第三节　函数的极限

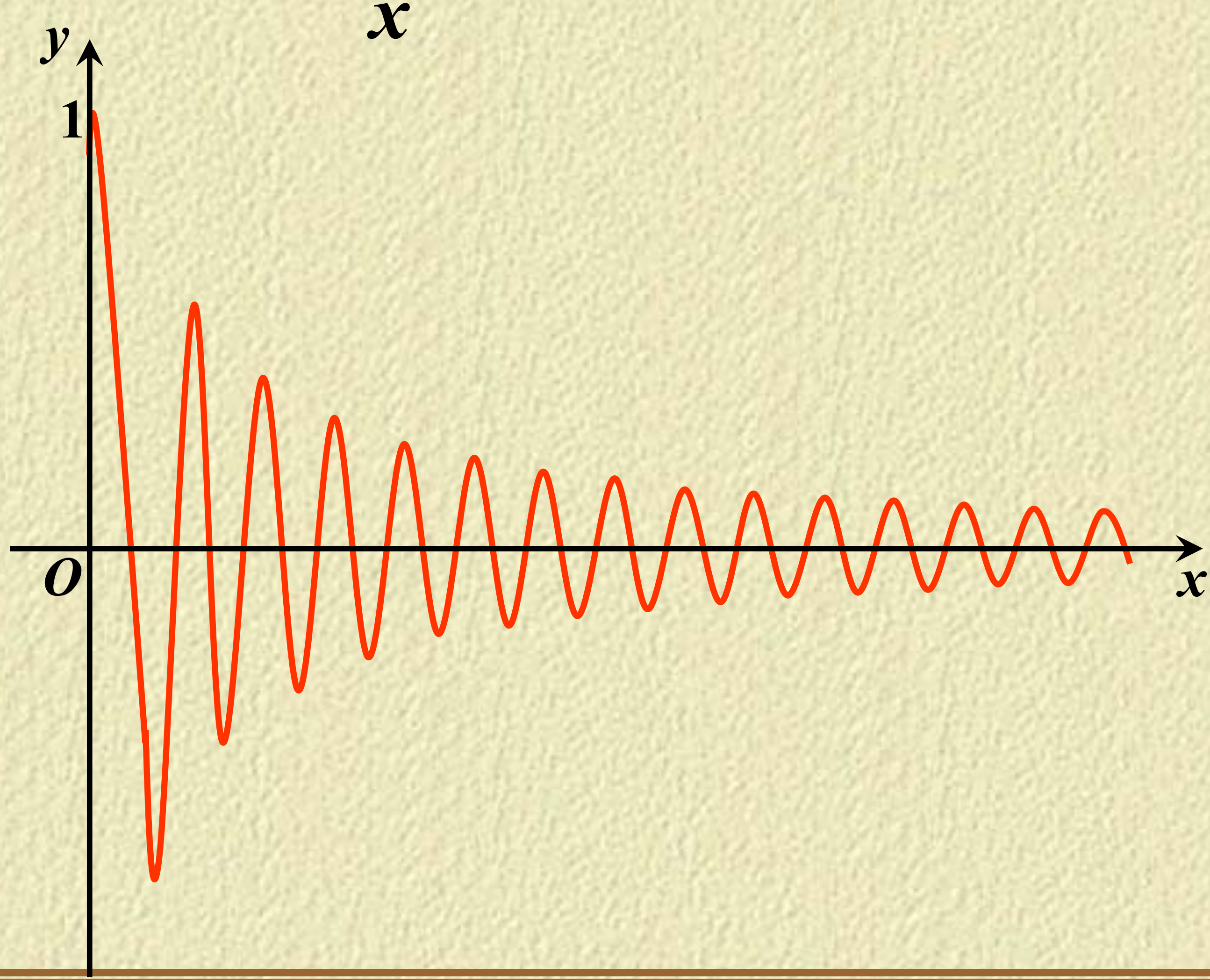
一　自变量趋向无穷大时函数的极限

二　自变量趋向有限值时函数的极限

三　函数极限的性质

一　自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to +\infty$ 时的变化趋势.



