p_i|}{\Delta t}=\frac{|mv'_1-mv_1|}{\Delta t}=\frac{2m(v_1-v_2)}{\Delta t}$ =8 kN

c. Deoarece corpul cu masă m_1 se oprește atunci $v'_1=0$ obținem $v_1/v_2=1/2$

56.a. Utilizăm formulele vitezelor pentru ciocnirea perfect elastică:

$v_1'=\frac{2m_1v}{m_1+m_2}-v=\frac{(m_1-m_2)v}{m_1+m_2}$ și $v_2'=\frac{2m_1v}{m_1+m_2}$.

$v_1'=-v_2' \Rightarrow \frac{(m_1-m_2)v}{m_1+m_2}=-\frac{2m_1v}{m_1+m_2} \Rightarrow 3m_1=m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{3}$.



b. Deoarece ciocnirea particulelor este perfect elastică utilizăm legea de conservare a impulsului: $\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2 \Rightarrow m_1\vec{v}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$, unde $\vec{v}$ este viteza primei

particule înainte de ciocnire, iar $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ sunt vitezele particulelor după ciocnirea perfect elastică. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate:

pe Ox: $m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\alpha$ (1) şi pe Oy: $0 = m_1 v_1 \sin\alpha - m_2 v_2 \sin\alpha \Rightarrow$ $m_1 v_1 = m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}$ (2). Din (1) şi (2) obţinem $m_1 v = 2 m_1 v_1 \cos\alpha \Rightarrow$ $v = 2v_1 \cos\alpha$. Aplicăm legea conservării energiei cinetice şi obţinem:

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \Rightarrow 4 m_1 v_1^2 \cos^2\alpha = m_1 v_1^2 + \frac{m_1^2 v_1^2}{m_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 4\cos^2\alpha - 1 = 2$$

57.a. Utilizăm legea de conservare a impulsului: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow$ $m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (1), iar din legea de conservare a energiei cinetice $E_c = E_{c_1} + E_{c_2} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2$ (2), unde cu v am notat viteza neutronului înainte de ciocnire iar cu v_1 şi v_2 vitezele neutronilor imediat după ciocnire. Ridicăm relaţia (1) la pătrat şi obţinem $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha$ şi pe baza relaţiei (2) obţinem $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^0$, unde α reprezintă unghiul dintre direcţiile de mişcare ale neutronilor după ciocnire. Direcţiile de mişcare ale celor doi neutroni după ciocnire sunt perpendiculare.

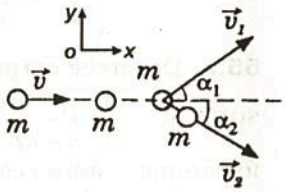
b. Aplicăm legea de conservare a impulsului: $m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$.

Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate.

Pe Ox: $v = v_1 \cos\alpha_1 + v_2 \cos\alpha_2$ (1) şi pe Oy: $0 = v_1 \sin\alpha_1 - v_2 \sin\alpha_2$ (2)

Din legea de conservare a energiei cinetice obţinem:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2 \text{ (3)}$$



Cum $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$ (4).

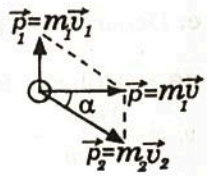
Din relaţiile (3) şi (4) obţinem:

$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 90 \Rightarrow \alpha_2 = 90 - \alpha_1$.

Din (2) $\Rightarrow v_2 = \frac{v_1 \sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1 \sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = v_1 tg\alpha_1$ şi din (1) $\Rightarrow v = v_1 \cos\alpha_1 + \frac{v_1 \sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} \sin\alpha_1$.

Obţinem $v_1 = v\cos\alpha_1 = 3 \cdot 10^4$ m/s $\Rightarrow v_2 = v\sin\alpha_1 \approx 1{,}73 \cdot 10^4$ m/s.

58.a. Aplicăm în cazul ciocnirii perfect elastice legea conservării impulsului: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow m_1\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$, unde $\vec{v}$ reprezintă viteza primei particulei înainte de ciocnire, iar $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ sunt vitezele particulelor 1 şi 2 după ciocnirea perfect elastică. Din teorema lui Pitagora obţinem $m_2^2 v_2^2 = m_1^2 v_1^2 + m_1^2 v^2$ (1).



Pe baza conservării energiei cinetice:

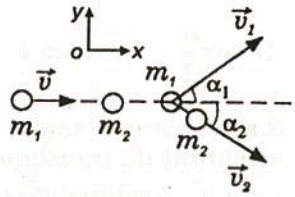
$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \Rightarrow m_1 v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \text{ (2).}$$

Din (1) şi (2) obţinem $v_1^2 = \frac{v^2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$. Viteza primei particule imediat după ciocnire este $v_1 = v\sqrt{\frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}} \approx 1{,}55$ m/s şi viteza particulei a doua imediat după ciocnire este $v_2 = v\sqrt{\frac{2m_1^2}{m_2(m_1 + m_2)}} \approx 6{,}32$ m/s

b. Fracţiunea cerută este: $f = \frac{E_{c_{pierdut}}}{E_{c_i}} = \frac{E_{c_i} - E_{c_f}}{E_{c_i}} = 1 - \frac{E_{c_f}}{E_{c_i}} \Rightarrow$

$$f = 1 - \frac{m_1 v_1^2}{m_1 v^2} = 1 - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} = 0{,}4.$$

59.a. Aplicăm legea de conservare a impulsului: $m_1\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ şi proiectăm pe axele de coordonate.



Pe Ox: $m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha_1 + m_2 v_2 \cos\alpha_2$ (1) şi pe Oy: $0 = m_1 v_1 \sin\alpha_1 - m_2 v_2 \sin\alpha_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1 \sin\alpha_1}{m_2 \sin\alpha_2}$.

Introducem în relaţia (1) şi obţinem $m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha_1 + \frac{m_1 v_1 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin\alpha_2} \Rightarrow$ vitezele corpurilor după ciocnire sunt $v_1 = \frac{v \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \approx 7{,}326$ m/s şi

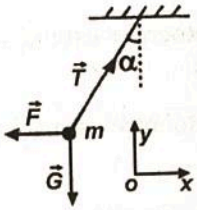
$v_2 = \frac{m_1 v \sin\alpha_1}{m_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \approx 2{,}6$ m/s.

b. Raportul energiilor cinetice ale corpurilor după ciocnire este $\frac{E_{c_1}}{E_{c_2}} = \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2} = \frac{m_2}{m_1}\frac{\sin^2\alpha_2}{\sin^2\alpha_1} = 4$.

c. Căldura degajată provine pe seama scăderii energiei cinetice:

$$Q = \frac{m_1 v^2}{2} - \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) \approx 16{,}45 \text{ J}.$$

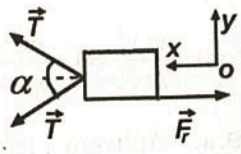
4.1. Echilibrul de translație



1.a. Impunem condiția de echilibru corpului: $\vec{T}+\vec{F}+\vec{G}=0$.
Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.
Obținem pe *Ox*: $T\sin\alpha - F = 0$ și pe *Oy*:

$T\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} = 10$ N.

b. $F = T\sin\alpha = m\cdot g\cdot tg\,\alpha = 8{,}65$ N.

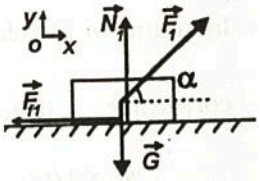


2. Studiem echilibrul plugului: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{F}_r=0$.
Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe *Oy*: $T_2\sin\dfrac{\alpha}{2} - T_1\sin\dfrac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 = T$ și pe axa *Ox*:

$2T\cos\dfrac{\alpha}{2} - F_r = 0 \Rightarrow F_r = 2T\cos\dfrac{\alpha}{2} = 25{,}95$ N.

3.a. Deoarece sania are viteza constantă, rezultanta forțelor este nulă, iar echilibrul de translație este dinamic. Studiem sania când asupra ei se exercită forța $\vec{F}_1$. Vectorial: $\vec{F}_1+\vec{G}+\vec{N}_1+\vec{F}_{f1}=0$.



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:
pe *Ox*: $F_1\cos\alpha - F_{f_1} = 0$ și pe *Oy*: $F_1\sin\alpha + N_1 - mg = 0$.

$F_{f_1} = \mu N_1 = \mu(mg - F_1\sin\alpha) \Rightarrow F_1\cos\alpha - \mu mg + \mu F_1\sin\alpha = 0$

$F_1(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = \mu mg$ (1).

