第二节　　数列的极限

一　数列及其简单性质

二　数列的极限

三　单调有界准则

一 数列及其简单性质

定义1 通常把定义域为全体正整数集 $\mathbf{N}^+$ 的函数

$$u_n = f(n), n \in \mathbf{N}^+$$

称为整标函数. 将整标函数的函数值 u_n, 按照正整数 n 的顺序排列起来的一串数(无穷多个)

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$$

叫做数列, 记作 $\{u_n\}$ 或数列 u_n. 数列 u_n 中的每个数叫做数列的项, u_n 叫做数列的通项或一般项.

例如 $2,4,8,\cdots,2^n,\cdots;$ $\{2^n\}$

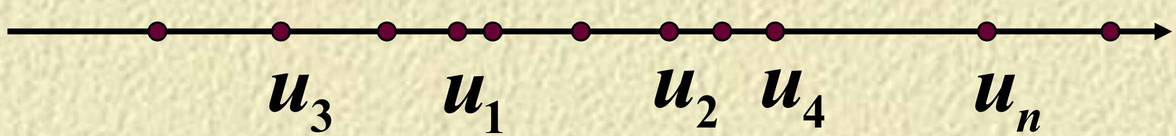
$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots; \qquad \{\frac{1}{2^n}\}$$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots; \qquad \{(-1)^{n-1}\}$$

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots; \qquad \{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\}$$

$$\sqrt{3},\sqrt{3+\sqrt{3}},\cdots,\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}},\cdots$$

注意：数列对应着数轴上一个点列. 可看作一动点在数轴上依次取 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots.$



数列的简单性质

定义2　如果数列 u_n 满足条件

$$u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_n \geq \cdots,$$

则称数列 u_n 是**单调减少**的，如果数列 u_n 满足条件

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \geq \cdots,$$

则称数列 u_n 是**单调增加**的.

单调减少数列与单调增加数列统称为**单调数列**.

定义3　如果存在正数 M, 使得对于一切 n, 恒有

$$|u_n| \leq M \quad (n \in \mathrm{N}^+),$$

则称数列 u_n 是**有界数列**.

如果存在常数 M, 使得对于一切 n, 恒有

$$u_n \leq M \quad (n \in \mathrm{N}^+),$$

则称数列 u_n 是上有界数列. 称 M 为数列 u_n 的一个上界.

如果存在常数 M, 使得对于一切 n, 恒有

$$u_n \geq M \quad (n \in \mathrm{N}^+),$$

则称数列 u_n 是下有界数列.称 M 为数列 u_n 的一个下界.

有界数列既有上界又有下界.

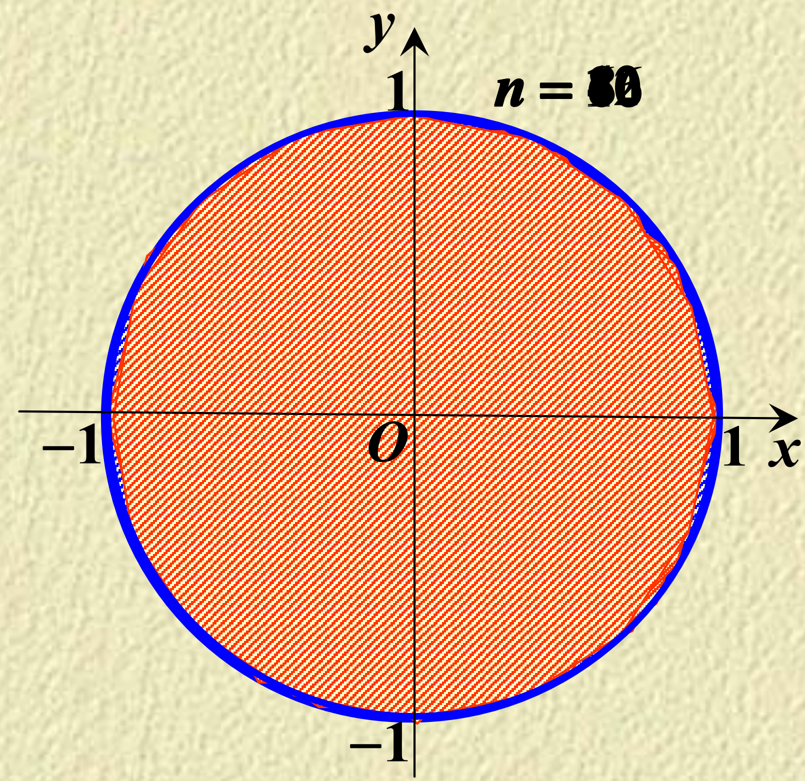
二　数列的极限

1　数列极限的引入

割圆术:

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”

——刘徽



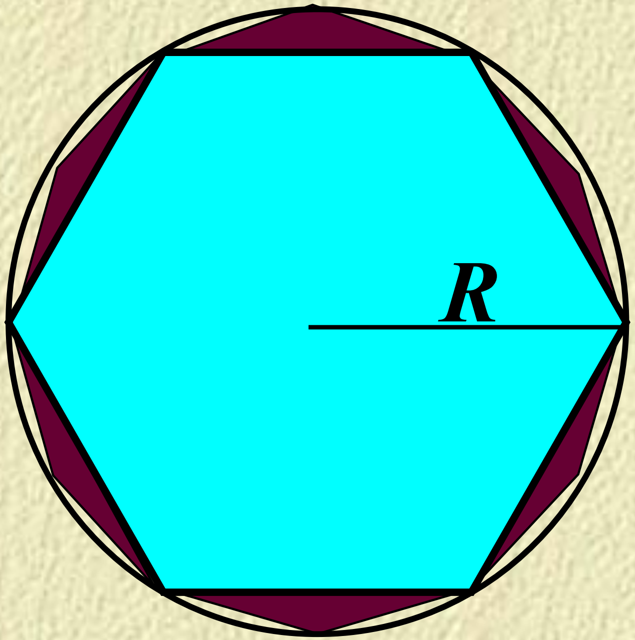
正六边形的面积 A_1

正十二边形的面积 A_2

$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$

正$6\times 2^{n-1}$形的面积 A_n

$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots \longrightarrow S$



截丈问题:

"一尺之棰，日截其半，万世不竭"

第一天截下的杖长为 $X_1 = \frac{1}{2}$;

第二天截下的杖长总和为 $X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$;

