第9讲 微分方程

9.1 微分方程的基本概念

来看一个最简单的微分方程：

$$y' = x$$

则可以得到：

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

这就是微分方程的解。需要注意到三个方面：

（1）微分方程最大的特点就是方程中含有导数项；

（2）求解微分方程，并非是要给y, x以确定的数值，而是解出y, x之间的关系式；

（3）微分方程的解并非是唯一的，需要加入一个未定参数C.

如果微分方程改变条件：

$$y' = x \ \ (x = 0, y = 1)$$

得到对应的解就变成唯一的：

$$y = \frac{x^2}{2} + 1$$

由此，我们管“$x = 0, y = 1$”叫做这个微分方程的定解条件，对应的解分为“通解”和“特解”，顾名思义，就是针对微分方程本身的通用的解，以及针对特定条件所确定的唯一的解：

$$\text{通解：} y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{特解：} y = \frac{x^2}{2} + 1$$

一辆小车从原地静止开始加速，其速度随时间的变化规律是$v = 4t$，请写出其位移x关于时间的表达式。

根据题目可列出下列方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4t \ (t = 0, x = 0)$$

解得该方程为：

$$x = 2t^2$$

再看这样一个微分方程：

$$y'' = x$$

也不难得出：

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1$$

进而：

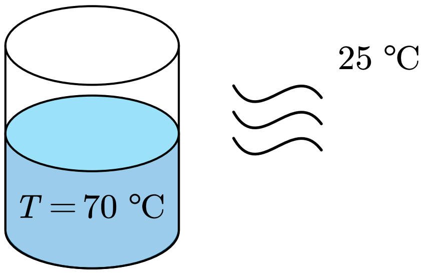
$$y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

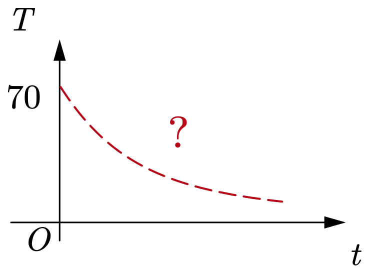
这里的方程与上述微分方程不同的是，出现了二阶导数。微分方程是有“阶数”之分的，方程中出现的最高阶导数为 2 阶，则被称之为二阶微分方程。我们的主要研究对象就是一阶和二阶的微分方程。

而且二阶微分方程求得的通解中，会有两个未定参数C_1和C_2. 同理，三阶微分方程就会有 3 个未定参数。

微分方程可以帮助我们解决什么问题：

（1）水温冷却：



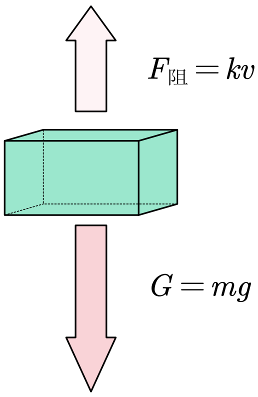


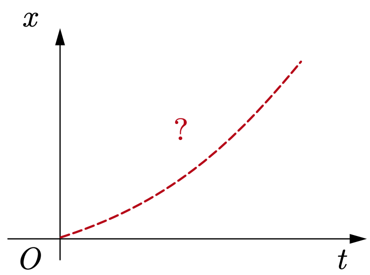
已知物体传热的速率与温差成正比例。假设室温为 25℃，一杯水在$t = 0$时温度$T = 70$°C，那么则可以建立下面的方程：

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - 25)$$

假设其中的$k = 0.2$，那么请写出水温随时间变化的函数关系。

（2）阻尼运动：



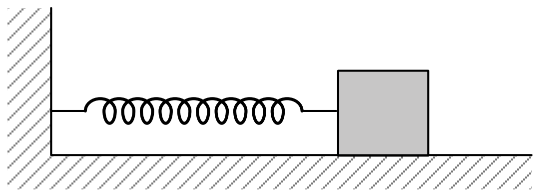


物体在空中下落时，主要受到重力和空气阻力的作用，重力大小为mg，假设空气阻力大小与速度成正比例$f_{阻} = -kv$，则可以写出下列微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = g - \frac{k}{m}v = g - \frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

