第四节　　无穷大量与无穷小量

一　无穷小量

二　无穷大量

一　无穷小

1　无穷小量的定义

穴　多种情形

定义1 如果函数 $f(x)$ 在自变量的某个趋向过程下以零为极限, 则称$f(x)$ 为该趋向过程的无穷小量, 简称无穷小.

根据极限的统一定义, 无穷小也可以叙述为:

在自变量的某个趋向过程中, 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 总存在某一个时刻, 自此以后, 恒有

$$|f(x)|<\varepsilon$$

则称 $f(x)$ 为该趋向过程的无穷小量, 简称无穷小.

注意

(1) 无穷小是与自变量的趋向过程分不开的.

要指明趋向过程!

例如,

$\because \lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0, \therefore$ 函数 $\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0, \quad \therefore$ 函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} = 0, \therefore$ 数列 $\{\dfrac{(-1)^n}{n}\}$ 是当 $n\to\infty$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0, \quad \therefore$ 函数 e^{-x} 是当 $x\to-\infty$ 时的无穷小.

(2) 无穷小是变量, 不能与很小的数混淆;

(3) 零是可以作为无穷小的唯一的数.

3 无穷小的运算性质

定理1 在同一过程中，两个无穷小的和、差仍是无穷小.

证　以 $x \to \infty$ 为例证明.

设α及β是当$x \to \infty$时的两个无穷小，$\forall\ \varepsilon > 0$，

$\exists X_1 > 0, X_2 > 0$，使得 当 $|x| > X_1$时恒有 $|\alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$；

当 $|x| > X_2$时恒有 $|\beta| < \dfrac{\varepsilon}{2}$；　取　$X = \max\{X_1, X_2\}$，

当 $|x| > X$时，恒有

放大　绝对值三角不等式

$$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$\therefore \alpha \pm \beta \to 0\ (x \to \infty)$$

推论 在自变量的统一趋向过程下,有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

注意 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

例如, $n \to \infty$时, $\frac{1}{n}$是无穷小, 但n个$\frac{1}{n}$之和为1不是无穷小.

定理2 在自变量的同一趋向过程下,有界变量与无穷小的乘积是无穷小.

证　以$x \to x_0$为例证明. 设 $f(x)$是$x \to x_0$的有界变量, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, 则对$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $f(x)$是$x \to x_0$有界变量, 所以存在$M > 0, \delta_1 > 0$, 使得当$0 < |x - x_0| < \delta_1$

时,恒有 $|f(x)|< M$, 又因 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, 所以存在$\delta_2>0$,

使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时, 恒有 $|\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$, 取

$$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$$

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有

$$|f(x)\alpha(x)|=|f(x)||\alpha(x)|<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\alpha(x)=0.$

推论1 在同一过程中,有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小, 两个无穷小的乘积是无穷小, 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论2 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

定理3 在自变量的同一趋向过程下,无穷小 $\alpha(x)$ 与极限不等于零的函数 $f(x)$ 的商仍是无穷小.

3 无穷小与函数极限的关系

定理4 $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,

其中 $\lim\alpha(x)=0$.

证 以 $x\to x_0$ 为例证明.

必要性. 对 $\forall\varepsilon>0$, 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 所以 $\exists\delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 令

$$\alpha(x)=f(x)-A$$

所有极限都可以通过平移变成无穷小问题

根据极限的定义可知 $\alpha(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小，于是 $f(x) = A + \alpha(x)$， 其中 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

充分性. 如果

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

其中 $\alpha(x)$是当$x \to x_0$时的无穷小，所以，对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时， 恒有$|\alpha(x)| < \varepsilon$, 即

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

所以$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

二　无穷大

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

定义2　在自变量的某个趋向过程中，如果对于任意给定的正数 M（不论它多么大），总存在一个时刻，自此以后，恒有

$$|f(x)| > M$$

则称函数$f(x)$是这个趋向过程下的无穷大量，简称为无穷大，记为 $\lim f(x) = \infty$.

如果将定义2中的 $|f(x)| > M$ 改为 $f(x) > M$ 或 $f(x) < -M$，我们可以得到正无穷大量或负无穷大量

第一章 函数 极限 连续

的定义，记为 $\lim f(x) = +\infty$ 或 $\lim f(x) = -\infty$.