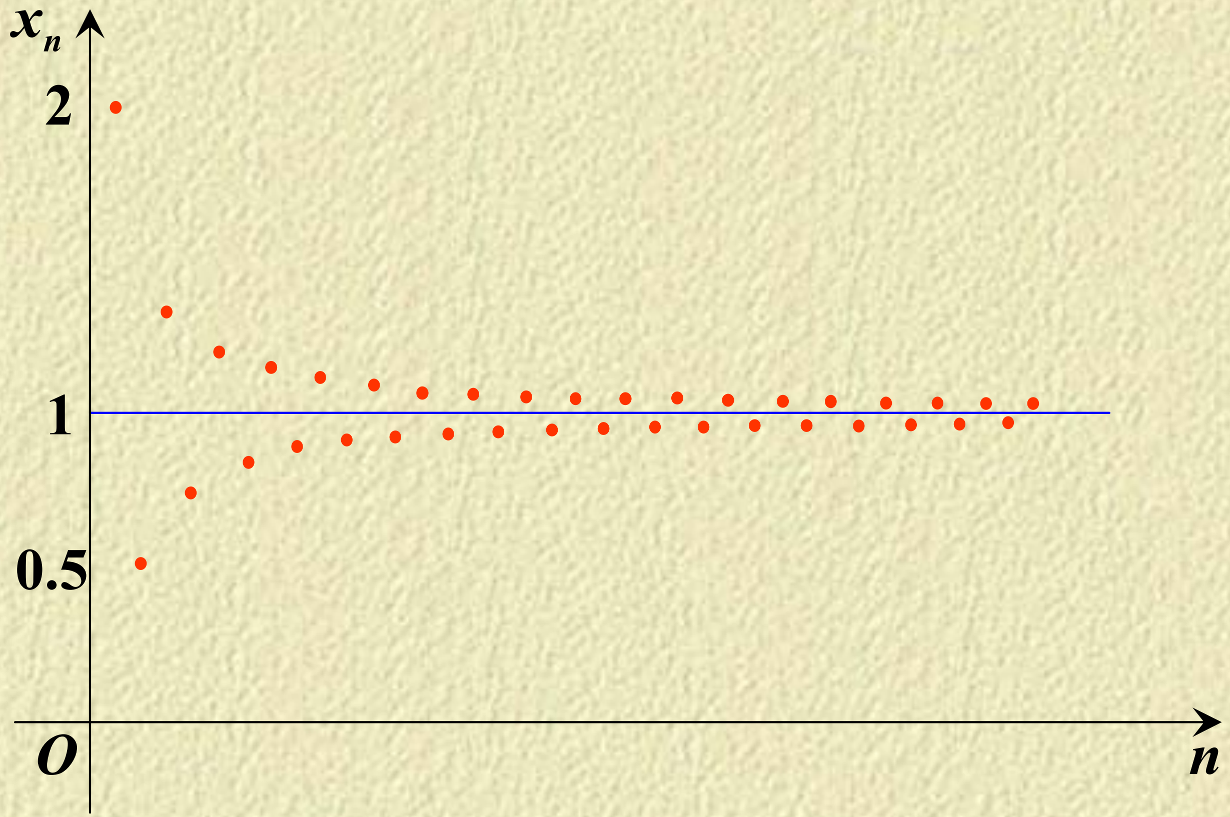
……　　　……

第n天截下的杖长总和为 $X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$$

2 数列极限的定义

观察数列 $\{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势.



问题：当 n 无限增大时，x_n 是否无限接近于某一确定的数值？如果是，如何确定？

通过上面演示实验的观察：

当 n 无限增大时，$x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1.

问题："无限接近"意味着什么？如何用数学语言刻划它.

$$\because \quad |x_n - 1| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

给定 $\dfrac{1}{100}$,由 $\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{100}$,只要 $n>100$时，有 $|x_n-1|<\dfrac{1}{100}$,

给定 $\dfrac{1}{1000}$,　只要 $n>1000$时，　有 $|x_n-1|<\dfrac{1}{1000}$,

给定 $\dfrac{1}{10000}$, 只要 $n>10000$时，有 $|x_n-1|<\dfrac{1}{10000}$,

给定 $\varepsilon>0$, 只要 $n>N(=[\dfrac{1}{\varepsilon}])$时，有 $|x_n-1|<\varepsilon$成立.

定义4 如果对于任意给定的正数 ε (不论它多么小),总存在正整数 N,使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n,不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 都成立,那末就称常数 a 是数列 x_n 的**极限**,或者称数列 x_n **收敛**于 a,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

或

$$x_n \to a \quad (n \to \infty).$$

如果数列没有极限,就说数列是**发散**的.

注意: 1.不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 刻划了 x_n 与 a 的无限接近;

2.N 与任意给定的正数 ε 有关.

$\varepsilon - N$定义：　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使$n > N$时, 恒有$|x_n - a| < \varepsilon.$

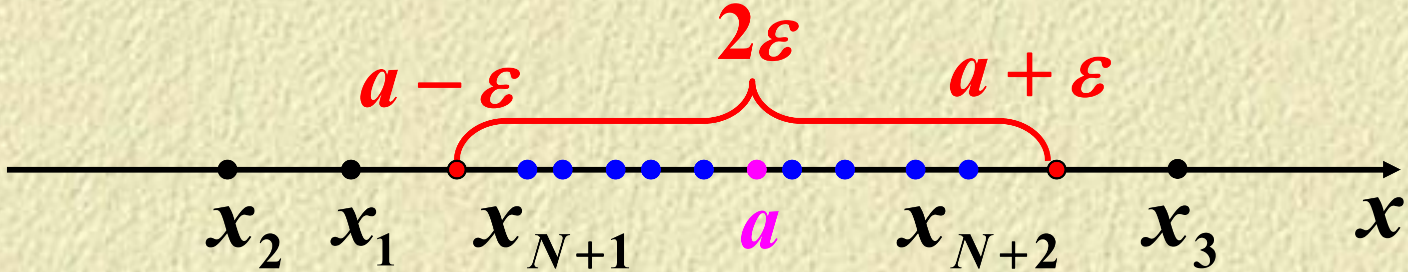
其中　$\forall$：每一个或任给的；　$\exists$：至少有一个或存在.

说明 (1) ε 是任意给定正数,由于用来刻划x_n和a的距离充分小，因此可以看成充分小的一个数.