那么如何写出物体的下落高度与时间的关系呢？

（3）弹簧的简谐运动：



一个质量为m的物块在弹簧一端，弹簧另一端固定在壁面上，弹簧质量不计，不考虑摩擦力，弹性系数为k，那么物体的位移随时间的方程，可以写为下列微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x$$

那么物块的位移是怎样变化的？

9.2 一阶微分方程

最为直接的求解方法：分离变量法

求解微分方程：$y' = 2xy$.

解：第一步：将题目中的y'写为$\frac{dy}{dx}$：

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

第二步：将变量y、x分离到等号两侧：

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

第三步：左右两侧求不定积分：

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 2xdx$$

$$\ln|y| = x^2 + C，化简整理：y = Ce^{x^2}$$

注意：将解写成$\ln y = x^2 + C$、$y = e^c e^{x^2}$都不正确，都不符合原有的y的取值范围。

对于 $y' = p(x) \cdot y$ 这种类型的微分方程，基于分离变量法，它的通解表达式为：

$$\boxed{y = Ce^{\int p(x)dx}}$$

已知曲线$y = f(x)$过点$(0, -\frac{1}{2})$，且其上任意一点(x, y)的切线斜率为$x \cdot \ln(1 + x^2)$，求曲线方程。

$$dy = x\ln(1 + x^2)dx$$

$$y = \int x\ln(1 + x^2)dx = \frac{1}{2}\int \ln(1 + x^2)d(1 + x^2)$$

$$y = \frac{1}{2}(1 + x^2)[\ln(1 + x^2) - 1] + C$$

根据$x = 0, y = -\frac{1}{2}$代入可得：$C = 0$，于是：

$$y = \frac{1}{2}(1 + x^2)[\ln(1 + x^2) - 1]$$

连续函数$f(x)$满足关系式$f(x) = \int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt + \ln 2$，请写出$f(x)$的表达式。

对题目给出的关系式，左右两侧对x求导数：

$$f'(x) = 2f(x)$$

$\frac{dy}{dx} = 2y$

变上限求导定理

$\frac{1}{2y}dy = dx$

$\ln|y| = 2x$

$y = Ce^{2x}$

解得：

$$f(x) = Ce^{2x}$$

由于$f(0) = \ln 2$，则$C = \ln 2$，所以

$$f(x) = e^{2x}\ln 2$$

设$f(x)$为定义在$[0, +\infty)$上的单调连续的凹函数，曲线$C: y = f(x)$通过点$(0,0)$及$(1,1)$，在曲线C上任取一点$M(x, y)$，设点$N(x, 0)$，点$O(0,0)$，曲线C与直线 MO 围成的图形的面积记为S_1，三角形 OMN 的面积为S_2，已知S_1是S_2的$\frac{1}{5}$，试求$f(x)$表达式，以及曲线C与直线 $y=x$ 围成的图形绕 x 旋转一周的体积。

列写方程：$\frac{xy}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，两侧求导为$\frac{2}{5}(xy'+y)=y$，即$y'=\frac{3}{2x}y$

解该微分方程，得$y=Cx^{\frac{3}{2}}$，代入$(1,1)$可知$y=x^{\frac{3}{2}}$

旋转一周得体积为：$V=\int_0^1(\pi x^2-\pi x^3)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{12}$

对于$y'+p(x)y=q(x)$的方程，则对应的通解为：

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\mathrm{d}x+C\right]$$

推理过程：原方程左右两侧同乘$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$

$$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}y'+\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}p(x)y=q(x)$$

$$\left[y\cdot\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right]'=\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)$$

$$y\cdot\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}=\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\mathrm{d}x+C$$

