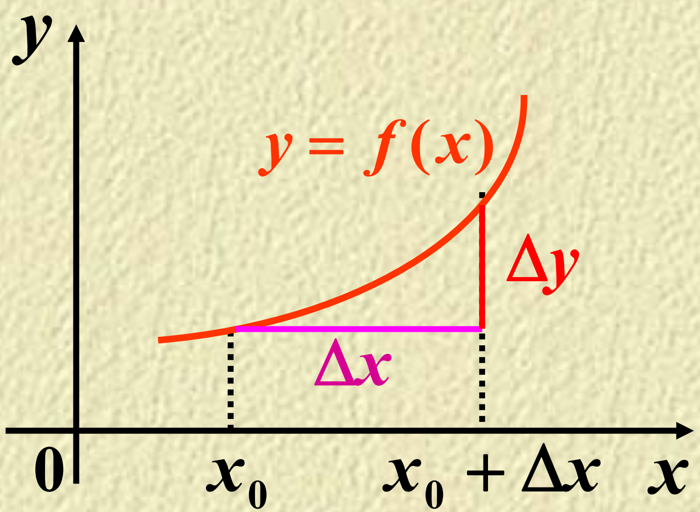
第八节 连续函数

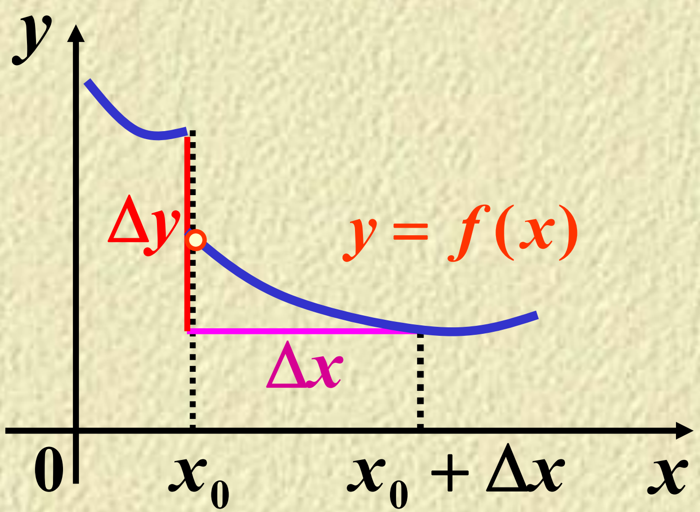
一　函数的连续性

1　函数的增量

设函数 $f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义，$\forall\ x \in U_\delta(x_0)$，$\Delta x = x - x_0$，称为自变量在点$x_0$的增量.

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$，称为函数$f(x)$相应于Δx的增量.





2 连续的定义

定义 1　设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义, 如果当自变量的增量 Δx 趋向于零时, 对应的函数的增量 Δy 也趋向于零, 即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ 或 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$, 那末就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, x_0 称为 $f(x)$ 的连续点.

设 $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$,

$\Delta x \to 0$ 就是 $x \to x_0$, $\Delta y \to 0$ 就是 $f(x) \to f(x_0)$.

定义 2　设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义, 如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限存在, 且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 那末就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

用 $\varepsilon-\delta$ 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的定义可叙述为:

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果对任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有不等式

$$|f(x)-f(x_0|<\varepsilon$$

成立，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

由定义可知，函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，必须满足下面三个条件，

(1) $f(x)$ 在 x_0 处有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

例1 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$

处连续.

证 $\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0,$ 又 $f(0)=0, \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0),$

由定义2知, 函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

3 单侧连续

若函数$f(x)$在$(a,x_0]$内有定义,且$f(x_0-0)=f(x_0)$,

则称$f(x)$在点x_0处左连续;

若函数$f(x)$在$[x_0,b)$内有定义,且$f(x_0+0)=f(x_0)$,

则称$f(x)$在点x_0处右连续.

定理1　函数 $f(x)$在x_0 处连续的充要条件是$f(x)$ 在 x_0 处即左连续又右连续.

