Unitatea de învățare 7 *– 2 ore*

Calcul matriceal *(continuare)*

Sisteme de ecuații liniare

7.1. Metode de calcul prin transformarea matricei A în matrice unitate. - *continuare*

7.2. Sisteme de ecuații liniare. Generalități.

7.3. Algoritmi direcți. Algoritmul Gauss.

Cunoștințe și deprinderi

La finalul parcurgerii acestei unități de învățare vei cunoaște:

- algoritmul de calcul al matricei inverse bazat pe transformarea directa a matricei A in matrice unitate;
- care sunt algoritmii de soluționare a sistemelor de ecuații liniare;
- caracteristicile algoritmilor direcți de soluționare a sistemelor de ecuații liniare;
- etapele de calcul pentru algoritmul Gauss.

În această unitate de învățare este prezentat cel de-al doilea algoritm de calcul al matricei inverse si anume cel bazat pe transformarea directa a matricei A in matrice unitate, precum si forma generala a sistemelor de ecuatii liniare, cu prezentarea algoritmului Gauss de solutionare a acestora, algoritm ce face parte din categoria algoritmilor directi.

7.1. Algoritmul bazat pe transformarea directă a matricei A în matrice unitate

Acest algoritm este similar cu cel anterior şi se bazează pe unele observaţii privind prelucrările asupra matricei ***B***.

Deşi teoretic matricea ***B*** are dimensiunea de $n \times 2n$, în realitate se supun transformărilor doar partea din matricea ***B*** cuprinsă între coloanele *k* şi $n+k+1$, respectiv doar asupra unei matrici de dimensiuni $n \times (n+1)$, ultima coloană, $n+k+1$ fiind identică cu coloana *k* a matricei unitate. Exemplificând cu matricea prezentată în exemplul din unitatea anterioara de invatare, pentru $k=1$ se porneşte de la matricea din figura 7.1.

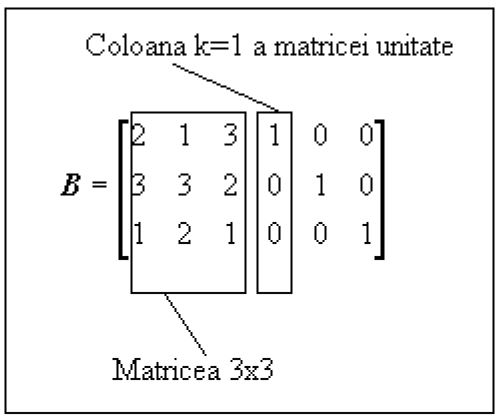

Fig. 7.1. Matricea ***B*** la începutul iteraţiei $k=1$.

După aplicarea algoritmului descris prin (6.22) – (6.26) se obţine, pentru iteraţia $k=1$, forma din figura 7.2. Se observă că algoritmul nu modifică structura coloanelor 5 şi 6 ale matricei, respectiv a coloanelor $2n-1, 2n-2, \ldots, 2n-k+2$.

Coloana k=1 a matricei unitate

$$\boldsymbol{B}^{(1)} = \left[\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & -2{,}5 & -1{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Matrice 3x3 dupa prima iteratie

Fig. 7.2. Matricea ***B*** la sfârşitul iteraţiei $k = 1$.

În consecinţă, transformările (6.23) şi (6.24) nu mai trebuie aplicate asupra coloanelor $2n-1, 2n-2, \ldots, 2n-k+2$.