注意

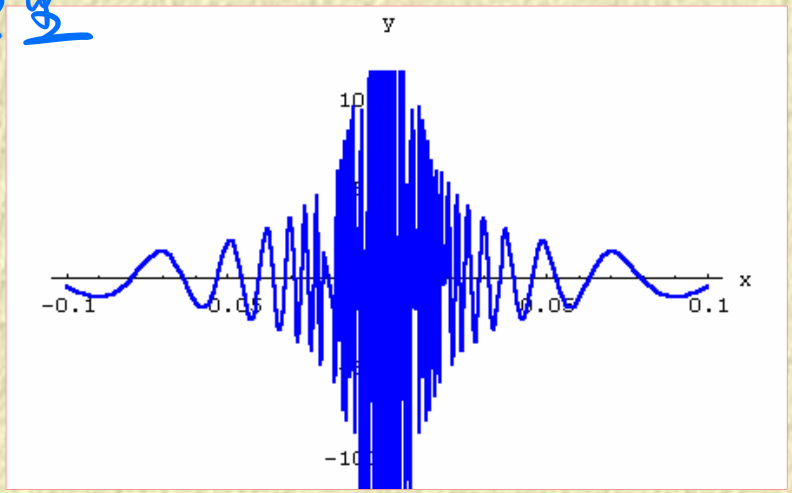
1　无穷大是变量，不能与很大的数混淆；

2　切勿将 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 认为极限存在.

3　无穷大是一种特殊的无界变量，但是无界变量未必是无穷大.

无穷大 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 无界变量

例如，当 $x \to 0$ 时，$y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$



是一个无界变量，但不是无穷大.

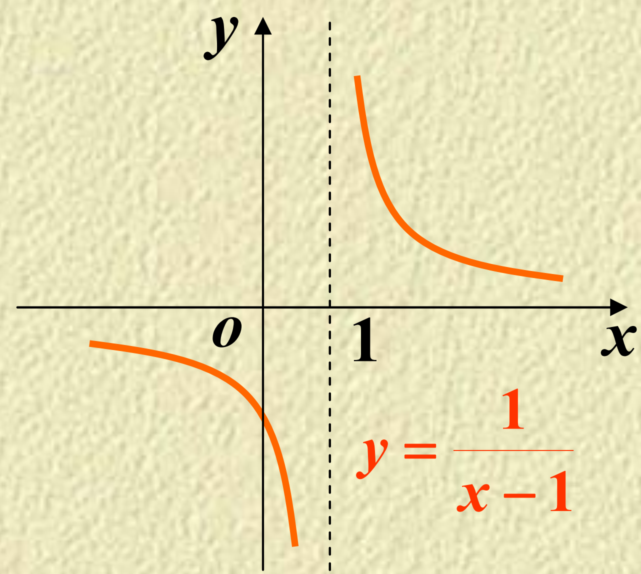
(1) 取 $x_0 = \dfrac{1}{2k\pi + \dfrac{\pi}{2}}$ $(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

$y(x_0)=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, 当$k$充分大时, $y(x_0)>M$. 无界,

(2) 取 $x_0=\dfrac{1}{2k\pi}$ $(k=0,1,2,3,\cdots)$ 当k充分大时, $x_k<\delta$,

但 $y(x_k)=2k\pi\sin 2k\pi=0<M$. 不是无穷大.

例1 证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

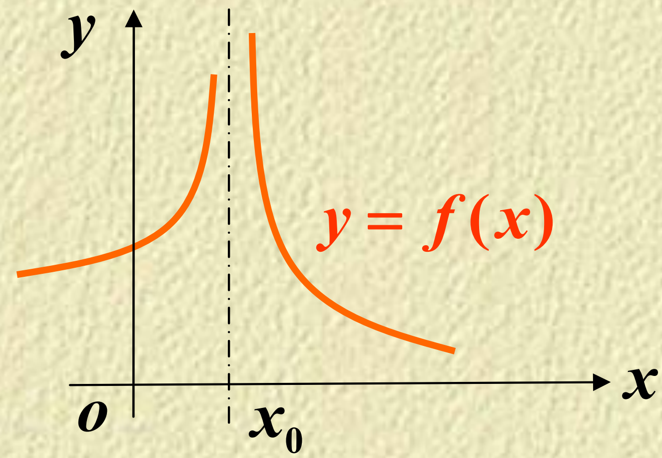


证 $\forall M>0$. 要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$,

只要 $|x-1|<\dfrac{1}{M}$, 取 $\delta=\dfrac{1}{M}$,

当$0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$时, 就有 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$. $\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$,则直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的铅直渐近线.



例2　证明 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \infty.$

证　$\forall M > 0$, 取 $X = \ln M$, 当 $x > X$ 时，恒有

$$|e^x| = e^x > e^X = M,$$

所以 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \infty.$

无穷小与无穷大的关系

定理4　在同一过程中,无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.