例2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$处的连续性.

解　$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2=f(0),$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2\neq f(0),$

右连续但不左连续 ，

故函数 $f(x)$在点 $x=0$处不连续.

4 连续函数与连续区间

在开区间 (a,b) 上每一点都连续的函数,叫做在区间 (a,b) 上的连续函数,或者说函数在区间 (a,b)上连续.

如果函数在开区间(a,b)内连续,并且在左端点$x=a$处右连续,在右端点$x=b$处左连续,则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例如,多项式函数、$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=a^x$在区间$(-\infty,+\infty)$ 内是连续的. $y=\ln x$在区间$(0,+\infty)$上是连续的.

二 函数的间断点

定义3 设函数$f(x)$在x_0的某个邻域或去心邻域有定义,若$f(x)$在x_0处不连续,则称x_0为函数$f(x)$的间断点.

如果x_0是函数$f(x)$的间断点,则$f(x)$在x_0的某个去心邻域内有定义,且满足下列三条件之一

(1) $f(x)$在点x_0处没有定义;

(2) $f(x)$在x_0处有定义,但当$x \to x_0$时$f(x)$的极限不存在;

(3) $f(x)$在x_0处有定义,且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,但

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

(1) 如果$f(x)$在点x_0处左, 右极限都存在,但

$$f(x_0-0)\neq f(x_0+0),$$

则称点x_0为函数$f(x)$的跳跃间断点 .

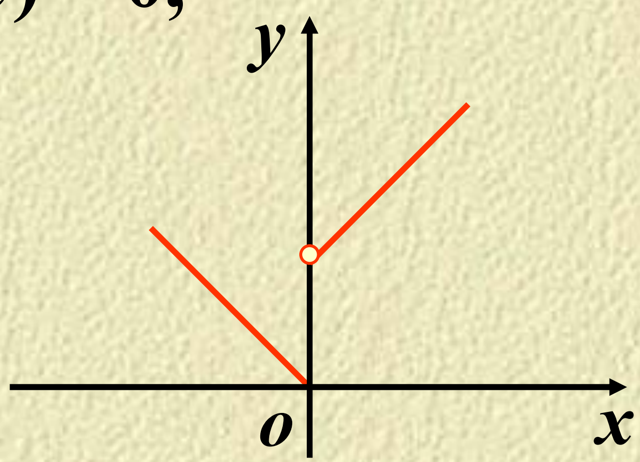
例4　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\leq 0,\\ 1+x, & x>0,\end{cases}$ 在$x=0$处的连续性.

解　$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0,$

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1,$

$\because f(0-0)\neq f(0+0),$

$\therefore x=0$为函数的跳跃间断点.



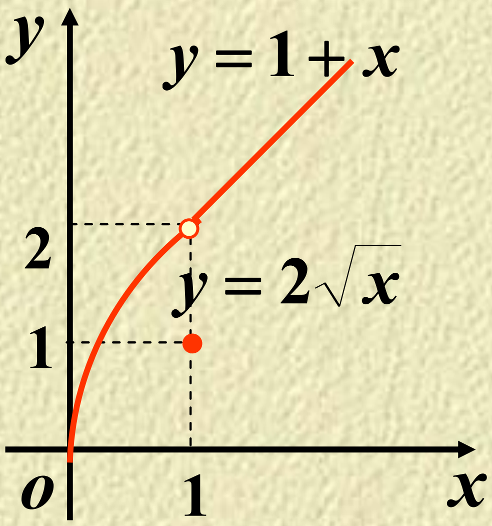
(2) 如果$f(x)$在点x_0处的极限存在,但

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0),$$

或$f(x)$在点x_0处无定义，则称点x_0为函数$f(x)$的可去间断点 .

例5 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1 \\ 1+x, & x > 1, \end{cases}$$



在$x=1$处的连续性 .

解 $\because f(1)=1,\quad f(1-0)=2,\quad f(1+0)=2,$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=2\neq f(1),$$

$\therefore x=0$为函数的可去间断点 .

