

第一节 映射与函数

- 一 集合与映射
- 二 函数的概念
- 三 函数的几种特性
- 四 反函数与复合函数
- 五 初等函数
- 六 建立函数关系举例

一、集合与映射

1. 集合

集合：具有某种特定性质的事物的总体。

组成这个集合的事物称为该集合的**元素**。

$$a \in A, \quad a \notin A,$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \text{有限集}$$

$$A = \{x | x \text{ 所具有的特征} \} \quad \text{无限集}$$

若 $x \in A$, 则必 $x \in B$ 就说 A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$.

如 $A \subseteq B$, 且 B 中有不在 A 的元素, 则称 A 是 B 的真子集, 记为 $A \subsetneq B$.

数集分类: \mathbf{N} ----自然数集 \mathbf{Z} ----整数集
 \mathbf{N}^+ ----正整数集 \mathbf{Q} ----有理数集
 \mathbf{R} ----实数集

数集间的关系: $\mathbf{N}^+ \subseteq \mathbf{N}, \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}.$

如果 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 则称集合 A 和 B 相等, ($A = B$)

例如 $A = \{1, 2\},$

$C = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\},$ 则 $A = C.$

不含任何元素的集合称为**空集**. (记作 \emptyset)

例如, $\{x | x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$

规定 空集为任何集合的子集.

2. 实数集

定义1 设 $A \subseteq \mathbb{R}$, 如果存在数 $L \in \mathbb{R}$, 使得对一切 $x \in A$, 都有 $x \leq (\geq) L$, 则称 A 有上(下)界, 称 L 为 A 的一个上(下)界. 如果数集 A 既有上界又有下界, 则称 A 是有界的, 否则称 A 是无界的.

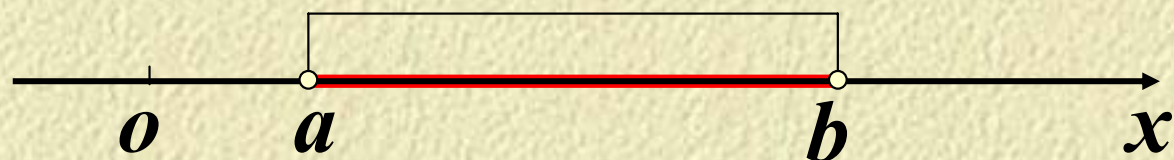
定义2 设 A 是一个非空数集, 若存在一个上(下)界 s , 使得对 A 的一切上(下)界 L , 都有 $s \leq (\geq) L$, 则称 s 是 A 的上(下)确界, 记为 $\sup A (\inf A)$.

定理1 任何一个非空的实数集 A , 如果有上(下)界, 则必有上(下)确界.

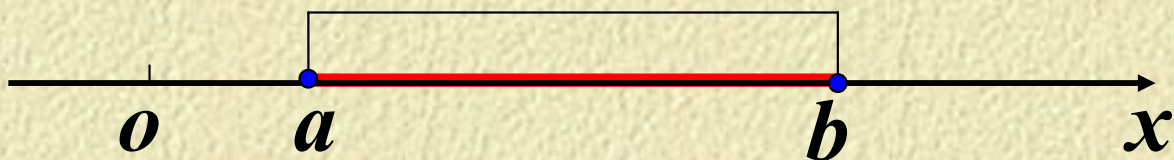
区间是指介于某两个实数之间的全体实数. 这两个实数叫做区间的端点.

$$\forall a, b \in R, \text{ 且 } a < b.$$

$\{x | a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b)



$\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$



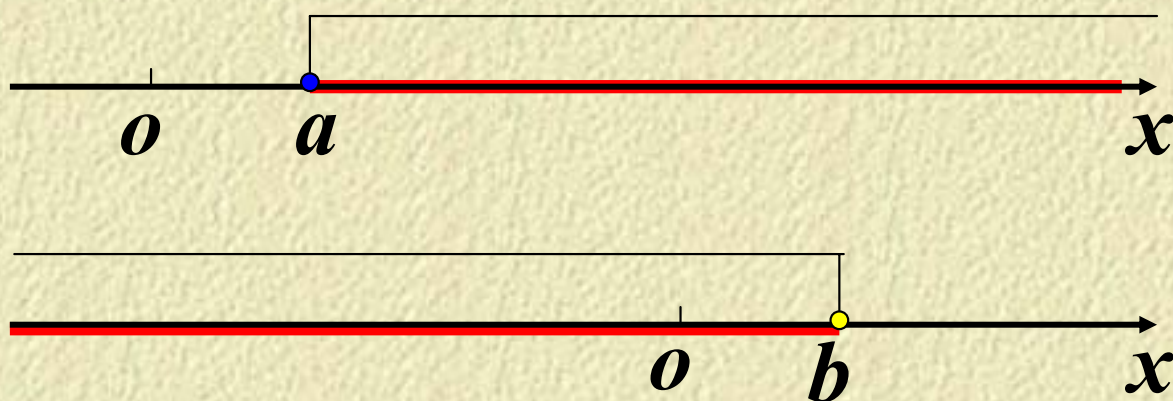
$\{x|a \leq x < b\}$ 称为半开区间, 记作 $[a, b)$

$\{x|a < x \leq b\}$ 称为半开区间, 记作 $(a, b]$

有限区间

$[a, +\infty) = \{x|a \leq x\}$ $(-\infty, b) = \{x|x < b\}$

无限区间



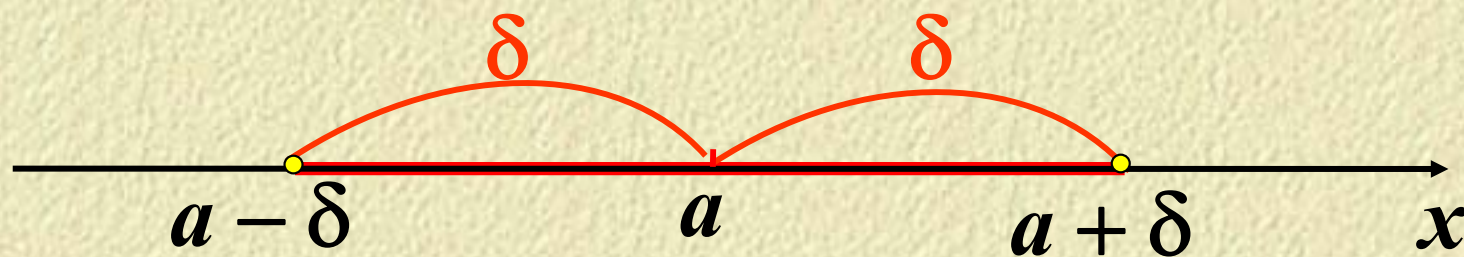
区间长度的定义:

两端点间的距离 (线段的长度) 称为区间的长度.

设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域, 点 a 叫做这邻域的中心.

δ 叫做这邻域的半径 .

$$U_{\delta}(a) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}.$$



点 a 的去心的 δ 邻域, 记作 $U_{\delta}^0(a)$.

$$U_{\delta}^0(a) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

3. 常量与变量:

在某过程中数值保持不变的量称为**常量**,
而数值变化的量称为**变量**.

注意 常量与变量是相对“过程”而言的.

常量与变量的表示方法:

通常用字母 a, b, c 等表示常量,
用字母 x, y, t 等表示变量.

4. 映射

定义3 设 A, B 是两个非空集合, 若对每个 $x \in A$, 按照某个确定的法则 f , 有唯一确定的 $y \in B$ 与它对应, 则称 f 是 A 到 B 的一个映射, 记作

$$f: A \rightarrow B, \text{ 或 } f: x \mapsto y = f(x), x \in A.$$

其中 y 称为 x 在映射 f 下的像, x 称为 y 在映射 f 下的一个原像 (或逆像), A 称为映射 f 的定义域, 记为 $D(f)$ 或 D_f , A 所有元素 x 的像 y 的全体所构成的集合称为 f 的值域, 记为 R_f 或 $f(A)$, 即

$$R_f = f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$$

映射的两个基本要素：定义域与对应法则

设 $f: A \rightarrow B$, 如果 $R_f = B$, 则称 f 是一个满映射,

如果对 A 中的任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$, 有

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

则称 f 是一个单射, 如果一个映射既是满射, 又是单射

则称 f 是个一一映射.