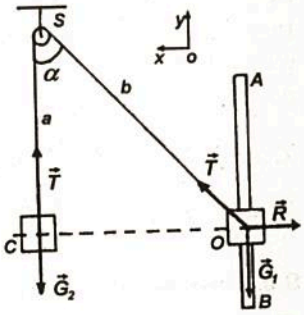
Studiem sania când asupra ei se exercită forța $\vec{F}_2$.

Analog obținem: $F_2(\cos\beta + \mu\sin\beta) = \mu mg$ (2). Din (1)+(2)$\Rightarrow$

$F_1(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = F_2(\cos\beta + \mu\sin\beta) \Rightarrow \mu = \dfrac{F_2\cos\beta - F_1\cos\alpha}{F_1\sin\alpha - F_2\sin\beta} \approx 0{,}247.$

b. Introducând formula lui μ, obținem: $m = \dfrac{F_1F_2\sin(\alpha-\beta)}{g(F_2\cos\beta - F_1\cos\alpha)} \approx 34{,}6$ kg.

4. Studiem echilibrul corpului cu masa m_2: $\vec{T}+\vec{G}_2=0$, iar scalar $T = m_2 g$.

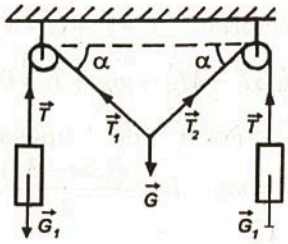


Studiem echilibrul corpului cu masa m_1: $\vec{T}+\vec{G}_1+\vec{R}=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Astfel pe *Ox*: $T\sin\alpha - R = 0$ și pe *Oy*:
$T\cos\alpha - m_1 g = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = m_1 g \Rightarrow m_2\cos\alpha = m$
În triunghiul *OCS*: $a+b=2\ell \Rightarrow a = 2\ell - b$, unde $OC=\ell$.
Pe baza teoremei lui Pitagora $a^2+\ell^2=b^2$ obținem
$4\ell^2 - 4\ell b + b^2 + \ell^2 = b^2 \Rightarrow 5\ell^2 - 4\ell b = 0 \Rightarrow \quad b = \dfrac{5\ell}{4}$ iar

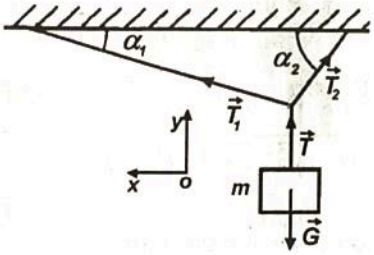
$a = \dfrac{3\ell}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \cos\alpha = 0{,}6.$

5. Studiem echilibrul corpului cu greutatea G_1. $\vec{T}+\vec{G}_1=0$, iar scalar $T=G_1$. Studiem echilibrul corpului cu greutatea G: Vectorial $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}=0$. Scalar: $T_1=T_2=T=G_1$. Proiectăm relația vectorială pe verticală: $2T\cos\alpha=G\Rightarrow G=2G_1\cos\alpha\Rightarrow$

$$G_1=\frac{G}{2\cos\alpha}=\frac{G\sqrt{2}}{2}=100\text{ N}.$$



6. Studiem echilibrul corpului cu masa m. Vectorial: $\vec{T}+\vec{G}=0$, iar scalar: $T=mg=40$ N. Din echilibrul punctului de prindere $\vec{T}_1+\vec{T}_2=\vec{T}$. Cum $\alpha_1+\alpha_2=90^0$, tensiunile T_1 şi T_2 sunt perpendiculare, astfel că prin proiecție pe axele de coordonate obținem:



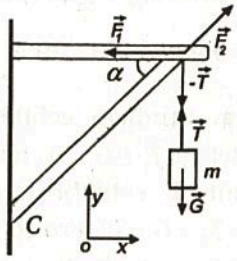
pe Ox: $T_1\cos\alpha_1-T_2\cos\alpha_2\Rightarrow T_2=\dfrac{T_1\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}$ şi

Oy: $T_1\sin\alpha_1+T_2\sin\alpha_2-T=0$. Din cele două ecuații obținem:

$$T_1=\frac{mg\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}=20\text{ N, iar }T_2=\frac{mg\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}=34{,}6\text{ N}.$$

7. Impunem condiția de echilibru pentru corp: Vectorial: $\vec{T}+\vec{G}=0$ şi scalar: $T=mg$.

Notăm cu $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ tensiunile din grinzi şi prin proiecția relației vectoriale $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{G}=0$ obținem pe axele de coordonate:

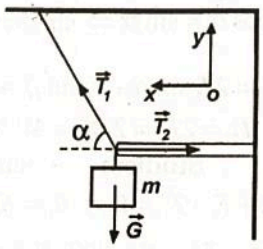


pe Ox: $F_2\cos\alpha-F_1=0\Rightarrow F_1=F_2\cos\alpha$ şi pe Oy:

$$F_2\sin\alpha-T=0\Rightarrow F_2=\frac{T}{\sin\alpha}=\frac{mg}{\sin\alpha}=240\text{ N}.$$

$$F_1=m\cdot g\cdot ctg\,\alpha\approx 207{,}6\text{ N}.$$

8. Studiem echilibrul corpului: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate şi obținem:



pe Ox: $T_1\cos\alpha-T_2=0\Rightarrow T_2=T_1\cos\alpha$ şi pe Oy:

$$T_1\sin\alpha-mg=0\Rightarrow T_1=\frac{mg}{\sin\alpha}=40\text{ N}.$$

$$T_2=m\cdot g\cdot ctg\,\alpha\approx 34{,}6\text{ N}.$$

9.a. Studiem echilibrul omului: $\vec{T}+\vec{G}+\vec{N}=0$, iar scalar $T+N-mg=0$ $\Rightarrow N=mg-T$. (fig.1.)

Studiem echilibrul scripetelui peste care este trecut firul de care trage omul. (fig 2) $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{T}=0$, iar scalar $T_1=2T$. Studiem echilibrul platformei. (fig 3)

Vectorial: $\vec{T}+\vec{T}_1+\vec{G}'-\vec{N}=0$ şi scalar: $T+T_1-Mg-N=0 \Rightarrow 3T-Mg-N=0$

$\Rightarrow 3T-Mg-mg+T=0 \Rightarrow 4T=g(m+M) \Rightarrow T=\dfrac{g(m+M)}{4}$=300 N.

b. Forţa de apăsare exercitată de om asupra platformei este $N=mg-T=\dfrac{g(3m-M)}{4}=500$ N.

Fig. 1.

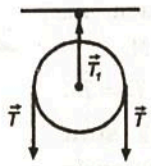


Fig. 2

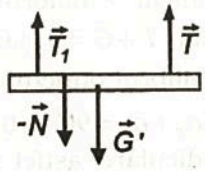
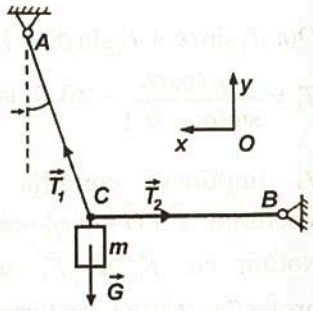


Fig. 3

10.a. Studiem echilibrul corpului: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}=0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T_1\sin\alpha-T_2=0 \Rightarrow T_2=T_1\sin\alpha$ şi pe *Oy*:

$T_1\cos\alpha-mg=0 \Rightarrow T_1=\dfrac{mg}{\cos\alpha}\approx 184{,}97$N.

$T_2=mgtg\,\alpha\approx 92{,}49$ N.



11.a. Studiem echilibrul corpului cu greutate G, astfel că $\vec{T}_1+\vec{G}=0$, iar scalar $T_1=G=mg$.

Studiem echilibrul corpului cu greutatea G_1: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}=0$. Proiectăm pe *Ox*:

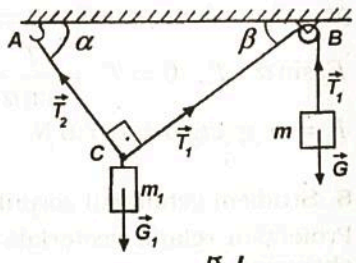
$T_2\cos\alpha-T_1\cos\beta=0$ *Oy*: $T_2\sin\alpha+T_1\sin\beta-G_1=0$

Din datele problemei: $T_2=2T_1 \Rightarrow 2\cos\alpha=\cos\beta$.

Cum $\alpha+\beta=90^0 \Rightarrow \beta=90^0-\alpha \Rightarrow \cos\beta=\sin\alpha \Rightarrow$

$2\cos\alpha=\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ şi $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

$G_1=2T_1\sin\alpha+T_1\sin\beta=mg(2\sin\alpha+\sin\beta)\approx 44{,}7$N.

