Unitatea de învățare 10 – *2 ore*

Sisteme de ecuații neliniare

10.1. Metode iterative.

10.2. Metoda gradientului.

10.3. Algoritmul Newton-Raphson.

10.4. Algoritmul Broyden.

Cunoștințe și deprinderi

La finalul parcurgerii acestei unități de învățare vei cunoaște:

- metodele iterative de soluționare a sistemelor de ecuații neliniare;
- principiul care stă la baza metodei gradientului;
- algoritmul Newton-Raphson de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare;
- caracteristicile și etapele parcurse pentru rezolvarea sistemelor de ecuații neliniare cu ajutorul algorimului Broyden.

În această unitate de învățare este prezentată forma generală a sistemelor de ecuații neliniare, evidențiate metodele de soluționare a acestora, precum și detalierea algoritmilor Newton-Raphson și Broyden.

Un sistem de ecuaţii neliniare este reprezentat prin

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \end{cases}, \qquad (10.1)$$

unde $f_1, f_2, \dots, f_n$ sunt funcţii reale. Sintetic, sistemul (3.29) poate fi scris sub forma

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \ , \qquad (10.2)$$

în care $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{D} \to \Re^n$, $\boldsymbol{D} \subset \Re^n$.

Se consideră vectorul $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$, o aproximată iniţială a soluţiei necunoscute $\boldsymbol{\alpha}$. Pentru determinarea unei soluţii numerice a sistemului (10.1), aflată în vecinatatea lui $\boldsymbol{\alpha}$, se pot utiliza metode iterative, metoda gradientului sau metode de tipul Newton-Raphson.

10.1. Metode iterative

Metodele iterative corespund rezolvării succesive a ecuaţiilor neliniare ce formează sistemul de ecuaţii neliniare. Se consideră vectorul $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$, o aproximată a soluţiei necunoscute $\boldsymbol{\alpha}$.

Sistemul (10.1) se aduce la forma

$$\begin{cases} f_1(x_1) = 0 \\ f_2(x_2) = 0 \\ \dots \quad \dots \\ f_n(x_n) = 0 \end{cases} \tag{10.3}$$

în care ecuaţia neliniară $f_i = 0$ are ca necunoscută variabila x_i, variabilele $x_j,\ j = 1, \dots, n,\ j \neq i$ având valorile aproximatei $\boldsymbol{x}^{(0)}$.

Pornind de la estimarea iniţială $\boldsymbol{x}^{(0)}$, se determină şirul de estimare $\boldsymbol{x}^{(k)}, k = 1, 2, \dots,$ cu ajutorul relaţiei

$$x_i^{(k)} = f_i\left(x_i^{(k-1)}\right), \quad i = 1, 2, \dots n. \tag{10.4}$$

Pentru calculul iterativ (10.4) se utilizează fie procedeul Jacobi, fie cel specific metodei Gauss-Seidel.

Convergenţa metodei. Fie domeniul Γ definit prin relaţia

$$\left| x_j - \alpha_j \right| \leq h, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{10.5}$$

Pentru $x \in \Gamma$ se presupune că există un număr μ subunitar, astfel încât

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq \mu. \tag{10.6}$$

În acest caz se demonstrează că dacă $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \Gamma$, calculul iterativ (3.32) converge către soluţia α a sistemului (10.1)

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = \alpha\,. \tag{10.7}$$

Test de autoevaluare

Precizați care este particularitatea asociată metodelor iterative de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare.

10.2. Metoda gradientului

Dintre metodele de descreştere este de subliniat în primul rând metoda gradientului. În cadrul acestei metode, sistemului (10.1) i se asociază forma pătratică pozitiv definită

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_i(x) f_i(x) \tag{10.8}$$

pentru care există echivalenţa

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha})=0 \Leftrightarrow \min F(\boldsymbol{x})=F(\boldsymbol{\alpha})=0\,. \tag{10.9}$$

Aşadar, determinarea soluţiei sistemului $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=0$ este echivalentă cu calculul minimului funcţiei asociate *F(**x**)*, cu ajutorul metodei gradientului.

Test de autoevaluare

Evidențiați caracteristicile metodei gradientului de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare.

10.3. Algoritmul Newton-Raphson

Fie sistemul de ecuaţii neliniare (10.1) şi soluţia iniţială $\boldsymbol{x}^{(0)}=\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$.

Sistemul (10.1) poate fi scris sub forma

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=0\,, \tag{10.10}$$

unde $\boldsymbol{x}$ este vectorul necunoscutelor, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, iar F reprezintă vectorul valorilor corespunzătoare ale funcţiilor f_i, $\boldsymbol{F} = \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$.

