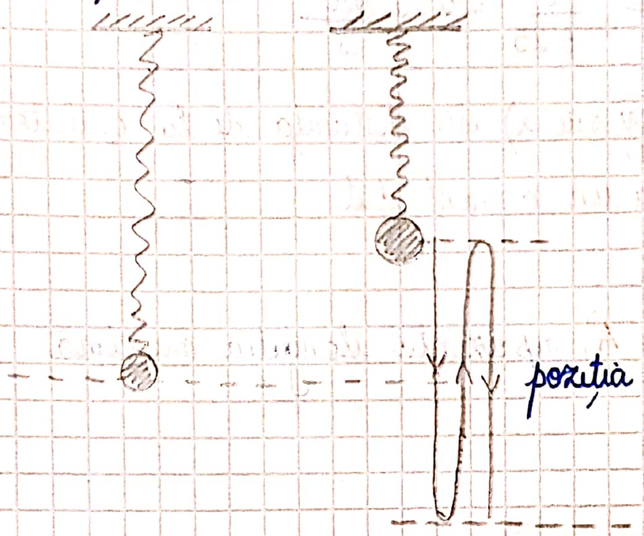
26.09.2019

CAP. I OSCILAȚII ȘI UNDE MECANICE

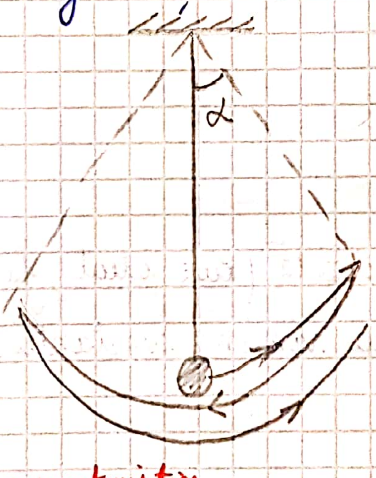
Mișcarea oscilatorie

Def: Mișcarea oscilatorie este mișcarea care se repetă la intervale de timp egale și are loc simetric față de o poziție de echilibru

Ex: a) Pendul elastic



b) Pendul gravitațional



Mărimi caracteristice

Def: Perioada mișcării oscilatorii (not T) = intervalul de timp în care punctul material efectuează o oscilație completă

$$\boxed{T = \frac{\Delta t}{N}} \qquad [T]_{S.I} = 1\,s$$

Δt: intervalul de timp în care s-au efectuat N oscilații

OBS: O oscilație completă – mișcarea oscilatorului între 2 treceri succesive prin același punct și în același sens

Def: Frecvența mișcării oscilatorii (not ν) = numărul de oscilații efectuate în unitatea de timp

$$\boxed{\nu = \frac{N}{\Delta t}} \quad [\nu]_{S.I} = \frac{osc}{s} = s^{-1} = Hz \text{ (Hertz)}$$

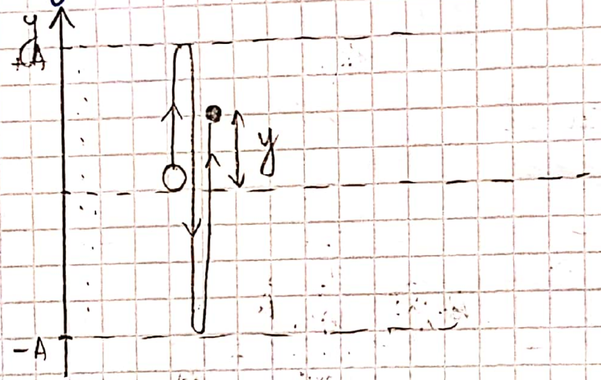
pt $\begin{cases} N = 5\ osc \\ \Delta t = 5{,}25\ s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{5{,}25}{5} = 1{,}05\ s \\ \nu = \frac{5}{5{,}25} = 0{,}95\ \frac{osc}{s} \end{cases}$

Def: Elongația (not y sau x) este distanța de la oscilator la poziția de echilibru la un moment dat

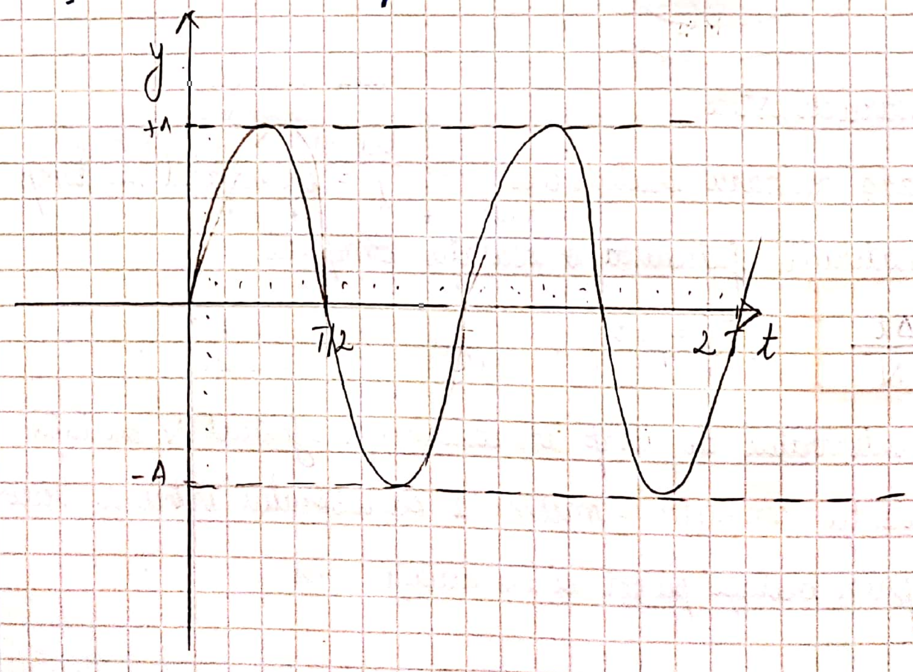
Obs: $y = f(t)$

Def: Amplitudinea (not A) reprezintă elongația maximă

$A = y_{max}$

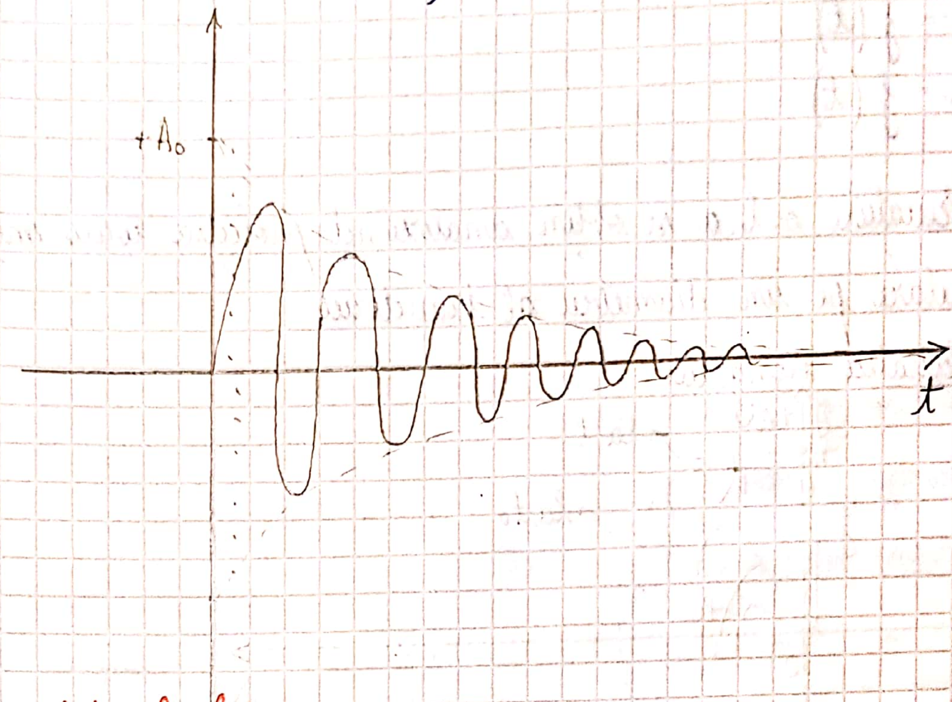


Def: Mișcarea oscilatorie neamortizată (caz ideal, fără frecări) este mișcarea în care amplitudinea rămâne constantă.



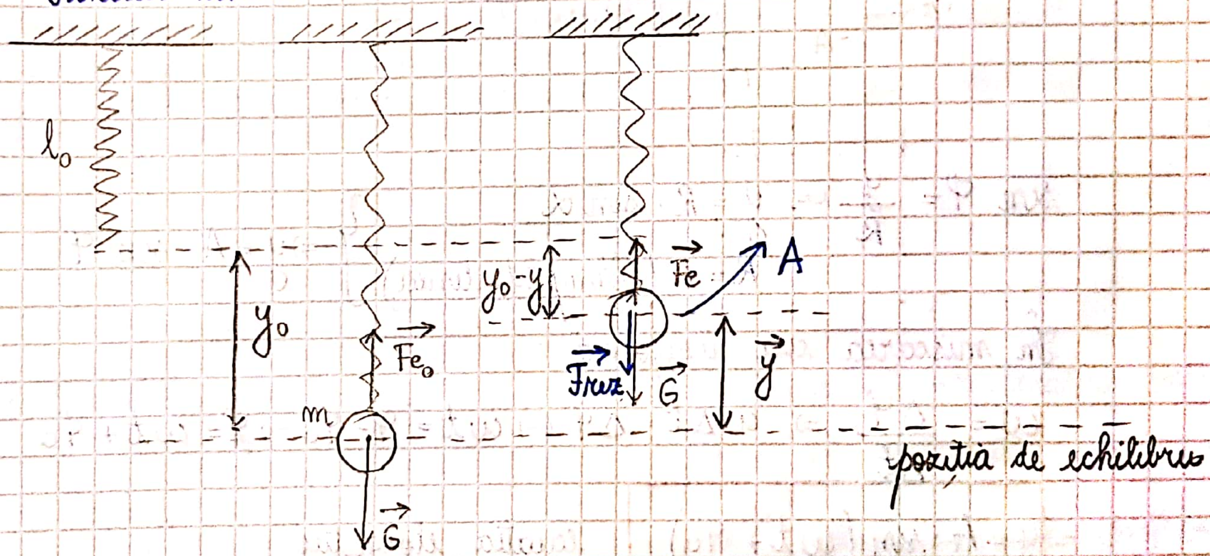
Scanned with CamScanner

Def: Mișcarea oscilatorie amortizată este mișcarea în care amplitudinea scade de la o oscilație la alta (caz real)



