TEZĂ LA MATEMATICĂ- SEMESTRUL I

Anul şcolar 2015-2016

Clasa a-XII-a

1. Se consideră legea de compoziţie asociativă "$*$" definită pe mulţimea numerelor reale prin relaţia $x*y=\frac{xy}{4}-2x-2y+24$.

a) (5p) Arătaţi că $x*y=\frac{1}{4}(x-8)(y-8)+8, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) (10p) Aflaţi simetricul lui $\frac{28}{3}$ în raport cu legea "$*$".

c) (10p) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\underbrace{x*x*....*x}_{de\ 2016\ ori}=12$.

2. Fie mulţimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1+3x & 6x & 0\\ -x & 1-2x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}$.

a) (5p) Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(xy+x+y), \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) (10p) Arătaţi că G împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor pătratice de ordinul trei formează o structură de grup abelian.

c) (10p) Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}^*\to G,\ \ f(x)=A(x-1)$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ la grupul $(G,\cdot)$.

3. Se dau funcţiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$ si $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$.

a) (10p) Arătaţi că F este o primitivă a funcţiei f.

b) (5p) Studiaţi monotonia funcţiei F.

c) (5p) Arătaţi că $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{45}} f(x)\,dx=\ln\sqrt{\frac{5}{3}}$.

4. Fie şirul $(I_n)_{n\geq 0}$, unde $I_n=\int_1^2 x\cdot e^{-nx^2}\,dx$.

a) (5p) Calculaţi I_0.

b) (5p) Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\geq 0}$ este descrescător.

c) (10p) Aflaţi limita şirului $(I_n)_{n\geq 0}$.

Nota: Se acorda 10 p din oficiu.

Succes!

NUMELE

TEZĂ SEMESTRUL I
CLASA a XII-a

13.12.2016

1. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = x + y + xy$. Se notează $G = (-1, \infty)$

a) Demonstrați că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$.
b) Demonstrați că $(G,*)$ formează o structură de grup abelian.
c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\underbrace{x * x * \cdots * x}_{de\ 2018\ ori\ x} = 3^{2018} - 1$
d) Demonstrați că funcția $f: G \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1)$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$.
e) Calculați $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \cdots * \frac{1}{2017}$
f) Demonstrați că $H = \{a^2 - 1 \mid a \in \mathbb{Q}^*\}$ este subgrup al grupului $(G,*)$

2. Fie $f: [-2,2] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1) - x + a^2, & x \in [-2,0) \\ 2e^x + x + a, & x \in [0,2] \end{cases}$

a) Aflați valorile reale ale lui a pentru care f admite primitive.
b) Arătați că f este integrabilă pentru orice valoare reală a lui a.
c) Calculați $\int_0^2 f(x)dx$.

3. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ și șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

a) Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \text{arctg}(e^x)$ este o primitivă a funcției f.
b) Demonstrați că $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
c) Calculați limita șirului $(I_n)_{n\geq 1}$.

1a	1b	1c	1d	1e	1f	2a	2b	2c	3a	3b	3c	of	total
7p	10p	7p	7p	7p	7p	7p	7p	7p	10p	7p	7p	10p	100p

TEZĂ SEMESTRUL I
AN ŞCOLAR 2017-2018
CLASA A XII-A

05.12.2017

- **Toate subiectele sunt obligatorii.Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 110 minute.**

Subiectul I (30 puncte)

(6p) **1.** Aflaţi multimea elementelor simetrizabile din $\mathbb{Z}_{24}$ în raport cu înmulţirea claselor de resturi modulo 24.

(6p) **2.** Calculaţi $\int \frac{1}{16-x^2}dx$, unde $x>10$.

(6p) **3.** Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy-(7a+16)x+ay+5$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
Aflaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât legea să fie comutativă.

(6p) **4.** Fie $f:[0,3] \to \square$ $f(x)=\begin{cases} 3x^2-1, & \text{daca } x \le 2 \\ 5x+3, & \text{daca } x>2 \end{cases}$. Demonstraţi că funcţia este integrabilă pe $[0,3]$, dar nu admite primitive.

(6p) **5.** Calculaţi $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$.

Subiectul II (30 puncte)

1. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=2xy-3x-3y+6$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

(6p) **a)** Demonstraţi că $x*y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(6p) **b)** Calculaţi $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}*\frac{\sqrt[3]{3}}{2}*......*\frac{\sqrt[3]{2017}}{2}$.

(6p) **c)** Aflaţi elementele simetrizabile din $\mathbb{R}$, care verifică relaţia $x+2x'=3$, unde x'este simetricul lui x în raport cu legea "$*$".

2. Fie $G=\left\{ M(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & \frac{-a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \square \right\}$.

(6p) **a)** Demonstraţi că G împreună cu înmulţirea matricelor formează o structură de grup abelian.

(6p) **b)**Arătaţi că funcţia $f:R \to G$, $f(x)=M(x)$ este un izomorfism între grupurile $(R,+)$ şi $(G,\cdot)$.