Generalizare. Se consideră matricea $\boldsymbol{C}_{(n\times(n+1))}$, alcătuită din matricea $\boldsymbol{B}_{(n\times n)}$, căreia i se bordează în iteraţia $k = 1$ vectorul coloană unitate

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} b_{11}^{(0)} & b_{12}^{(0)} & \ldots & b_{1n}^{(0)} & 1 \\ b_{21}^{(0)} & b_{22}^{(0)} & \ldots & b_{2n}^{(0)} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}^{(0)} & b_{n2}^{(0)} & \ldots & b_{nn}^{(0)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicând algoritmul (6.22) – (6.26) pentru $j = 1, \ldots, n+1$ se obţine

$$\boldsymbol{C}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12}^{(1)} & \ldots & b_{12n}^{(1)} & b_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & b_{22}^{(1)} & \ldots & b_{2n}^{(1)} & b_{2,n+1}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & b_{n2}^{(1)} & \ldots & b_{nn}^{(1)} & b_{n,n+1}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Coloana $n+1$ a matricei $\boldsymbol{C}^{(1)}$ reprezintă prima coloană a viitoarei matrici inverse. Înlocuind coloana 1 a matricei $\boldsymbol{C}^{(1)}$ cu coloana $n+1$ şi neglijând coloana vector unitate se obtine forma compactă a matricei ***B***

$$\boldsymbol{B}^{(1)} = \begin{bmatrix} b_{1,n+1}^{(1)} & b_{12}^{(1)} & \dots & b_{1n}^{(1)} \\ b_{2,n+1}^{(1)} & b_{22}^{(1)} & \dots & b_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,n+1}^{(1)} & b_{2n}^{(1)} & \dots & b_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Relaţiile de calcul pentru utilizate în continuare sunt:

$$b_{i,n+1}^{(1)} = -\frac{b_{i1}^{(0)}}{b_{11}^{(0)}}, \quad i = 2,\dots,n; \tag{7.1}$$

$$b_{i1}^{(1)} = -\frac{b_{i1}^{(0)}}{b_{11}^{(0)}}, \quad i = 2,\dots,n, \tag{7.2}$$

$$b_{11}^{(1)} = \frac{1}{b_{11}^{(0)}}; \tag{7.3}$$

$$b_{kj}^{(k)} = \frac{b_{kj}^{(k-1)}}{b_{kk}^{(k-1)}}, \quad j = k,\dots,2n. \tag{7.4}$$

$$b_{ij}^{(k)} = b_{ij}^{(k-1)} - b_{ik}^{(k-1)} * \frac{b_{kj}^{(k-1)}}{b_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,2n, i \neq k,\ j \neq k. \tag{7.5}$$

<u>*Algoritmul compact*</u>. Din cele prezentate rezultă că metoda eliminării gaussiene se poate aplica şi în cadrul aceleaşi matrice de dimensiuni $n \times n$, eleminarea decurgând în *n* etape. Algoritmul este iterativ, pentru iteraţia k, $k = 1,\dots,n$ fiind parcurse următoarele operaţii:

$$b_{kj}^{(k)} = \frac{b_{kj}^{(k-1)}}{b_{kk}^{(k-1)}}, \quad j = 1,\dots,n, \quad j \neq k; \tag{7.6}$$

$$b_{ik}^{(k)} = -\frac{b_{ik}^{(k-1)}}{b_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = 1, \ldots, n \quad i \neq k\,; \tag{7.7}$$

$$b_{kk}^{(k)} = \frac{1}{b_{kk}^{(k-1)}}\,; \tag{7.8}$$

$$b_{ij}^{(k)} = b_{ij}^{(k-1)} - b_{ik}^{(k-1)} * \frac{b_{kj}^{(k-1)}}{b_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ i \neq k,\ j \neq k\,. \tag{7.9}$$

Test de autoevaluare

1. Care sunt diferențele între cei doi algoritmi utilizați în cazul calculului matricei inverse?
2. Care sunt particularitățile algoritmului compact?

7.2. Sisteme de ecuaţii liniare

Un sistem de n ecuaţii liniare cu n necunoscute are forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{7.10}$$

Sub formă matriceală, sistemul de ecuaţii (7.10) poate fi scris sub forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \tag{7.11}$$

respectiv

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \tag{7.12}$$

unde $\boldsymbol{A} \in \Re_{n \times n}$ este o matrice reală cu *n* linii şi *n* coloane, iar $\boldsymbol{b} \in \Re^n$ este un vector coloană cu *n* componente.