问题: 函数 $y = f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 的过程中, 对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

通过上面演示实验的观察:

当 x 无限增大时, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题: 如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

$x > X$ 表示 $x \to +\infty$ 的过程.

定义1 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 有定义, A 为定常数, 如果对任意给定的正数 ε (无论它多么小), 总存在正数 $X(>a)$, 使当 $x>X$ 时, 恒有

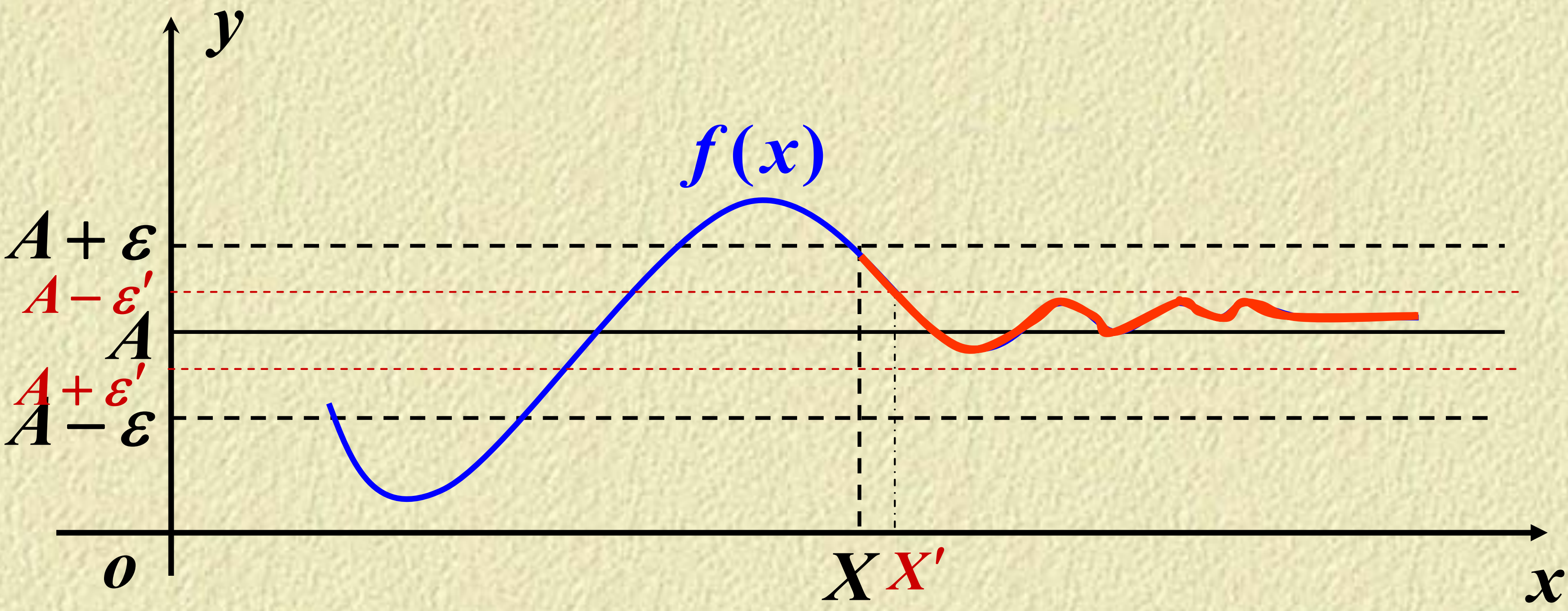
$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 在 x 趋向于正无穷大时的极限, 记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A \quad (x\to+\infty)$.

"$\varepsilon - X$"定义 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0, \exists X>0,$ 使当 $x>X$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon.$

$x \to +\infty$ 时函数极限的几何解释



例1　证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0.$

分析　由于 $|e^{-x}-0|=e^{-x}$, 要使 $|e^{-x}-0|<\varepsilon$, 即 $0<e^{-x}<\varepsilon$, 不妨设 $\varepsilon<1$, 由于 $0<e^{-x}<\varepsilon$ 等价于 $x>-\ln\varepsilon$, 因此取 $X=-\ln\varepsilon$.