如果 f 是个一一映射, 则对每个 $y \in B$, 有唯一的一个 $x \in A$, 适合 $f(x) = y$, 规定 $g(y) = x$, 则 g 就是 B 到 A 上的一个映射, 称为 f 的逆映射, 记为

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

其定义域 $D_{f^{-1}} = R_f = B$, 值域 $R_{f^{-1}} = D_f = A$. 此时也称 f 是可逆映射.

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 则对每个 $x \in A$, 对应唯一的一个 $y = f(x) \in B$, 从而对应唯一的一个 $z = g(y) \in C$, 这样就确定了一个从集合 A 到集合 C 的映射, 这个映射称为 f 和 g 所确定的复合映射, 记为 $g \circ f$ 即

$$g \circ f: A \rightarrow C$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in A$$

任意两个映射 f, g , 则 $g \circ f$ 当且仅当 $R_f \subseteq D_g$.

5. 绝对值:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \quad (|a| \geq 0)$$

运算性质: $|ab| = |a||b|;$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}; \quad |a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

绝对值不等式:

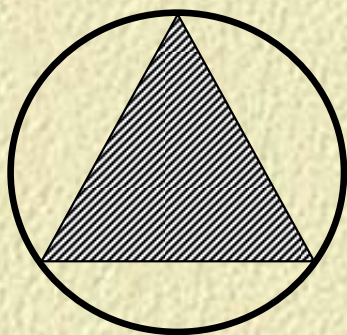
$$|x| \leq a \ (a > 0) \iff -a \leq x \leq a;$$

$$|x| \geq a \ (a > 0) \iff x \geq a \text{ 或 } x \leq -a;$$

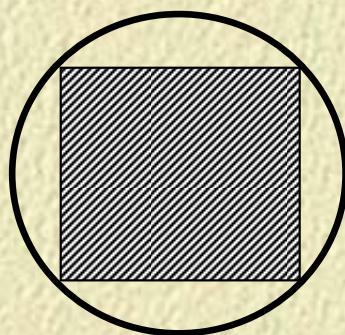
二、函数概念

1 函数的定义

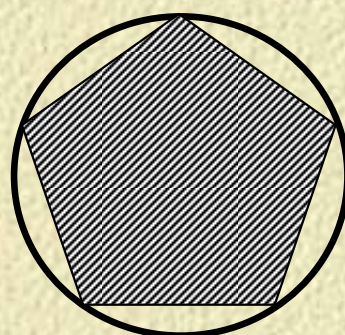
例 圆内接正多边形的周长



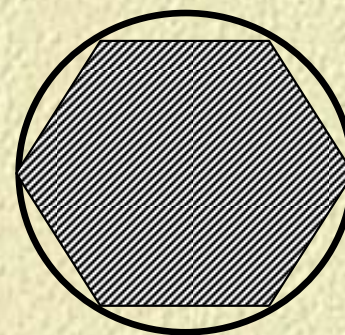
S_3



S_4



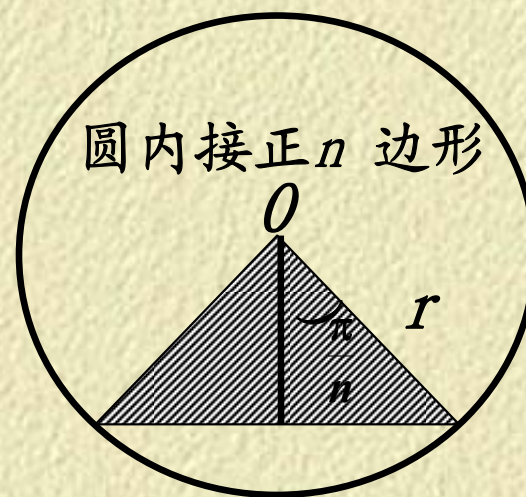
S_5



S_6

$$S_n = 2nr \sin \frac{\pi}{n}$$

$$n = 3, 4, 5, \dots$$



定义4 设 D 是一个给定的数集, 则称映射

$$f: D \rightarrow R$$

为定义在 D 上的一个函数, 记作

$$y = f(x), x \in D$$

因变量

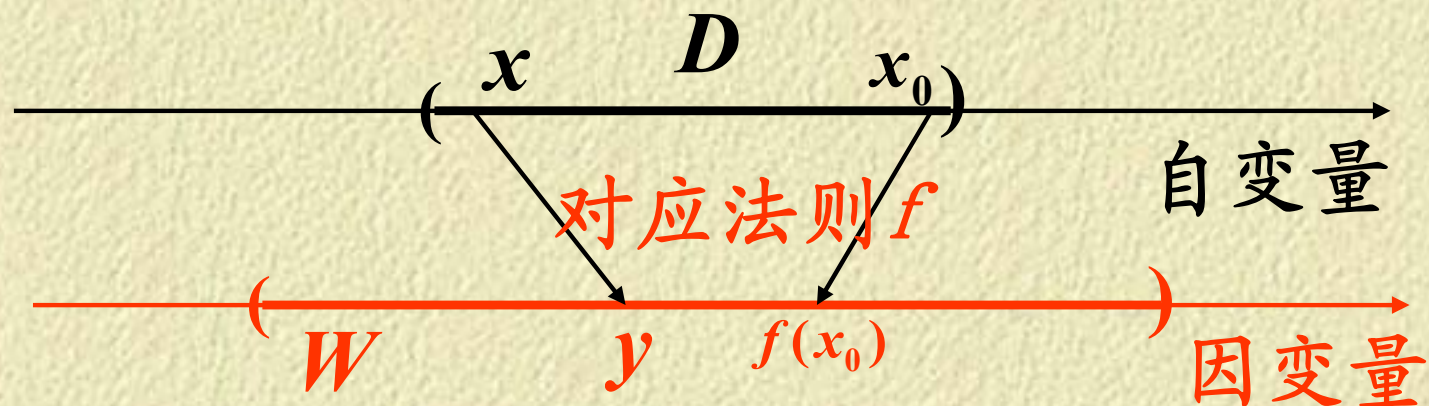
自变量

数集 D 叫做这个函数的定义域。

当 $x_0 \in D$ 时, 称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的函数值。

函数值全体组成的数集 $W = \{y | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域。

函数的两要素：定义域与对应法则。



约定：定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值。

例如, $y = \sqrt{1-x^2}$ $D: [-1, 1]$

例如, $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D: (-1, 1)$

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，这种函数又称为单值函数。

如果给定一个法则，按照这个法则，对每个 $x \in D$ ，有多个确定的 y 与之对应，这样的法则称为多值函数。

一个多值函数可以分成几个单值函数来讨论。

例如 $x^2 + y^2 = R^2$,

例1 求函数 $y = \arcsin \sqrt{x^2 - 1}$ 的定义域。

解 函数的定义域为满足不等式

$$-1 \leq \sqrt{x^2 - 1} \leq 1$$

既满足 $0 \leq x^2 - 1 \leq 1, 1 \leq x^2 \leq 2$, 因此

$$1 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ 或 } -\sqrt{2} \leq x \leq -1$$

函数的定义域为 $[-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$

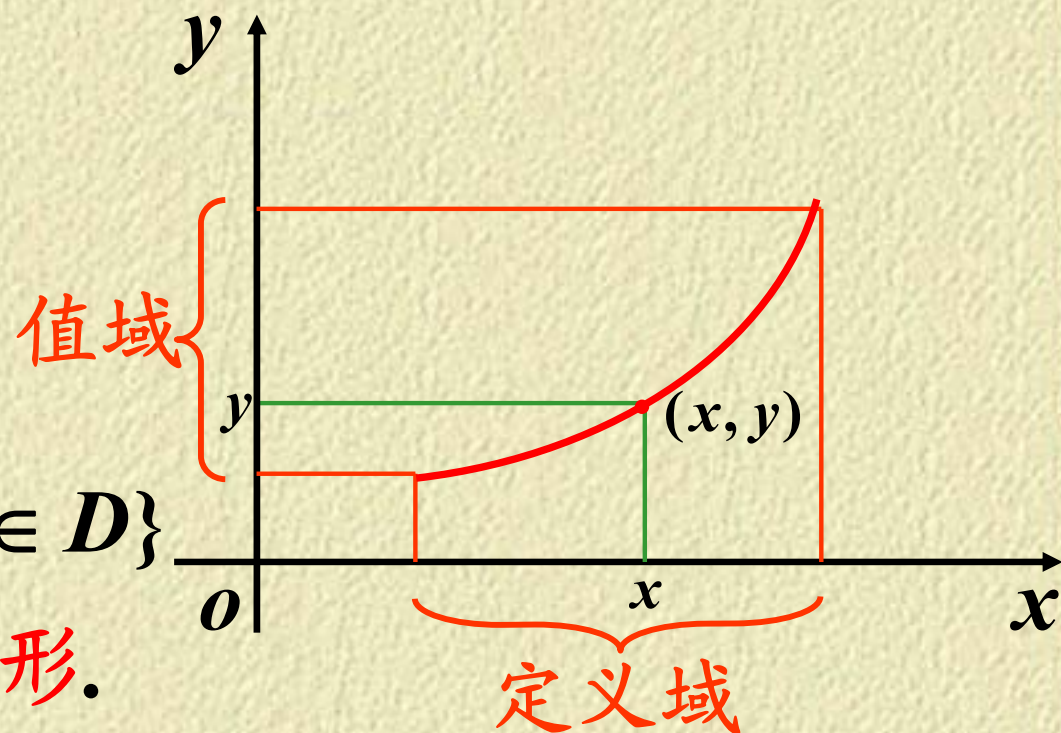
2 函数的图形

定义5 在平面直角

坐标系下, 点集

$$C = \{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的图形.