Oscilatorul liniar armonic

Pendul elastic:



în P.E: $Fe_0 = G \Leftrightarrow ky_0 = mg \Rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}$

În A: $Frez = G - Fe \Leftrightarrow Frez = mg - k \cdot (y_0 - y)$

$Frez = mg - k\left(\frac{mg}{k} - y\right)$

$Frez = mg - mg + ky \Leftrightarrow \boxed{Frez = ky}$ $\boxed{\vec{Frez} = -k \cdot \vec{y}}$

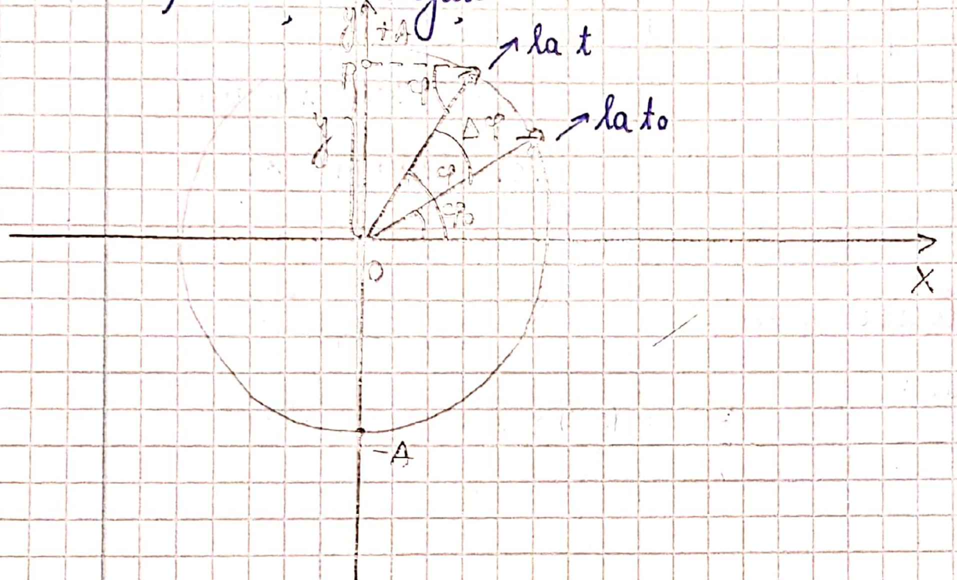
Def: Oscilatorul liniar armonic este un punct material care oscilează rectiliniu sub acțiunea unei forțe rezultante de forma: $\vec{Frez} = -k\vec{y}$ (forță de tip elastic)

Ecuațiile o.l.a

$$\begin{cases} y = f(t) \\ v = f(t) \\ a = f(t) \end{cases}$$

Ecuațiile o.l.a se obțin analizând proiecția unei mișcări circulare pe un diametru al traiectoriei

1) Ecuația elongației



$\sin\varphi = \frac{y}{R} \Leftrightarrow y = R \cdot \sin\varphi$

$R = A$ (Amplitudinea) $\Rightarrow y = A \cdot \sin\varphi$

În mișcarea circ uniformă:

$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \omega\Delta t = \Delta\varphi \Leftrightarrow \omega t = \varphi - \varphi_0 \Rightarrow \varphi = \omega t + \varphi_0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)}$ ecuația elongației

ω: pulsație $[\omega]_{S.I} = 1\,\frac{rad}{s}$

$\varphi = \omega t + \varphi_0$: faza mișcării

φ_0 - faza inițială

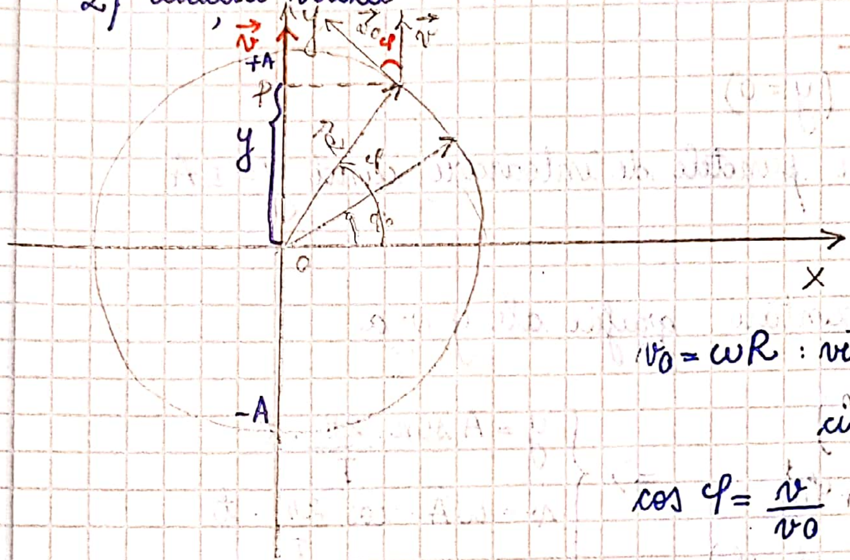
$\boxed{\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}}$, $\boxed{\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}}$

OBS! Dacă $\varphi_0 = 0$, oscilatorul se află inițial în P.E $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ec devine $y = A \cdot \sin\omega t$

01. 10. 2019

2) Ecuația vitezei



$v_0 = \omega R$: viteza tangențială în mișc circulară uniformă

$\cos\varphi = \frac{v}{v_0} \Rightarrow v = v_0 \cdot \cos\varphi$

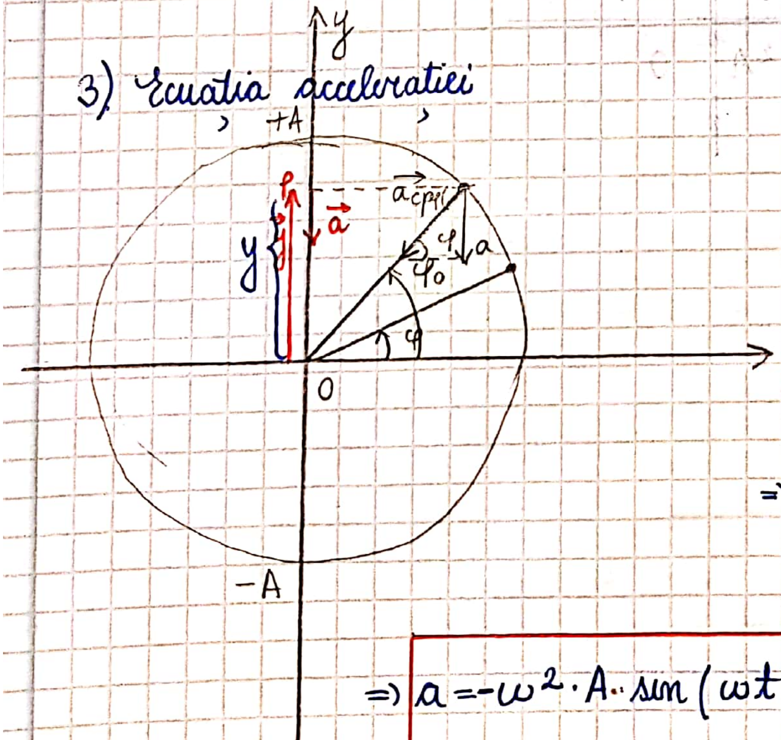
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} v = \omega R \cos\varphi \\ R = A \end{array}\right\} \Rightarrow v = \omega A \cos\varphi \\ \omega = \frac{\Delta\varphi}{t} \Rightarrow \omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t} \Rightarrow \varphi = \omega t + \varphi_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{v = \omega A + \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\boxed{|v_{max}| = \omega A}$$

Obs: $v = 0$ în punctele de întoarcere (când $y = \pm A$)

$v = v_{max}$ când oscilatorul trece prin P.E

3) Ecuația accelerației



$a_{cp} = \omega^2 \cdot R$ (accelerația centripetă în m.c.u)

$\sin\varphi = \frac{a}{a_{cp}} \Rightarrow a = a_{cp} \cdot \sin\varphi \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow a = \omega^2 \cdot R \cdot \sin\varphi \\ R = A \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow a = \omega^2 \cdot A \cdot \sin \cancel{\omega}\, \varphi \\ \cancel{\varphi} = \omega = \frac{\Delta\varphi}{t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t} \Rightarrow \varphi = \omega t + \varphi_0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)}$$

„−" : $\vec{a}$ are sens opus vectorului $\vec{y}$ (elongație)

$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

$a = -\omega^2 \cdot y$

$\boxed{|a_{max}| = \omega^2 \cdot A}$

! Obs: $a = 0$ în P.E $(y = 0)$

$a = a_{max}$ (în punctele de întoarcere, când $y = \pm A$

Reprezentări grafice ale y, v, a

$$\begin{cases} y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \\ v = \omega A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \\ a = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = A \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ v = \omega A \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ a = -\omega^2 A \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t = -\omega^2 \cdot y \end{cases}$$