注意 可去间断点只要改变或者补充间断处函数的定义, 则可使其变为连续点.

可去间断点和跳跃间断点统称为第一类间断点, 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点, 则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 都存在.

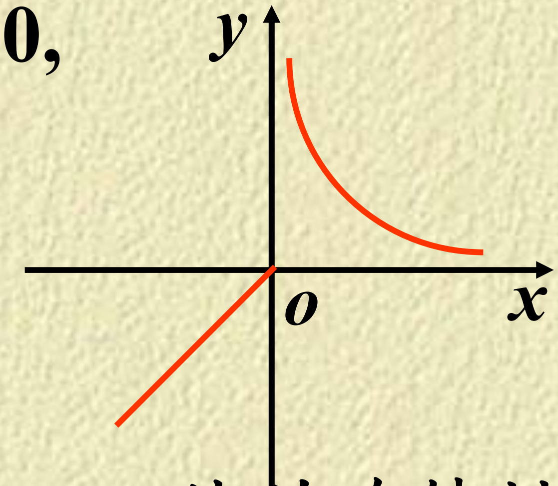
(3) 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 某个去心邻域内有定义, 且当 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 左、右极限至少有一个不存在, 则称 x_0 为 $f(x)$ 第二类间断点.

例6 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x, & x\le 0,\end{cases}$ 在$x=0$处的连续性.

解 $f(0-0)=0,\quad f(0+0)=+\infty,$

$\therefore\ x=1$为函数的第二类间断点.

这种情况称为无穷间断点.



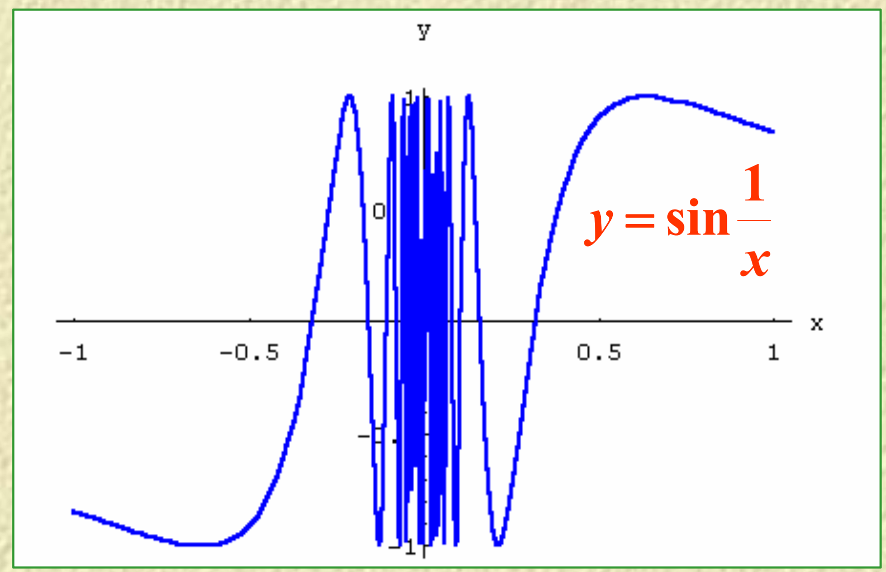
例7 讨论函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$处的连续性 .

解 $\because$ 在$x=0$处没有定义,

且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

$\therefore\ x=0$为第二类间断点 .

这种情况称为的振荡间 断点.



例8 当a取何值时,

函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\geq 0,\end{cases}$ 在 $x=0$处连续.

解 $\because f(0)=a,$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

要使 $f(0-0)=f(0+0)=f(0),\quad \Rightarrow a=1,$

故当且仅当 $a=1$时, 函数 $f(x)$在 $x=0$处连续 .

三 连续函数的运算与初等函数的连续性

1 连续函数的和、差、积、商的连续性

定理2 若函数$f(x)$, $g(x)$在点x_0处连续,则

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ \ (g(x_0)\neq 0)$$

在点x_0处也连续.