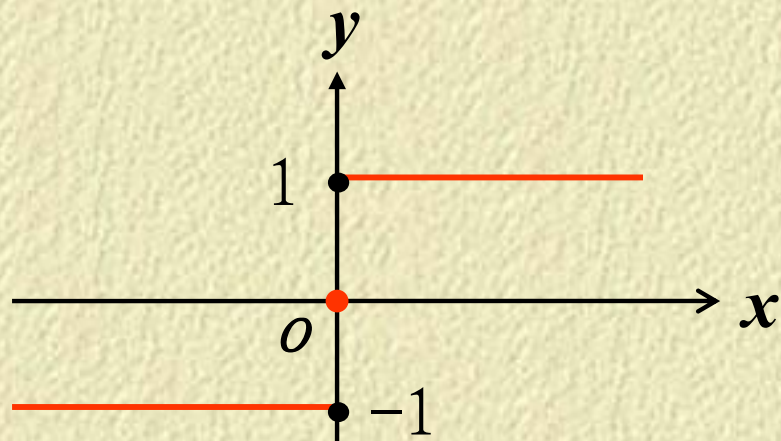
3 函数的表示法

函数常用的表示法有公式法, 图示法, 表格法.

几种常用的函数

(1) 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0 \\ 0 & \text{当 } x = 0 \\ -1 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

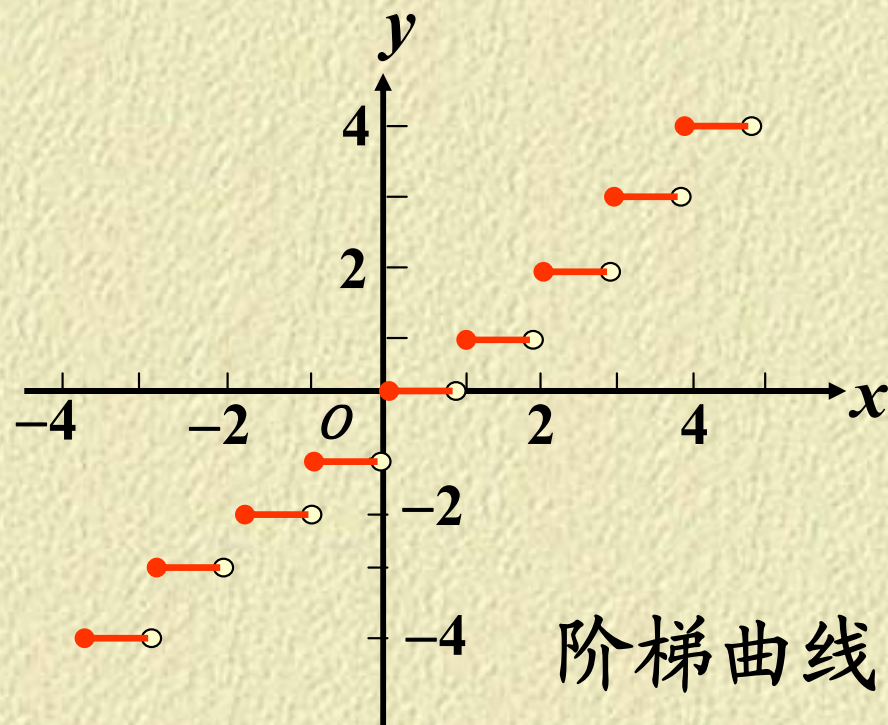


$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

(2) 取整函数 $y = [x]$

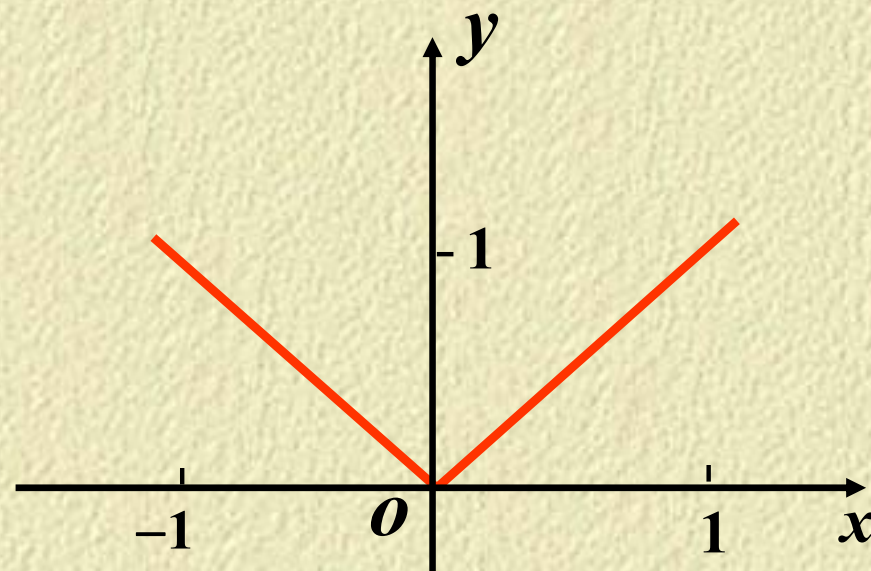
$[x]$ 表示不超过 x

的最大整数



(3) 绝对值函数

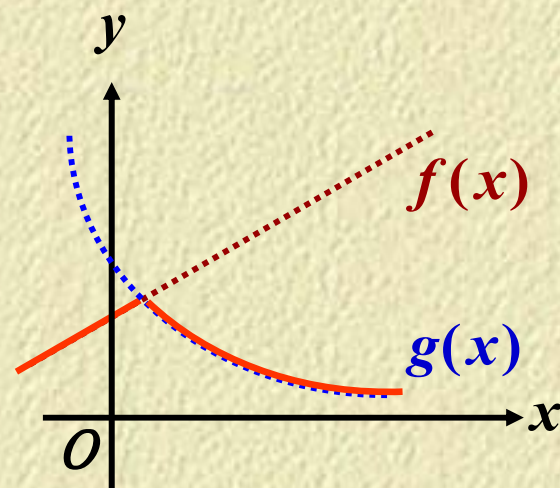
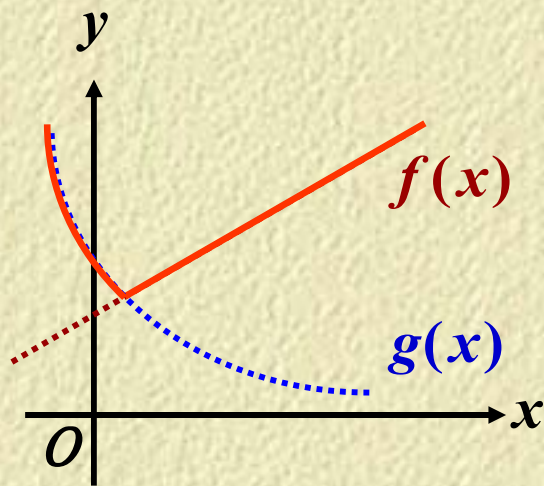
$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0. \end{cases}$$