证　$\forall\varepsilon>0$ (不妨设 $\varepsilon<1$), 取 $X=-\ln\varepsilon$, 当 $x>X$ 时, 恒有

$$|e^{-x}-0|=e^{-x}<e^{-X}=e^{\ln\varepsilon}=\varepsilon$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0.$$

例2　证明 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$

证 $\forall\varepsilon>0$, 取 $X=\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$, 当 $x>X$ 时, 恒有

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right|=\frac{2}{x^2+1}<\frac{2}{x^2}<\frac{2}{X^2}=\varepsilon$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$$

同理可给出 $x\to-\infty, x\to\infty$ 时函数的极限的定义

定义2　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b)$ 有定义, A 为定常数, 如果对任意给定的正数 ε (无论它多么小),

总存在正数$X(>-b)$,使当 $x<-X$时, 恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 在 x 趋向于负无穷大时的极限,

记作 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A \quad (x\to-\infty)$.

定义3 设函数 $f(x)$ 在区间 $|x|>a$ 有定义, A 为定常数, 如果对任意给定的正数ε (无论它多么小),

总存在正数 $X(>a)$, 使当$|x|>X$时, 恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 在 x 趋向于无穷大时的极限,

记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A \quad (x\to\infty)$.

例3 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

证 $\because \left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon,$

$\forall\varepsilon>0,$ 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon},$ 则当 $|x|>X$时恒有

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|\le\frac{1}{|x|}<\frac{1}{X}=\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

例4　证明 $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$

证　$\forall \varepsilon > 0$ (不妨设 $\varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$), 取 $X = \tan(\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon)$

当 $x < -X$ 时，恒有

$$|\arctan x - (-\frac{\pi}{2})| = \frac{\pi}{2} + \arctan x < \frac{\pi}{2} + \arctan(-X)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan X = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \varepsilon) = \varepsilon$$

所以

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

同理可证　$\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$

定理1 函数$f(x)$在$x\to\infty$时以A为极限的充要条件是$f(x)$当$x\to+\infty, x\to-\infty$的极限都存在而且都等于A.

例5 说明$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

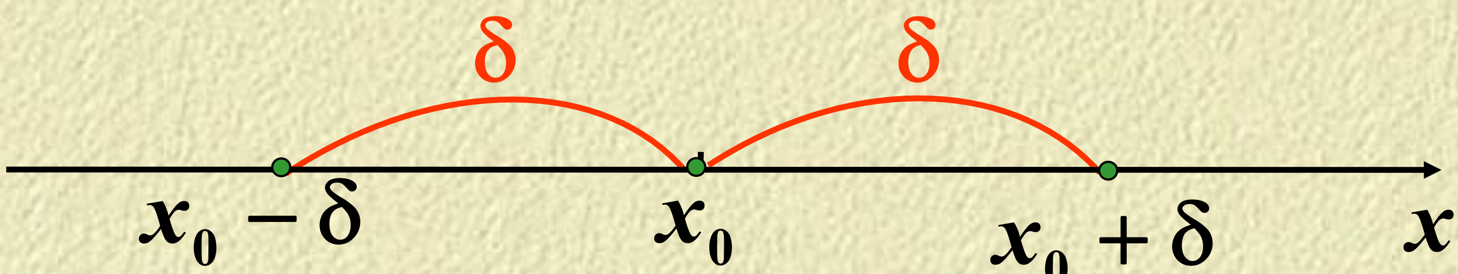
所以$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

二、自变量趋向有限值时函数的极限

问题：函数 $y=f(x)$ 在 $x\to x_0$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

$|f(x)-A|<\varepsilon$ 表示 $|f(x)-A|$ 任意小；

$0<|x-x_0|<\delta$ 表示 $x\to x_0$ 的过程.



点 x_0 的去心 δ 邻域，　　δ 体现 x 接近 x_0 程度.