Algoritmul Newton-Raphson are la bază aproximarea unei funcţii multivariabile prin descompunere în serie Taylor. În vecinătatea soluţiei $\boldsymbol{x}^{(0)}$, fiecare dintre funcţiile f_i poate fi dezvoltată în serie Taylor

$$f_i\left(\boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{\Delta x}\right) = f_i\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} \Delta x_j + O\left(\boldsymbol{\Delta x}^2\right), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (10.11)$$

În relaţia (10.11), derivatele $\partial f_i / \partial x_j$ reprezintă elementele Jacobianului sistemului de funcţii (10.1)

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} & \cdots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} & \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} v & \cdots & \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} \end{bmatrix}. \qquad (10.12)$$

Dezvoltarea în serie Taylor (10.11) poate fi scrisă şi sub forma matriceală

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right) + \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right)\boldsymbol{\Delta x} + \boldsymbol{O}\left(\boldsymbol{\Delta x}^2\right). \qquad (10.13)$$

Considerând doar aproximaţia liniară şi impunând condiţia

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = 0 \qquad (10.14)$$

se obţine următorul sistem de ecuaţii liniare

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right)\boldsymbol{\Delta x} = -\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right). \tag{10.15}$$

Soluţia sistemului liniar (10.15) permite calcularea unei noi aproximări a soluţiei sistemului neliniar (10.1)

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{\Delta x}. \tag{10.16}$$

Aplicând iterativ (3.43) şi (3.44) se obţin relaţiile de calcul asociate metodei Newton-Raphson

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\Delta x}^{(k)}, \tag{10.17}$$

unde $\boldsymbol{\Delta x}^{(k)}$ reprezinta soluţia sistemului liniar

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)\boldsymbol{\Delta x}^{(k)} = -\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right). \tag{10.18}$$

Alcătuirea şi rezolvarea sistemului (10.1) presupune continuitatea componentelor Jacobianului (10.12) în vecinătatea lui $\boldsymbol{\alpha}$ şi condiţia $\det\left(J(x)\right) \neq 0$.

<u>*Convergenţa metodei*</u>. Dacă $\boldsymbol{x}^{(0)}$ este suficient de aproape de $\boldsymbol{\alpha}$, atunci se demonstrează că

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{\alpha}. \tag{10.19}$$

Criteriul de convergenţă al algoritmului Newton-Raphson poate fi exprimat prin condiţia

$$f_i\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) \leq \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10.20}$$

O altă formă a criteriului de convergenţă îl reprezintă eroarea relativă pentru două aproximaţtii consecutive ale soluţiei

$$\max_i \left|\frac{\Delta x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}}\right| \leq \varepsilon. \tag{10.21}$$

În cazul în care există componente $x_i^{(k)}$ nule, trebuie considerate erorile absolute şi criteriul de convergenţă al algoritmului devine

$$\max_i \left|\Delta x_i^{(k)}\right| \leq \varepsilon. \tag{10.22}$$

Exemplul 10.1. Să se rezolve următorul sistem de ecuaţii neliniare

$$\begin{cases} 4x^2 + 2x - 3y^2 = -3 \\ x^2 + xy + y^2 = 61 \end{cases}$$

având condiţia iniţială $\begin{cases} x_{01} = 10 \\ x_{02} = 20 \end{cases}$ şi precizia impusă $\left| f_i(x_1, x_2) \right| \leq 10^{-3}, \quad i = 1,2$.

Sistemul se aduce la forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

în care

$$f_1 = 4x_1^2 + 2x_1 - 3x_2^2 + 3;$$

$$f_2 = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 61.$$

Jacobianul unui sistem de două ecuaţii cu două necunoscute are forma generală

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x2} \end{bmatrix},$$

respectiv expresia particulară

$$J = \begin{bmatrix} 8x_1 + 2 & -6x_2 \\ 2x_1 + x_2 & x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Rezultatele obţinute sunt prezentate în tabelul 3.3. Pentru condiţia iniţială şi precizia impusă, soluţia sistemului se obţine în 5 iteraţii, respectiv $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 5 \end{cases}$.

Tabelul 10.1

Rezultate obţinute la rezolvarea sistemului de ecuaţii neliniare

Iteraţia	x_1	x_2	f_1	f_2
0	1.0000	2.0000	-7.7700 E+02	6.3900 E+02
1	5.7494	10.6200	-1.9165 E+02	1.4591 E+02
2	4.2244	6.4641	-4.2522 E+01	2.5938 E+01
3	3.9924	5.1536	-4.9368 E+00	2.0752 E+00
4	3.9996	5.0018	-6.8875 E-02	2.1986 E-02
5	3.9999	5.0000	-1.0296 E-05	3.0536 E-06

Test de autoevaluare

1. Să se prezinte etapele de calcul ale algoritmului Newton-Raphson de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare.
2. Ce este jacobianul unui sistem?