(4) 取最值函数

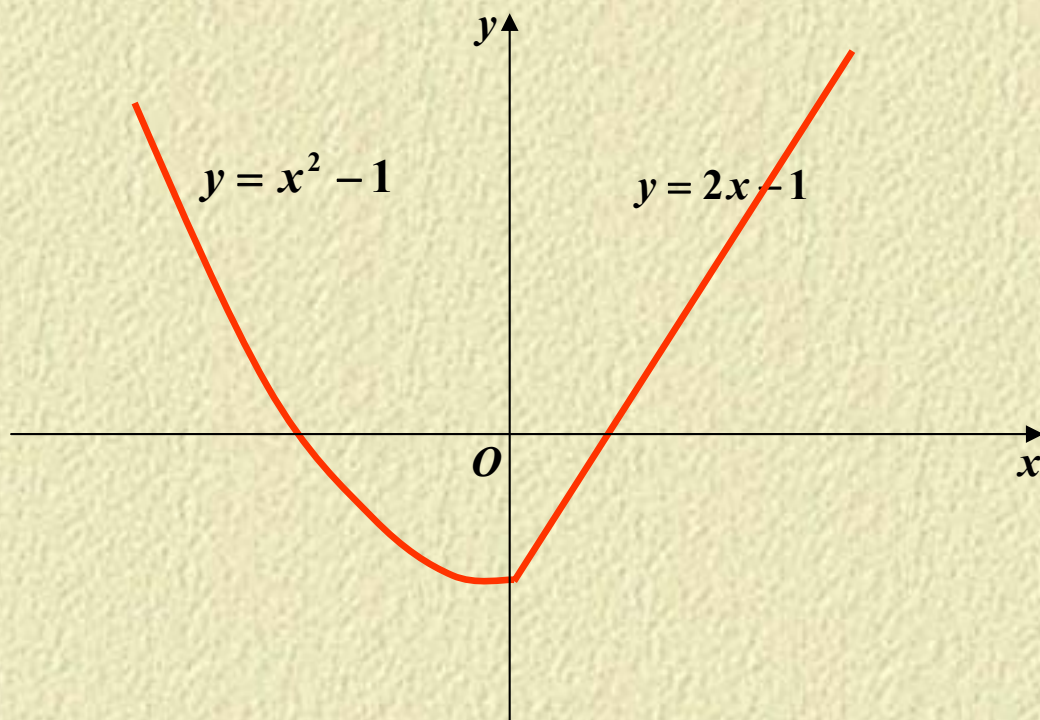
$$y = \max\{f(x), g(x)\}$$

$$y = \min\{f(x), g(x)\}$$



在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同的式子来表示的函数, 称为分段函数.

例如,
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 0 \\ x^2 - 1, & x \leq 0 \end{cases}$$



例2 脉冲发生器产生一个单三角脉冲,其波形如图所示,写出电压 U 与时间 $t(t \geq 0)$ 的函数关系式.

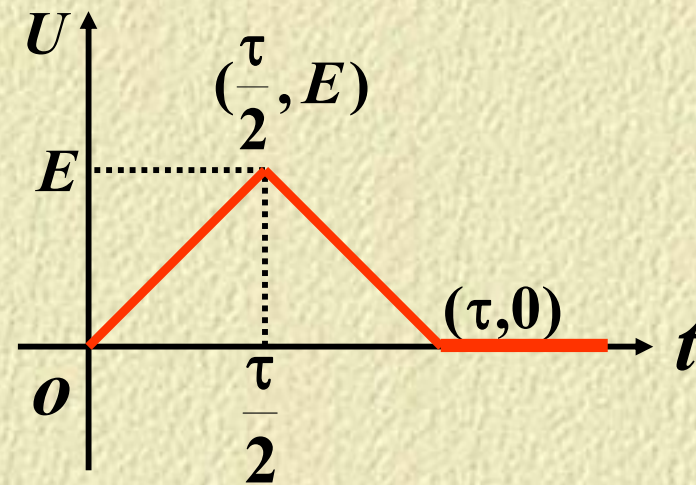
解 当 $t \in [0, \frac{\tau}{2}]$ 时,
$$U = \frac{E}{\frac{\tau}{2}} t = \frac{2E}{\tau} t;$$

当 $t \in (\frac{\tau}{2}, \tau]$ 时,

$$U - 0 = \frac{E - 0}{\frac{\tau}{2} - \tau} \cdot (t - \tau), \quad \text{即 } U = -\frac{2E}{\tau} (t - \tau)$$

当 $t \in (\tau, +\infty)$ 时, $U = 0$.

$\therefore U = U(t)$ 是一个分段函数,
其表达式为



单三角脉冲信号的电压

$$U(t) = \begin{cases} \frac{2E}{\tau}t, & t \in [0, \frac{\tau}{2}] \\ -\frac{2E}{\tau}(t - \tau), & t \in (\frac{\tau}{2}, \tau] \\ 0, & t \in (\tau, +\infty) \end{cases}$$

例3 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求函数 $f(x+3)$

的定义域.

解 $\because f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$$\therefore f(x+3) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x+3 \leq 1 \\ -2 & 1 < x+3 \leq 2 \end{cases}$$

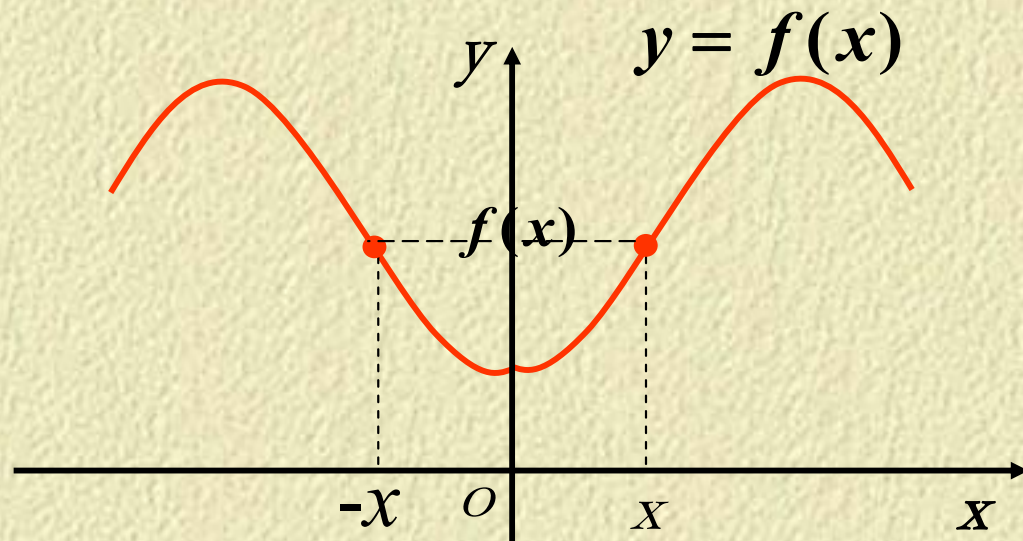
$$= \begin{cases} 1 & -3 \leq x \leq -2 \\ -2 & -2 < x \leq -1 \end{cases}$$

故 $D_f : [-3, -1]$

三 函数的几种特性 奇偶, 单调, 周期, 有界

1 函数的奇偶性

设 D 关于原点对称, 对于 $\forall x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$
则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

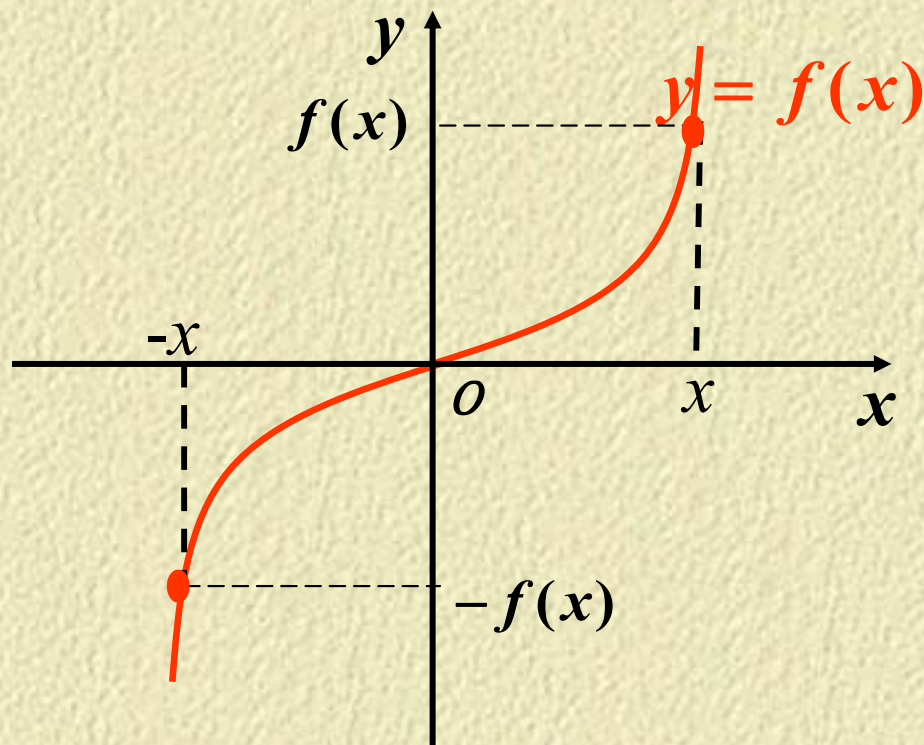


偶函数

设 D 关于原点对称，对于 $\forall x \in D$ ，有

$$f(-x) = -f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为奇函数.