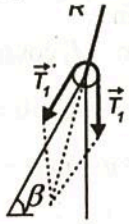


b. $T_2=2T_1=2mg=40$ N.

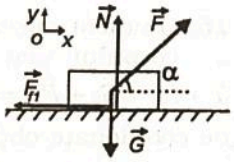
c. Studiem echilibrul scripetelui. Vectorial: $\vec{R}_1+\vec{T}_1+\vec{T}'_1=0 \Rightarrow \vec{R}_1=-\vec{T}_1-\vec{T}'_1$ cu $T_1=T_1'$ şi scalar:

$R_1^2=T_1^2+T_1'^2+2T_1T_1'\cos(90-\beta)=2T_1^2(1+\sin\beta)$

Cum $R=T_1\sqrt{2(1+\sin\beta)}=mg\sqrt{2(1+\sin\beta)}\approx 34$ N.



12. Deoarece corpul se mişcă uniform înseamnă că se află în echilibru dinamic de translaţie, astfel că rezultanta forţelor care se exercită asupra corpului este nulă. Obţinem: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{F}_f+\vec{N}=0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate:

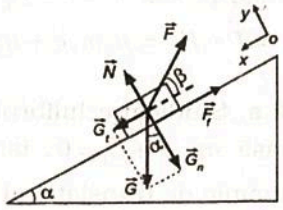


pe Ox: $F\cos\alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = F\cos\alpha$ şi pe Oy: $F\sin\alpha + N - mg = 0$.

Cum $F_f = \mu N \Rightarrow \mu(mg - F\sin\alpha) = F\cos\alpha \Rightarrow F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 3{,}25$ N.

13.a. Studiem echilibrul corpului aflat pe planul înclinat. Rezultanta forţelor ce acţionează asupra corpului este nulă.

Obţinem: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$.

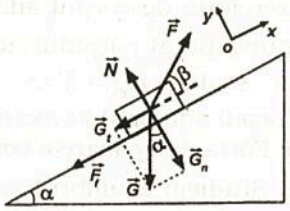


Proiectăm pe Ox: $mg\sin\alpha - F\cos\beta - F_f = 0$ şi pe Oy: $N + F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0$. Deoarece $F_f = \mu N$

$mg\sin\alpha - F\cos\beta - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin\beta = 0 \Rightarrow$

$F = \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\beta - \mu\sin\beta} = 3{,}36$ N.

b. Forţa de apăsare exercitată de corp asupra planului este $N = mg\cos\alpha - F\sin\beta \approx 6{,}97$ N.



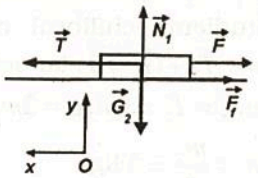
c. Studiem urcarea uniformă a corpului pe planul înclinat: $\vec{F}_1+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$.

Proiectăm pe Ox: $F_1\cos\beta - F_f - mg\sin\alpha = 0$ şi pe Oy: $F_1\sin\beta + N - mg\cos\alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow$

$F_1\cos\beta - \mu mg\cos\alpha + \mu F_1\sin\beta - mg\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_1 = \dfrac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \approx 7{,}48$ N.

d. $N = mg\cos\alpha - F_1\sin\beta \approx 4{,}91$ N.

14. Împărţim lanţul în două părţi: o porţiune verticală cea care atârnă şi o porţiune orizontală aflată pe masă. Studiem echilibrul porţiunii de lanţ care atârnă. Vectorial: $\vec{T}+\vec{G}_1=0$, iar scalar $m_1g - T = 0$

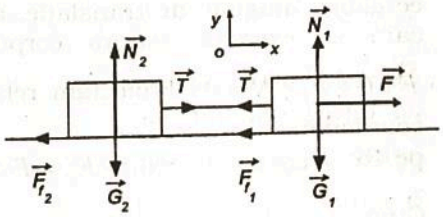


$\Rightarrow T = m_1g$, unde $m_1 = \dfrac{m\ell_1}{\ell}$ reprezintă masa porţiunii de lanţ care atârnă. Studiem echilibrul porţiunii de lanţ aflată pe masă cu masa $m_2 = \dfrac{m(\ell-\ell_1)}{\ell}$.

Vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_2+\vec{F}_f+\vec{F}=0$ şi proiectăm relaţia pe Ox: $T - F_f - F = 0$ şi pe Oy: $N_1 - G_2 = 0$. Deoarecce $F_f = \mu N_1 = \mu m_2 g \Rightarrow F = \dfrac{m}{\ell}\ell_1 g - \mu\dfrac{m(\ell-\ell_1)}{\ell}g \Rightarrow$

$F = \dfrac{mg}{\ell}(\ell_1 - \mu\ell + \mu\ell_1) = 5{,}2$ N.

15. Studiem mişcarea rectilinie şi uniformă a corpului cu masa m_2. Vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}=0$ şi proiectând pe axele de coordonate obţinem pe Ox: $T-F_{f_2}=0$ şi pe Oy: $N_2-m_2g=0\Rightarrow$



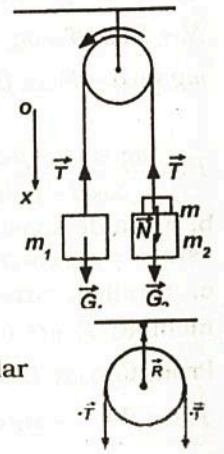
$F_{f_2}=\mu_2N_2=\mu_2m_2g\Rightarrow T=\mu_2m_2g$.

Studiem mişcarea rectilinie şi uniformă a corpului cu masa m_1: $\vec{F}+\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=0$.

Scalar pe Ox: $F-T-F_{f_1}=0$ şi pe Oy: $N_1-m_1g=0\Rightarrow F_{f_1}=\mu_1N_1=\mu_1m_1g\Rightarrow$

$F=T+F_{f_1}=\mu_2m_2g+\mu_1m_1g=g(\mu_2m_2+\mu_1m_1)=1{,}6$ N.

16.a. Studiem echilibrul dinamic de translaţie al corpului cu masă m_1 $\vec{T}+\vec{G}_1=0$, iar scalar $T=m_1g$. Studiem echilibrul dinamic de translaţie al corpului cu masă m_2: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}_2=0$, iar scalar $T=N+m_2g$, unde N este apăsarea normală exercitată de corpul adiţional. Studiem echilibrul dinamic de translaţie al corpului adiţional cu masa m. Astfel $\vec{N}+\vec{G}=0$, iar scalar $mg=N\Rightarrow$ $m_1g=mg+m_2g\Rightarrow m=m_1-m_2=2$ kg.



Corpul adiţional se aşază pe corpul cu masă mai mică.

b. Forţa de apăsare a corpului adiţional este N=20 N

c. Studiem echilibrul scripetelui. Vectorial: $\vec{R}-2\vec{T}=0$, iar scalar $R=2T=2m_1g=100$ N.

17. Studiem echilibrul corpului cu masa m_1: $\vec{T}_1+\vec{G}_1=0$, iar scalar obţinem $m_1g=T_1$. (fig 4)

Studiem echilibrul scripetelui de care este prins corpul de masă m_2: $2\vec{T}_1+\vec{T}_2=0$, iar scalar $T_2=2T_1$.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_2: $\vec{T}_2+\vec{G}_2=0$, iar scalar obţinem:

$m_2g=T_2\Rightarrow m_2g=2m_1g\Rightarrow m_2=2m_1\Rightarrow$

$m_1=\dfrac{m_2}{2}=5$ kg.

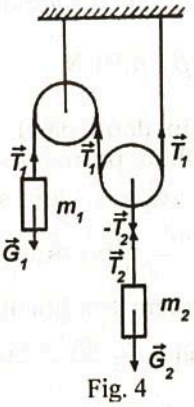


Fig. 4

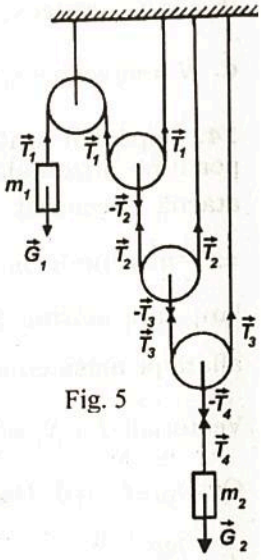


Fig. 5

18. Studiem echilibrul corpului cu masa m_1: $\vec{T}_1+\vec{G}_1=0$, iar scalar obţinem $T_1=m_1g$. (fig 5)

Studiem echilibrul scripeţilor.