1 定义

定义4　设函数$f(x)$在x_0某个去心领域内有定义，A为常数，如果对于任意给定的正数ε（不论它多么小），总存在正数δ，使得对适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切x，对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那末常数A就叫函数$f(x)$在$x \to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当}x\to x_0)$$

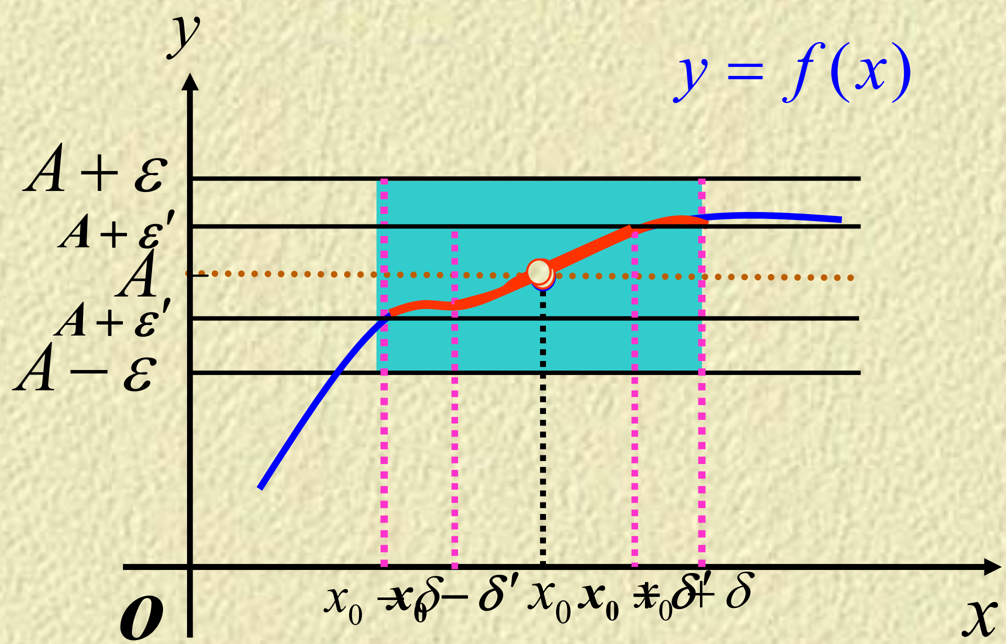
"$\varepsilon-\delta$"定义　$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

注意: 1.函数极限与$f(x)$在点x_0是否有定义无关;

2.δ与任意给定的正数ε有关.

几何解释:

当x在x_0的去心δ邻域时,函数$y=f(x)$图形完全落在以直线$y=A$为中心线,宽为2ε的带形区域内.



显然,找到一个δ后,δ越小越好.

例6　证明 $\lim_{x\to x_0} C = C$, (C为常数).

证　任给$\varepsilon > 0$, 任取$\delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时,

$$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \varepsilon\text{成立},\ \therefore \lim_{x\to x_0} C = C.$$

例7　证明 $\lim_{x\to x_0} x = x_0$.

证　$\because |f(x) - A| = |x - x_0|$, 任给$\varepsilon > 0$, 取$\delta = \varepsilon$,

当$0 < |x - x_0| < \delta = \varepsilon$时,

$$|f(x) - A| = |x - x_0| < \varepsilon\text{成立},$$

$$\therefore \lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

例8　证明 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$

证　函数在点 $x=1$ 处没有定义. 任给 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$,

当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 恒有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x-1|<\delta=\varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