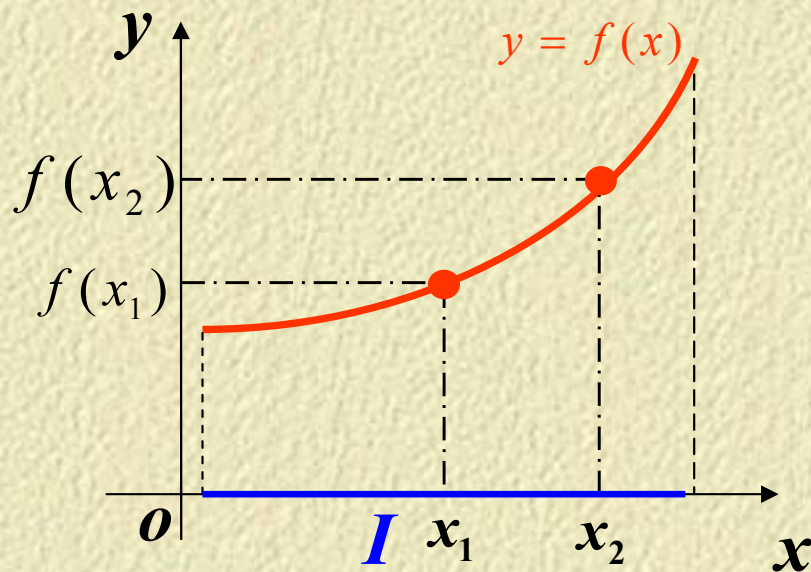
奇函数

2 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \in D$,

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 (1) $f(x_1) < f(x_2)$,

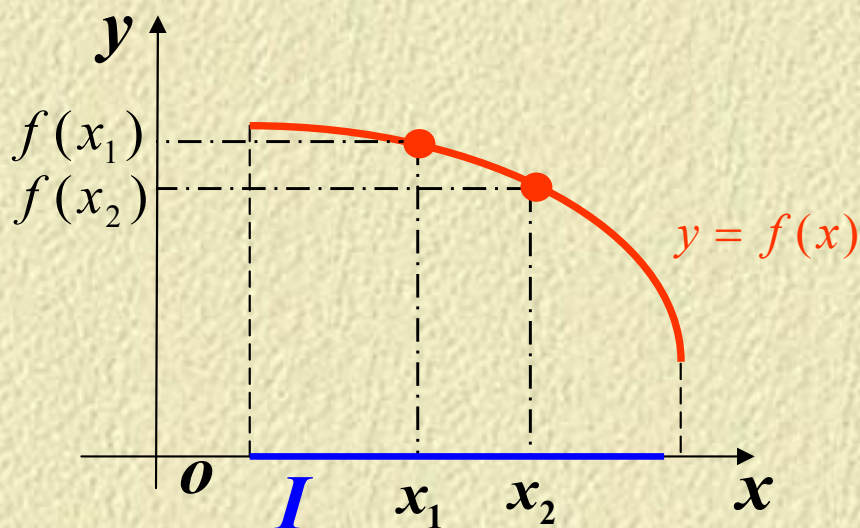
则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;



设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \in D$,

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,
恒有 (2) $f(x_1) > f(x_2)$,

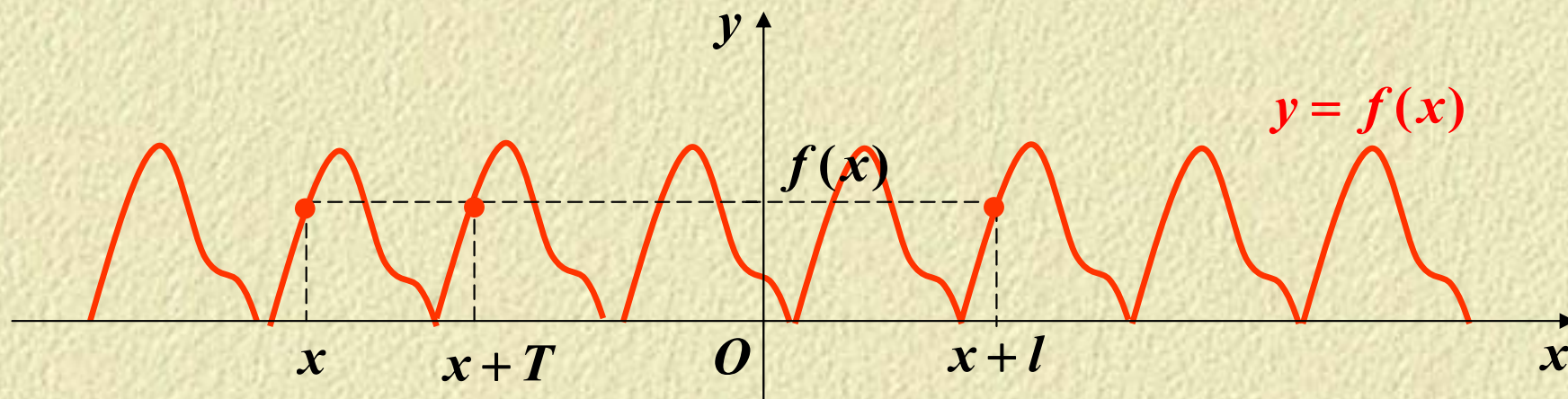
则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的;



3 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的数 l , 使得对于任一 $x \in D, x+l \in D$ 且 $f(x+l) = f(x)$ 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为函数 $y = f(x)$ 的周期.

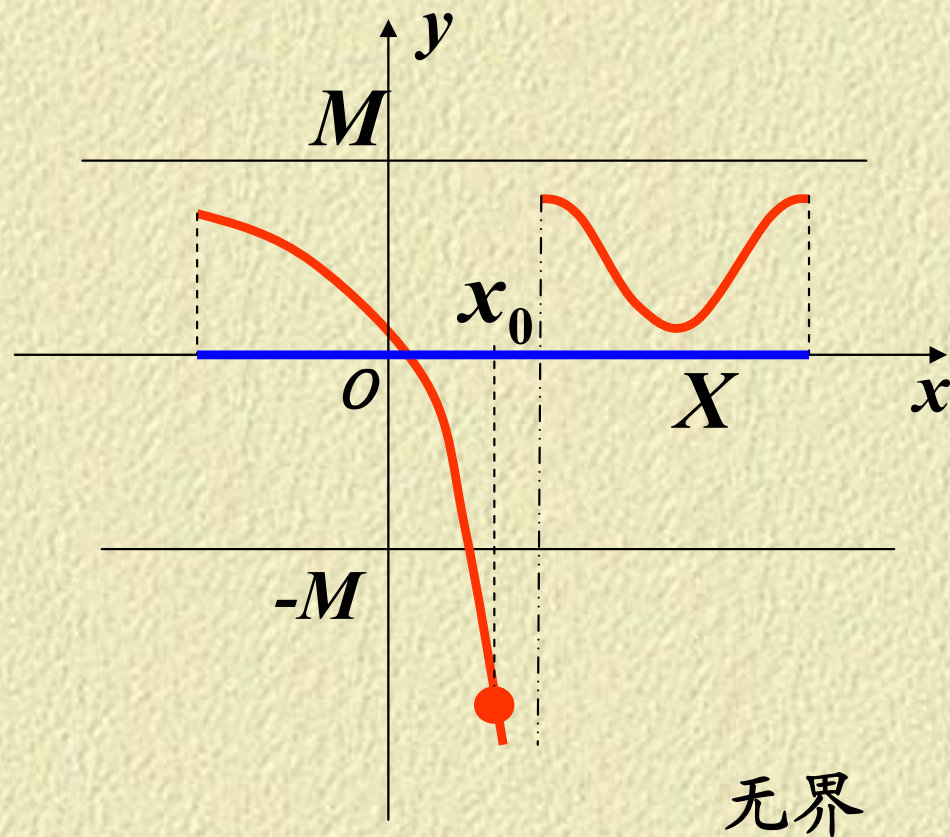
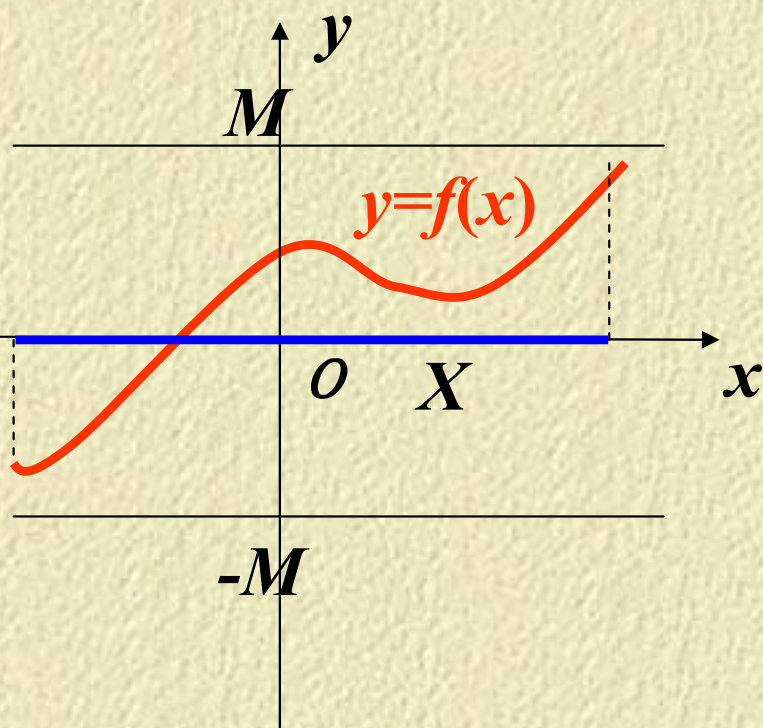
(通常说周期函数的周期是指其最小正周期 T).