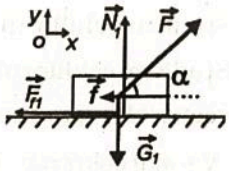
Scalar obţinem: $T_2=2T_1$; $T_3=2T_2=4T_1$ şi $T_4=2T_3=8T_1$.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_2: $\vec{T}_4 + \vec{G}_2 = 0$, iar scalar obținem $T_4 = m_2 g \Rightarrow m_2 g = 8m_1 g \Rightarrow m_2 = 8m_1 = 64$ kg.

19.a. Deoarece sistemul de corpuri este ridicat uniform de forța F, considerăm că întreg sistemul este un punct material cu masa totală $m_t = m_1 + m_0 + m_2$, astfel că: $F = G_t = m_t g = (m_1 + m_0 + m_2)g = 32$ N.

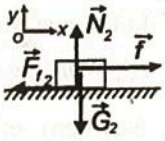
b. Studiem mișcarea rectilinie uniformă, a corpului cu masa m_2 și a porțiunii inferioare de lanț cu lungimea ℓ_0. Această porțiune de lanț are masa $m = \frac{m_0 \ell_0}{\ell}$, astfel că: $T - G = 0 \Rightarrow T = G = (m + m_2)g = \left(\frac{m_0 \ell_0}{\ell} + m_2\right)g = 20{,}8$ N

20.a. Studiem echilibrul corpului cu masă m_1: $\vec{F} + \vec{f} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate pe Ox: $F\cos\alpha - f - F_{f_1} = 0$ și pe Oy: $F\sin\alpha + N_1 - m_1 g = 0$.



Cum $F_{f_1} = \mu_1 N_1$ obținem $F\cos\alpha - f - \mu_1 m_1 g + \mu_1 F\sin\alpha = 0$ (1)

Studiem echilibrul corpului cu masă m_2. Vectorial: $\vec{f} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe Ox: $f - F_{f_2} = 0$; pe Oy: $N_2 - m_2 g = 0$ și cum $F_{f_2} = \mu_2 N_2$ obținem $f = \mu_2 m_2 g$ (2). Adunând (1) cu (2) obținem:

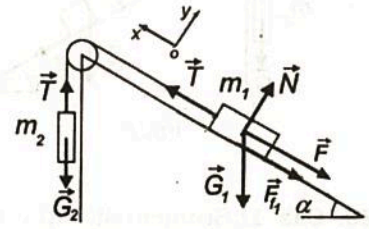


$F\cos\alpha - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_2 g + \mu_1 F\sin\alpha = 0 \Rightarrow F = \frac{g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)}{\cos\alpha + \mu_1 \sin\alpha} \approx 14{,}2$ N.

b. Forțele de apăsare sunt reacțiunile normale: $N_1 = m_1 g - F\sin\alpha \approx 22{,}9$ N și $N_2 = m_2 g = 50$ N.

c. Forțele de frecare sunt $F_{f1} = \mu_1 N_1 \approx 2{,}29$ N și $F_{f2} = \mu_2 N_2 = 10$ N

21.a. Studiem echilibrul corpului cu masa m_2: $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$, iar scalar obținem $m_2 g = T$. Studiem echilibrul corpului cu masa m_1. Deoarece lăsat liber sistemul de corpuri, corpul m_1 urcă, $\vec{F}_f$ acționează de-a lungul planului înclinat în jos. Vectorial: $\vec{T} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $T - F_{f1} - m_1 g\sin\alpha - F = 0$ și pe Oy: $N - m_1 g\cos\alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow m_2 g - \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha - F = 0 \Rightarrow$ $F = g(m_2 - m_1\sin\alpha - \mu m_1\cos\alpha) = 20{,}7$ N.



b. Tensiunea din fir este $T = m_2 g = 40$ N.

c. Studiem echilibrul scripetelui (fig 8): $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$

Scalar $R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2 \cos(90 - \alpha)$. Deoarece $T_1 = T_2 = T \Rightarrow$

$R = T\sqrt{2(1+\sin\alpha)} = m_2 g\sqrt{2(1+\sin\alpha)} \approx 77{,}25$ N.

22.a. Caz 1 Sistemul se află în repaus, iar F_{f_1} are sensul din figura 6.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_2: $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$, iar scalar $m_2 g = T$.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_1: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T - F_{f1} - m_1 g\sin\alpha = 0$ și pe *Oy*: $N - m_1 g\cos\alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow m_2 g - \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha = 0 \Rightarrow$ $m_2 = m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 586{,}5$ g.

Caz 2: Sistemul se află în repaus, iar F_{f_1} are sensul din figura 7.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_2: $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$, iar scalar $m_2 g = T$.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_1: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T + F_f - m_1 g\sin\alpha = 0$ și pe *Oy*: $N - m_1 g\cos\alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow m_2 g + \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha = 0 \Rightarrow$ $m_2 = m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 413{,}5$ g. Deci sistemul se află în echilibru dacă corpul al doilea are masa $m_2 \in [413{,}5\,g;\ 586{,}5\,g]$.

b. $T_{min} = m_{2min} g \approx 4{,}135$ N și $T_{max} = m_{2max} g \approx 5{,}865$ N.

c. Studiem echilibrul scripetelui (fig 8): $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -\vec{T}_1 - \vec{T}_2$. Scalar: $R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2\cos(90-\alpha)$. Cum $T_1 = T_2 = T \Rightarrow R^2 = 2T^2 + 2T^2\sin\alpha \Rightarrow$ $R = T\sqrt{2(1+\sin\alpha)} = T\sqrt{3}$. Pentru T_{min} obținem $R_{min} \approx 7{,}15$ N și pentru T_{max} obținem $R_{max} \approx 10{,}15$ N.

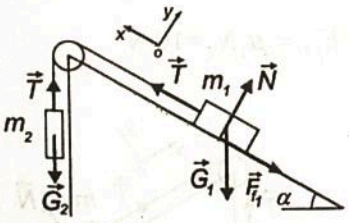


Fig. 6

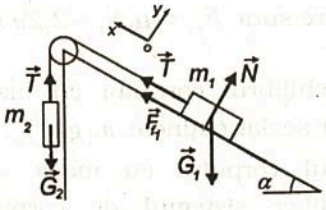


Fig. 7

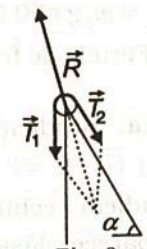


Fig. 8

23. Caz 1: Studiem situația în care corpul m_1 ar începe să alunece uniform în jos (fig 9.) Pentru corpul m_1: $\vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{T} + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem:

Pe *Ox*: $m_1 g\sin\alpha - F_{f_1} - T = 0$ și pe *Oy*: $N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g\cos\alpha$.

Cum $F_{f_1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g\cos\alpha \Rightarrow m_1 g\sin\alpha - \mu m_1 g\cos\alpha - T = 0$ (1).

Pentru corpul m_2: $\vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{T} + \vec{F}_{f2} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $T - m_2 g\sin\beta - F_{f_2} = 0$ și pe *Oy*: $N_2 - m_2 g\cos\beta = 0$.

Cum $F_{f_2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g \cos\beta \Rightarrow T - m_2 g \sin\beta - \mu_2 m_2 g \cos\beta = 0$ (2).

Din (1)+(2) $\Rightarrow m_1 g \sin\alpha - \mu_1 m_1 g \cos\alpha - m_2 g \sin\beta - \mu_2 m_2 g \cos\beta = 0 \Rightarrow$

$$m_2 = \frac{m_1(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)}{\sin\beta + \mu_2 \cos\beta} = 2{,}44 \text{ kg}.$$

Caz 2: Studiem situația în care corpul m_2 ar începe să alunece uniform în jos (fig 10). Pentru corpul m_1: $\vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{T} + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox $T - m_1 g \sin\alpha - F_{f_1} = 0$ și pe *Oy*: $N_1 - m_1 g \cos\alpha = 0$.

Cum $F_{f_1} = \mu_1 N_1 \Rightarrow T - m_1 g \sin\alpha - \mu_1 m_1 g \cos\alpha = 0$ (1)

Pentru corpul m_2: $\vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{T} + \vec{F}_{f2} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $m_2 g \sin\beta - F_{f_2} - T = 0$ și pe *Oy*: $N_2 - m_2 g \cos\beta = 0$.