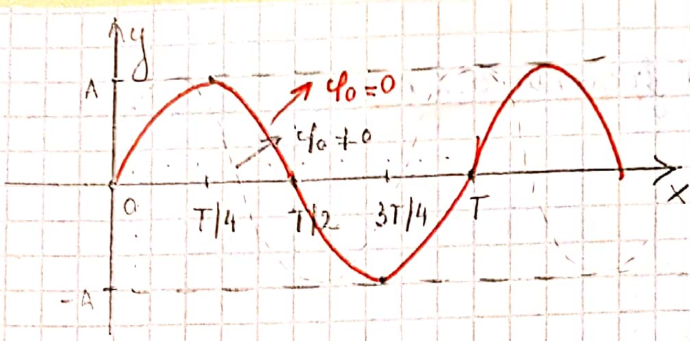
$\omega = \frac{2\pi}{T}$

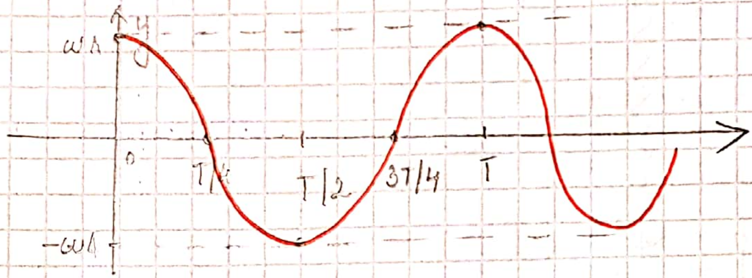
Considerăm că la $t_0 = 0$, $y_0 = 0 \Leftrightarrow$

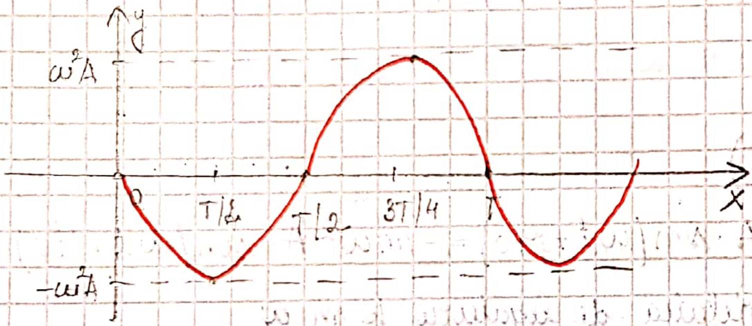
$\Leftrightarrow 0 = A \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \Leftrightarrow 0 = A \sin \varphi_0 \Rightarrow \sin \varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$

t	0	T/4	T/2	3T/4	T
y	0	A	0	−A	0
v	ωA	0	$-\omega A$	0	ωA
a	0	$-\omega^2 \cdot A$	0	$\omega^2 A$	0

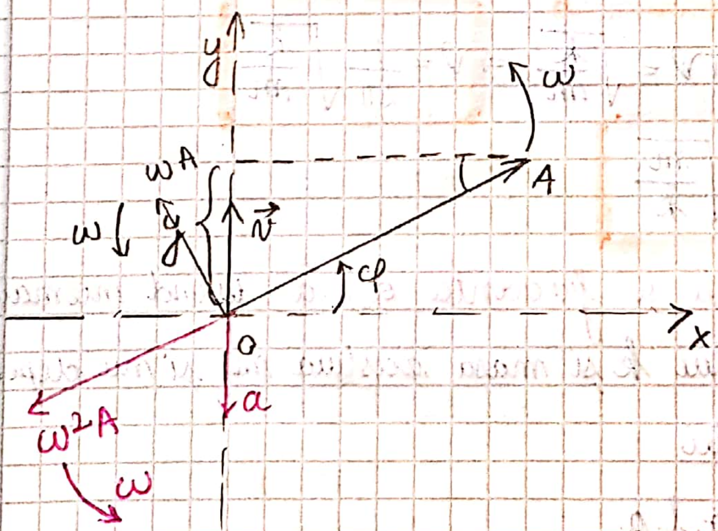
Scanned with CamScanner







Reprezentarea fazorială



$y = A \cdot \sin \varphi$

$y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

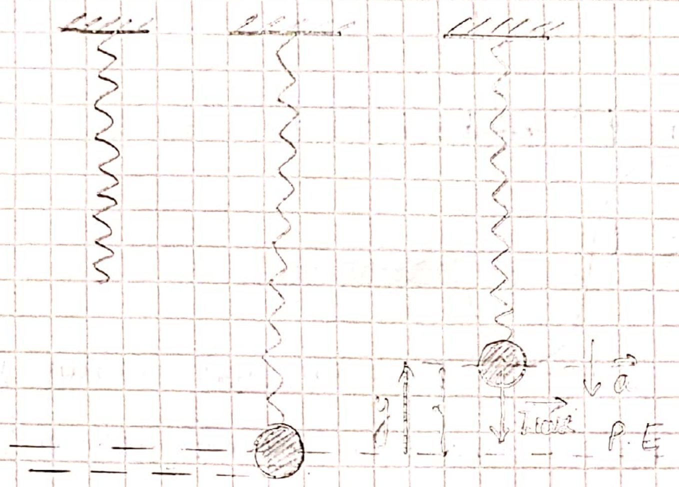
Fazor = vector care se rotește cu viteza unghiulară ω

→ φ: faza = unghiul dintre fazor și axa OX

→ y: proiecția fazorului $\vec{A}$ pe axa Oy

Perioada și frecvența o.l.a

Pendul elastic:



$\vec{F}_{rez} = -k\vec{y}$

$\vec{F}_{rez} = m\cdot\vec{a}$ (pr II)

$-ky = ma \Leftrightarrow -k\cdot A\cdot\sin(\omega t+\varphi_0) = -m\omega^2 A\cdot\sin(\omega t+\varphi_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{k = m\omega^2}$ Relația de legătură k, m, ω

Pulsația o.l.a : $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

$\omega = 2\pi\cdot\nu = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$

$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

Obs! : Pulsația, perioada și frecvența o.l.a depind numai de constanta oscilatorului k și masa acestuia m și nu depind de amplitudinea oscilației

Energia o.l.a

Em mecanică (totală) : $E_T = E_p + E_c$

$E_p = \frac{ky^2}{2}$ (energie potențială elastică)

$E_c = \frac{mv^2}{2}$ (energie cinetică)

$$E_p = \frac{k \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$$

$$E_c = \frac{m \cdot \omega^2 A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$$

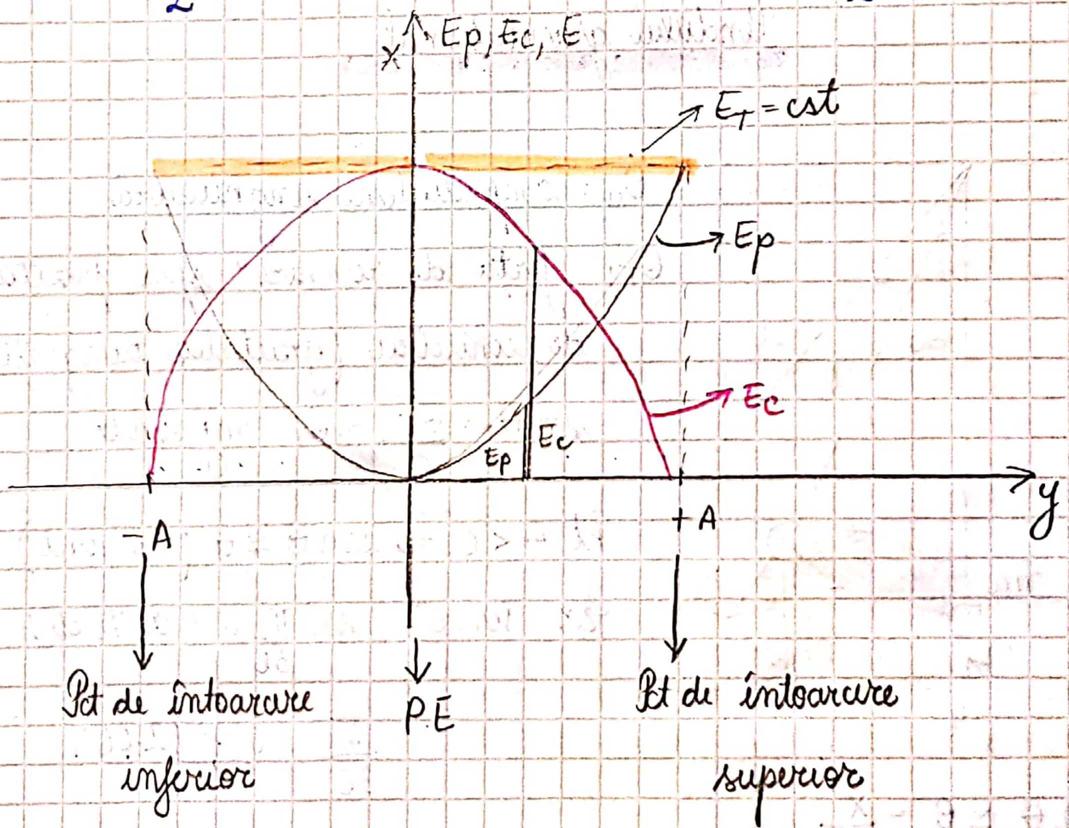
$$\Rightarrow E_T = \frac{1}{2}\left[k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \underbrace{m\omega^2}_{k} A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)\right]$$

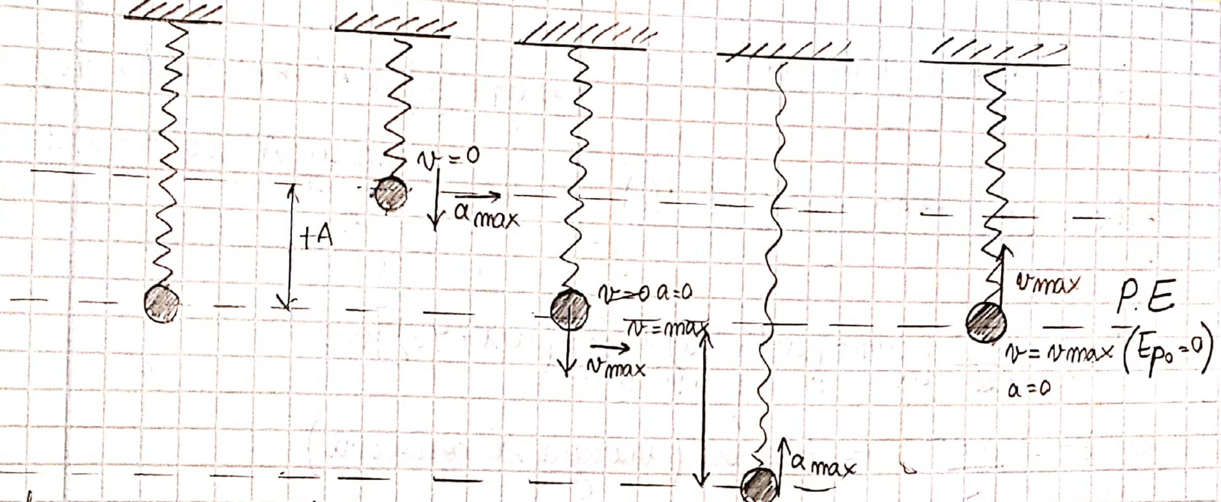
$$E_T = \frac{kA^2}{2}\left[\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_T = \frac{kA^2}{2}} \Rightarrow E_T = cst \text{ (energia se conservă)}$$

