Unitatea de învățare 11 – *2 ore*

Ecuații neliniare

11.1. Metode pentru izolarea soluțiilor: metoda tabelării și metoda izolării unei soluții.

11.2. Algoritmi pentru determinarea unei soluții.

Algoritmi cu convergență sigură. Algoritmul încercare-eroare.

Cunoștințe și deprinderi

La finalul parcurgerii acestei unități de învățare vei cunoaște:

- tipurile de algoritmi utilizați în rezolvarea ecuațiilor neliniare;
- cunoașterea metodelor pentru izolarea soluțiilor și anume metoda tabelării și metoda izolării unei soluții;
- cunoașterea algoritmului încercare – eroare, algoritm ce face parte din categoria celor cu convergență sigură.

Numeroase probleme de inginerie implică direct sau indirect rezolvarea ecuaţiilor neliniare. Expresia uzuală a unei ecuaţii neliniare poate fi scrisă sub forma

$$f(x) = 0. \qquad (11.1)$$

În marea majoritate a cazurilor practice, domeniul de definiţie al functiei *f* este un interval ***I*** al axei reale, $\boldsymbol{I} \subset \Re$, iar domeniul valorilor lui *f* este $\Re$. A soluţiona ecuaţia (11.1) este echivalent a determina zerourile funcţiei *f*.

Se consideră funcţia f, al cărei grafic este prezentat în figura 11.1. Punctul de pe axa *Ox,* caracterizat prin abscisa α, constituie un *zero* al funcţiei f, respectiv o *soluţie* a ecuaţiei (11.1). Atunci când f este un polinom, zerourile funcţiei sunt cunoscute sub numele de *rădăcini* ale polinomului.

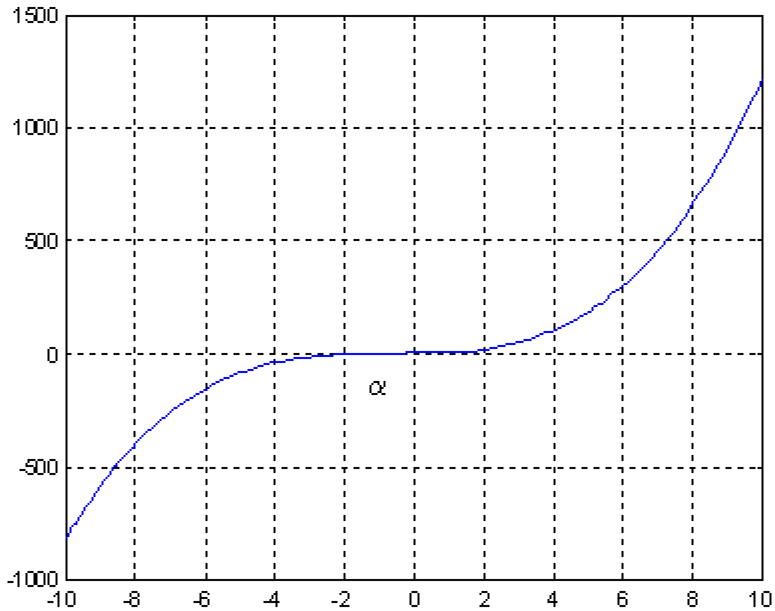


Fig.11.1. Soluţia α a ecuaţiei (11.1).

Algoritmii utilizaţi în rezolvarea ecuaţiilor neliniare pot fi clasificaţi în:

- algoritmi care permit localizarea soluţiilor;
- algoritmi care determină toate rădăcinile reale şi complexe ale unei ecuaţii;
- algoritmi care determină o singură soluţie a unei ecuaţii.

În cele ce urmeză vor fi prezentate metode şi algoritmi specifici fiecărei categorii.

11.1. Metode pentru izolarea soluțiilor

Izolarea soluţiilor prezintă o importanţă practică deosebită, deoarece nu ne interesează găsirea tuturor soluţiilor, ci numai a acelora care prezintă interes pentru problema tehnică respectivă.

Fie ecuaţia $f(x)=0$, unde $f:[a,b]\to\Re$ este o funcţie continuă pe intervalul $[a,b]$ al axei reale. A izola cele *n* rădăcini ale ecuaţiei $f(x)=0$ înseamnă a pune în evidenţă $n+1$ puncte consecutive $a_0, a_1, \ldots, a_n$

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b,$$

astfel încât în fiecare interval $(a_i, a_{i+1}), i = 0,1,\ldots,n-1$ să existe cel mult o rădăcină a ecuaţiei.