Cum $F_{f_2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 \cdot m_2 g \cos\beta \Rightarrow m_2 g \sin\beta - \mu_2 m_2 g \cos\beta - T = 0$ (2)

Din (1)+(2) $\Rightarrow m_2 g \sin\beta - \mu_2 m_2 g \cos\beta - m_1 g \sin\alpha - \mu_1 m_1 g \cos\alpha = 0 \Rightarrow$

$$m_2 = \frac{m_1(\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha)}{\sin\beta - \mu_2 \cos\beta} = 5{,}2 \text{ kg}.$$

Sistemul se află în echilibru, dacă corpul al doilea are masa $m_2 \in [2{,}44 \text{ kg};\ 5{,}2 \text{ kg}]$.

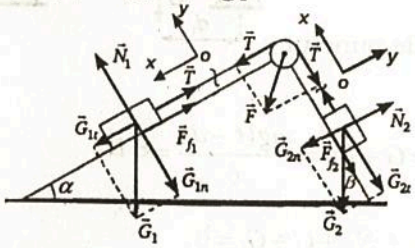


Fig. 9

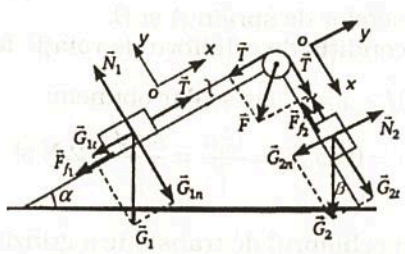


Fig. 10

b. Tensiunilor în fire în cele două cazuri sunt $T = m_1 g(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha) \Rightarrow$ $T \approx 20{,}675$ N și $T' = m_1 g(\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha) \approx 29{,}325$ N

c. Din condiția de echilibru impusă scripetelui $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$.

Scalar, pe baza teoremei cosinusului obținem $R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 \cos\gamma$, unde $\gamma = 180^0 - \alpha - \beta = 105^0$, astfel că $\cos\gamma \approx -0{,}26$.

Deoarece $T_1 = T_2 = T$ obținem: $R = T\sqrt{2(1+\cos\gamma)}$.

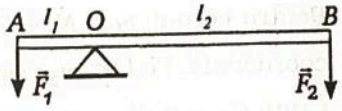
Pentru T obținem $R \approx 25{,}15$ N și pentru T' obținem $R' \approx 35{,}68$ N.

4.2. Echilibrul de rotaţie

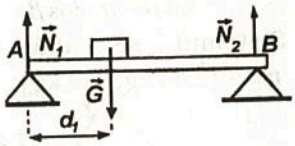
1. Momentul forţei faţă de axa de rotaţie este $M_F = Fd\sin\alpha$, unde α este unghiul format de direcţia forţei F şi bară. Deoarece bara rămâne în echilibru de rotaţie şi sub acţiunea forţei F_1 aplicată la distanţa d_1 faţă de axa de rotaţie înseamnă că momentul acestei forţe este egal cu momentul forţei F, astfel că

$$M_F = F_1 d_1 \sin\alpha \Rightarrow Fd = F_1 d_1 \Rightarrow F_1 = \frac{Fd}{d_1} = 100 \text{ N}.$$

2. Deoarece scândura este în echilibru de rotaţie înseamnă că suma momentelor forţelor faţă de punctul O este zero. Astfel $\vec{M}_{F_1,0} + \vec{M}_{F_2,0} = 0$, iar scalar obţinem $F_1\ell_1 - F_2\ell_2 = 0 \Rightarrow F_2 = \frac{F_1\ell_1}{\ell_2} = 20$ N.



3. Impunem condiţia de echilibru de translaţie $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G}_1 = 0$, iar scalar: $N_1 + N_2 = G_1$, unde N_1 şi N_2 sunt forţele de apăsare exercitate de scândură asupra punctelor de sprijin A şi B.



Impunem condiţia de echilibru de rotaţie faţă de punctul A: $\vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{N_2,A} = 0$, iar scalar obţinem:

$$-G_1 d + N_2\ell = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{G_1 d}{\ell} = \frac{mgd}{\ell} = 2 \text{ N şi } N_1 = G - N_2 = \frac{mg(\ell - d)}{\ell} = 8 \text{ N}.$$

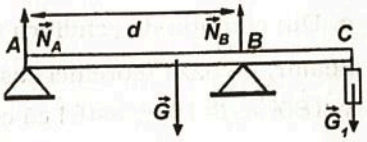
4. Studiem echilibrul de translaţie a grinzii: $\vec{N}_A + \vec{N}_B + \vec{G} + \vec{G}_1 = 0$.

Scalar: $N_A + N_B - mg - m_1 g = 0$.

Studiem echilibrul de rotaţie faţă de punctul A Suma vectorială a momentelor forţelor faţă de punctul A este nulă: $\vec{M}_{N_B,A} + \vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{G_1,A} = 0$.

$$N_B d - mg\frac{\ell}{2} - m_1 g\ell = 0 \Rightarrow N_B = \frac{g\ell(m + 2m_1)}{2d} = 112{,}5\text{N}$$

şi $N_A = (m + m_1)g - N_B = 27{,}5$ N.

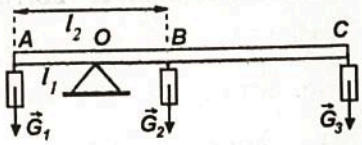


5. Studiem echilibrul de rotaţie a scândurii, astfel că suma vectorială a momentelor forţelor faţă de punctul O este nulă.

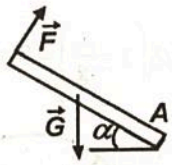
Vectorial: $\vec{M}_{G_1,0} + \vec{M}_{G_2,0} + \vec{M}_{G_3,0} = 0$.

Scalar: $m_1 g\ell_1 - m_2 g(\ell_2 - \ell_1) - m_3 g(\ell - \ell_1) = 0 \Rightarrow$

$$m_3 = \frac{m_1\ell_1 - m_2(\ell_2 - \ell_1)}{\ell - \ell_1} = 320 \text{ g}.$$

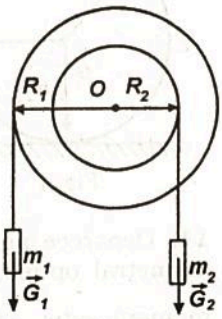


6. Deoarece scândura se poate roti în jurul punctului A, când scândura formează cu orizontala unghiul α ea se află în echilibru de rotație. Impunem condiția ca suma vectorială a momentelor forțelor față de punctul A să fie zero:

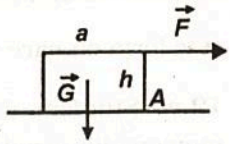


$$\vec{M}_{G,A}+\vec{M}_{F,A}=0 \Rightarrow -mg\frac{\ell}{2}\cos\alpha+F\ell=0 \Rightarrow F=\frac{mg\cos\alpha}{2}\approx 21{,}63\text{N}$$

7. Studiem echilibrul de rotație al scripetelui. Rezultanta momentelor forțelor față de punctul O este nulă. Vectorial: $\vec{M}_{G_1,0}+\vec{M}_{G_2,0}=0$, iar scalar: $m_1gR_1-m_2gR_2=0$ obținem $m_2=\frac{m_1R_1}{R_2}=10$ kg.



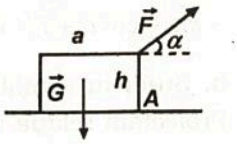
8.a. Pentru ca acest corp prismatic să se răstoarne, trebuie ca momentul forței $\vec{F}$ față de axa AA' (muchia corpului de pe plan perpendiculară pe forța $\vec{F}$) să fie cel puțin egal cu momentul greutății corpului calculat față de aceeași axă.



$$M_{F,AA'}\geq M_{G,AA'} \Rightarrow Fh\geq mg\frac{a}{2} \Rightarrow F\geq\frac{mga}{2h} \Rightarrow F\geq 1 \text{ N} \Rightarrow \text{dacă}$$

forța F este mai mare decât 1 N, corpul se răstoarnă.

b. Dacă forța F, formează cu orizontala unghiul α, pentru ca să se răstoarne corpul, trebuie ca:



$$M_{F,AA'}\geq M_{G,AA'} \Rightarrow Fh\cos\alpha\geq mg\frac{a}{2} \Rightarrow F\geq\frac{mga}{2h\cos\alpha} \Rightarrow F\geq 2$$

N. Pentru a răsturna corpul trebuie ca forța F să fie mai mare decât 2 N

9. Pentru ca roata să urce treapta, trebuie ca momentul forței $\vec{F}$ față de punctul A să fie cel puțin egal cu momentul greutății roții față de același punct A. (fig 1) $M_{F,A}\geq M_{G,A} \Rightarrow F(R-h)\geq mgb$, unde b este brațul greutății față de punctul A (lungimea perpendicularei constuită din A pe dreapta suport a greutății $\vec{G}$). Din geometrie: $b=\sqrt{R^2-(R-h)^2}=\sqrt{h(2R-h)} \Rightarrow F\geq\frac{mg\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}\geq 55{,}9$ N. Dacă forța este cel puțin egală cu 55,9 N, roata poate urca treapta.