例如,由于$\sin x,\cos x$在 $(-\infty,+\infty)$内连续,

故 $\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 在其定义域内连续.

2　反函数与复合函数的连续性

定理3　单调的连续函数必有单调的连续反函数.

例如，$y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调增加且连续，

故　$y = \arcsin x$　在 $[-1,1]$ 上也是单调增加且连续.

同理　$y = \arccos x$　在 $[-1,1]$ 上单调减少且连续;

$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$　在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调且连续.

反三角函数在其定义域内皆连续.

$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是单调连续的，因此

其反函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 是单调连续的.

定理4　若$\lim \varphi(x)=a$, 函数　$f(u)$在点a连续, 则有

$$\boxed{\lim f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim \varphi(x)].}$$

证　　以 $x \to x_0$ 为例证明.

$\because$ $f(u)$在点$u=a$连续, $\forall \varepsilon>0$, $\exists \eta>0$, 使当$|u-a|<\eta$时,

恒有$|f(u)-f(a)|<\varepsilon$. 又$\because$ $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=a$, 所以对于$\eta>0$,

$\exists \delta>0$, 使当$0<|x-x_0|<\delta$　时, 恒有$|\varphi(x)-a|=|u-a|<\eta$.

将上两步合起来,

$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 使当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有

$$|f(u)-f(a)|=|f[\varphi(x)]-f(a)|<\varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=[\lim_{x\to x_0} \varphi(x)].$$

意义　1. 极限符号可以与函数符号互换;

2.变量代换$(u=\varphi(x))$的理论依据.

例9　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln e=1.$$

例10　设 $\lim f(x)=A(>0),\lim g(x)=B$, 证明

$$\boxed{\lim(f(x))^{g(x)}=[\lim f(x)]^{\lim g(x)}=A^B}$$

证　$\lim(f(x))^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}$

$$=e^{\lim(g(x)\ln f(x))}=e^{(\lim g(x))(\lim\ln f(x))}$$

$$=e^{B\ln\lim f(x)}=e^{B\ln A}=A^B$$

例11 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. ($1^\infty$型未定式)

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}((1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}})^{\frac{\cos x-1}{x^2}}$

$$=(\lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}})^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

定理5 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 连续, 而函数 $y=f(u)$ 在点 $u_0(=\varphi(x_0))$ 处连续,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 也连续.

注意 定理5是定理4的特殊情况.

由于幂函数 $y=x^\mu(\mu\in \mathrm{R})$ 在区间 $(0,+\infty)$ 可以表示成 $y=e^{\mu\ln x}$, 而 $u=\mu\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是连续的, $y=e^u$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续的，所以 $y=x^{\mu}$ 在 $(0,+\infty)$ 是连续的. 可以证明 $y=x^{\mu}(\mu\in\mathbf{R})$ 在其定义域(与指数 μ 有关)上是连续的.

3　初等函数的连续性

有前面的讨论可得：一切基本初等函数在定义域内是连续的. 从而，根据连续函数的四则运算与复合函数连续性可知：一切初等函数在定义区间内是连续的. 注意定义区间内是指包含在定义域内的区间.

求初等函数在连续点处的极限可以用代入法. 即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

这里 x_0 为初等函数 $f(x)$ 的连续点.

例12 求 $\lim\limits_{x\to 1}\sin\sqrt{e^x-1}$.

解 原式 $=\sin\sqrt{e^1-1}=\sin\sqrt{e-1}$.

例13 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{0}{2}=0.$$

例14 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的间断点,并指出间断点的类型.

解　函数 $f(x)$ 为初等函数，因此在定义区间内是连续的。函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$，因此 $x=0, x=1$ 为函数 $f(x)$ 的间断点，由于

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{x}{x-1}}=-1$$

所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点. 由于

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=1, \lim_{x\to 1^-} f(x)=0$$

所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

4　闭区间上连续函数的性质

定义4　对于在区间I上有定义的函数$f(x)$,如果有$x_0 \in I$, 使得对于任一$x \in I$　都有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间I上的最大(小)值.