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\mathrm{d}x+C\right]$$

求解微分方程$y'+y\tan x=\cos x$

$p(x)=\tan x, q(x)=\cos x$，基于线性微分方程的公式可知：

$$y=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x+C\right]=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x+C\right)=\cos x\,(x+C)$$

求解微分方程：$(x-2xy-y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2=0$

此方程并非是关于y的线性方程，但是我们通过观察发现式中的x是线性的，则可以考虑把x当作因变量，把y当作自变量，进行转化：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1-2y}{y^2}x=1$$

进而：

$$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{1-2y}{y^2}\mathrm{d}y}\left[\int \mathrm{e}^{\int\frac{1-2y}{y^2}\mathrm{d}y}\cdot 1\mathrm{d}y+C\right]=y^2+Cy^2\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}$$

伯努利方程（考研数学仅“数学一”涉及该内容）：

$$y'+p(x)y=q(x)y^n$$

设$u=y^{1-n}$，则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$y'=\frac{y^n}{1-n}u'$，代入可得：

$$u'+(1-n)p(x)u=(1-n)q(x)$$

求解微分方程$y'+\frac{1}{x}y=\frac{y^2}{x^2}$，得到满足$y|_{x=1}=1$的特解

该方程符合伯努利方程特征，故设$u=y^{-1}$，于是$u'=-y^{-2}\cdot y', y'=-y^2\cdot u'=\frac{-u'}{u^2}$

$$\frac{-u'}{u^2}+\frac{1}{ux}=\frac{1}{u^2x^2}$$

$$u'-\frac{1}{x}u=-\frac{1}{x^2}$$

$$u=e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[\int e^{\int -\frac{1}{x}dx}\cdot -\frac{1}{x^2}dx+C\right]$$

$$u=x\left(\frac{1}{2x^2}+C\right)=\frac{1}{2x}+Cx$$

$$y=\frac{2x}{1+2Cx^2}$$

根据定解条件，可知 $1=\frac{2}{1+2C}$，因而$C=\frac{1}{2}$，所以特解为$y=\frac{2x}{1+x^2}$

变量替换法一：方程中除了$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$，所有其他的变量都可以化为“$\frac{y}{x}$”的形式

求解微分方程：$(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$.

解：左右除以x^2，将等式中的每一项化为关于$\left(\frac{y}{x}\right)$的表达式

$$\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]\mathrm{d}x-\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0$$

将$y=ux,\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$代入方程中，再分离变量求解：

$$(1+u^2)\mathrm{d}x-u(u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u)=0$$

$$\mathrm{d}x-ux\mathrm{d}u=0$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=u\mathrm{d}u$$

$$\frac{u^2}{2}=\ln|x|+C$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2=\ln|x|+C$$

解微分方程 $y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$.

答案：令$u=\frac{y}{x}$,则$\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$,代入原方程得$\frac{u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\tan u$

分离变量$\frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分得$\ln|\sin u|=\ln|x|+\ln|C|$，即$\sin u=Cx$

故原方程的通解为$\sin\frac{y}{x}=Cx$

变量替换法二：将$(ax+by+c)$替换为u

解微分方程 $\mathrm{d}y=(3x+2y+1)^2\mathrm{d}x$

令$u=3x+2y+1$，则有$\mathrm{d}u=3\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}u-3\mathrm{d}x}{2}$代入：

$$\frac{\mathrm{d}u-3\mathrm{d}x}{2}=u^2\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{2u^2+3}=\mathrm{d}x$$

左右求不定积分可得：$\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{3}u\right)=x+C$

$$\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left[\frac{\sqrt{6}}{3}(3x+2y+1)\right]=x+C$$