10. Împărțim bara în două regiuni: una din oțel cu lungimea $\ell/4$ și masa $m_1=\rho_1S\frac{\ell}{4}$, iar cealaltă din aluminiu cu lungimea $3\ell/4$ și masa $m_2=\rho_2S\frac{3\ell}{4}$ (fig 2). Notăm cu x distanța de la punctul în care suspendăm bara pentru ca aceasta să rămână în echilibru și capătul din oțel al barei. Studiem echilibrul de rotație al greutăților față de punctul de suspensie O: $\vec{M}_{G_1,0}+\vec{M}_{G_2,0}=0$, iar scalar: $G_1\left(x-\frac{\ell}{8}\right)=G_2\left(\ell-x-\frac{3\ell}{8}\right) \Rightarrow \rho_1S\frac{\ell}{4}g\left(x-\frac{\ell}{8}\right)=\rho_2S\frac{3\ell}{4}g\left(\frac{5\ell}{8}-x\right) \Rightarrow$

$$\rho_1\left(x-\frac{\ell}{8}\right)=3\rho_2\left(\frac{5\ell}{8}-x\right)\Rightarrow x=\frac{\ell(\rho_1+15\rho_2)}{8(\rho_1+3\rho_2)}\approx 38\text{ cm}$$

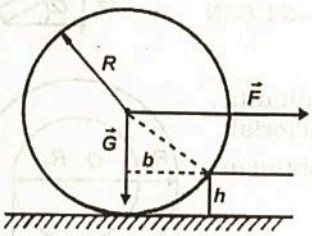


Fig. 1

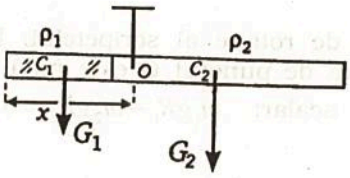


Fig. 2

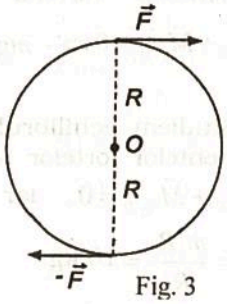
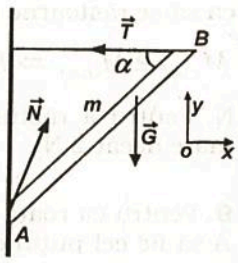


Fig. 3

11. Deoarece asupra volanului se acționează cu două forțe tangente și egale, diametral opuse, ca în figura 3, acestea formează un cuplu de forțe al cărui moment este: $\vec{M}=\vec{M}_{F,0}+\vec{M}_{-F,0}$, iar scalar $M=2FR\Rightarrow F=\frac{M}{2R}=15$ N, unde F este forța cu care șoferul trage cu o mână de volan.

12.a. Studiem echilibrul de rotație a barei față de punctul A. Rezultanta momentelor forțelor față de A este nulă: $\vec{M}_{G,A}+\vec{M}_{T_B,A}=0$, iar scalar:

$$-mg\frac{\ell}{2}\cos\alpha+T_B\ell\sin\alpha=0\Rightarrow T_B=\frac{mg}{2}ctg\,\alpha=1730\text{ N}.$$



b. Studiem echilibrul de translație a barei: $\vec{N}_A+\vec{G}+\vec{T}_B=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe Ox: $N_{A_x}-T_B=0\Rightarrow N_{A_x}=T_B=\frac{mg}{2}ctg\,\alpha$ și pe Oy:

$N_{A_y}-G=0\Rightarrow N_{A_y}=mg$.

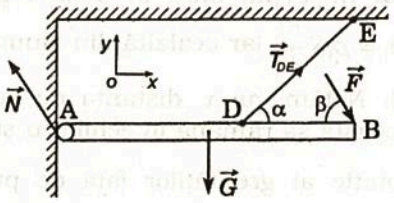
Din geometrie: $N_A=\sqrt{N_{A_x}^2+N_{A_y}^2}=2645$ N.

c. $tg\,\beta=\frac{N_{A_y}}{N_{A_x}}=2tg\alpha=1{,}156$

13.a. Studiem echilibrul de rotație a scândurii. Rezultanta momentelor forțelor față de articulația A este nulă: $\vec{M}_{G,A}+\vec{M}_{T_{DE},A}+\vec{M}_{F,A}=0$, iar scalar:

$$-\frac{mg\ell}{2}+T_{DE}(\ell-d)\sin\alpha-F\ell\sin\beta=0\Rightarrow$$

$$T_{DE}=\frac{\ell(mg+2F\sin\beta)}{2(\ell-d)\sin\alpha}=996{,}8\text{ N}.$$



b. Studiem echilibrul de translație a scândurii: $\vec{N}_A+\vec{G}+\vec{T}_{DE}+\vec{F}=0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

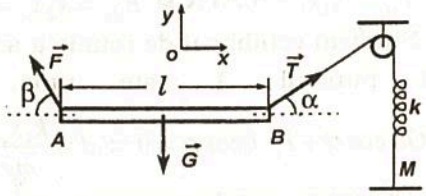
pe Ox: $-N_{A_x}+T_{DE}\cos\alpha+F\cos\beta=0\Rightarrow N_{A_x}=T_{DE}\cos\alpha+F\cos\beta=1073{,}73$ N.

pe Oy: $N_{A_y}+T_{DE}\sin\alpha-mg-F\sin\beta=0\Rightarrow N_{A_y}=mg+F\sin\beta-T_{DE}\sin\alpha\Rightarrow$

N_{Ay} = -86,9 N iar semnul "-" arată că $\vec{N}_{Ay}$ are sens contrar celui presupus.

$N_A = \sqrt{N_{A_x}^2 + N_{A_y}^2} \approx 1077{,}24$ N.

14.a. Studiem echilibrul de rotație a scândurii. Rezultanta momentelor forțelor față de articulația *A* este nulă.) Vectorial: $\vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{T,A} = 0$, iar scalar obținem:



$$-\frac{mg\ell}{2} + T\ell\sin\alpha = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{2\sin\alpha} = 115{,}6\text{N}.$$

Cum $F_{el} = T = kx \Rightarrow x = \frac{T}{k} = 5{,}78$ cm.

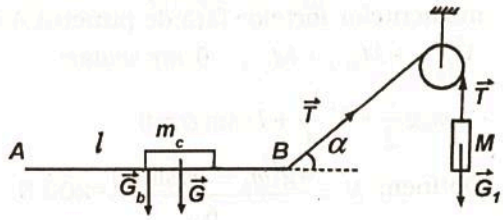
b. Studiem echilibrul de translație a scândurii: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{T} = 0$. Proiectăm relația pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T\cos\alpha - F_x = 0 \Rightarrow F_x = T\cos\alpha = 57{,}8$ N și pe *Oy*:

$$T\sin\alpha + F_y - mg = 0 \Rightarrow F_y = mg - T\sin\alpha = mg - \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2} = 100 \text{ N}.$$

Obținem $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 115{,}5$ N.

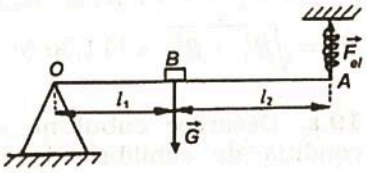
c. $tg\,\beta = \frac{F_y}{F_x} = 1{,}73 \approx \sqrt{3} \Rightarrow \beta = 60^0$.

15. Studiem echilibrul corpului cu masă *M*. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G}_1 = 0$, iar scalar obținem $T = Mg$.



Studiem echilibrul de rotație a barei în raport cu punctul *A*. Rezultanta momentelor forțelor față de punctul *A* este zero: $\vec{M}_{G_b,A} + \vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{T,A} = 0$, iar scalar obținem: $-mg\frac{\ell}{2} - m_c gx + T\ell\sin\alpha = 0 \Rightarrow x = \frac{\ell(2M\sin\alpha - m)}{2m_c}$ =4 cm.