Metoda numerică utilizată pentru izolarea soluţiilor este metoda tabelării funcţiei, un caz particular fiind acela al izolării unei soluţii aflată în jurul unui punct dat.

<u>Metoda tabelării</u>

Cu ajutorul acestei metode sunt separate numai rădăcinile reale ale funcţiei $f(x)$ din interiorul domeniului delimitat de marginile rădăcinilor. Intervalul $[a,b]$, unde *a* şi *b* reprezintă marginile rădăcinilor, se divide într-un număr *n* de subintervale egale, de lungime *h*,

$$h = \frac{b-a}{n}, \tag{11.2}$$

după care sunt calculate valorile funcţiei în punctele $a + ih, i = 0,1,\ldots,n$.

Dacă există un număr $k, 0 \le k \le n$, pentru care

$$f(a+kh) * f(a+(k+1)h) < 0, \tag{11.3}$$

atunci în intervalul $(a+kh, a+(k+1)h)$ există un numar impar de rădăcini ale funcţiei $f(x)$. Dacă însă

$$f(a+kh)*f(a+(k+1)h)>0,$$

atunci în intervalul $(a+kh, a+(k+1)h)$ există cel mult un număr par de rădăcini.

<u>*Exemplul 11.1*</u>. Să se izoleze rădăcinile funcţiei

$$f(x) = -0{,}02268x^3 + 0{,}3108724x^2 - 0{,}6668459x + 0{,}209308 \qquad (11.4)$$

în intervalul $[-40,40]$.

<u>*Rezolvare*</u>. Se tabelează funcţia (11.4) în 100 de puncte, cu pasul

$$h = \frac{40-(-40)}{100} = 0{,}8.$$

Rezultatele sunt prezentate în tabelul 11.1. Se observă ca funcţia (11.4) are toate cele trei rădăcini reale, pozitive, situate în intervalele: $x_1 \in (0{,}2; 0{,}4)$, $x_2 \in (2;3)$ si $x_3 \in (11;12)$.

Tabelul 11.1

Rezultate obţinute la tabelarea funcţiei (11.4)

x	$f(x)$
-40,0000	1,9757∗10^3
-29,4949	8,7227∗10^2
-20,6060	3,4438∗10^2
-10,1010	6,2037∗10^1
-5,2525	1,5575∗10^1
-2,0202	3,0122∗10^0

-1,2121	$1,5148*10^{0}$
-0,4040	$5,3105*10^{-1}$
0,4040	$-1,0799*10^{-2}$
1,2121	$-1,8256*10^{-1}$
2,0202	$-5,6039*10^{-2}$
2,8282	$2,9696*10^{-1}$
3,6363	$8,0464*10^{-1}$
10,1012	$1,8177*10^{0}$
10,9092	$4,8627*10^{-1}$
11,7171	$-1,4085*10^{0}$
12,5252	$-3,9386*10^{0}$
20,6060	$-7,9971*10^{1}$
30,3030	$-3,6563*10^{2}$
40,0000	$-9,8058*10^{2}$

Metoda izolării unei soluţii

Fie o funcţie $f(x)$, definită pe un domeniu $D \subset \Re$, funcţie care are una sau mai multe rădăcini reale. Fie α una din valorile reale în care funcţia se anulează şi x_0 o valoare apropiată de α.

Determinarea intervalului $[x_1, x_2]$ care conţine rădăcina α se realizează evaluând funcţia $f(x)$ pentru o succesiune de valori ale argumentului *x*, utilizâd un anumit sens de explorare. Etapele algoritmului sunt următoarele :

a) Determinarea sensului de explorare.

b) Tabelarea funcţiei conform sensului de explorare, până la satisfacerea criteriului de stop.

Sensul de explorare este determinat cu relaţia

$$\Delta x = \begin{cases} \Delta x, & f\left(x_0 + \Delta x\right) < f\left(x_0\right) \\ -\Delta x, & f\left(x_0 + \Delta x\right) < f\left(x_0\right) \end{cases}, \tag{11.5}$$

unde *Δx* reprezintă pasul de explorare.