Concluzie: Pe parcursul mișcării o.l.a energia cinetică se transformă în energie potențială și invers, dar energia totală a oscilatorului rămâne constantă (se conservă)

$$E_p = \frac{ky^2}{2} \ ; \ E_c = E_T - E_p \Leftrightarrow E_c = \frac{kA^2}{2} - \frac{ky^2}{2}$$

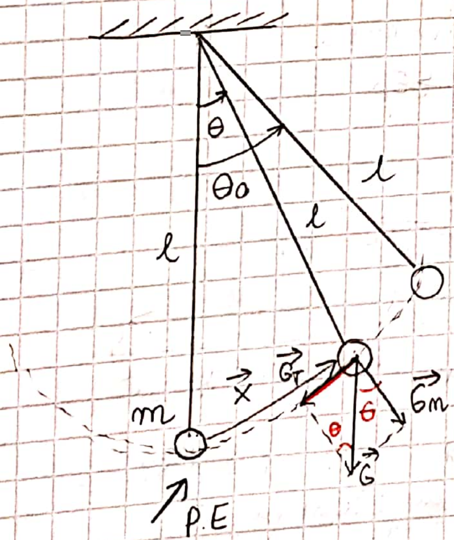




$t_0=0$	$t=T/4$	$t=T/2$	$t=3T/4$	$t=T$
E_c max, $E_p=0$	E_p max, $E_c=0$	$E_c=$ max, $E_p=0$	E_p max, $E_c=0$	E_c max, $E_p=0$

Temă: 6, 9, 10

Pendulul gravitațional



θ_0 : amplitudine unghiulară

G_T: „forța de revenire" spre poziția de echilibru (greutatea tangențială)

$\sin\theta = \frac{G_T}{G} \Rightarrow G_T = mg\sin\theta$

Pt $\theta < 6 \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$ (în rad)

Ex: $\sin 5° = \sin\frac{\pi}{36} = 0,0871557$

$\frac{\pi}{36} = 0,0872664$

$\sin\theta \simeq \theta = \frac{x}{l}$

$G_T = mg\frac{x}{l}$

$G_T = \frac{mg}{l}\cdot x$

not $\boxed{k = \frac{mg}{l}}$

$\Rightarrow G_T = k\cdot x$

$\vec{G_T} = -k\cdot\vec{x} \Rightarrow$ Pendulul gravitațional este o.l.a

14, 15, 16

$K = m\omega^2 \Rightarrow \frac{mg}{l} = m\omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$

$2\pi\nu = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$

$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$

T: perioada pendulului gravitațional în condiții de izocronism: $\theta < 6$

Obs!: Perioada pendulului gravitațional este independentă de amplitudinea de oscilație

$l = ?$ pt $T = 2s$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \Rightarrow l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}8 \cdot 4}{4 \cdot (3{,}14)^2} = \frac{9{,}8}{9{,}85} =$

$= 0{,}994\ m$

8.10.2019

Exp. Determinarea accelerației gravitaționale

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$: pendul gravitațional

$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = 39{,}47841 \frac{l}{T^2}$

Nr det	l	T	ν	g	$\bar{g}$
1	0,234 m	0,94	1,06	10,45	10,26
2	0,51	1,4	0,71	10,27	
3	0,8	1,77	0,56	10,08	

$g = 39{,}47841 \cdot \frac{0{,}234}{(0{,}94)^2}$

$g = 39{,}47841 \cdot \frac{0{,}51}{(1{,}4)^2}$

Compunerea oscilațiilor

A. Compunerea oscilațiilor paralele cu aceeași frecvență

Principiul superpoziției:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01})$$
$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}) \Rightarrow y = y_1 + y_2 = A_{rez} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$\omega = 2\pi\nu$, $A_{rez} = ?$ $\varphi_0 = ?$

① Metoda analitică

$$y = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) + A_2 (\sin \omega t + \varphi_{02})$$

$$y = A_1 \underline{\sin\omega t} \cdot \cos\varphi_{01} + A_1 \underline{\cos\omega t} \cdot \sin\varphi_{01} + A_2 \underline{\sin\omega t} \cos\varphi_{02} + A_2 \underline{\cos\omega t} \sin\varphi_{02}$$

$$A_{rez} \underline{\sin\omega t} \cos\varphi_0 + A_{rez} \underline{\cos\omega t} \sin\varphi_0 = (A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 \cos\varphi_{02}) \underline{\sin\omega t} + (A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 \sin\varphi_{02}) \underline{\cos\omega t}$$

$$\begin{cases} A_{rez} \sin\varphi_0 = A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 \sin\varphi_{02} \\ A_{rez} \cos\varphi_0 = A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 \cos\varphi_{02} \end{cases} \Rightarrow \boxed{tg\,\varphi_0 = \frac{A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 \sin\varphi_{02}}{A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 \cos\varphi_{02}}}$$

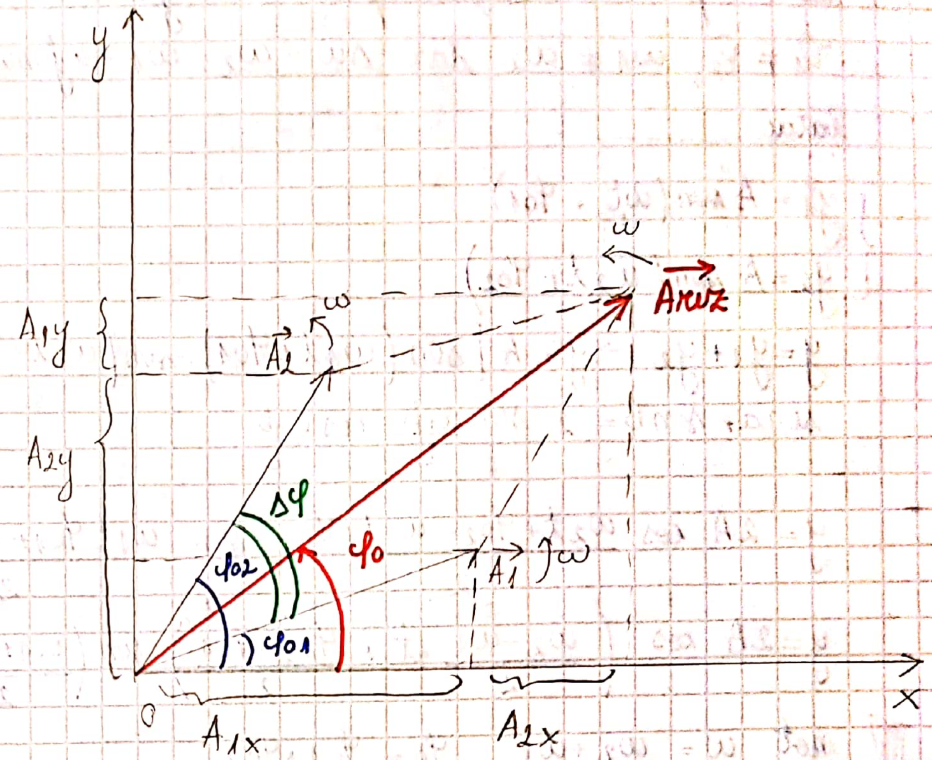
$$A_{rez}^2 (\overbrace{\sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0}^{1}) = \underline{A_1^2 \sin^2\varphi_{01}} + \underline{A_2^2 \sin^2\varphi_{02}} + 2A_1A_2 \sin\varphi_{01} \sin\varphi_{02} + \underline{A_1^2 \cos^2\varphi_{01}} + \underline{A_2^2 \cos^2\varphi_{02}} + 2A_1A_2 \cos\varphi_{01} \cos\varphi_{02}$$

$$A_{rez}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})$$

not $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01}$: diferența de fază (defazaj)

$$\boxed{A_{rez} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\varphi}}$$

② Metoda fazorială



$$tg\,\varphi_0 = \frac{A_{1y}+A_{2y}}{A_{1x}+A_{2x}}$$

$$tg\,\varphi_0 = \frac{A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 \sin\varphi_{02}}{A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 \cos\varphi_{02}}$$

$$\boxed{A_{rez} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}}$$

Cazuri:

1) Dacă $\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \Leftrightarrow \Delta\varphi = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{rez} = \sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2} = A_1 + A_2$ oscilații în fază

2) Dacă $\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots \Leftrightarrow \Delta\varphi = (2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{rez} = \sqrt{A_1^2+A_2^2-2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$

oscilații în opoziție de fază

3) Dacă $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \Leftrightarrow \Delta\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

$A_{rez} = \sqrt{A_1^2+A_2^2}$ oscilații în cvadratură

B Compunerea oscilațiilor paralele cu frecvențe diferite

$\nu_1 \neq \nu_2$, $\omega_1 \neq \omega_2$ dar $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \to$ f mic $\Rightarrow$ fenomenul de bătăi

$$\begin{cases} y_1 = A\sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) \\ y_2 = A\sin(\omega_2 t + \varphi_{02}) \end{cases}$$

$$y = y_1 + y_2 \Rightarrow y = A\left[\sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) + \sin(\omega_2 t + \varphi_{02})\right]$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$y = 2A\cos\frac{\omega_2 t + \varphi_{02} - \omega_1 t + \varphi_{01}}{2}\sin\frac{\omega_1 t\,\varphi_{01} + \omega_2 t\,\varphi_{02}}{2}$$

$$y = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\cdot t + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{\varphi_{01}\cdot\varphi_{02}}{2}\right)$$