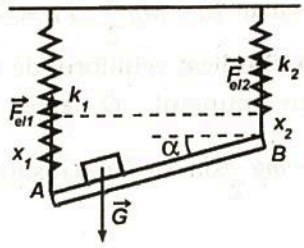
16. Studiem echilibrul de rotație a barei în raport cu punctul *O*. Rezultanta momentelor forțelor față de punctul *O* este zero: $\vec{M}_{G,0} + \vec{M}_{F_{el},0} = 0$, iar scalar obținem:



$-mg\ell_1 + F_{el}(\ell_1 + \ell_2) = 0$. Cum $F_{el} = kx \Rightarrow$

$$mg\ell_1 = kx(\ell_1 + \ell_2) \Rightarrow k = \frac{mg\ell_1}{x\cdot(\ell_1 + \ell_2)} = 1250\text{N/m}.$$

17.a. Studiem echilibrul de translație a scândurii *AB*. Rezulatanta forțelor este nulă: $\vec{F}_{el_1} + \vec{F}_{el_2} + \vec{G} = 0$, iar scalar: $F_{el_1} + F_{el_2} = mg \Rightarrow k_1x_1 + k_2x_2 = mg$ (1).



$$\sin\alpha = \frac{x_1 - x_2}{\ell} \Rightarrow x_1 - x_2 = \ell\sin\alpha \quad (2)$$

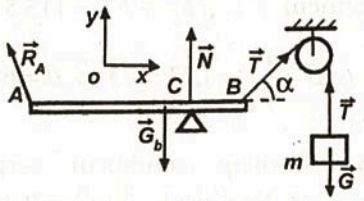
Din (1) şi (2) $\Rightarrow x_1 = \dfrac{mg + k_2\ell\sin\alpha}{k_1 + k_2} = 12{,}5$ cm, iar $x_2 = \dfrac{mg - k_1\ell\sin\alpha}{k_1 + k_2} = 2{,}5$ cm.

b. $F_{el_1} = k_1x_1 = 6{,}25$ N şi $F_{el_2} = k_2x_2 = 3{,}75$ N.

c. Studiem echilibrul de rotaţie a scândurii. Rezultanta momentelor forţelor faţă de punctul A este nulă. Astfel $\vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{F_{el},A} = 0$, iar scalar $-Gd\cos\alpha + F_{el_2}\ell\cos\alpha = 0 \Rightarrow d = \dfrac{k_2x_2\ell}{mg} = 75$ cm.

d. Deoarece scândura rămâne orizontală după aşezarea corpului m, înseamnă că $x_1 = x_2 = x$. Din condiţia de echilibru de translaţie obţinem: $k_1x + k_2x = mg \Rightarrow x = \dfrac{mg}{k_1 + k_2} = 5$ cm, iar din condiţia de echilibru de rotaţie $d' = \dfrac{k_2x\cdot\ell}{mg} = 150$ cm.

18.a. Studiem echilibrul corpului m suspendat de fir. Scalar: $T = mg$.



Studiem echilibrul de rotaţie a barei. Rezultanta momentelor forţelor faţă de punctul A este nulă: $\vec{M}_{G_b,A} + \vec{M}_{N,A} + \vec{M}_{T,A} = 0$ iar scalar:

$$-m_bg\frac{\ell}{2} + N\frac{3\ell}{4} + T\ell\sin\alpha = 0$$

Obţinem $N = \dfrac{4g(m_b - 2m\sin\alpha)}{6} = 200$ N.

b. Studiem echilibrul de translaţie a barei: $\vec{R} + \vec{G}_b + \vec{N} + \vec{T} = 0$.

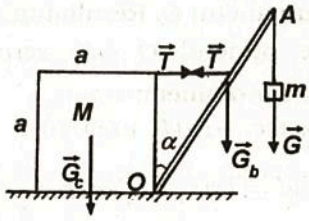
Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate obţinem:

pe Ox: $-R_{A_x} + T\cos\alpha = 0 \Rightarrow R_{A_x} = T\cos\alpha = mg\cos\alpha = 17{,}3$ N şi

pe Oy: $R_{A_y} + N + T\sin\alpha - m_bg = 0 \Rightarrow R_{A_y} = m_bg - N - mg\sin\alpha = 110$ N.

$R_A = \sqrt{R_{A_x}^2 + R_{A_y}^2} \approx 111{,}36$ N.

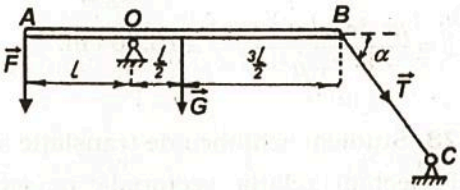
19.a. Deoarece cubul nu se răstoarnă, impunem condiţia de echilibru de rotaţie faţă de muchia orizontală OA ce trece prin punctul O şi este perpendiculară pe forţa $\vec{T}$: $\vec{M}_{T,OA} + \vec{M}_{G_c,OA} = 0$, iar scalar $Ta = Mg\dfrac{a}{2} \Rightarrow T = \dfrac{Mg}{2} = 25$ N.



b. Studiem echilibrul de rotaţie a barei. Rezultanta momentelor forţelor în raport cu punctul O este nulă. $\vec{M}_{G_b,0} + \vec{M}_{T,0} + \vec{M}_{G,0} = 0$, iar scalar obţinem

$$-mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha + Ta - G\ell\sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2Ta}{\ell(mg + 2G)} = \frac{Mga}{\ell(mg + 2G)} = 0{,}25.$$

20.a. Studiem echilibrul de rotație a barei. Suma vectorială a momentelor forțelor, calculate în raport cu punctul O este nulă. Vectorial: $\vec{M}_{F,0}+\vec{M}_{G,0}+\vec{M}_{T,0}=0$ și scalar obținem

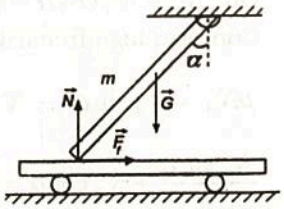


$$F\ell-mg\frac{\ell}{2}-2T\ell\sin\alpha=0\Rightarrow T=\frac{2F-mg}{4\sin\alpha}$$

$\Rightarrow T$=5 kg

b. Pentru ca tensiunea în cablul BC să fie nulă T=0$\Rightarrow F=\dfrac{mg}{2}\Rightarrow m=\dfrac{2F}{g}$=2 kg.

21. Studiem echilibrul căruciorului. Scalar pe Ox: $F=F_f$. Dacă bara se deplasează spre stânga ca în figură, studiem echilibrul de rotație a barei față de punctul de prindere O. Asupra barei se exercită o forță de frecare în sens opus celei care se exercită asupra căruciorului (conform principiului acțiunii și reacțiunii). Rezultanta momentelor forțelor este nulă: $\vec{M}_{G,0}+\vec{M}_{F_f,0}+\vec{M}_{N,0}=0$, iar

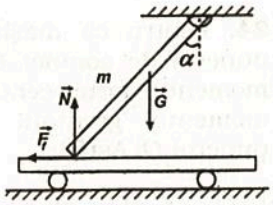


scalar: $mg\dfrac{\ell}{2}\sin\alpha-F_f\ell\cos\alpha-N\ell\sin\alpha=0$, unde ℓ este lungimea barei.

Conform legii frecării $F_f=\mu N\Rightarrow\dfrac{mg}{2}\sin\alpha=F_f\cos\alpha+\dfrac{F_f}{\mu}\sin\alpha\Rightarrow$

$$F_f=F=\frac{\mu mg\sin\alpha}{2(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}\approx 2{,}36\text{ N}.$$

Dacă bara se deplasează în sens opus, echilibrul de rotație a barei față de punctul O devine:

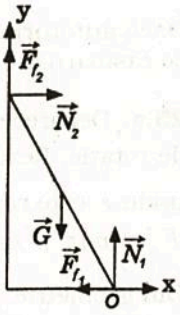


$$-mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha-F_f\ell\cos\alpha+N\ell\sin\alpha=0\Rightarrow$$

$$\frac{mg\sin\alpha}{2}=F_f\cos\alpha-\frac{F_f}{\mu}\sin\alpha\Rightarrow F=F_f=\frac{\mu mg\sin\alpha}{2(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}\Rightarrow$$

$F\approx$ 13 N.

22. Studiem echilibrul de translație a scării: $\vec{N}_2+\vec{F}_{f_2}+\vec{G}+\vec{F}_f+\vec{N}_1=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem:



Pe Ox: $N_2-F_{f_1}=0\Rightarrow N_2=F_{f_1}$ și pe Oy: $F_{f_2}+N_1-mg=0$.