4. 函数的有界性

若 $X \subset D$, $\exists M > 0$, $\forall x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$ 成立,

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 否则称无界.



四 反函数与复合函数

1 反函数

定义6 设函数 $f: D \rightarrow W$ 是一一映射, 则其逆映射 $f^{-1}: W \rightarrow D$ 称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**, 记为

$$x = f^{-1}(y), y \in W.$$

称函数 $y = f(x)$ 为**直接函数**.

由定义可知, 若函数 $y = f(x), x \in D$ 存在反函数 $x = f^{-1}(y), y \in R_f$, 则

(1) 对于 D 的任意两个数 $x_1, x_2 (\neq x_1)$, 定有

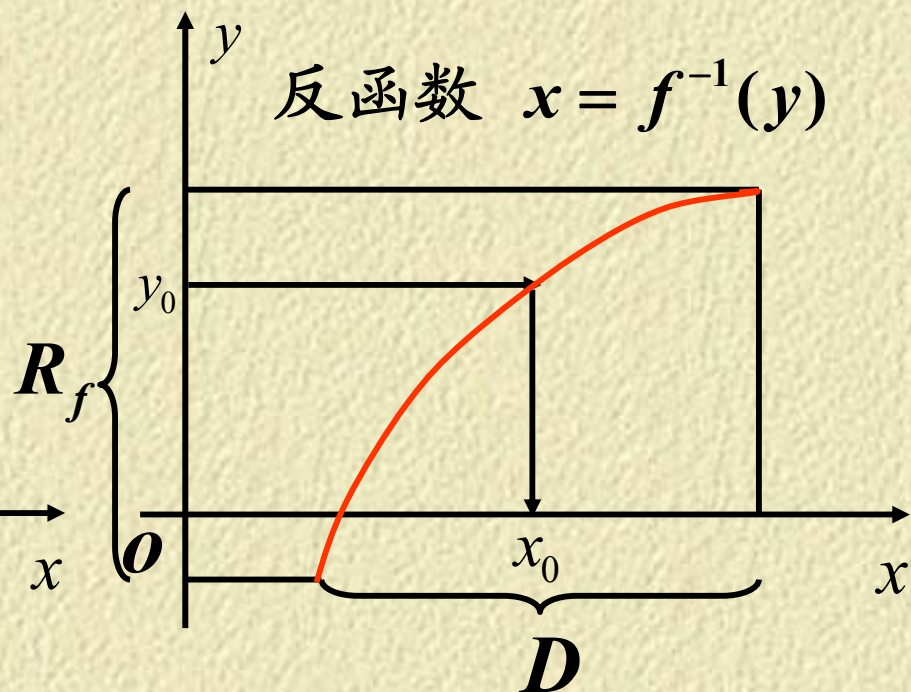
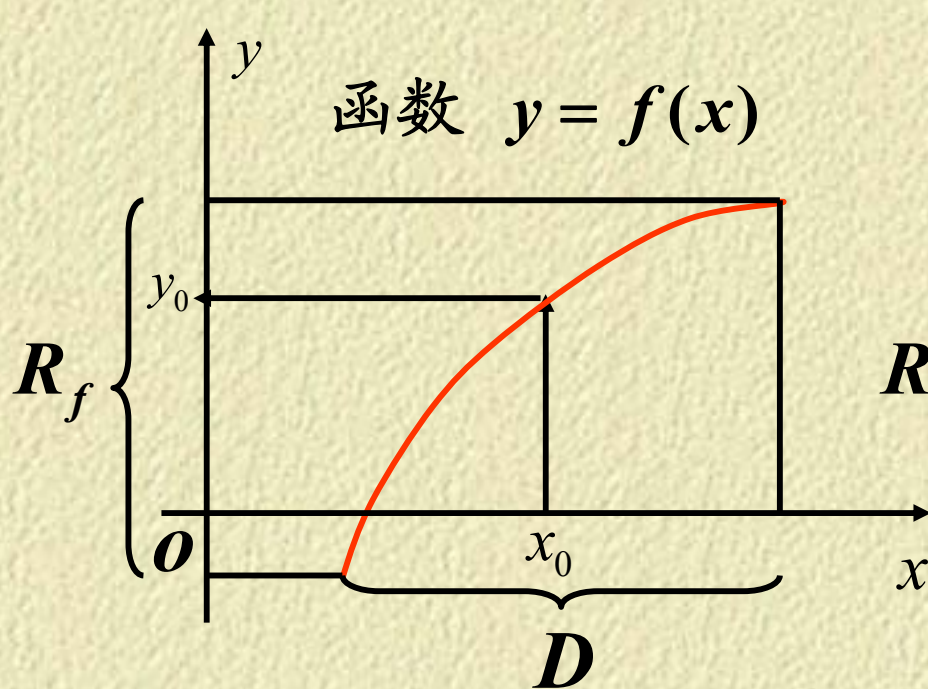
$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

(2) $f(x)$ 与 $f^{-1}(y)$ 互为反函数, 且 $D_f = R_{f^{-1}} = D$

$$D_{f^{-1}} = R_f.$$

$$(3) f^{-1}(f(x)) = x, x \in D$$

$$f(f^{-1}(y)) = y, y \in R_f$$



习惯上用字母 x 表示自变量, y 表示因变量, 函数 $y = f(x), x \in D$ 的反函数经常表示成 $y = f^{-1}(x), x \in R_f$.

例4 讨论函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的反函数.

解 函数的定义域 $[-1, 1]$, 值域 $[0, 1]$. 由于对于 $0 \leq y < 1$, 有两个自变量值 $x = \sqrt{1-y^2}, x = -\sqrt{1-y^2}$ 都满足关系式 $y = \sqrt{1-x^2}$, 因此此函数不存在反函数. 但如果将函数的定义域限制在 $[0, 1]$ 或 $[-1, 0]$, 则函数 $y = \sqrt{1-x^2}, x \in [0, 1]$ 的反函数为 $y = \sqrt{1-x^2}, x \in [0, 1]$ $y = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 0]$ 的反函数为 $y = -\sqrt{1-x^2}, x \in [0, 1]$

例5 求函数 $y = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ x+1 & 0 \leq x < 1 \\ 2\ln ex & 1 \leq x \end{cases}$ 的反函数.