(2) 要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 即对$\forall\varepsilon > 0$, 去找$N > 0$,使得$\cdots$

(3) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 即已知对每个确定$\varepsilon > 0$,存在$N\cdots$

2　数列极限的几何解释



当$n > N$时, 所有的点 x_n都落在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内,只有有限个 (至多只有N个) 落在其外.

注意：数列极限的定义未给出求极限的方法.

例1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

分析 $|u_n-1|=\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$

任给 $\varepsilon>0$，要 $|x_n-1|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，或 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，所以，

取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$，

证 $\forall\varepsilon>0$（不妨设 $\varepsilon<1$），取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，

有 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，就有 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

例2 设$x_n \equiv C$(C为常数)，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

证 任给 $\varepsilon > 0$，对于一切自然数 n，

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon \text{成立},$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

说明: 常数列的极限等于同一常数.

小结: 用定义证数列极限存在时，关键是任意给定$\varepsilon > 0$，寻找N，但不必要求最小的N.

例3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

证　若 $q = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$;

若 $0 < |q| < 1$, 任给 $\varepsilon > 0$(不妨设 $\varepsilon < 1$), 取 $N = [\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}]$,

则当 $n > N$ 时，　有 $n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$,　　即 $n\ln|q| < \ln\varepsilon$,

就有 $|q^n - 0| < \varepsilon$,

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

例4　证明　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{2n^2-1}=\dfrac{1}{2}$

分析 $|u_n-\dfrac{1}{2}|=\dfrac{2n-1}{2(2n^2-1)}\le\dfrac{2n-1}{2(2n^2-n)}\le\dfrac{1}{2n}\le\dfrac{1}{n}$

要使 $|u_n-\dfrac{1}{2}|<\varepsilon$，只须使 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，因此取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$

证　$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{n^2-n}{2n^2-1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{2n-1}{2(2n^2-1)}\le\frac{1}{n}<\varepsilon$$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2-1}=\frac{1}{2}$$

例5 设$x_n > 0$,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,求证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

证 $\forall \varepsilon > 0$, $\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

$\therefore \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时,恒有 $|x_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$,

当$n > N$时,恒有

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{a}} = \varepsilon$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$

3 收敛数列的性质

定理1（极限的唯一性） 每个收敛的数列只有一个极限.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$，又 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = b$，不妨设 $b > a$，由定义，

对 $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0, \exists N_1, N_2$. 使得当 $n > N_1$ 时恒有 $|u_n - a| < \varepsilon$；

当 $n > N_2$ 时恒有 $|u_n - b| < \varepsilon$；取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，

则当 $n > N$ 时有

$$|u_n - a| < \frac{b-a}{2}, \quad 即 \frac{3a-b}{2} < u_n < \frac{a+b}{2}$$

$$|u_n - b| < \frac{b-a}{2}, \quad 即 \frac{a+b}{2} < u_n < \frac{3b-a}{2}$$

矛盾，故收敛数列极限唯一.

定理2 (收敛数列的有界性) 收敛的数列必定有界.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, 由定义, 取 $\varepsilon = 1$, 则 $\exists N$, 使得当

$n > N$ 时恒有 $|u_n - a| < 1$, 即有

$$a - 1 < u_n < a + 1.$$

记 $M = \max\{|u_1|, \cdots, |u_N|, |a-1|, |a+1|\}$, 则对一切自然数 n,

皆有 $|u_n| \le M$, 故 $\{u_n\}$ 有界.

注意: 有界性是数列收敛的必要条件.

推论 无界数列必定发散.

定理3（收敛数列的保号性） 设 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a > 0(< 0)$ 则存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，恒有 $u_n > 0(< 0)$.

证 设 $a > 0$, 对 $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$，由极限的定义，必存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $|u_n - a| < \varepsilon$, 即

$$0 < \frac{a}{2} = a - \frac{a}{2} < u_n < a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$$

$a < 0$, 证明类似.

推论 设 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, 且存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时，有 $u_n > 0(< 0)$, 则 $a \geq 0(\leq 0)$.