一阶微分方程方法总结：

方程名称	方程特征	求解方法
一阶线性齐次微分方程	$y' = p(x) \cdot y$	$y = Ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}$
一阶线性非齐次微分方程	$y' + p(x)y = q(x)$	$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} \cdot q(x)\mathrm{d}x + C\right]$
伯努利方程	$y' + p(x)y = q(x)y^n$	$u = y^{1-n}, y' = \dfrac{y^n}{1-n}u'$
变量代换一：$\boldsymbol{u = \frac{y}{x}}$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\dfrac{y}{x})$	$y = ux, \mathrm{d}y = u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u$
变量代换二：$\boldsymbol{u = ax + by + c}$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c)$	$u = ax + by + c, \mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}u - a\mathrm{d}x}{b}$

9.3 二阶微分方程

首要考虑的思路是，能否将二阶方程通过变量代换的方法，将其转化为一阶方程。可降阶的二阶微分方程有如下两类（考研内容中仅数学一、数学二要求掌握这部分）：

（1）方程中没有y，表达式为$y'' = f(x, y')$，则设$y' = p$，$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

（2）方程中没有x，表达式为$y'' = f(y, y')$，则设$y' = p$，$y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

求解微分方程：$(1 + x^2)y'' = 2xy'$

由于方程中没有y，表达式为$y'' = f(x, y')$，则设$y'' = f(x, y')$，$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，代入方程中得：

$$(1 + x^2)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 2xp$$

通过分离变量方法求解：

$\dfrac{\mathrm{d}p}{p} = \dfrac{2x}{1 + x^2}\mathrm{d}x, \qquad \ln|p| = \ln(1 + x^2) + C$

$|p| = (1 + x^2) \cdot \mathrm{e}^C, \qquad p = C_1(1 + x^2)$

将$p = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$代入得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1(1 + x^2)$$

分离变量求解：

$$\mathrm{d}y = C_1(1 + x^2)\mathrm{d}x, \qquad y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$$

求解微分方程：$2y \cdot y'' + (y')^2 = 0(y > 0)$

由于方程中没有x，表达式为$y'' = f(y, y')$，则设$y' = p$，$y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程得：

$$2y \cdot p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 0$$

此时为关于p、y的一阶微分方程，通过分离变量方法求解：

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mathrm{d}y}{2y}, \qquad \ln|p| = -\frac{1}{2}\ln y + C = \ln\frac{1}{\sqrt{y}} + C$$

$$|p| = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \mathrm{e}^{C}，p = \pm\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \mathrm{e}^{C} = C_1\frac{1}{\sqrt{y}}$$

又因为$p = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入得：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1\frac{1}{\sqrt{y}}$，分离变量求解：

$$\sqrt{y}\mathrm{d}y = C_1\mathrm{d}x$$

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1x + C_2$$

$$y = \left(\frac{3}{2}C_1x + \frac{3}{2}C_2\right)^{\frac{2}{3}}$$

二阶常系数线性齐次微分方程：形式为 $y'' + py' + qy = 0$，p、q皆为常数。

求解时，需要求解一个特征方程：$r^2 + pr + q = 0$

特征方程$r^2 + pr + q = 0$根的存在情况	微分方程$y'' + py' + qy = 0$的解
有两个不相等的实根r_1、r_2	$y = C_1\mathrm{e}^{r_1x} + C_2\mathrm{e}^{r_2x}$
两个相等的实根$r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{r_1x}$
两个复数根$r_1 = a + bi$，$r_2 = a - bi$	$y = \mathrm{e}^{ax}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

求解微分方程：$y'' - 4y' + 4y = 0$

该方程中同样没有x，也可以通过设$y' = p$，$y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$的流程实现降阶为一阶微分方程求解。

但是我们观察方程属于$y'' + py' + qy = 0$的形式，可以使用特征方程求解：

特征方程：$r^2 - 4r + 4 = 0$，$r_1 = r_2 = 2$

于是微分方程的解为：$y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{r_1x} = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{2x}$