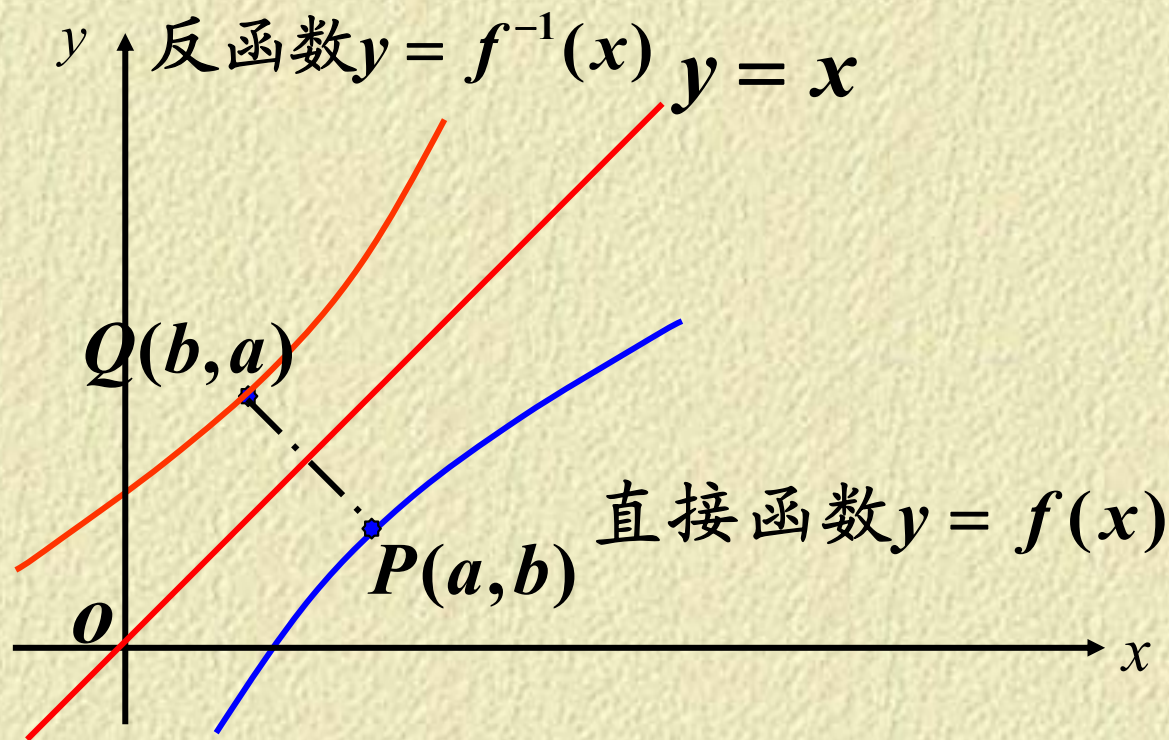
解 当 $x < 0$ 时, $y = e^x$ 得 $x = \ln y, 0 < y < 1$.

当 $0 \leq x < 1$ 时, $y = x+1$ 得 $x = y-1, 1 \leq y < 2$.

当 $1 \leq x$ 时, $y = 2\ln ex$ 得 $x = \frac{e^{\frac{y}{2}}}{e}, 2 \leq y$.

$$y = \begin{cases} \ln x & 0 < x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x < 2 \\ e^{\frac{x}{2}}/e & 2 \leq x \end{cases}$$

2 反函数的图形



直接函数与反函数的图形关于直线 $y = x$ 对称.

3 复合函数

设 $y = \sqrt{u}$, $u = 1 - x^2$ $x \in [-1, 1]$, $\longrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$

定义7 设函数 $y = g(u)$ 的定义域 D_g , 而函数 $u = f(x)$ 的值域为 R_f , 若 $R_f \subseteq D_g$, 则称函数 $y = g(f(x))$ 为 f 与 g 的复合函数.

$x \leftarrow$ 自变量, $u \leftarrow$ 中间变量, $y \leftarrow$ 因变量,

同复合映射一样, 函数 f 与 g 可以构成复合函数当且仅当 $R_f \subseteq D_g$. 如果 $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ 时, 我们可以通过改变 f 的定义域来构造复合函数.

注意: 1. 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的;

例如 $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$; $y \neq \arcsin(2 + x^2)$

2. 复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例如 $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$, $y = \sqrt{u}$, $u = \cot v$, $v = \frac{x}{2}$.

例6 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}, \varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases},$

求 $f[\varphi(x)]$.

解 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$

1° 当 $\varphi(x) < 1$ 时,

或 $x < 0, \varphi(x) = x+2 < 1, \longrightarrow x < -1;$

或 $x \geq 0, \varphi(x) = x^2-1 < 1, \longrightarrow 0 \leq x < \sqrt{2};$

2° 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时,

或 $x < 0$, $\varphi(x) = x + 2 \geq 1$, $\longrightarrow -1 \leq x < 0$;

或 $x \geq 0$, $\varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1$, $\longrightarrow x \geq \sqrt{2}$;

综上所述

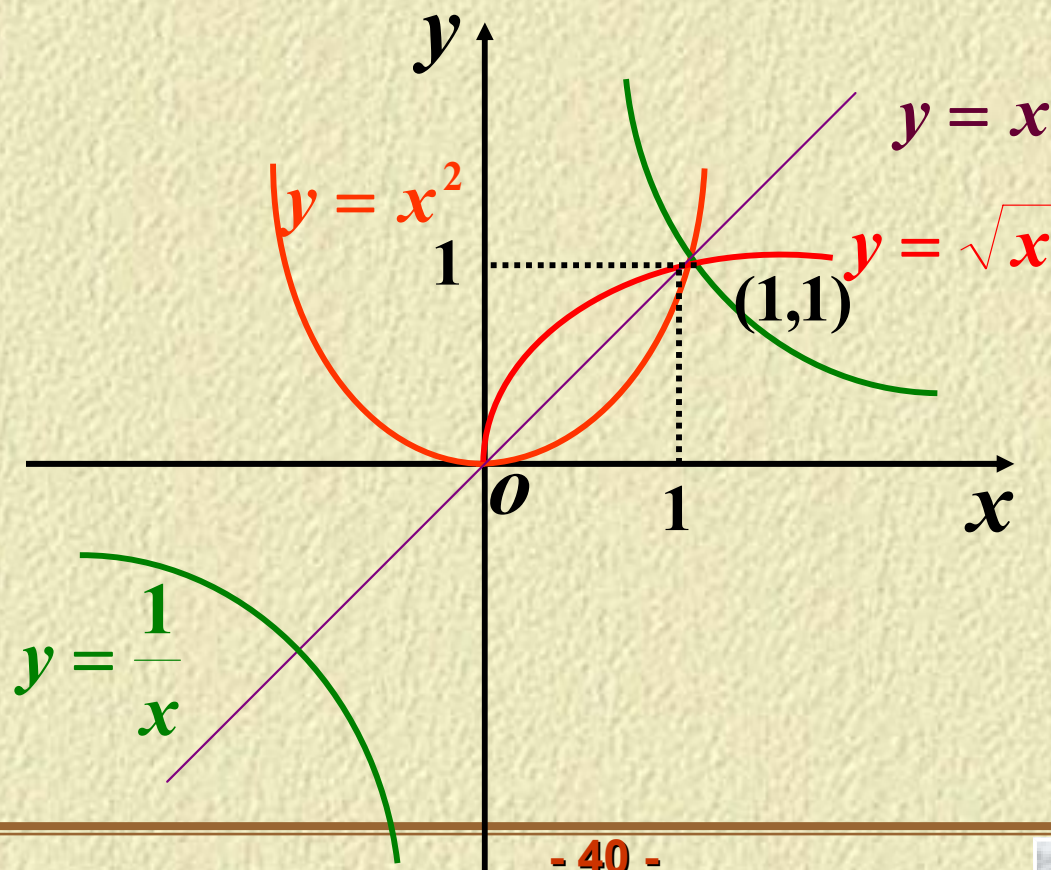
$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x + 2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}.$$