10.4. Algoritmul Broyden

Algoritmul Broyden este o variantă a algoritmului Newton-Raphson, având drept caracteristică de bază faptul că derivatele parţiale care alcătuiesc jacobianul sunt calculate o singură dată şi anume la începutul iteraţiilor

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} & \cdots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} & \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} v & \cdots & \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}} \end{bmatrix} \tag{10.23}$$

iar vectorul $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ se calculează cu relaţia

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + s^{(k)} \boldsymbol{\Delta x}^{(k)}. \tag{10.24}$$

unde $s^{(k)} \in [0, \quad 1]$.

Algoritmul Broyden conţine doua etape de calcul: etapa de initializare si etapa de calcul iterativ.

Etapa de initializare este destinata prelucrarii solutiei initiale si calcularii jacobianului sistemului de ecuatii si contine urmatorii pasi:

1. Se calculează $\boldsymbol{f}^{(0)} = \boldsymbol{f}\left(x^{(0)}\right)$.

2. Se calculează derivate parţiale ce compun jocobianul sistemului de ecuatii cu relaţia

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \approx \frac{f_i\left(\boldsymbol{x}_j^{(0)} + \boldsymbol{h}_j\right) - f_i\left(\boldsymbol{x}_j^{(0)}\right)}{h_j}, \quad i = 1, \ldots n, \quad j = 1, \ldots, n\,, \tag{10.25}$$

unde pentru pasul de discretizare se recomandă $h_j = 0{,}001 \cdot x_j,\ j = 1, \ldots n$.

3. Se alcatuieste matricea

$$\boldsymbol{H}^{(0)} = -\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{x}^{(0)}\right)^{-1}, \tag{10.26}$$

Etapa de calcul iterativ este destinata imbunatatirii solutiei si contine urmatorii pasi:

1. Se calculeaza $\boldsymbol{\Delta x}^{(k)}$ cu relaţia

$$\boldsymbol{\Delta x}^{(k)} = \boldsymbol{H}^{(k)} \boldsymbol{f}^{(k)}. \tag{10.27}$$

2. Se determină s_k astfel încât norma euclidiana a vectorului $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^{(k)} + s^{(k)}\boldsymbol{\Delta x}^{(k)}\right)$ să fie mai mică decât norma lui $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$. Pentru început se estimeaza $s_1^{(k)} = 1$.

Dacă inecuaţia

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2\left(\boldsymbol{x}^{(k)} + s^{(k)}\boldsymbol{\Delta x}^{(k)}\right)} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)} \tag{10.28}$$

este satisfăcută, se calculeaza

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}\boldsymbol{\Delta x}^{(k)}; \tag{10.29}$$

$$\boldsymbol{f}^{(k+1)} = f\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}\right) \tag{10.30}$$

si se trece la pasul 3.

In caz contrar se calculează $s^{(k)}$ cu relaţia dezvoltată de Broyden

$$s_2^{(k)} = \frac{(1+6\eta)^{1/2} - 1}{3\eta}, \tag{10.31}$$

unde

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i^2\left(\boldsymbol{x}^{(k)} + s_1^{(k)}\boldsymbol{\Delta x}^{(k)}\right)}{\sum_{i=1}^{n} f_i^2\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)} \tag{10.32}$$

şi se verifică din nou îndeplinirea inecuaţiei (10.28).

Dacă şi în acest caz inecuaţia nu este satisfăcută, urmează o întorcere la etapa initializarii calculelor, pasul 2, in scopul reevaluarii derivatelor parţiale pe baza valorilor $\boldsymbol{x}^{(k)}$.

3. Se testează dacă s-a găsit soluţia numerică cu precizia ε aprioric fixată. Dacă convergenta nu a fost atinsa, se calculează

$$\boldsymbol{\Delta f}^{(k)} = \boldsymbol{f}^{(k+1)} - \boldsymbol{f}^{(k)}. \tag{10.33}$$

4. Se determină matricea $\boldsymbol{H}^{(k+1)}$ cu relaţia

$$\boldsymbol{H}^{(k+1)} = \boldsymbol{H}^{(k)} + \frac{\left(\boldsymbol{H}^{(k)}\boldsymbol{\Delta f}^{(k)} + s^{(k)}\boldsymbol{\Delta x}^{(k)}\right)\left(\boldsymbol{\Delta x}^{(k)}\right)^T \boldsymbol{H}^{(k)}}{\left(\boldsymbol{\Delta x}^{(k)}\right)^T \boldsymbol{H}^{(k)}\boldsymbol{\Delta x}^{(k)}}, \tag{10.34}$$

după care se reiau calculele de la pasul 3.

Lucrare de verificare

1. **Să se rezolve următorul sistem de ecuații neliniare,**

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}, \text{ având condiția inițială } \begin{cases} x_1 = 1, y_1 = 2 \\ x_2 = 2, y_2 = 1 \end{cases}.$$

2. **Să se rezolve următorul sistem de ecuații neliniare,**

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 + 3x + 2 \end{cases}, \text{ având condiția inițială } \{x = -1, y = 0.$$