求解微分方程：$y'' - 2y' + 5y = 0$

特征方程：$r^2 - 2r + 5 = 0$，$r_1 = 1 + 2i$，$r_2 = 1 - 2i$

于是微分方程的解为：$y = \mathrm{e}^{x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$

对于常系数线性齐次方程，这里的“线性”和“齐次”都是针对y而言的，做一下深入的了解：

- **线性**，是指方程中的y, y', y''这些都是以 1 次的形式出现的，没有$y^2, \sin(y), \sqrt{y'}$这种非线性项；
- **齐次**，是指方程中每一项（“0”除外）都是关于y的“1 次”，比如$a(x)y + b(x)y' + c(x)y'' = 0$；
- **常系数**，指y, y', y''前面的系数项中仅为常数，而不是x的表达式。

判断下面的微分方程的阶数、是否为线性，如果是线性方程，判断是否齐次

(1) $y' + (\sin x)y = 0$ （一阶线性齐次方程）

(2) $y'' + \ln y = 0$ （二阶非线性方程）

(3) $(y')^2 + y^2 = 0$ （一阶非线性方程）

(4) $y' + 2xy + x = 0$ （一阶线性非齐次方程）

对于线性齐次方程，如果$y = y_1$和$y = y_2$分别是方程的解，则：

（1）$y = (y_1 + y_2)$也是方程的解；

（2）$y = Cy_1$也是方程的解，其中C为常数；

（3）$y=(ay_1+by_2)$ 也是方程的解。

以$y''-2y'+5y=0$为例，其通解为$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$

验证 1： 根据通解公式，可知$y_1=\mathrm{e}^x(2\cos2x+3\sin2x)$和$y_2=\mathrm{e}^x(5\cos2x+6\sin2x)$都是该方程的解

而$y_3=(y_1+y_2)=\mathrm{e}^x(7\cos2x+9\sin2x)$也符合通解的格式，也是该方程的解。同理也可验证后两条。

验证 2： 已知$y=y_1$和$y=y_2$是方程的解，所以有：

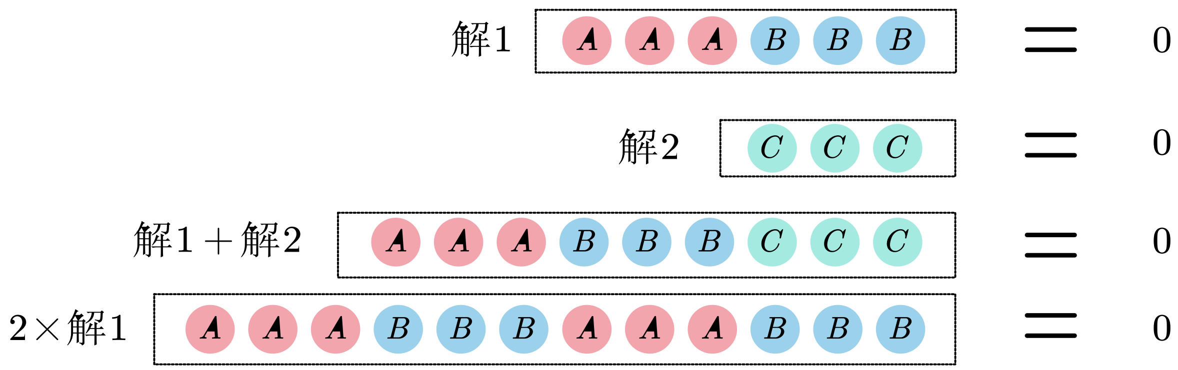
$$y_1{}''-2y_1{}'+5y_1=0$$
$$y_2{}''-2y_2{}'+5y_2=0$$