例9　证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

证　$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|$$

$$\le|x-x_0|<\delta=\varepsilon$$

所以

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0.$$

同理可证

$$\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0;$$

$$\lim_{x\to x_0}e^x=e^{x_0};$$

$$\lim_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0\quad(x_0>0).$$

例10　证明：当$x_0 > 0$时，$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

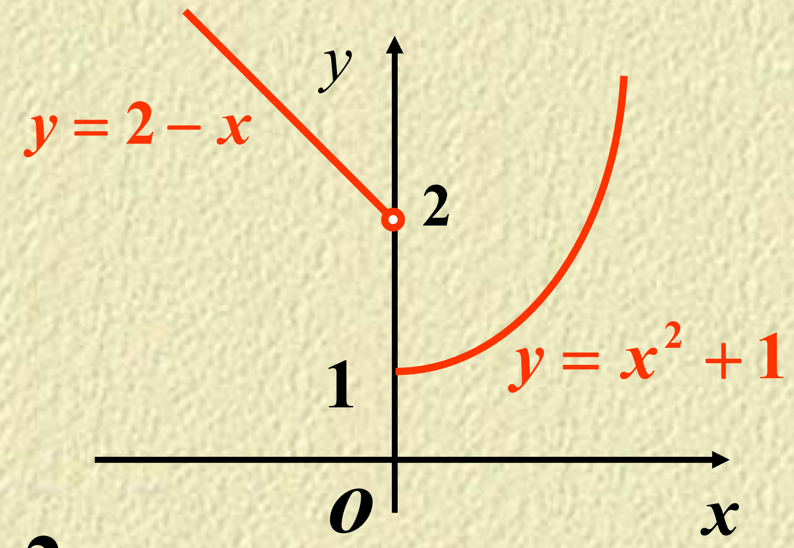
证　$\forall \varepsilon > 0$, 取$\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\varepsilon\}$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时，

恒有

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| \le \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} \le \varepsilon,$$

$$\therefore \lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

2　函数的左、右极限



设 $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x<0 \\ x^2+1, & x\geq 0 \end{cases}$

当 $x<0$ 且 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 2$,

当 $x>0$ 且 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 1.$

x 从左侧无限趋近 x_0，记作 $x\to x_0-0$ 或 $x\to x_0^-$;

x 从右侧无限趋近 x_0，记作 $x\to x_0+0$ 或 $x\to x_0^+$;

定义4 设函数$f(x)$在区间(x_0,b)有定义，A为常数，如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数$\delta(< b-x_0)$，使得对适合不等式$0 < x-x_0 < \delta$的一切x，对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A| < \varepsilon,$$

那末常数A就叫函数$f(x)$在$x\to x_0$时的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0+0)$$

$$或 f(x_0+0)=A$$

定义5　设函数 $f(x)$ 在区间 (a,x_0) 有定义，A 为常数，如果对于任意给定的正数 ε (不论它多么小)，总存在正数 $\delta(< x_0 - a)$，使得对适合不等式 $0 < x_0 - x < \delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon,$$

那末常数 A 就叫函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to x_0 - 0)$$

$$或 f(x_0 - 0) = A$$

注意到

$$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

$$=\{x \mid 0<x-x_0<\delta\}\cup\{x \mid -\delta<x-x_0<0\}$$

定理2 函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时以 A 为极限当且仅当在 $x\to x_0$ 函数 $f(x)$ 的左、右极限存在并都等于 A,即

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=A.$$

例11 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

证 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$

左右极限存在但不相等,$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

例12 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>2, \\ x+a & x<2, \end{cases}$ 确定常数 a 使得 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 存在.

解 $x=2$ 是分段函数 $f(x)$ 的分段点，所以

$$\lim_{x\to 2} f(x)=A \Leftrightarrow f(2-0)=f(2+0)=A$$

由于

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+1)=5,$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x+a)=2+a$$

所以 $5=2+a$，即 $a=3$.

3 函数极限的统一定义

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, 在自变量的变化过程中存在一个时刻，自此以后，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

见下表

过 程	$n\to\infty$	$x\to\infty$	$x\to+\infty$	$x\to-\infty$
时 刻	N			
从此时刻以后	$n>N$	$\lvert x\rvert>N$	$x>N$	$x<-N$
$f(x)$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$			

过 程	$x\to x_0$	$x\to x_0^+$	$x\to x_0^-$
时 刻	δ		
从此时刻以后	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$0<x-x_0<\delta$	$-\delta<x-x_0<0$
$f(x)$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$		

4　函数极限与数列极限的关系

定理3　函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ $(x_0^+或x_0^-)$ 以 A 为极限的充要条件是：对于任意一个收敛于 x_0 的数列 x_n 且 $x_n \neq (> 或 <) x_0 (n = 1,2,\cdots)$，其对应的数列 $f(x_n)$，有