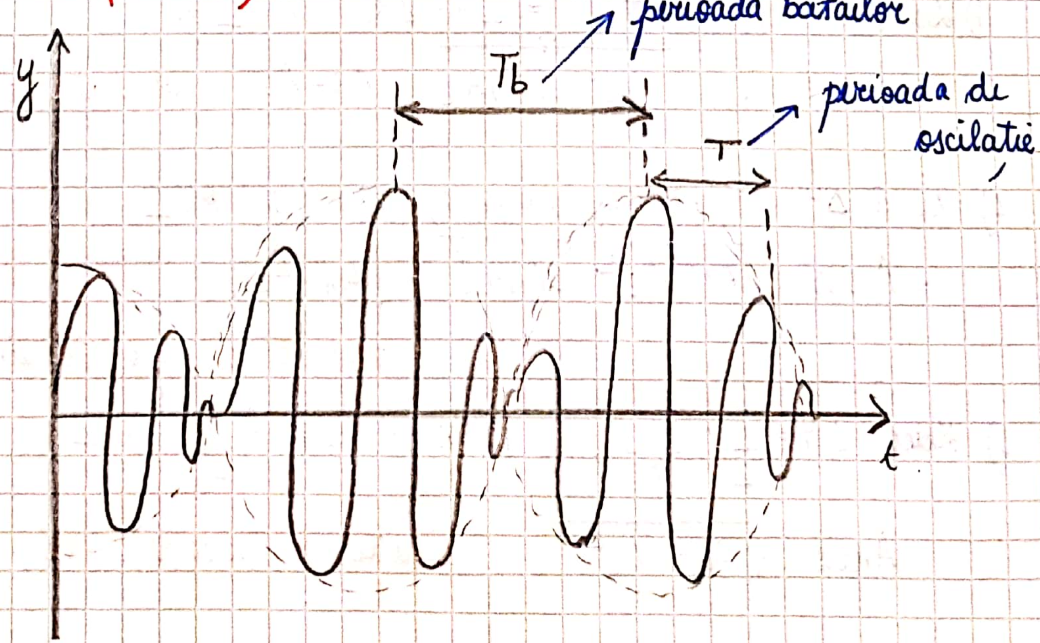
! not $\omega = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$, $\varphi_0 = \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}$

$\Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$, $\Delta\varphi_0 = \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}$

$$y = \underbrace{2A\cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi_0)}_{A_{rez}}\cdot\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\boxed{A_{rez} = 2A\cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi_0)}$$

$$y = A_{rez}\cdot\sin(\omega t + \varphi_0)$$



$$\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boxed{T = \frac{4\pi}{\omega_1+\omega_2}}$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{2T_b} \Leftrightarrow \frac{\omega_2-\omega_1}{2} = \frac{\pi}{T_b} \Rightarrow T_b = \frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}$$

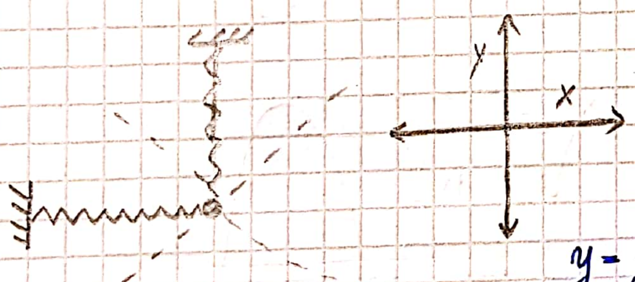
$$A_{rez} = 2A\cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi_0)$$

$$A_{rez\,max} = \pm 2A \Rightarrow \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi_0) = \pm 1$$

$$\begin{cases} \Delta\omega t + \Delta\varphi_0 = k\pi \quad | \cdot (-1) \\ \Delta\omega(t+T_b) + \Delta\varphi_0 = (k+1)\pi \end{cases}$$

$$\Delta\omega T_b = \pi \Rightarrow T_b = \frac{\pi}{\Delta\omega} \Rightarrow \boxed{T_b = \frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}}$$

[C] Compunerea oscilațiilor perpendiculare ~~pe~~ cu aceeași frecvență

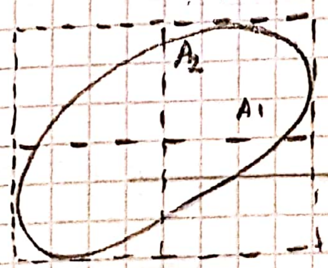


$$\begin{cases} x = A_1\sin(\omega t + \varphi_{01}) \\ y = A_2\sin(\omega t + \varphi_{02}) \end{cases}$$

$y = f(x)$: ecuația traiectoriei

Ecuația traiectoriei: $\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01}) = \sin^2(\varphi_{02}-\varphi_{01})}$

ecuația unei elipse înscrisă într-un dreptunghi cu laturile $2A_1$, $2A_2$



Cazuri

a) $\Delta\varphi = 2K\pi \Rightarrow \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} = 0 \Rightarrow$

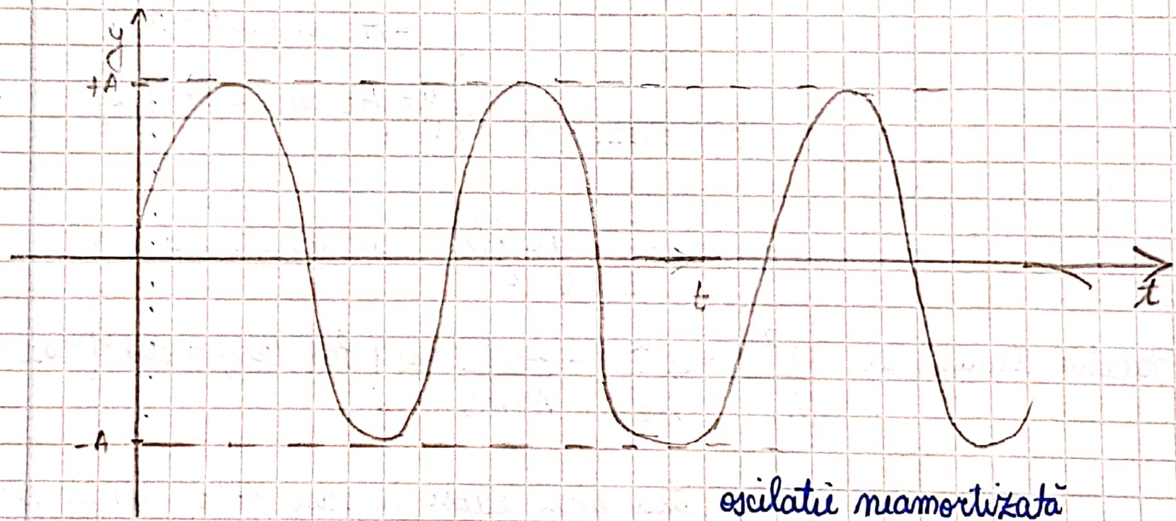
$\Rightarrow \boxed{y = \frac{A_2}{A_1} \cdot x}$ (ecuația dreptei) (pantă pozitivă)

b) $\Delta\varphi = (2K+1)\pi \Rightarrow \boxed{y = \frac{-A_2}{A_1} \cdot x}$ (pantă negativă)

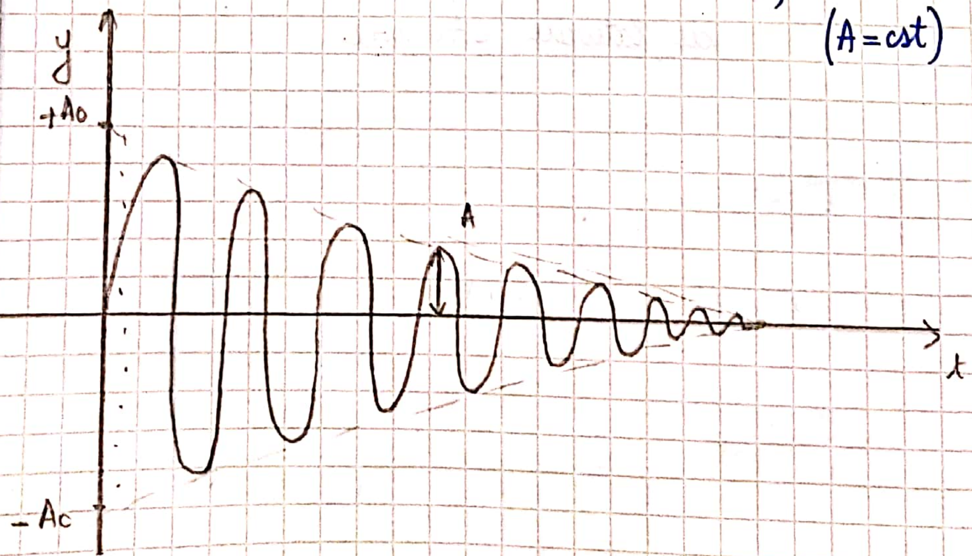
c) $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + 2K\pi \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.}$ (ecuația elipsei orizontale)

dacă $A_1 = A_2 \overset{not}{=} A \Rightarrow x^2 + y^2 = A^2$ (ecuația cercului)

Oscilații amortizate



oscilație neamortizată
(A=cst)



① Forță de rezistență (frecare): $\vec{F_r} = -r\vec{v}$

r se numește coeficient de rezistență la înaintare

$A = A_0 \cdot e^{-bt}$

b se numește coeficient de amortizare

Ex: $t = ?$ la care $A = \frac{A_0}{2}$

$\frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-bt_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-bt_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = \ln e^{-bt_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow -\ln 2 = -bt_{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{b}$

② Timp de relaxare

$\tau: A = \frac{A_0}{e}$

$\frac{A_0}{e} = A_0 \cdot e^{-b\tau}$

$e^{-1} = e^{-b\tau} \Rightarrow b\tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{b}$

Oscilații forțate. Rezonanța

- sunt oscilații ale unui sistem fizic asupra căruia acționează o forță externă periodică de forma $F = F_0 \sin \Omega t$

Pr II: $\vec{F_{rez}} = m\vec{a}$

$F_0 \cdot \sin\omega t - \underbrace{ky}_{\text{de tip elastic}} - \underbrace{rv}_{\text{de rezistență}} = m \cdot a \rightarrow$

$\Rightarrow y = A\sin(\Omega t + \varphi_0)$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\Omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\alpha\Omega^2}}$$

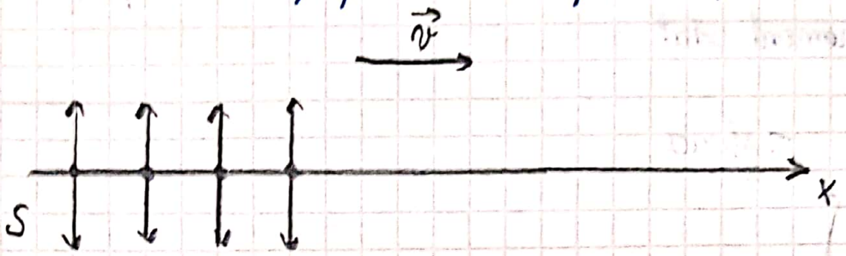
ω_0 - pulsația proprie a oscilatorului

$A \rightarrow$ maximă dacă $\Omega = \omega_0$

Rezonanța = fenomenul de transfer selectiv de energie de la un osc la altul care are loc când $\Omega = \omega_0$

Clasificare

Def: Unda transversală este unda la care direcția de oscilație a particulelor mediului este perpendiculară pe direcția de propagare.