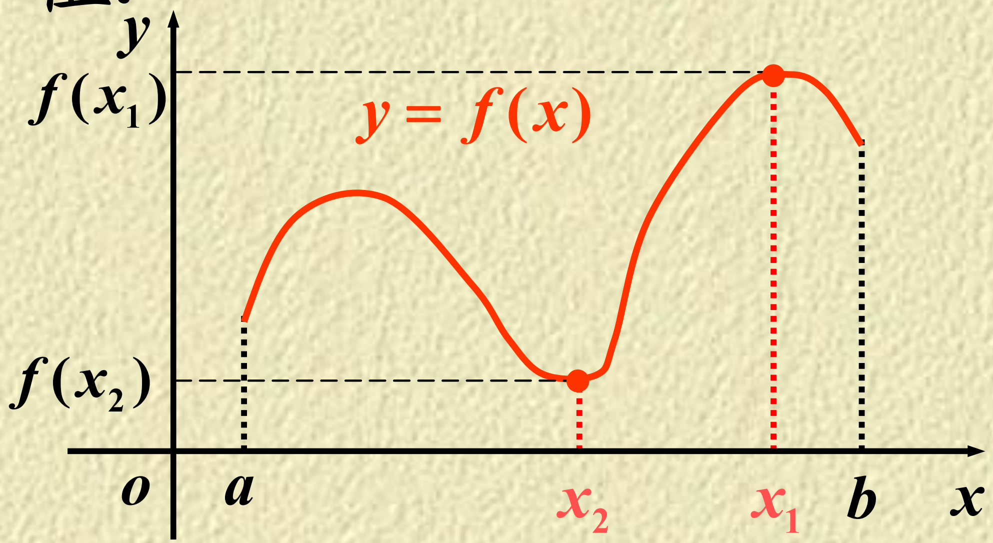
定理6(最大值和最小值定理)　在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

即若$f(x) \in C[a,b]$,

则$\exists x_1, x_2 \in [a,b]$,使得

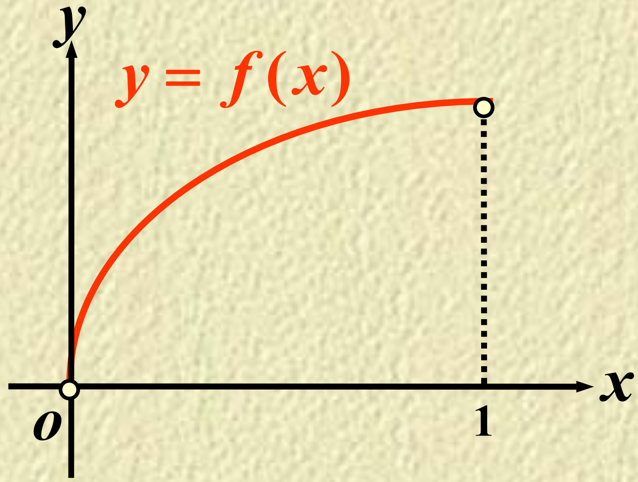
$\forall x \in [a,b]$,有

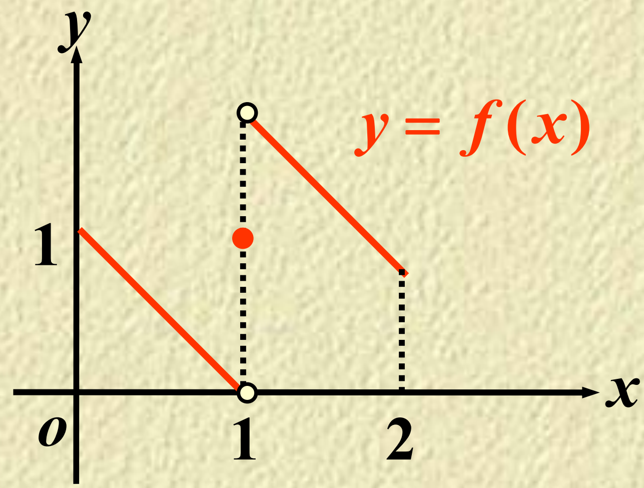
$$f(x_1) \ge f(x) \ge f(x_2).$$



注意: 1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;

2.若区间内有间断点,定理不一定成立.