Teorema de existenţă şi unicitate arată că dacă matricea $\boldsymbol{A} \in \Re_{n \times n}$ este inversabilă, atunci, oricare ar fi vectorul $\boldsymbol{b} \in \Re^n$, sistemul (7.10) are soluţie unică $\boldsymbol{x} \in \Re^n$, solutie care poate fi scrisă sub forma

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{7.13}$$

Principial, soluţia sistemului de ecuaţii (7.10) se obţine calculând matricea inversă, $\boldsymbol{A}^{-1}$ şi înmulţind rezultatul obţinut cu vectorul $\boldsymbol{b}$. Practic, această modalitate de calcul este foarte puţin utilizată, având doar semnificaţie teoretică. Algoritmii de soluţionare a sistemelor de ecuaţii liniare pot fi grupaţi in două categorii:

- algoritmi direcţi, care determină soluţia sistemului într-un număr cunoscut de iteraţii ;
- algoritmi indirecţi, care determină iterativ soluţia sistemului, pornind de la o soluţie iniţială.

7.3. Algoritmi direcţi. Algoritmul Gauss

Aceşti algoritmi constau în reducerea sistemului iniţial (7.10) la un sistem echivalent, rezolvabil prin relaţii analitice elementare. Procedeul de reducere are la bază o schemă de eliminare succesivă a necunoscutelor, schemă ce poarta numele de eliminarea Gauss. Deoarece numărul de operaţii aritmetice elementare este de ordinul n^3, considerente de natură tehnico-economică recomandă aplicarea metodelor directe pentru sisteme cu dimensiuni $n \le 100$.

<u>Algoritmul Gauss</u>. Algoritmul Gauss este cel mai des utilizat algoritm destinat rezolvării sistemelor de ecuaţii liniare de dimensiuni mici şi medii. Algoritmul cuprinde două etape de calcul:

a) transformarea matricei $\boldsymbol{A}$ a sistemului de ecuaţii la forma triunghiular superioară, însoţită de transformări corespunzatoare asupra vectorului $\boldsymbol{b}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix};$$

b) determinarea soluţiilor prin substituţie inversă, respectiv determinarea iterativă a soluţiei $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$.

Prima etapă de calcul, triangularizarea matricei ***A***, este realizată prin eliminare gaussiană cu pivotare parţială. Algoritmul cuprinde următorii paşi :

- pentru $k = 1,2,\dots,n-1$ se calculează
  1. Se determină linia $l\,max$ corespunzatoare elementului maxim de pe coloana k,
  $$\left|a_{l\,max,k}\right| = \max_{i \ge k} \left|a_{ik}\right|,\ l\,max \ge k\ ; \tag{7.14}$$
  2. Se permută linia k cu linia $l\,max$
  $$a_{kj} = a_{l\,max,j}, \quad j = k,\dots,n\ ; \tag{7.15}$$
  $$b_k = b_{l\,max}\ ; \tag{7.16}$$
  3. Pentru $i = k+1,\dots,n$ se calculează

3a) multiplicatorul $\mu = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}$; (7.17)

3b) elementele matricei şi a termenului liber

$$a_{ij} = a_{ij} - \mu * a_{kj}, \quad j = k+1,\ldots,n \; ; \tag{7.18}$$

$$b_i = b_i - \mu * b_k \; . \tag{7.19}$$

Cea de a doua etapă de calcul, determinarea soluţiilor prin substituţie inversă, decurge astfel:

1. Calculul soluţiei x_n

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \; ; \tag{7.20}$$

2. Calculul iterativ al soluţiilor $x_i, i = n-1,\ldots,1$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} * x_j}{a_{ii}}, \quad i = n-1,\ldots,1 . \tag{7.21}$$

<u>*Exemplul 7.1*</u>. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases} .$$

<u>*Rezolvare*</u>. Sistemul se aduce la forma matriceală $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, în care

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Soluţia se obţine după parcurgerea celor două etape:

a) transformarea matricei ***A*** a sistemului de ecuaţii la forma triunghiular superioară, însoţită de transformări corespunzatoare asupra vectorului ***B*** ;
b) determinarea soluţiilor prin substituţie inversă, respectiv determinarea iterativă a soluţiei $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Transformarea matricei ***A*** a sistemului de ecuaţii la forma triunghiular superioară se realizează iterativ, în $k = n-1 = 2$ iteraţii.