任取问题

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

证　先证必要性. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，根据极限的定义

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$，$\therefore$ 对上述 $\delta > 0, \exists N > 0$，使当 $n > N$ 时，恒有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$. 从而有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$，

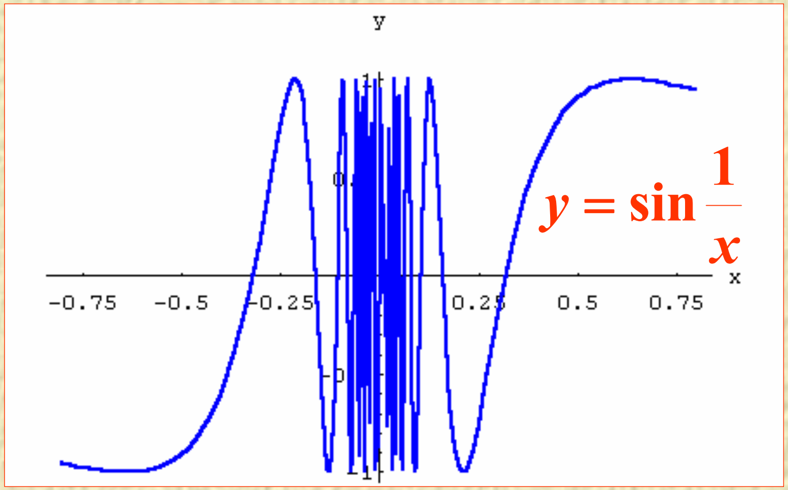
故 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = A.$

定理的充分性证略.

例13 证明 $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

证 取 $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n\pi} \right\}$,

$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, 且 $x_n \neq 0$;



取 $\{x_n'\} = \left\{ \frac{1}{\frac{4n+1}{2}\pi} \right\}$, $\lim_{n \to \infty} x_n' = 0$, 且 $x_n' \neq 0$;

三、函数极限的性质

定理4（唯一性）　若 $\lim f(x)$ 存在，则极限唯一.

证　以 $x\to-\infty$ 为例. 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$,

且 $a\neq b$, 不妨设 $b>a$, 则对 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}$, 存在 $X_1, X_2>0$,

当 $x<-X_1$ 时, 恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$, 即

$$\frac{3a-b}{2}<f(x)<\frac{b+a}{2}$$

当 $x<-X_2$ 时, 恒有 $|f(x)-b|<\varepsilon$, 即

$$\frac{a+b}{2}<f(x)<\frac{3b-a}{2}$$

取 $X=\max\{X_1,X_2\}$, 当 $x<-X$ 时,恒有

$$\frac{a+b}{2}<f(x)<\frac{a+b}{2},$$

矛盾,矛盾表明 $a=b$.

定理5(有界性)　若在某个过程下, $f(x)$有极限, 则存在 一个时刻, 在此时刻以后 $f(x)$ 有界.

证　以 $x\to x_0$ 为例证明. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则对 $\varepsilon=1$, 存在 $\delta>0$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 即

$$A-1<f(x)<A+1$$

取 $M=|A|+1$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)|<M$.

所以当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $f(x)$有界.

在自变量的某个趋向过程下,如果存在一个时刻,使得自此以后,函数 $f(x)$ 有界, 则称函数$f(x)$ 为在这个趋向过程下的有界变量.

定理6(保号性) 如果 $\lim f(x)=A$,且 $A>0(<0)$, 则一定存在一个时刻, 自此以后恒有 $f(x)>0(<0)$.

证　以 $x\to x_0+0$ 为例证明. 由于 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$, 且 $A>0$, 所以对 $\varepsilon=A$, 存在 $\delta>0$, 使当 $0<x-x_0<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon=A$,即恒有 $f(x)>0$.

推论　如果 $\lim f(x)=A$, 且存在一个时刻, 自此以后恒有 $f(x)>0(<0)$,则必有 $A\geq 0(\leq 0)$.