Pentru tabelarea functiei $f(x)$ se procedează conform relaţiilor următoare:

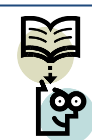
$$\begin{aligned} &1)\ x_1 = x_0; \\ &2)\ x_2 = x_1 + \Delta x; \end{aligned} \tag{11.6}$$

$$3)\ f\left(x_1\right) * f\left(x_2\right) < 0 \quad \begin{cases} da & \alpha \in \left[x_1, x_2\right] \\ nu & \begin{cases} x_1 = x_2 \\ Salt\ la\ pasul\ 2 \end{cases} \end{cases}. \tag{11.7}$$

Dacă în decursul iteraţiilor definite de (11.6) – (11.7) condiţia

$$\left|f\left(x_1\right)\right| \geq \left|f\left(x_2\right)\right| \tag{11.8}$$

nu este îndeplinită, funcţia $f(x)$ prezintă un minim local iar calculul este oprit.



Test de autoevaluare

Subliniați particularitățile metodelor pentru izolarea soluțiilor utilizate în rezolvarea ecuațiilor neliniare.

11.2. Algoritmi pentru determinarea unei soluții

Algoritmii utilizaţi pentru determinarea unei singure soluţii a unei ecuaţii neliniare sunt cunoscuţi si sub numele de algoritmi iterativi sau algoritmi bazaţi pe aproximari succesive. Cu ajutorul acestor algoritmi se porneşte de la o valoare aproximativă a soluţiei şi prin itermediul unui procedeu iterativ se realizează aproximaţii din ce în ce mai bune, până când se apreciază că s-a determinat soluţia cu o precizie aprioric fixată. Mulţimea algoritmilor utilizaţi pentru determinarea unei singure soluţii pot fi clasificaţi în funcţie de un anumit criteriu. Deseori este utilizat criteriul convergenţei în aprecierea algoritmilor numerici. Conform acestui criteriu, algoritmii destinaţi determinării unei singure soluţii se clasifică în:

a) Algoritmi cu convergenţă sigură.

b) Algoritmi cu convergenţă condiţionată.

Algoritmi cu convergență sigură

Din categoria algoritmilor cu convergență sigură fac parte algoritmii încercare-eroare, bisecţie succesivă, interpolare liniară inversă.

Algoritmul încercare-eroare

Fie funcţia $f(x)$, continuă, definită pe un domeniu $D \in \Re$ şi x_1, o aproximare iniţială a zeroului funcţiei α. Algoritmul încercare-eroare evaluează funcţia $f(x)$ într-o succesiune de puncte, până când este satisfăcută condiţia de oprire a calculelor.

Sensul de explorare al funcţiei este controlat de modulul valorilor funcţiei, care, de la o iteraţie la alta, trebuie să descrească. Se consideră $\Delta x > 0$, un pas de explorare şi un sens arbitrar de explorare a funcţiei, figura 11.2

$$x_2 = x_1 + \Delta x . \qquad (11.9)$$

Sensul de explorare se consideră bine ales dacă modulul funcţiei descreşte, în caz contrar se schimbă sensul de explorare,

$$\Delta x = \begin{cases} \Delta x, & |f(x_1)| \geq |f(x_2)| \\ -\Delta x, & |f(x_1)| < |f(x_2)| \end{cases}. \tag{11.10}$$

După stabilirea sensului de explorare, se începe efectiv explorarea conform relaţiei

$$x_2 = x_1 + \Delta x \,, \tag{11.11}$$

urmată de calculul valorii funcţiei în punctul determinat. Când funcţia îşi schimbă semnul

$$f(x_1) * f(x_2) < 0 \,, \tag{11.12}$$

se reia explorarea din punctul anterior schimbării semnului funcţiei, dar micşorând pasul de explorare

