Unitatea de învățare 8 – *2 ore*

Sisteme de ecuații liniare - *continuare*

8.1. Algoritmi direcți. Algoritmul Gauss - Jordan.

8.2. Algoritmi iterativi. Principiul metodei.

Cunoștințe și deprinderi

La finalul parcurgerii acestei unități de învățare vei cunoaște:

- caracteristicile algoritmilor direcți de soluționare a sistemelor de ecuații liniare;
- etapele de calcul pentru algoritmul Gauss – Jordan;
- particularitățile ce deosebesc algoritmii de soluționare a sistemelor de ecuații liniare;
- caracteristicile algoritmilor iterativi de soluționare a sistemelor de ecuații liniare.

În această unitate de învățare este prezentat cel de-al doilea algoritm din categoria algoritmilor directi de solutionare a sistemelor de ecuatii liniare, si anume algoritmul Gauss – Jordan. De asemenea, sunt prezentate caracteristicile algoritmilor iterativi pentru rezolvarea acestor sisteme.

8.1. Algoritmi direcți. Algoritmul Gauss-Jordan

Acest algoritm se bazează pe relaţiile de calcul care permit transformarea matricei ***A*** în matrice unitate şi a matricei unitate în matrice inversă. Din totalitatea transformărilor se păstrează numai acele transformări care conduc la matricea unitate, acestea fiind extinse şi asupra termenului liber ***b***. Se creează o matrice extinsă ***S***, de dimensiuni $n \times (n+1)$, obţinută prin bordarea matricei ***A*** cu vectorul termenilor liberi ***b***

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}. \tag{8.1}$$

Algoritmul de calcul este următorul:

Pentru $k = 1, \dots, n$ se calculează:

1. Se determină linia $l\,max$ corespunzatoare elementului maxim de pe coloana k,

$$\left| s_{l\,max,k} \right| = \max_{i \geq k} \left| s_{ik} \right|, \; l\,max \geq k \;; \tag{8.2}$$

2. Se permută linia k cu linia $l\,max$

$$s_{kj} = s_{l\,max,j}\,, \quad j = k, \dots, n+1 \;; \tag{8.3}$$

1. Se memorează pivotul corespunzător iteraţiei k

$$pivot = s_{kk}\,; \tag{8.4}$$

2. Se împarte linia pivotului la pivot

$$s_{kj} = \frac{s_{kj}}{pivot}, \quad j = 1, \dots, n+1\,; \tag{8.5}$$

4. Pentru $i = 1, \dots, n, \quad i \neq k$ calculează

$$f = s_{ik}\,; \tag{8.6}$$

$$s_{ij} = s_{ij} - s_{kj} * f, \quad j = 1, \dots, n+1 \;. \tag{8.7}$$

Exemplul 8.1. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}.$$

Rezolvare. Sistemul se aduce la forma matriceală $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, în care

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Se creează matricea extinsă ***S***, de dimensiuni 3×4, obţinută prin bordarea matricei ***A*** cu vectorul termenilor liberi ***b***

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Iteraţia $k = 1$

Pivotul corespunzator iteraţiei 1

$$pivot = s_{kk} = s_{11} = 1;$$

Se împarte linia pivotului la pivot

$$s_{kj} = \frac{s_{kj}}{pivot}, \quad j = 1, \ldots, 4;$$

$$s_{11} = \frac{s_{11}}{pivot} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$s_{12} = \frac{s_{12}}{pivot} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$s_{13} = \frac{s_{13}}{pivot} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$s_{14} = \frac{s_{14}}{pivot} = \frac{4}{1} = 4;$$

După această operaţie matricea ***S*** devine

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pentru $i = 2$ calculează

$$f = s_{ik};$$

$$f = s_{21} = 2;$$

$$s_{ij} = s_{ij} - s_{kj} * f, \quad j = 1,\dots,n+1$$

$$s_{21} = s_{21} - s_{11} * f = 2 - 1 * 2 = 0;$$

$$s_{22} = s_{22} - s_{12} * f = 3 - 1 * 2 = 1;$$

$$s_{23} = s_{23} - s_{13} * f = 1 - 1 * 2 = -1;$$

$$s_{24} = s_{24} - s_{14} * f = 9 - 4 * 2 = 1;$$

Pentru $i = 3$ calculează

$$f = s_{ik};$$

$$f = s_{31} = 1;$$

$$s_{ij} = s_{ij} - s_{kj} * f, \quad j = 1, \ldots, n+1$$

$$s_{31} = s_{31} - s_{11} * f = 1 - 1 * 1 = 0;$$

$$s_{32} = s_{32} - s_{12} * f = -1 - 1 * 1 = -2;$$

$$s_{33} = s_{33} - s_{13} * f = -1 - 1 * 1 = -2;$$

$$s_{34} = s_{34} - s_{14} * f = -2 - 4 * 1 = -6;$$

După această operaţie matricea ***S*** devine

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

<u>Iteraţia $k = 2$</u>

Pivotul corespunzator iteraţiei 2

$$pivot = s_{kk} = s_{22} = 1;$$

Se împarte linia pivotului la pivot

$$s_{kj} = \frac{s_{kj}}{pivot}, \quad j = 1, \ldots, 4;$$

$$s_{21} = \frac{s_{21}}{pivot} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$s_{22} = \frac{s_{212}}{pivot} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$s_{23} = \frac{s_{23}}{pivot} = \frac{-1}{1} = -1;$$