Subiectul III (30 puncte)

1. Fie funcţiile $f,g:(0,+\infty) \to \square$ $f(x)=\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ si $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left[1-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

(6p) **a)** Demonstraţi că g este o primitivă a funcţiei f.

(6p) **b)** Arătați că $\int_{\frac{1}{e^2-1}}^{\frac{1}{e-1}} f(x)dx = e^2$.

(6p) **c)** Demonstrați că: $g\left(\sqrt[4]{3}\right) < g\left(\sqrt[3]{4}\right)$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \sin x \, dx$, $\quad n \in \mathbb{N}^*$

(6p) **a)** Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton.

(6p) **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Succes!

Colegiul Naţional " Grigore Moisil" Bucureşti

TEZĂ LA MATEMATICĂ – SEMESTRUL I

An şcolar 2018-2019

SUBIECTUL I (30p)

1) Calculaţi în grupul $(Z_8,+)$ opusul elementului $\hat{3}+\hat{4}+\hat{6}$.
2) Calculaţi $\int_2^3 \frac{x^2-x+2}{x}dx$.
3) Pe **R** se defineşte legea de compoziţie $x\circ y = xy-3x-3y+a$, $\forall x,y\in R$.Să se determine $a\in R$ astfel încât legea să admită element neutru.
4) Calculaţi produsul elementelor inversabile din monoidul $(Z_{12},\cdot)$.
5) Să se arate că funcţia $f:[0;1]\to R$, $f(x)=\begin{cases}3x+1 & ,x\in[0,1)\\ 2 & ,x=1\end{cases}$ nu admite primitive, dar este integrabilă pe [0;1] şi calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$.
6) Arătaţi că funcţia $F:(-2;2)\to R$, $F(x)=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}$ este o primitivă a funcţiei $f:(-2;2)\to R$, $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

SUBIECTUL II (30p)

Pe **R** se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=\frac{1}{10}xy-(x+y)+20$, $\forall x,y\in R$.

a) (10p) Demonstraţi că $x\circ y=\frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10, \forall x,y\in R$.
b) (10p) Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $x\circ x\le\frac{101}{10}$.
c) (5p) Calculaţi $\log_2 1\circ\log_2 2\circ\cdots\circ\log_2 2018$.
d) (5p) Aflaţi elementele simetrizabile care sunt egale cu simetricele lor.

SUBIECTUL III (30p)

Se consideră şirul $(I_n)_{n\ge0}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+4}dx$, $\forall n\in N$.

a) (10p) Calculaţi I_0 şi I_2 .

b) (10p) Arătați că $I_{n+2} + 4I_n = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in N$.

c) (5p) Calculați $\lim_{n \to \infty} I_n$.

d) (5p) Calculați $\lim_{n \to \infty} (2n+3) \cdot I_{2n+1}$.

Se acordă 10p din oficiu

SUCCES!!!

Colegiul Național " Grigore Moisil" București

TEZĂ LA MATEMATICĂ – SEMESTRUL I

An școlar 2019-2020

SUBIECTUL I (30p)

1. Calculați produsul elementelor inversabile din monoidul $(\mathbb{Z}_9, \cdot)$.
2. Calculați $\int_0^1 e^x\left(xe^{-x}+1\right)dx$.
3. Dacă $(G,\perp)$ este un grup cu 2019 elemente, iar $a \in G$ fixat, determinați cardinalul mulțimii M, unde $M=\{a \perp x \mid x \in G\}$.
4. Aflați primitiva funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ al cărei grafic conține punctul A(1,1).
5. Pe $G=(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ definim legea $(a_1,x_1)\circ(a_2,x_2)=(a_1a_2, a_1x_2+x_1)$. Verificați dacă „$\circ$" este asociativă.
6. Arătați că $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1]\\ 5, & x=0\end{cases}$ nu este integrabilă.

SUBIECTUL II (30p)

Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=5xy-10x-10y+22 \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$.

1. Demonstrați că $x*y=5(x-2)(y-2)+2$ oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.
2. Demonstrați că „$*$" este operație asociativă.
3. Arătați că $\dfrac{11}{5}$ este elementul neutru al operației „$*$".
4. Aflați elementele reale, care au simetricele mai mari decat 1.
5. Demonstrați că, indiferent de ordinea termenilor, compunerea tuturor elementelor din $H=\left\{\dfrac{2k-6}{3-2k} \mid k\in\mathbb{Z},\ |k|<2019\right\}$ este o constanta.
6. Demonstrați ca **nu** există o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de gradul I, cu proprietatea că $f(x*y)=f(x)\cdot f(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)$.

   a) Calculaţi $\int_0^1 f(x)+\ln(1+x)dx.$

   b) Arătaţi că $\int_0^1 \ln(x+1)dx\le\frac{5}{12}.$

2. Fie şirul $(I_n)_{n\ge1}$ $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2-4}dx,$ $n\in\mathbb{N}^*$.

   a) Calculaţi I_2 .

   b) Demonstraţi că $I_{n+2}-4I_n=\frac{1}{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

   c) Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este monoton crescător.

   d) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Se acordă 10p din oficiu

SUCCES!!!