将$y=(y_1+y_2)$代入方程，

$$(y_1+y_2)''-2(y_1+y_2)'+5(y_1+y_2)=(y_1''-2y_1'+5y_1)+(y_2''-2y_2'+5y_2)=0$$

所以(y_1+y_2)也是该齐次方程的解。

“消消乐”的原理：



想想看，如果不是线性齐次方程，是否还具有这样的特点呢？答案是否定的。

比如非线性方程 $(y')^2+y^2=0$，假设$y=y_1$和$y=y_2$是方程的解，而$y=(y_1+y_2)$不是原方程的解：

$$(y_1'+y_2')^2+(y_1+y_2)^2=(y_1')^2+y_1^2+(y_2')^2+y_2^2+2y_1'y_2'+2y_1y_2=2y_1'y_2'+2y_1y_2\neq0$$

如果是非齐次方程 $y'+2xy+x=0$，假设$y=y_1$和$y=y_2$是方程的解，而$y=(y_1+y_2)$不是原方程的解：

$$y_1'+y_2'+2x(y_1+y_2)+x=y_1'+2xy_1+x+y_2'+2xy_2+x-x=-x\neq0$$

二阶线性**非齐次**微分方程：形式为 $y''+py'+qy=\boldsymbol{f(x)}$，$p$、$q$皆为常数

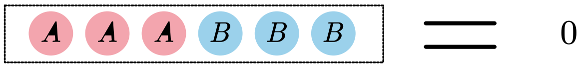
其通解分为两部分：**齐次方程的通解+非齐次方程的特解**

设$y=y_1$是方程$y''+py'+qy=\boldsymbol{0}$的解；

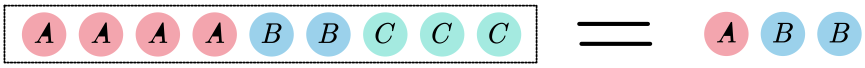
设$y=y_2$是方程$y''+py'+qy=\boldsymbol{f(x)}$的解；

那么$y=(y_1+y_2)$是上述哪个方程的解呢？显然是第二个方程的解。

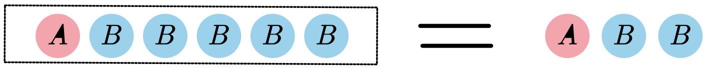
齐次方程的解



非齐次方程的解（1）



非齐次方程的解（2）



对于线性齐次方程的解与线性非齐次方程的解，可以推理下列关系：

$$\text{齐次解} + \text{非齐次解} = \text{非齐次解}$$

$$\text{非齐次解} - \text{非齐次解} = \text{齐次解}$$

$$a \times \text{非齐次解} + (1-a) \times \text{非齐次解} = \text{非齐次解}$$

关于二阶线性非齐次方程$y'' + py' + qy = \boldsymbol{f(x)}$的特解，需要分两种情况来讨论：

（1）$\boldsymbol{f(x)} = P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$，特解形式为$y^* = x^k Q_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$，其中

- $P_n(x)$为x的n阶多项式（$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$，常数项就当作 0 阶多项式），$Q_n(x)$也是一样；
- k的取值情况：如果α不是特征根，$k=0$；如果α是单特征根，$k=1$；如果α是双特征根，$k=2$.

（2）$\boldsymbol{f(x)} = [P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]\mathrm{e}^{\alpha x}$，特解形式为$y^* = x^k[Q_{l1}(x)\cos\beta x + Q_{l2}(x)\sin\beta x]\mathrm{e}^{\alpha x}$

- $P_m(x), P_n(x)$分别为x的m, n阶多项式，设$l = \max\{m, n\}$，$Q_{l1}(x), Q_{l2}(x)$均为x的l阶多项式；
- k的取值情况：如果$\alpha \pm \beta i$不是特征根，$k=0$；如果$\alpha \pm \beta i$是特征根，$k=1$.