<u>Iteraţia $k=1$</u>, $i = 2,3$.

Pentru $i = 2$ se calculează

a) multiplicatorul $\mu = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2$;

b) elementele matricei şi a termenului liber

$a_{ij} = a_{ij} - \mu * a_{kj}, \quad j = 1,\ldots,3$;

$$a_{21} = a_{21} - \mu * a_{11} = 2 - 2*1 = 0;$$

$$a_{22} = a_{22} - \mu * a_{12} = 3 - 2*1 = 1 ;$$

$$a_{23} = a_{23} - \mu * a_{13} = 1 - 2*1 = -1 ;$$

$b_i = b_i - \mu * b_k$;

$$b_2 = b_2 - \mu * b_1 = 9 - 2*4 = 1.$$

Pentru $i = 3$ se calculeaza

a) multiplicatorul $\mu = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1$;

b) elementele matricei şi a termenului liber

$a_{ij} = a_{ij} - \mu * a_{kj}, \quad j = 1,\ldots,3$;

$$a_{31} = a_{31} - \mu * a_{11} = 1 - 1 * 1 = 0;$$

$$a_{32} = a_{32} - \mu * a_{12} = -1 - 1 * 1 = -2 \ ;$$

$$a_{33} = a_{33} - \mu * a_{13} = -1 - 1 * 1 = -2 \ ;$$

$$b_i = b_i - \mu * b_k \ ;$$

$$b_3 = b_3 - \mu * b_1 = -2 - 1 * 4 = -6.$$

După iteraţia $k = 1$, forma sistemului de ecuaţii este

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

<u>Iteraţia $k = 2$</u>, $i = 3$.

Pentru $i = 3$ se calculează

a) multiplicatorul $\mu = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} = \dfrac{a_{32}}{a_{22}} = \dfrac{-2}{1} = -2$;

b) elementele matricei şi a termenului liber

$$a_{ij} = a_{ij} - \mu * a_{kj}, \quad j = 2,3;$$

$$a_{32} = a_{32} - \mu * a_{22} = -2 - (-2) * 1 = 0 \ ;$$

$$a_{33} = a_{33} - \mu * a_{23} = -2 - (-2) * (-1) = -4 \ ;$$

$$b_i = b_i - \mu * b_k \ ;$$

$$b_3 = b_3 - \mu * b_2 = -6 - (-2) * 1 = -4.$$

După iteraţia $k = 2$, forma sistemului de ecuaţii devine

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Determinarea soluţiilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se realizează prin substituţie inversă. Etapele de calcul sunt :

1. Calculul soluţiei $x_n = x_3$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{-4}{-4} = 1;$$

2. Calculul iterativ al soluţiilor $x_i, i = 2,1$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} * x_j}{a_{ii}}, \quad i = n-1, \ldots, 1.$$

$$x_2 = \frac{b_2 - \sum_{j=3}^{3} a_{2j} * x_j}{a_{22}} = \frac{1 - [(-1) * 1]}{1} = 2;$$

$$x_1 = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^{3} a_{2j} * x_j}{a_{11}} = \frac{4 - [1 * 2 + 1 * 1]}{1} = 1.$$

Soluţia sistemului de ecuaţii este $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Test de autoevaluare

1. Precizați categoriile în care se grupează algoritmii de soluționare a sistemelor de ecuații liniare.
2. Care sunt etapele de calcul ale algoritmului Gauss?

Lucrare de verificare

1. **Să se realizeze o comparație între algoritmul cu bordare parțială și algoritmul compact utilizați pentru calculul inversei matricei** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$**.**
2. **Să se rezolve următorul sistem de ecuații liniare, folosind metoda Gauss**

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ -x - 2y + z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}.$$