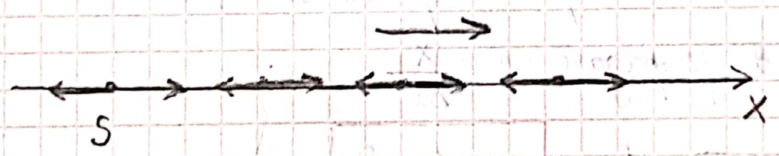
Viteza de propagare a undei transversale într-o coardă elastică

$v_T = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ T: forța de tensiune

$\mu = \frac{m}{l}$: masa unității de lungime

$[\mu]_{S.I} = \frac{kg}{m}$

Def: Unda longitudinală este unda la care direcția de oscilație a particulelor mediului este paralelă cu direcția de propagare.



Viteza de propagare a undei longitudinale

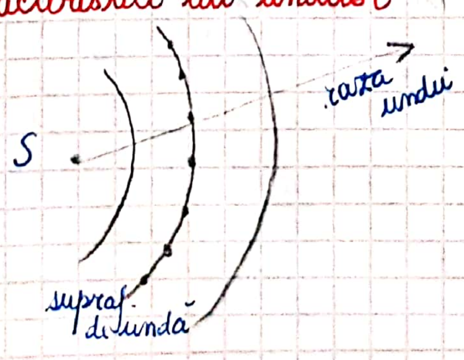
$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ E: modul de elasticitate longitudinal (Young)

$E = \frac{N}{m^2}$

$\rho = \frac{m}{V}$ (densitatea mediului)

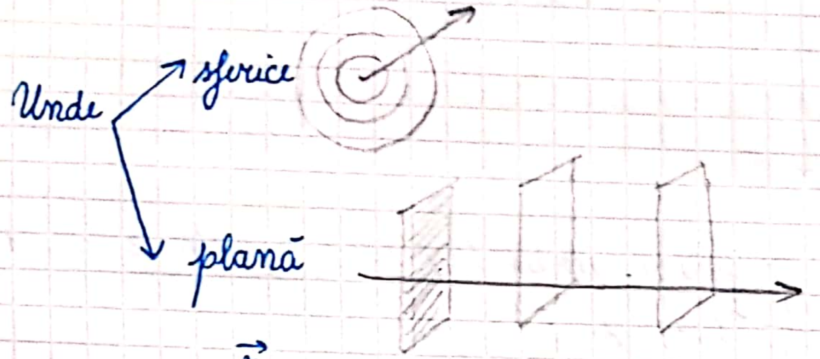
ex: Sunetul este o undă longitudinală care se propagă prin comprimări și destinderi succesive ale mediului prin care trece.

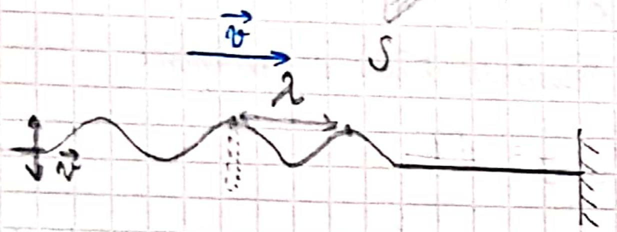
② Caracteristici ale undelor



Def: Suprafața de undă = mulțimea punctelor care oscilează în fază

Def: Frontul undei este cea mai avansată suprafață de undă la un moment dat.





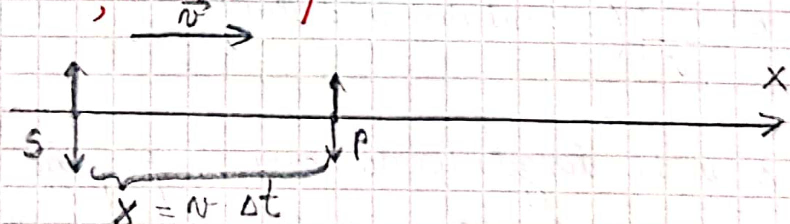
Def: Lungimea de undă (λ) „lambda" este distanța pe care se propagă unda în timp de o perioadă

Viteza de propagare: $v = \frac{x}{\Delta t}$

$\boxed{v = \frac{\lambda}{T}}$ $\quad T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \boxed{v = \lambda \cdot \nu}$

$[\lambda]_{S.I} = 1\,m$

③ **Ecuația undei plane**



Ecuația oscilației sursei: $y_S = A \sin \omega t$

Punctul P oscilează analog cu S dar cu intervalul Δt în urmă

$y_P = A \sin \omega (t - \Delta t)$

$\Delta t = \frac{x}{v}$

$y_P = A \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)$

$$y_P = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right)$$

Dar $v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v \cdot t$

$$\boxed{y_P = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)} \longrightarrow \text{ecuația undei plane}$$

Obs: $y_P = f(t, x)$

Unda = fenomen periodic în timp și în spațiu

$$y_P = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

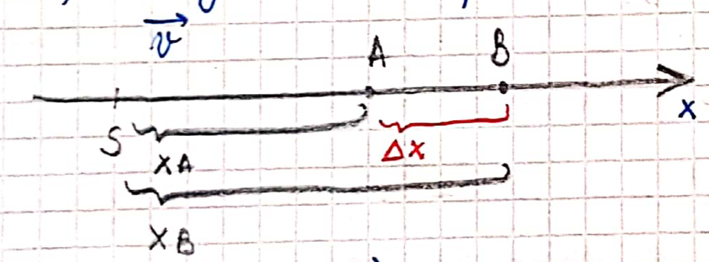
$\frac{2\pi}{T} = \omega$: pulsația : periodicitatea în timp

$\frac{2\pi}{\lambda} = k$: nr de undă : periodicitatea în spațiu

$$\boxed{y_P = A \sin (\omega t - kx)}$$

y_P: elongația pct P

Diferența de fază între 2 puncte, la un moment dat



$$y_A = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right)$$

$$y_B = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right)$$

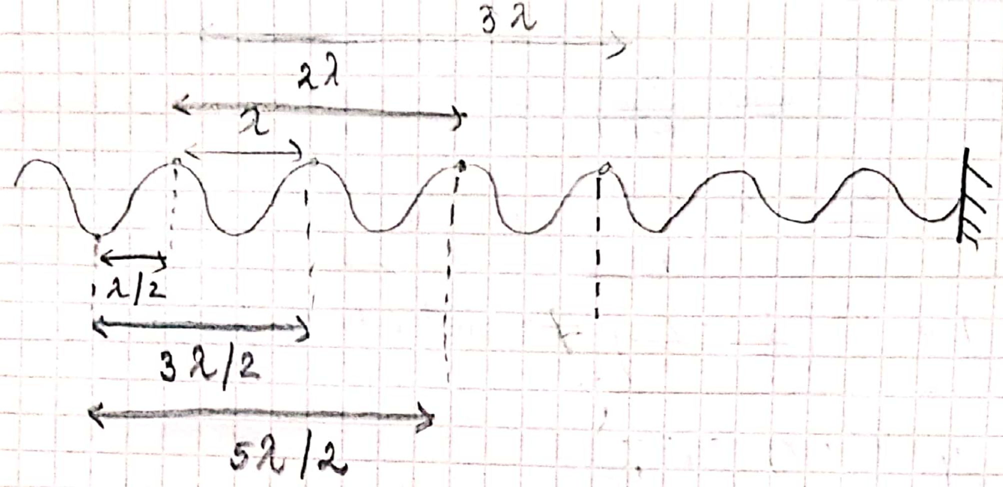
$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right)$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{-x_A}{\lambda} + \frac{x_B}{\lambda}\right)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_B - x_A)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x$$

$\Delta\varphi$: dif de fază (defazaj)



Pt: $\Delta x = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots \Leftrightarrow$

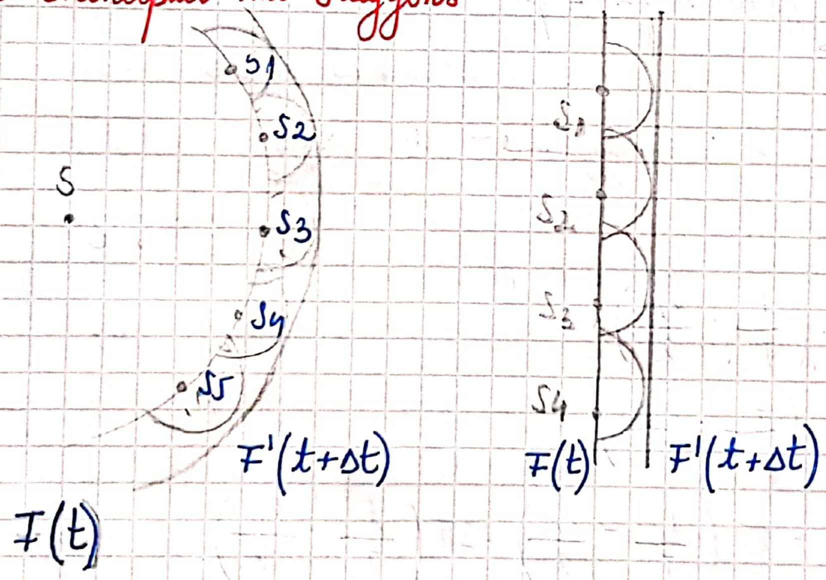
$\Delta x = 2\frac{\lambda}{2}, 4\frac{\lambda}{2}, 6\frac{\lambda}{2} \dots \Leftrightarrow \Delta x = 2k\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{2k\lambda}{2} =$