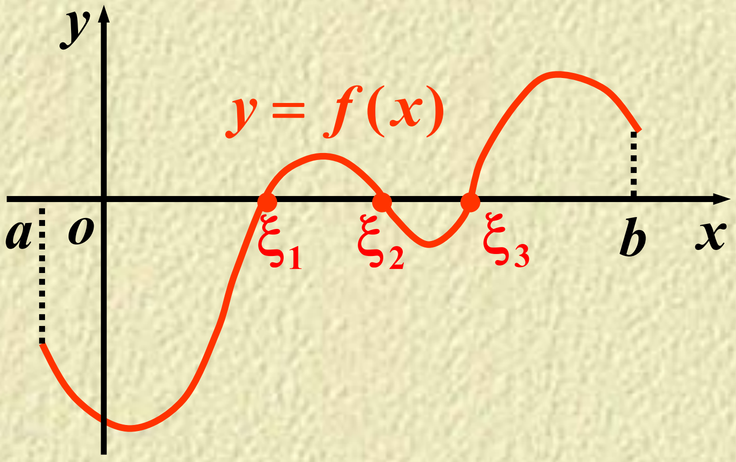
推论(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

定理7(零点定理) 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续, 且$f(a)$与$f(b)$异号(即$f(a)\cdot f(b)<0$), 那末在开区间(a,b)内至少有函数$f(x)$的一个零点,

即至少有一点$\xi(a<\xi<b)$, 使$f(\xi)=0$.

几何解释

连续曲线弧$y=f(x)$的两个端点位于x轴的不同侧,则曲线弧与x轴至少有一个交点.



例15 证明方程$x^3-4x^2+1=0$在区间$(0,1)$内至少有一根.

证　令$f(x)=x^3-4x^2+1$,　则$f(x)$在$[0,1]$上连续,

又$f(0)=1>0$, $f(1)=-2<0$, 由零点定理, $\exists\ \xi\in(0,1)$,

使$f(\xi)=0$, 即$\xi^3-4\xi^2+1=0$, $\therefore$ 方程$x^3-4x^2+1=0$在$(0,1)$内至少有一根ξ.

例16 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)<a$，$f(b)>b$. 证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证　令 $F(x)=f(x)-x$，　则$F(x)$在$[a,b]$上连续，