求微分方程$y'' - 4y = \mathrm{e}^{2x}$的通解

首先求对应的齐次方程$y'' - 4y = 0$的解，对应的特征方程为$r^2 - 4 = 0$，$r_1 = 2, r_2 = -2$，于是齐次方程通解为：

$$Y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}$$

接下来求特解，根据$f(x) = \mathrm{e}^{2x} = (1)\cdot\mathrm{e}^{2x}$，特构造特解为：

$$y^* = Ax\mathrm{e}^{2x}$$

代回方程可得：

$$(Ax\mathrm{e}^{2x})'' - 4(Ax\mathrm{e}^{2x}) = \mathrm{e}^{2x}$$

$$A\mathrm{e}^{2x}(4x + 4 - 4x) = \mathrm{e}^{2x}, A = \frac{1}{4}$$

所以特解为

$$y^* = \frac{1}{4}x\mathrm{e}^{2x}$$

方程的通解为：

$$y = Y + y^* = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{4}x\mathrm{e}^{2x}$$

求微分方程$y'' + y = \sin x$的通解

首先求对应的齐次方程$y''+y=0$的解，对应的特征方程为$r^2+1=0$，$r_{1,2}=\pm i$，于是齐次方程通解为：

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

接下来求特解，根据$f(x)=\sin x=\mathrm{e}^{0\cdot x}\sin x$，特构造特解为：

$$y^*=x(A\sin x+B\cos x)$$

代回方程可得：

$$[x(A\sin x+B\cos x)]''+x(A\sin x+B\cos x)=\sin x$$
$$-2B\sin x+2A\cos x=\sin x$$
$$A=0,B=-\frac{1}{2}$$

所以特解为

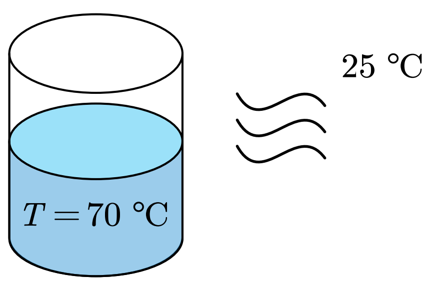
$$y^*=-\frac{1}{2}x\cos x$$

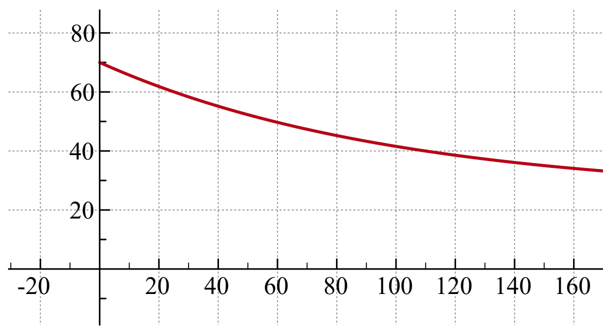
方程的通解为：

$$y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$$

9.4 实际问题求解

（1）水温冷却：





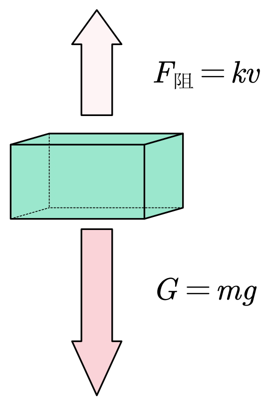
假设室温为25℃，一杯水在$t=0$时温度$T=70$°C，建立方程：$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-25)$

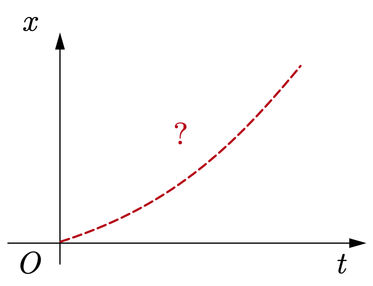
令$k=0.01$，求解微分方程即可得水温随时间变化的函数关系：

$$T=25+C\mathrm{e}^{-0.01t}$$

根据$t=0$时$T=70$，可确定$C=45$，所以$T=25+45\mathrm{e}^{-0.01t}$

（2）阻尼运动：





物体在空中下落时，主要受到重力和空气阻力的作用，重力大小为mg，假设空气阻力大小与速度成

正比例$f_{阻} = -kv$，则可以写出下列微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = g - \frac{k}{m}v = g - \frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