$= 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ osc în fază

Pt $\Delta x = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{(2k+1)\lambda}{2} = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ osc în opoziție de fază

④ Principiul lui Huygens



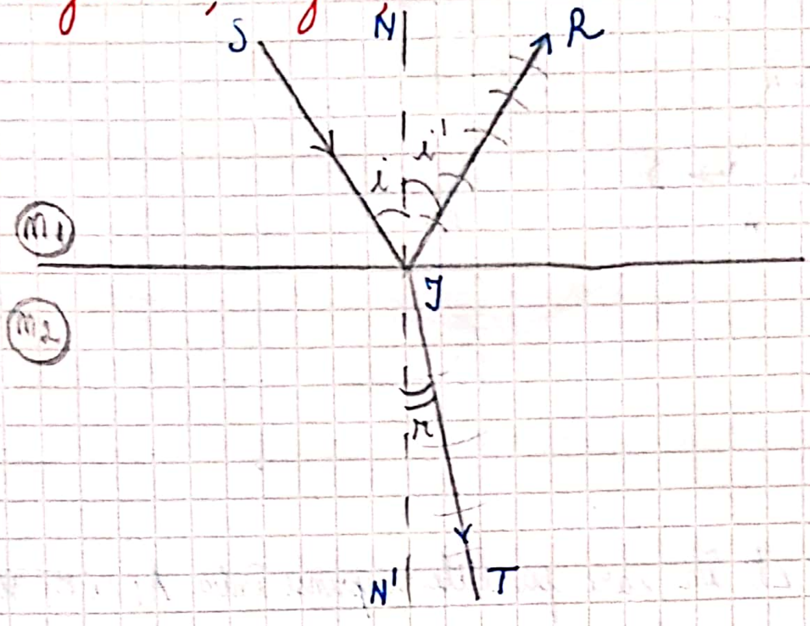
$F(t)$: frontul undei la mom. t

$F'(t+\Delta t)$: ——— // ——— $t+\Delta t$

ENUNȚ: Orice punct al unei suprafețe de undă poate fi considerat sursă de unde sferice secundare / elementare, iar frontul undei la un moment de timp ulterior este suprafața tangentă („înfășurătoare") la undele sferice secundare.

$S_1, S_2, \ldots$ (surse de unde sferice secundare)

5 Reflexia și Refracția undelor mecanice



SI: raza undei incidente

IR: raza undei reflectate

IT: raza undei transmise în cel de-al doilea mediu (undă ~~refl~~ refractată)

i: $\measuredangle$ de incidență ; i' $\measuredangle$ de reflexie

r $\measuredangle$ de refracție

NN'- normala la suprafața de separare $m_1 - m_2$

Def: REFLEXIA este fenomenul de schimbare a direcției de propagare a unei unde la întâlnirea suprafeței de separare dintre 2 medii elastice, unda întorcându-se în mediul din care a venit

REFRACȚIA este fenomenul de schimbare a direcției de propagare a unei unde la traversarea suprafeței de separare dintre 2 medii elastice

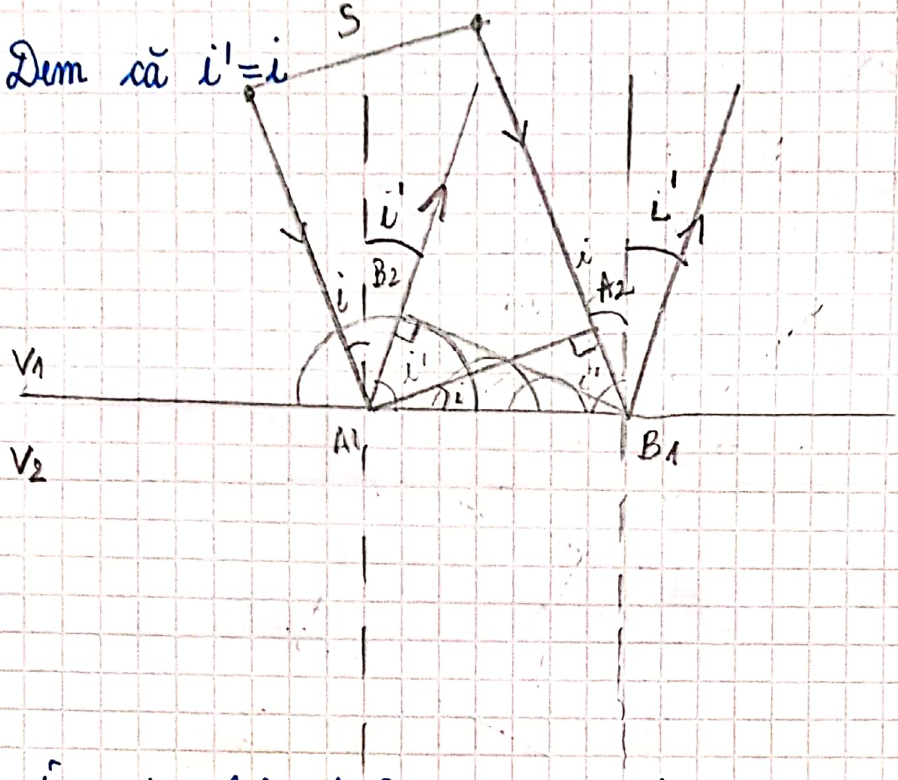
Legile reflexiei

1 Raza undei incidente, raza undei reflectate și normala la suprafața de separare sunt conținute în același plan

2 Unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie

$i = i'$

Dem că $i' = i$



În intervalul Δt în care punctele cuprinse între A_1 și B_1 sunt atinse de unda incidentă:

- unda incidentă se propagă pe distanța $A_2B_1 = v_1 \cdot \Delta t$
- unda reflectată se propagă pe distanța $A_1B_2 = v_1 \Delta t$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow A_2B_1 = A_1B_2 \Rightarrow \Delta A_1A_2B_1 \equiv \Delta A_1B_1B_2 \Rightarrow \cancel{\sphericalangle B_2A_1B_1 \sphericalangle 1}$

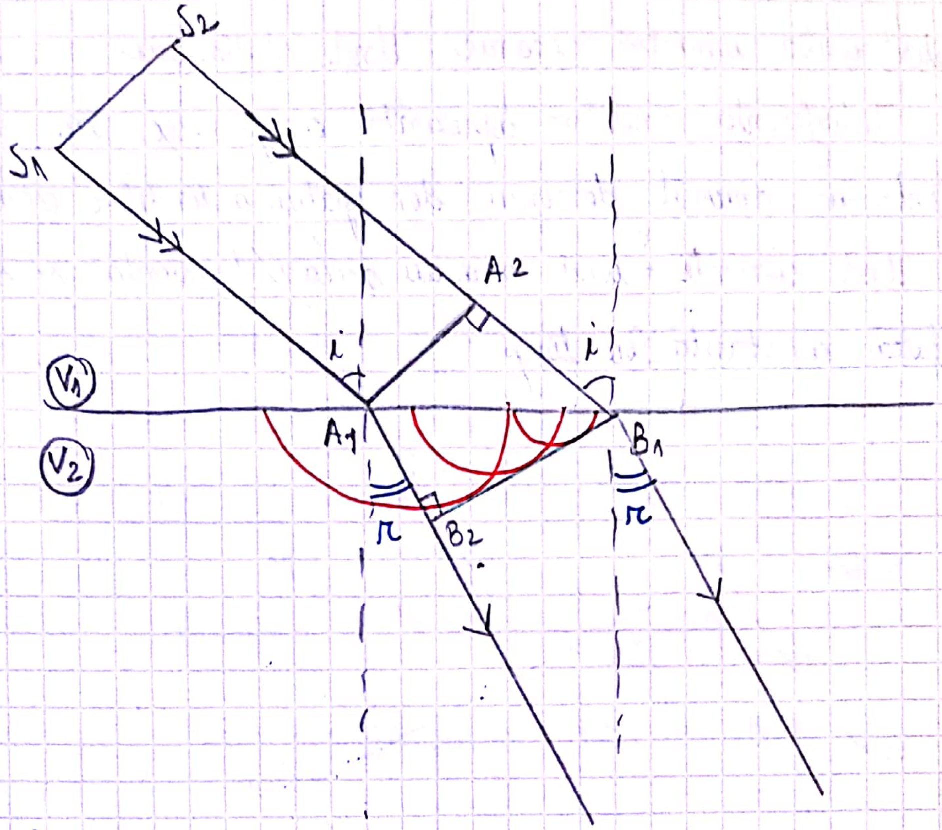
$\Leftrightarrow \sphericalangle B_2A_1B_1 \equiv \sphericalangle A_2B_1A_1 \Rightarrow \sphericalangle i \equiv \sphericalangle i' \Rightarrow i = i'$

Legile refracției

1. Raza undei incidente, raza undei refractate și normala la suprafața de separare se află în același plan
2. Raportul dintre sinusul unghiului de incidență și sinusul unghiului de refracție este o constantă caracteristică celor două medii prin care se propagă unda.