$$s_{24} = \frac{s_{24}}{pivot} = \frac{1}{1} = 1.$$

După această operaţie matricea ***S*** devine

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Pentru $i = 1$ calculează

$$f = s_{ik};$$

$$f = s_{12} = 1;$$

$$s_{ij} = s_{ij} - s_{kj} * f, \quad j = 1, \ldots, n+1$$

$$s_{11} = s_{11} - s_{21} * f = 1 - 0 * 1 = 1;$$

$$s_{12} = s_{12} - s_{22} * f = 1 - 1 * 1 = 0;$$

$$s_{13} = s_{13} - s_{23} * f = 1 - (-1) * 1 = 2;$$

$$s_{14} = s_{14} - s_{24} * f = 4 - 1 * 1 = 3;$$

Pentru $i = 3$ calculează

$$f = s_{ik};$$

$$f = s_{32} = -2;$$

$$s_{ij} = s_{ij} - s_{kj} * f, \quad j = 1, \ldots, n+1$$

$$s_{31} = s_{31} - s_{21} * f = 0 - 0 * (-2) = 0;$$

$$s_{32} = s_{32} - s_{22} * f = -2 - 1 * (-2) = 0;$$

$$s_{33} = s_{33} - s_{23} * f = -2 - (-1) * (-2) = -4;$$

$$s_{34} = s_{34} - s_{24} * f = -6 - 1 * (-2) = -4;$$

După această operaţie matricea ***S*** devine

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

<u>Iteraţia $k = 3$</u>

Pivotul corespunzator iteraţiei 3

$$pivot = s_{kk} = s_{33} = -4;$$

Se împarte linia pivotului la pivot

$$s_{kj} = \frac{s_{kj}}{pivot}, \quad j = 1, \ldots, 4;$$

$$s_{31} = \frac{s_{31}}{pivot} = \frac{0}{-4} = 0;$$

$$s_{32} = \frac{s_{32}}{pivot} = \frac{0}{-4} = 0;$$

$$s_{33} = \frac{s_{33}}{pivot} = \frac{-4}{-4} = 1;$$

$$s_{34} = \frac{s_{34}}{pivot} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

După această operaţie matricea ***S*** devine

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pentru $i = 1$ calculează

$$f = s_{ik};$$

$$f = s_{13} = 2;$$

$$s_{ij} = s_{ij} - s_{kj} * f, \quad j = 1,\dots,n+1$$

$$s_{11} = s_{11} - s_{31} * f = 1 - 0 * 2 = 1;$$

$$s_{12} = s_{12} - s_{32} * f = 0 - 0 * 2 = 0;$$

$$s_{13} = s_{13} - s_{33} * f = 2 - 1 * 2 = 0;$$

$$s_{14} = s_{14} - s_{34} * f = 3 - 1 * 2 = 1;$$

Pentru $i = 2$ calculează

$$f = s_{ik};$$

$$f = s_{23} = -1;$$

$$s_{ij} = s_{ij} - s_{kj} * f, \quad j = 1,\dots,n+1$$

$$s_{21} = s_{21} - s_{31} * f = 0 - 0 * (-1) = 0;$$

$$s_{22} = s_{22} - s_{32} * f = 1 - 0 * (-1) = 1;$$

$$s_{23} = s_{23} - s_{33} * f = -1 - 1 * (-1) = 0;$$

$$s_{24} = s_{24} - s_{34} * f = 1 - 1 * (-1) = 2.$$

Forma finală a matricei **S** este

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluţia sistemului de ecuaţii se regăseşte în coloana a patra, respectiv $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Test de autoevaluare

1. Precizați algoritmii care fac parte din categoria algoritmilor direcți de soluționare a sistemelor de ecuații liniare.
2. Care sunt etapele de calcul ale algoritmului Gauss-Jordan?

8.2. Algoritmi iterativi. Principiul metodei

În opoziţie cu algoritmii direcţi, algoritmii iterativi construiesc un şir $\boldsymbol{x}^{(k)}, k = 0,1,\ldots$, convergent către soluţia exactă a sistemului. În funcţie de precizia impusă, procesul de calcul iterativ este oprit după o anumită valoare a iteraţiei curente *k*. Deoarece fiecare iteraţie a unui algoritm iterativ necesită un numar de n^2 operaţii aritmetice elementare, algoritmii iterativi sunt competitivi în condiţiile în care $n >> 100$. Deoarece eroarea iniţială a estimaţiei soluţiei descreşte odată cu avansarea procesului iterativ, metodele din aceasta categorie mai poartă denumirea de algoritmi de relaxare.

Principiul metodei. Pentru sistemul $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ se consideră descompunerea matricei ***A*** conform relaţiei

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{P}\,. \tag{8.8}$$

Se construieşte şirul $x^{(k)}, k \ge 0$, cu ajutorul relaţiei de recurenţă

$$\boldsymbol{N}\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{P}\ \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.9}$$

unde aproximaţia iniţială, $\boldsymbol{x}^{(0)}$ este un vector arbitrar.

Şirul $x^{(k)}$ converge către soluţia $\boldsymbol{x}$ a sistemului, oricare ar fi $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \Re^n$, dacă toate valorile proprii $\lambda_i,\ \ i = 1, \ldots, n$ ale matricei $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{P}$ sunt în modul subunitare.

Cei mai cunoscuţi algoritmi iterativi sunt algoritmul Jacobi şi algoritmul Gauss-Siedel.

Test de autoevaluare

1. Precizați diferențele existente între algoritmii de soluționare a sistemelor de ecuații liniare.
2. Care este principiul metodei caracteristic algoritmilor iterativi?

Lucrare de verificare

1. **Să se rezolve următorul sistem de ecuații liniare, folosind metoda Gauss-Jordan**

$$\begin{cases} \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}\boldsymbol{y} - \mathbf{2}\boldsymbol{z} = -\mathbf{2} \\ \mathbf{4}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \mathbf{1} \\ -\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \mathbf{2}\boldsymbol{z} = \mathbf{1} \end{cases}.$$