而 $F(a)=f(a)-a<0$，　$F(b)=f(b)-b>0$，

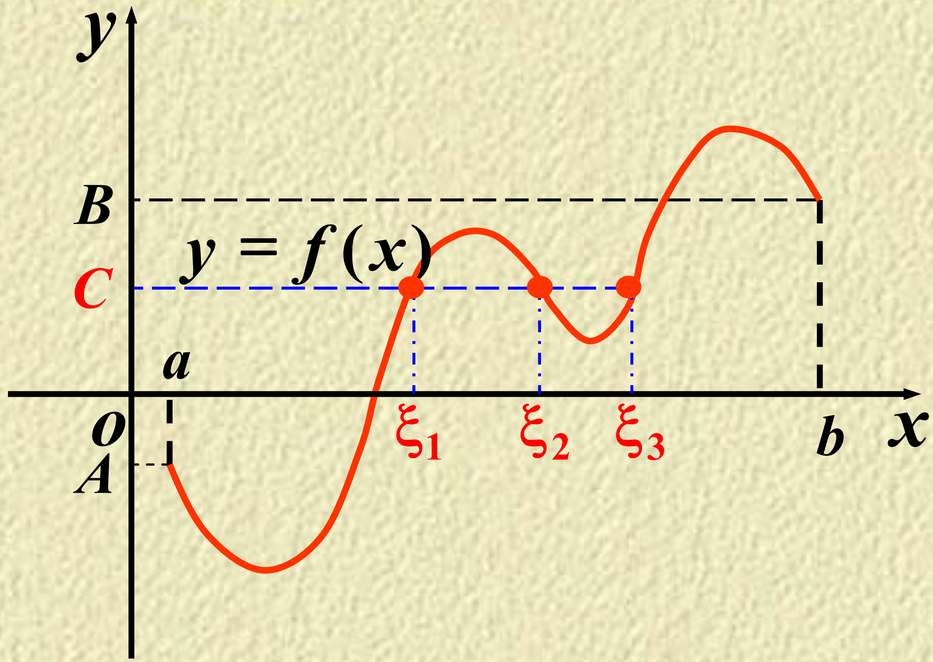
由零点定理，$\exists\ \xi\in(a,b)$，使

$$F(\xi)=f(\xi)-\xi=0,$$

即 $f(\xi)=\xi$.

定理8 (介值定理)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$, 那末，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C, 在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=C.$$



证　设 $\varphi(x)=f(x)-C$,

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且

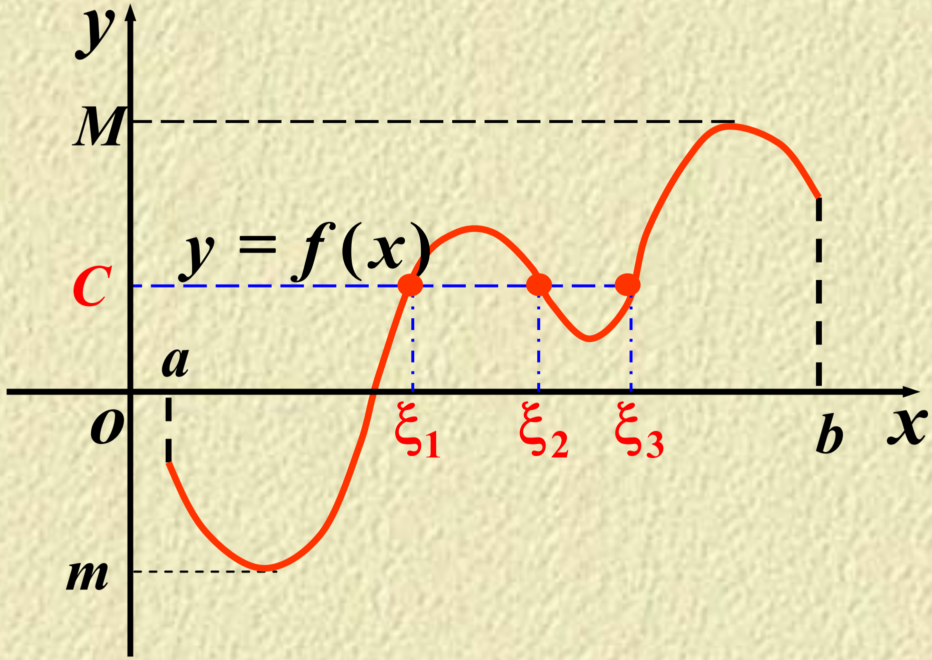
$$\varphi(a)=f(a)-C=A-C,$$

$$\varphi(b)=f(b)-C=B-C,$$

$\therefore \varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$,　由零点定理, $\exists\ \xi\in(a,b)$, 使 $\varphi(\xi)=0$,

即 $\varphi(\xi)=f(\xi)-C=0$, $\therefore f(\xi)=C$.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.



例17 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $[a,b]$ 上 n 个定点, 证明: 在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ, 使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证 由于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到它的最大值 M，最小值 m，又因为 $x_k \in [a,b](k=1,2,\cdots,n)$，所以

$$m \le f(x_k) \le M(k=1,\cdots,n)$$

$$nm \le f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \le nM$$

$$m \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \le M$$

根据定理8的推论可得，在区间 $[a,b]$ 至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$