4　数列极限的运算法则

定理4　设 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = b$, 则

(1) $$\boxed{\lim_{n\to\infty}(u_n \pm v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \pm \lim_{n\to\infty} v_n = a \pm b}$$

(2) $$\boxed{\lim_{n\to\infty}(u_n v_n) = (\lim_{n\to\infty} u_n)(\lim_{n\to\infty} v_n) = ab}$$

特别,当 c 为常数时,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(cu_n) = c\lim_{n\to\infty} u_n) = ca}$$

(3)　如果 $b \neq 0$,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n} = \frac{a}{b}}$$

证 仅对商的情形证明

$\forall \varepsilon > 0, \because \lim_{n\to\infty} v_n = b \neq 0,$ 所以利用极限的性质知，

存在 $N_1 > 0$, 使得当 $n > N_1$ 时，恒有 $|v_n| \geq \frac{|b|}{2}$. 由于

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|u_n b - a v_n|}{|v_n||b|} \leq \frac{|u_n - a|}{|v_n|} + \frac{|a||v_n - b|}{|v_n||b|}$$

$$\leq \frac{2}{|b|}|u_n - a| + \frac{2|a|+2}{|b|^2}|v_n - b| \qquad (n > N_1)$$

$\because \lim_{n\to\infty} u_n = a, \lim_{n\to\infty} v_n = b,$ 所以存在 $N_2, N_3 > 0$, 使得

当 $n > N_2$ 时，恒有

$$|u_n - a| < \frac{|b|}{4}\varepsilon$$

当 $n > N_3$ 时，恒有

$$|v_n - b| < \frac{|b|^2}{4(|a|+1)}\varepsilon$$

取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$，则当 $n > N$ 时，恒有

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|u_n b - a v_n|}{|v_n||b|} \le \frac{|u_n - a|}{|v_n|} + \frac{|a||v_n - b|}{|v_n||b|}$$

$$\le \frac{2}{|b|}|u_n - a| + \frac{2|a|+2}{|b|^2}|v_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n} = \frac{a}{b}$$

例6　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})$

$$=\lim_{n\to\infty}1-3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})=1$$

例7　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+1}{4n^2+2n+3}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+1}{4n^2+2n+3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}4+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

例8　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1$$

例9　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

解　由于

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$$

例10 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})\cdots(1+\frac{1}{2^{2^n}})$

解 $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})\cdots(1+\frac{1}{2^{2^n}})$

$$=\frac{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})\cdots(1+\frac{1}{2^{2^n}})}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=2(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}})$$

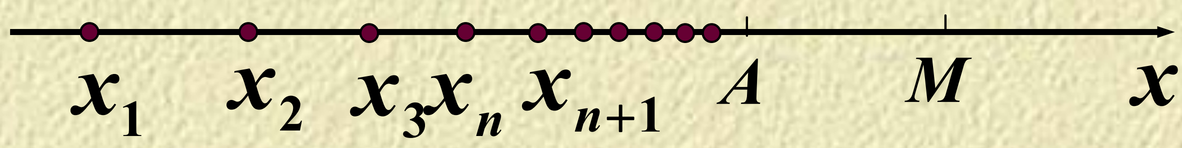
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})\cdots(1+\frac{1}{2^{2^n}})$$

$$=2\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}})=2$$

三 单调有界准则

定理5 单调增加(减少)有上(下)界数列必有极限

几何解释:



例11 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在.

证 设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$, 则

$$x_n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+2})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+2})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).$$

所以 $x_n \le x_{n+1}$，即数列 x_n 是单调增加的.

由于

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

$$\le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 2 + 1 - \frac{1}{n} \le 3$$

所以 x_n 有上界，因此极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在．记

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e}$$

可以证明 e 是一个无理数,它的值为

$$e = 2.718\,281\,828\,439\,045\cdots$$

例12　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{2n}$

解　$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{2n}=\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})^{n}(1+\frac{1}{n})^{n}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}\bullet\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=e^{2}$$

例13　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n}$

解　由于 $(1-\frac{1}{n})^{n}=(\frac{n-1}{n})^{n}=(\frac{n}{n-1})^{-n}=(1+\frac{1}{n-1})^{-n}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}1\Big/[(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}(1+\frac{1}{n-1})]=\frac{1}{e}$

例14　证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$　(n重根式)的极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证　显然 $x_n < x_{n+1}$，即 x_n 是单调增加的，

又因为 $x_1 = \sqrt{3} < 3$，　假定 $x_n < 3$，由于

$$x_{n+1} = \sqrt{3+x_n} < \sqrt{3+3} < 3$$

所以 x_n 是有上界数列，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，　　记

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

在表示式 $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$ 中，令 $n\to\infty$，则有

$$a = \sqrt{3+a}$$

解得 $a=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ 或 $a=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去)，所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$