也可通过降阶的方式，记$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v' = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，即：

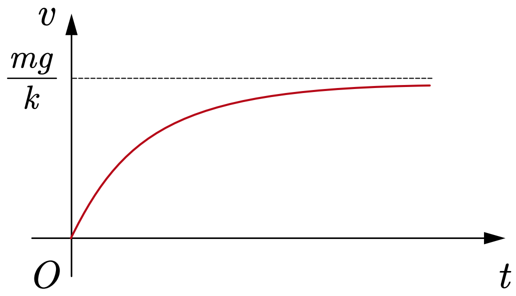
$$v' + \frac{k}{m}v = g$$

分离变量法求得：

$$v = \frac{m}{k}(g - C\mathrm{e}^{-\frac{mt}{k}})$$

根据$t = 0$时$v = 0$，确定参数$C = g$，所以：

$$v = \frac{mg}{k}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}})$$



该结果可推演出一些规律：

① 如果$k \to 0$，则$v \to gt$，当空气阻力无限减小，则简化为自由落体；

② 如果$t \to +\infty$，则$v \to \frac{mg}{k}$，存在空气阻力时有极限速度。

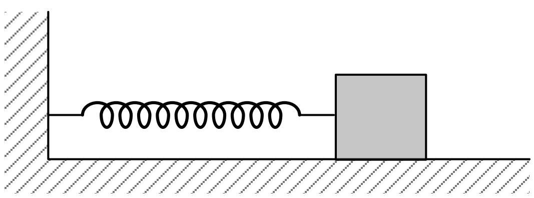
还可以继续求原函数，得到下落高度随时间的变化规律

$$x = \frac{mg}{k}(t + \frac{m}{k}\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}} + C)$$

根据$t = 0$时$x = 0$，确定参数$C = -\frac{m}{k}$，即

$$x = \frac{mg}{k}(t + \frac{m}{k}\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}} - \frac{m}{k})$$

（3）弹簧的简谐运动：



一个质量为m的物块在弹簧一端，弹簧另一端固定在壁面上，弹簧质量不计，不考虑摩擦力，弹性系数为k，以平衡位置为原点，物体的位移x随时间的方程可以写为下列微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x$$

利用二阶线性齐次微分方程的格式求解：

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0, r^2 + \frac{k}{m} = 0, r_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$$

$$x = \mathrm{e}^{0t}\left(C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t = A\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta)$$

由此可以看出，物块是呈现一个正弦或余弦形式的往复周期运动；并且，当弹簧的弹性系数k以及物块质量m确定时，往复运动的频率、周期已经确定。A则为振幅，θ为相位，需要根据具体情形进行判断：

（1）$k = 4, m = 1$，将物块移动至距离平衡位置 2m 处，由静止状态开始运动：

$$x = A\cos(\sqrt{\frac{4}{1}}t + \theta) = A\cos(2t + \theta)$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2A\sin(2t + \theta)$$

根据初始条件，可知$t = 0$时，$x = 2, v = 0$

$$A\cos(\theta) = 2$$
$$-2A\sin(\theta) = 0$$

可得$A = 2, \theta = 0$

$$x = 2\cos(2t)$$

（2）$k = 18, m = 2$，物块从平衡位置出发，初始速度为 4m/s：

$$x = A\cos(3t + \theta)$$
$$v = -3A\sin(3t + \theta)$$

根据初始条件，可知$t = 0$时，$x = 0, v = 4$

$$A\cos(\theta) = 0$$
$$-3A\sin(\theta) = 4$$

可得$A = -\frac{4}{3}, \theta = \frac{\pi}{2}$

$$x = -\frac{4}{3}\cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3}\sin(3t)$$