第七节　无穷小的比较

一　无穷小的比较

二　等价无穷小的替换

一 无穷小的比较

例如，当$x \to 0$时，$x, x^2, \sin x, x^2 \sin\frac{1}{x}$ 都是无穷小.

观察各极限

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = 0,$ x^2比x要快得多；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$ $\sin x$与x大致相同；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在. 不可比.

极限不同，反映了趋向于零的“快慢”程度不同.

定义1　设α,β是同一过程中的两个无穷小,且$\alpha \neq 0$.

(1) 如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$;

(2) 如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称$\beta$是比$\alpha$的低阶无穷小;

(3) 如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C(C\neq 0)$,则称$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小;

特殊地 如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小;

记作 $\alpha\sim\beta$;

常用等价无穷小： 当$x \to 0$时，

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\\ &\arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x,\\ &e^x - 1 \sim x, \quad (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x.\end{aligned}}$$

定义2 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = C(C \neq 0, k > 0)$，就说$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶的无穷小.

例1 证明：当$x \to 0$时，$4x\tan^3 x$为x的四阶无穷小.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{4x\tan^3 x}{x^4} = 4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^3 = 4,$$

故当$x \to 0$时，$4x\tan^3 x$为x的四阶无穷小.

例2　当$x \to 0$时,求$\tan x - \sin x$关于x的阶数.

解　$$\because \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2},$$

$\therefore \tan x - \sin x$为$x$的三阶无穷小.

二 等价无穷小替换

定理1 (等价无穷小替换定理)

设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$ 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则

$$\boxed{\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha'} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.}$$

证 $$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}\right)$$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

例3　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解　当$x\to 0$时, $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$, $\tan 2x \sim 2x$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x)^2}{\dfrac{1}{2}x^2}=8.$

注意　不能滥用等价无穷小代换.

对于代数和中各无穷小不能分别替换.

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

错解 当$x\to 0$时, $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$.

原式 $\times\!= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{(2x)^3} = 0.$

解 当$x\to 0$时, $\sin 2x\sim 2x$,

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3,$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$

例5　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$.

解　当 $x\to 1$时, $x^m-1=(1+(x-1))^m-1\sim m(x-1)$

$x^n-1\sim n(x-1)$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{m(x-1)}{n(x-1)}=\frac{m}{n}.$$

定理2　设α,β 是同一趋向过程下的两个无穷小，则$\alpha\sim\beta$ 的充要条件是 $\alpha-\beta=o(\beta)$或$\alpha-\beta=o(\alpha)$.

证　必要性.　设$\alpha\sim\beta$, 即$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, 所以

$$\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)=0 \quad \text{或} \lim\frac{\alpha-\beta}{\beta}=0$$

$$\therefore\quad \alpha-\beta=o(\beta).$$

同理　$\alpha - \beta = o(\alpha)$.

充分性. 设 $\alpha - \beta = o(\beta)$, 则 $\lim \dfrac{\alpha - \beta}{\beta} = 0$, 即

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1,$$

$\therefore \alpha \sim \beta$.

定理2说明

(1)　如果 $\alpha = \beta + o(\beta)$, 则 $\alpha \sim \beta$, 所以在求极限时, 分子或分母高阶无穷小的部分可以不计.

例6　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 5x - \cos x + 1}{\sin 3x}$.

解　$\because \tan 5x \sim 5x,\ \sin 3x \sim 3x,\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$

$\therefore\ 1-\cos x = o(\tan 5x),$

$\therefore\ \tan 5x - \cos x + 1 \sim \tan 5x \sim 5x$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$

(2) 如果 $\alpha \sim \beta$, 则α与β可以互为近似代替,误差是α或β的高阶无穷小.

例如, 当$|x| \ll 1$ 时, $\sin x \approx x, 1-\cos x \approx \frac{1}{2}x^2$