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{2,1}$$

Dem:



În intervalul Δt în care unda incidentă atinge punctele A_1 și B_1:

⟶ unda incidentă se propagă pe distanța A_2B_1

⟶ unda refractată se propagă pe distanța A_1B_2

$v_1 = \frac{A_2B_1}{\Delta t} \Rightarrow A_2B_1 = v_1 \Delta t$

$v_2 = \frac{A_1B_2}{\Delta t} \Rightarrow A_1B_2 = v_2 \Delta t$

$$\left.\begin{array}{l} \text{În } \Delta A_1A_2B_1 : \sin i = \frac{A_2B_1}{A_1B_1} = \frac{v_1\Delta t}{A_1B_1} \\ \\ \text{În } \Delta A_1B_1B_2 : \sin r = \frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{v_2\Delta t}{A_1B_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1\Delta t}{A_1B_1} \cdot \frac{A_1B_1}{v_2\Delta t}$$

$\Rightarrow \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$

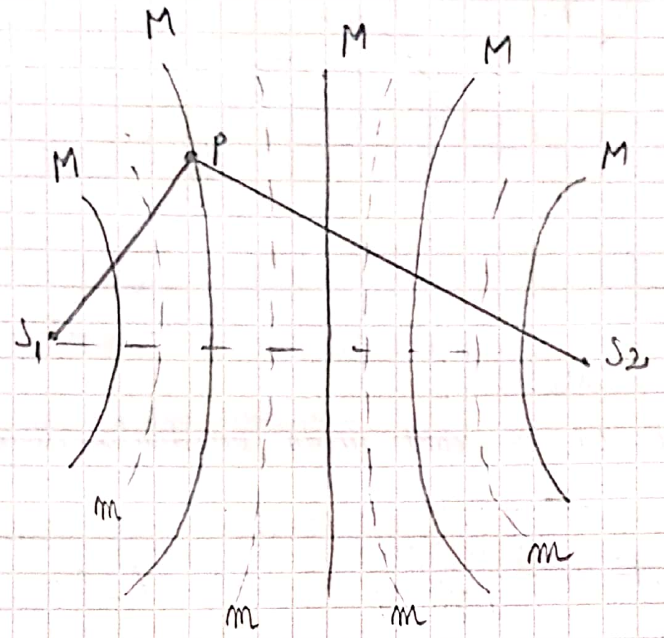
Optică: $n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{c}{n}$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{c}{n_1} \cdot \frac{n_2}{c} = \frac{n_2}{n_1}$$

⑥ Interferența undelor mecanice. Unde staționare

Def: Interferența undelor reprezintă compunerea sau suprapunerea într-un anumit domeniu din spațiu a undelor coerente.

Def: Unde coerente = unde care au aceeași frecvență și diferența de fază constantă în timp



M – maxime de interferență (regiuni care oscilează cu amplitudine maximă)

m – minime de interferență (regiuni care oscilează —"— minimă)

Obs: rezultatul interferenței este o distribuție spațială de maxime și minime de interferență

$$y_{1P} = A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)$$

$$y_{2P} = A_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

$$y_P = y_1 + y_2$$

în P se suprapun 2 oscilații paralele cu aceeași frecvență

$$A_{rez} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

Unde coerente: $\Delta\varphi = cst$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{(x_2 - x_1)}{\lambda}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x$$

$\Delta x = x_2 - x_1$: diferența de drum

Condiția de maxim:

$$\cos\Delta\varphi = 1 \Rightarrow A_{rez} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} \Rightarrow A_{rez} = A_1 + A_2 \text{ (maximă)}$$

$$\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \Rightarrow \Delta\varphi = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cancel{2}k\cancel{\pi} = \frac{\cancel{2\pi}}{\lambda} \cdot \Delta x \Leftrightarrow \Delta x = k\lambda \Leftrightarrow \boxed{\Delta x = 2k\frac{\lambda}{2}} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Obs: Condiția de maxim de interferență este ca diferența de drum să fie un multiplu par de $\frac{\lambda}{2}$

Condiția de minim:

$$\cos\Delta\varphi = -1 \Rightarrow A_{rez} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2| \rightarrow \text{minimă}$$

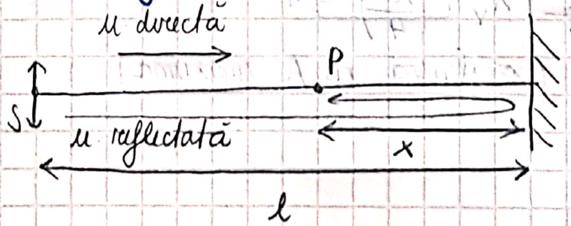
$$\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots \Rightarrow \Delta\varphi = (2k+1)\pi$$

$$(2k+1)\cancel{\pi} = \frac{2\cancel{\pi}}{\lambda}\Delta x \Rightarrow \Delta x = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$$

Obs: Condiția de minim de interferență este ca diferența de drum să fie multiplu impar de $\frac{\lambda}{2}$

Unde staționare. Noduri și ventre

Fir elastic fixat



U. directă: $y_D = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)$

U. reflectată: $y_R = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$

$x_1 = l - x$

$x_2 = l + x + \frac{\lambda}{2}$; „$+\frac{\lambda}{2}$": reflexia cu schimbare de sens la perete

$$y_P = y_D + y_R \Leftrightarrow y_P = A\sin\underbrace{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{l-x}{\lambda}\right)}_{a} + A\sin\underbrace{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{l+x+\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right)}_{b}$$

$$y_P = A(\sin a + \sin b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_P = A\, 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_P = 2A\cdot\cos\frac{2\pi}{2}\left(\cancel{\frac{t}{T}}-\frac{l-x}{\lambda}-\cancel{\frac{t}{T}}+\frac{l+x+\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right)\cdot\sin\frac{2\pi}{2}\left(\frac{t}{T}-\frac{l-x}{\lambda}+\frac{t}{T}-\frac{l+x+\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right)$$

$$y_P = 2A\cos\frac{2\pi}{2\lambda}\left(2x+\frac{\lambda}{2}\right)\cdot\sin\frac{2\pi}{2}\left(\frac{2t}{T}-\frac{l-x+l+x+\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right)$$

$$y_P = \underbrace{2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(x+\frac{\lambda}{4}\right)}\cdot\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{2l+\frac{\lambda}{2}}{2\lambda}\right)$$

$$\boxed{A_{rez} = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(x+\frac{\lambda}{4}\right)}$$ depinde de x (poziția punctului P pe fir)

Obs: Unda staționară este caracterizată prin faptul că amplitudinea este dependentă de poziția punctului pe fir.

* $A_{rez} = 0$ dacă $\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(x_N+\frac{\lambda}{4}\right)=0$

x_N: pozițiile nodurilor (nu oscilează)

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(x_N+\frac{\lambda}{4}\right) = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_N+\frac{\lambda}{4} = \frac{(2k+1)\lambda}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_N = 2k\frac{\lambda}{4}}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

(multiplu par de $\frac{\lambda}{4}$)

* $A_{rez} = 2A$ dacă $\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(x_V+\frac{\lambda}{4}\right)=\pm1$

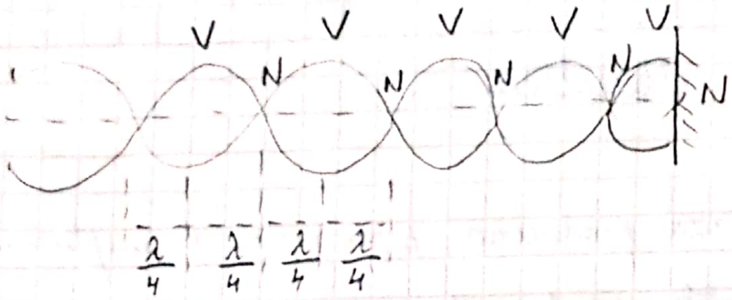
x_V: pozițiile ventrelor (oscilează cu A maximă)

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(x_V+\frac{\lambda}{4}\right) = 2k\frac{\pi}{2}$$

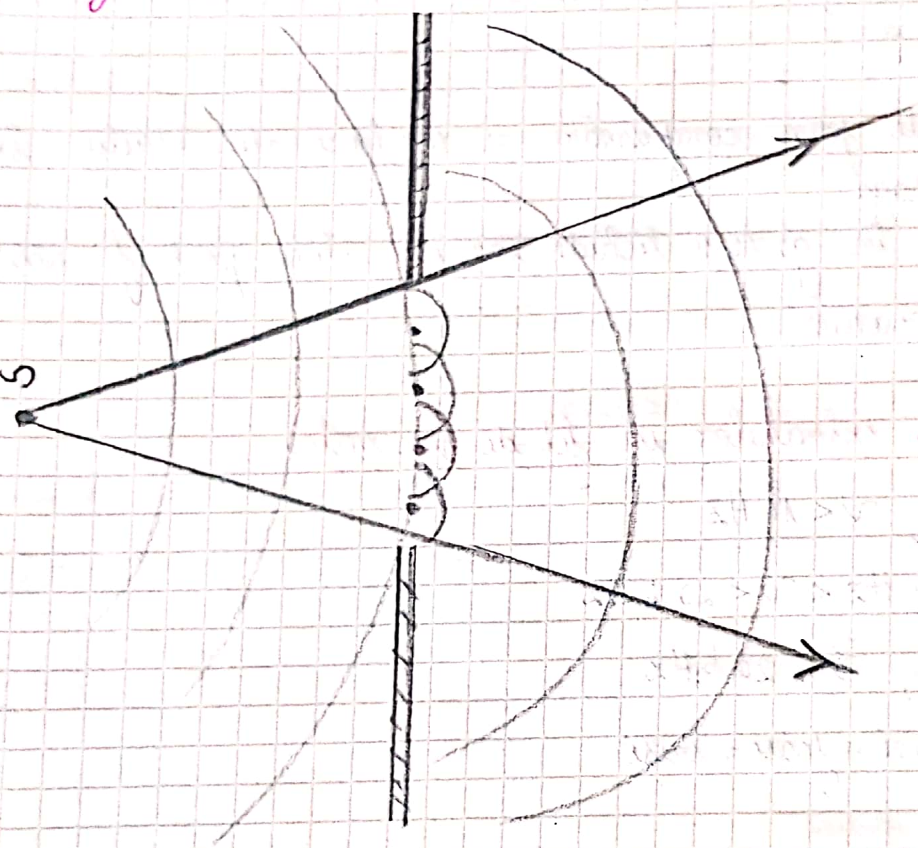
$$x_V+\frac{\lambda}{4} = 2k\frac{\lambda}{4}$$

$$\boxed{x_V = (2k-1)\frac{\lambda}{4}}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

(multiplu impar de $\frac{\lambda}{4}$)



7 Difracția undelor mecanice



Def: Difracția este fenomenul de pătrundere a undei în zona de ~~unda~~ umbră geometrică. Difracția este fenomenul de ocolire a obstacolelor de către undă dacă dimensiunile lor sunt comparabile cu lungimea de undă.