$$\Delta x = \alpha \Delta x, \quad 0 < \alpha < 1 . \tag{11.13}$$

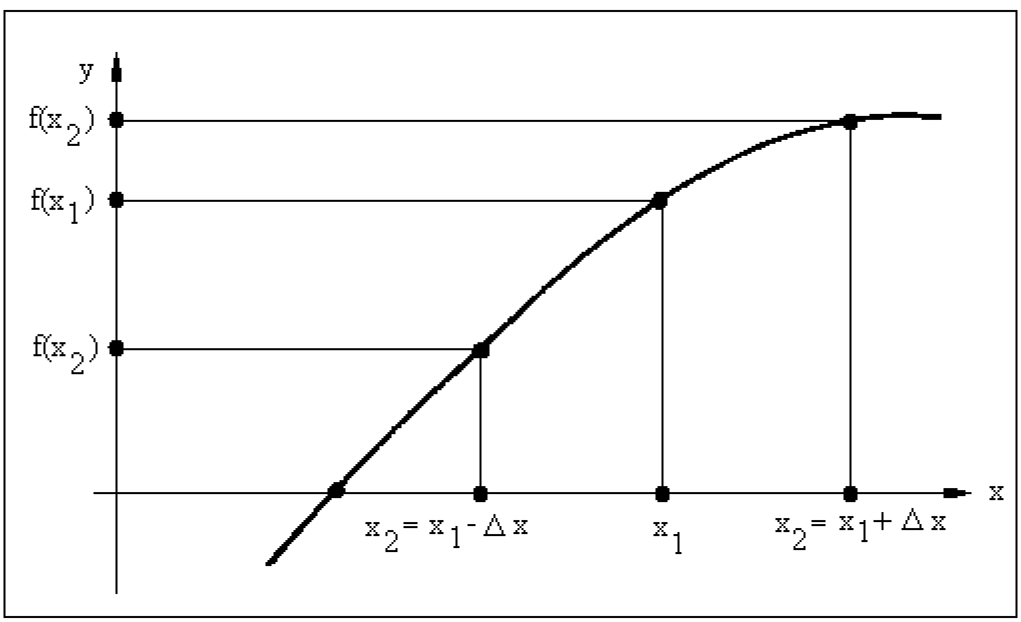


Fig. 11.2. Determinarea direcţiei de explorare pentru algoritmul încercare-eroare.

Criteriile de oprire ale calculului sunt asociate valorii funcţiei în punctul x_2 şi valorii limită a pasului de explorare

$$\left| f(x_2) \le \varepsilon_1 \right| \; ; \tag{11.14}$$

$$|\Delta x| \le \varepsilon_2 \, . \tag{11.15}$$

Dacă în procesul de calcul apare situaţia în care $|f(x_1)| \ge |f(x_2)|$, deşi sensul de explorare este bine ales, rezultă că în intervalul $[x_1, x_2]$ a fost izolat un extrem local al funcţiei şi calculul este oprit.

Exemplul 11.2. Se consideră funcţia neliniară

$$f(x) = x^3 - x - 2 \, . \tag{11.16}$$

Se cere să se determine zeroul funcţiei $f(x)$, cu precizia $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ si $\varepsilon_2 = 10^{-3}$, utilizând ca primă aproximare $x_0 = 2{,}3$.

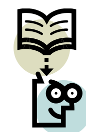
Rezolvare. Utilizând algoritmul încercare-eroare, soluţia determinată este $x = 1{,}52109375$, obtinuta în 18 iteraţii. O imagine a rezultatelor obţinute în urma fiecărei iteraţii este prezentată în tabelul 11.2.

Tabelul 11.2

Rezultatele obtinute cu algoritmul incercare-eroare

Iteratia	Δx	x_1 / $f(x_1)$	x_2 / $f(x_2)$	Iteratia	Δx	x_1 / $f(x_1)$	x_2 / $f(x_2)$
1	-0,1	2,3000	2,2000	10	-0,05	1,5500	1,5000
		7,8670	6,4480			0,1738	-0,1249
2	-0,1	2,2000	2,1000	11	-0,025	1,5500	1,5250
		6,4480	5,1610			0,1738	0,0215
3	-0,1	2,1000	2,0000	12	-0,025	1,5250	1,5000
		5,1610	4,0000			0,0215	-0,1249
4	-0,1	2,0000	1,9000	13	-0,0125	1,5250	1,5125
		4,0000	2,9590			0,0215	-0,0524
5	-0,1	1,9000	1,8000	14	-0,00625	1,5250	1,5187
		2,9590	2,0320			0,0215	-0,0155

6	-0,1	1,8000	1,7000	15	-0,003125	1,5250	1,5218
		2,0320	1,2130			0,0215	0,0029
7	-0,1	1,7000	1,6000	16	-0,003125	1,5218	1,5187
		1,2130	0,4960			0,0029	-0,0015
8	-0,1	1,6000	1,5000	17	-0,0015625	1,5218	1,5203
		0,4960	-0,1249			0,0029	-0,0063
9	-0,05	1,6000	1,5500	18	-0,00078125	1,5218	1,5210
		0,4960	0,1738			0,0029	-0,0016



Test de autoevaluare

1. Precizați care sunt algoritmii pentru determinarea unei singure soluții a ecuațiilor neliniare.
2. Prezentați particularitățile algoritmului încercare – eroare.

Lucrare de verificare

Să se rezolve următoarea ecuație:

$$x^3 - 1,473x^2 - 5,738x + 6,763 = 0.$$