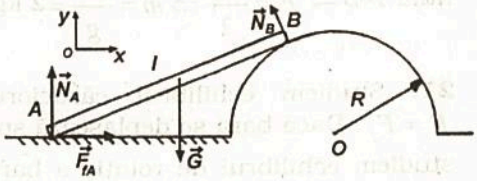
Conform legilor frecării $F_{f_1}=\mu N_1$ și $F_{f_2}=\mu N_2$ obținem

$N_2=\mu N_1\Rightarrow F_{f_2}=\mu^2N_1\Rightarrow N_1=\dfrac{mg}{1+\mu^2}$ și $N_2=\dfrac{\mu mg}{1+\mu^2}$. Studiem echilibrul de rotație a scării. Notăm cu h înălțimea la care se află centrul de greutate al scării și impunem condiția ca rezultanta momentelor forțelor față de punctul de sprijin al scării pe podea (O), să fie nulă: $\vec{M}_{F_{f_2},0}+\vec{M}_{N_2,0}+\vec{M}_{G,0}=0$, iar scalar obținem:

$$-F_{f_2}\ell\cos\alpha - N_2\ell\sin\alpha + mg\frac{h}{tg\,\alpha} = 0 \Rightarrow mg\frac{h}{tg\,\alpha} = N_2\ell(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \Rightarrow$$

$$h = \frac{\mu\ell\sin\alpha(tg\alpha + \mu)}{1+\mu^2} = 16{,}86 \text{ cm.}$$

23. Studiem echilibru de translație a barei $\vec{N}_A + \vec{F}_{f_A} + \vec{G} + \vec{N}_B = 0$.



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $F_{f_A} - N_B\sin\alpha = 0$ și pe Oy: $N_A + N_B\cos\alpha - mg = 0$.

Conform legii frecării $F_{f_A} = \mu N_A \Rightarrow$

$$\mu N_A = N_B\sin\alpha \Rightarrow N_A = \frac{N_B\sin\alpha}{\mu}$$

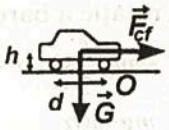
$$\frac{N_B\sin\alpha}{\mu} + N_B\cos\alpha = mg \Rightarrow N_B = \frac{\mu mg}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}$$

Studiem echilibrul de rotație a barei. Suma vectorială a momentelor forțelor față de punctul de sprijin de pe planul orizontal A este nulă: $\vec{M}_{N_B,A} + \vec{M}_{G,A} = 0$ Scalar:

$$N_B\ell - \frac{mg\ell}{2}\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_B = \frac{mg\cos\alpha}{2} \Rightarrow \frac{mg\cos\alpha}{2} = \frac{\mu mg}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2-\cos^2\alpha}. \text{ Dar } \sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{l^2+R^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \mu \approx 0{,}333.$$

24. Pentru ca mașina să nu se răstoarne în curbă, față de punctul de contact O dintre roata exterioară și sol, trebuie ca momentul forței centrifuge să fie mai mic sau cel puțin egal cu momentul greutății autoturismului, ambele calculate față de punctul O. Astfel:

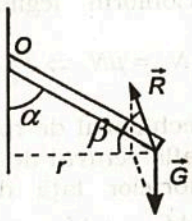


$$|M|_{F_{cf},O} \le |M|_{G,O} \Rightarrow F_{cp}h \le G\frac{d}{2} \Rightarrow \frac{mv^2}{R}h \le mg\frac{d}{2} \Rightarrow v \le \sqrt{\frac{Rgd}{2h}} \Rightarrow v \le 31{,}62 \text{ m/s}$$

Dacă autoturismul intră în curbă cu o viteză mai mică decât 113,84 km/h, el nu se răstoarnă.

25.a. Deoarece bila execută o mișcare circular uniformă, ea se află în echilibru de rotație. Rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă, astfel că $F_{cp} = m\omega^2 r$, unde r este raza de rotație și este $r = \ell\sin\alpha \Rightarrow$

$F_{cp} = m4\pi^2n^2\ell\sin\alpha$.



Din geometrie $R = \sqrt{F_{cp}^2 + G^2} = m\sqrt{(4\pi^2n^2l\sin\alpha)^2 + g^2} \approx 16{,}12$ N.

b. $F_{cp} = R\sin\beta \Rightarrow m\omega^2 r = R\sin\beta$.

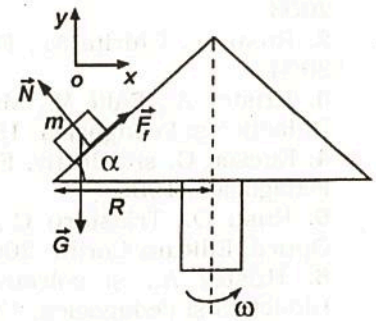
$$G = R\cos\beta \Rightarrow mg = R\cos\beta \Rightarrow tg\,\beta = \frac{4\pi^2n^2\ell\sin\alpha}{g} = 8.$$

c. Calculăm momentul reacțiunii $\vec{R}$ față de punctul de fixare de ax. Cum $\vec{R}+\vec{G}=\vec{F}_{cp} \Rightarrow \vec{R}=\vec{F}_{cp}-\vec{G}$. Astfel $\vec{M}_{\vec{R},0}=\vec{M}_{F_{cp},0}-\vec{M}_{G,0}$, iar scalar obținem

$M_{R,0}=F_{cp}\ell\cos\alpha-mg\ell\sin\alpha=m\ell\sin\alpha(4\pi^2n^2\ell\cos\alpha-g)=12{,}84$ Nm.

d. Cum $M_{R,0}=0 \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2}\ell\cos\alpha-g=0$, deoarece $n=\frac{1}{T} \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\alpha}{g}}\approx 1{,}85$ s

26. Studiem echilibru de rotație al corpului. Rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă, astfel că: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=\vec{F}_{cp}$.



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe Ox: $F_f\cos\alpha-N\sin\alpha=F_{cp}$ și pe Oy:

$F_f\sin\alpha+N\cos\alpha-G=0$. Cum $F_f=\mu N \Rightarrow$

$\mu N\cos\alpha-N\sin\alpha=m\omega^2R$ (1) și

$\mu N\sin\alpha+N\cos\alpha=mg$ (2)

Împărțim relațiile (1) la (2) obținem:

$$\frac{\mu\cos\alpha-\sin\alpha}{\mu\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\omega^2R}{g} \Rightarrow \mu=\frac{g\sin\alpha+\omega^2R\cos\alpha}{g\cos\alpha-\omega^2R\sin\alpha}\approx 0{,}8.$$

Bibliografie:

1. Chiriță M., Davidescu D., Şoltuianu M., Bacalaureat la fizică, Editura Tamar, 2003
2. Rusu O., Chiriță M., Fizică manual pentru clasa a IX-a, Editura Niculescu, 2004
3. Hristev A., Fălie V., Manda D., Fizică manual pentru clasa a IX-a, Editura Didactică şi Pedagogică, 1996
4. Enescu G. şi colectiv, Fizică manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, 1995
5. Rusu O., Trăistaru C., Galbură A., Dinică L., Chiriță M., Fizică Mecanică, Optică, Editura Corint, 2006
6. Hristev A., şi colectiv, Probleme de fizică pentru clasele IX-X. Editura Didactică şi Pedagogică, 1983
7. Cone G., Stanciu Gh., Tudorache Ş., Probleme de fizică pentru liceu (vol I şi II), Editura All, 1996
8. Vlăducă Gh. Şi colectiv, Probleme de fizică pentru clasele XI-XII, Editura Didactică şi Pedagogică, 1993
9. Hristev A., Probleme de fizică. Optică. Fizică atomică şi nucleară, Editura ARH, 1992
10. Toader E., Spulber V., 555 Teste de optică, Editura Didactică şi Pedagogică, 1989
11. Rusu O., Galbură A., Probleme de mecanică, Editura Niculescu,1994
12. Ionescu R., Onea C., Toma I., Fizică manual pentru clasa a IX-a, Editura Teora, 2000
13. Druică Z., Popescu A., Probleme de mecanică şi acustică, Editura tehnică, 1974
14. Colectiv, Culegere de probleme pentru admiterea în învăţământul superior, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1989
15. Colectiv, Teste de fizică, Editura Politehnica Press, 2002
16. Colectiv, Societatea de Ştiinţe Fizice şi Chimice, 1986
17. Hristev A., Probleme de fizică pentru învăţământul mediu, Editura Icar, 1991
18. Probleme date la examenul de bacalaureat
19. Variantele propuse la examenul de bacalaureat 2007, 2008 şi 2009
20. Subiecte de bacalaureat date în diverşi ani

ISBN: 978-606-8010-52-6

Preț: 30 lei