五 初等函数

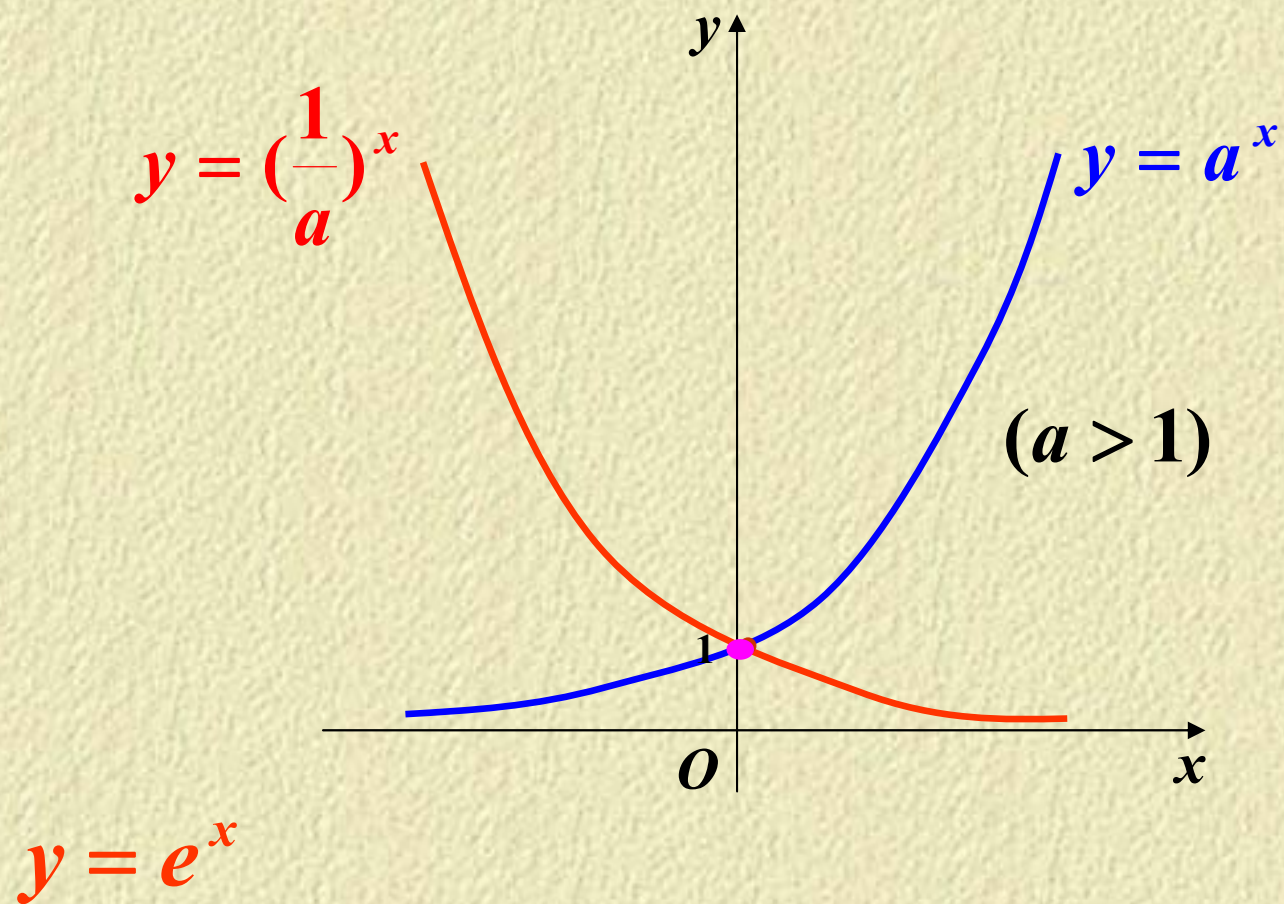
1 基本初等函数

(1) 常数函数 $y = c, x \in (-\infty, +\infty)$ (其中 c 为已知常数).

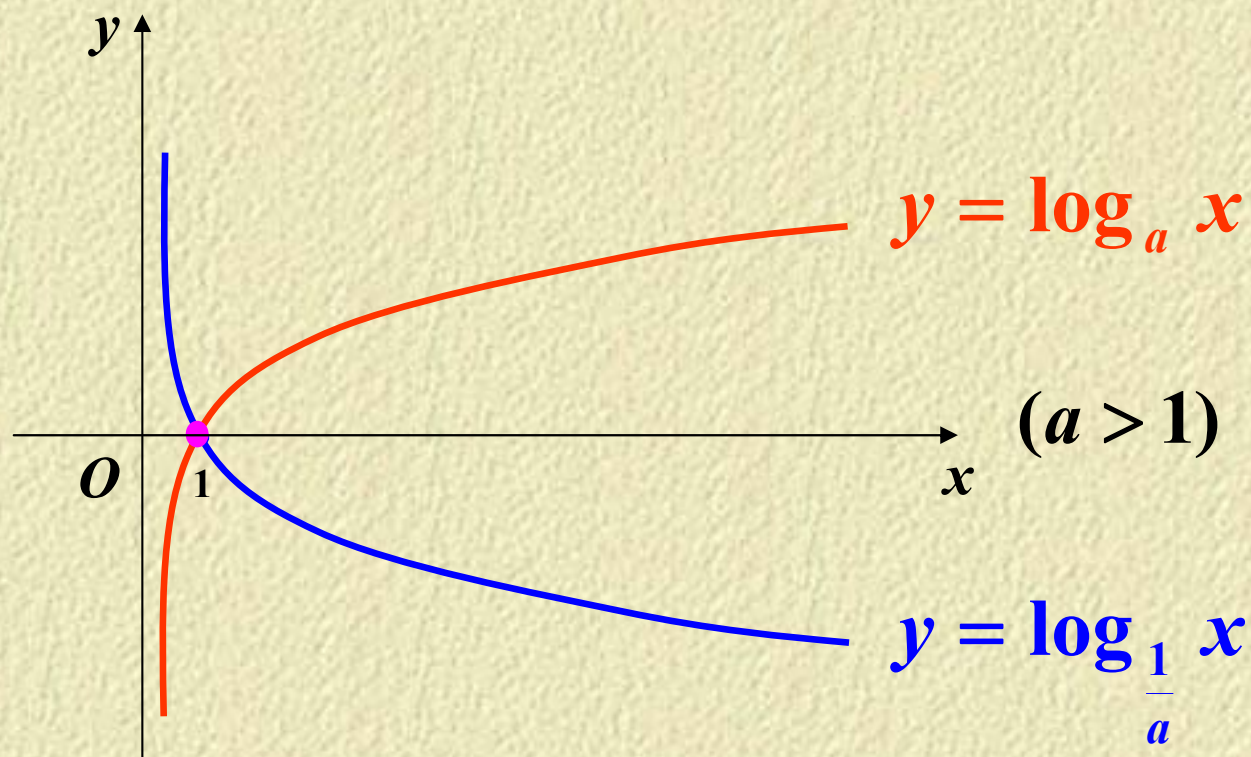
(2) 幂函数 $y = x^\mu$ (μ 是常数)



(3) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)



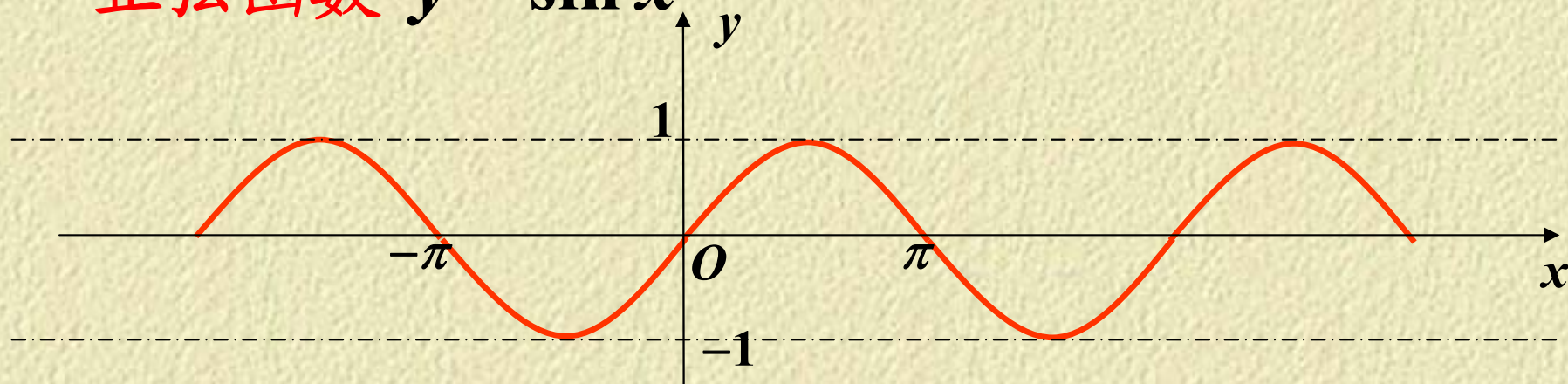
(4) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)



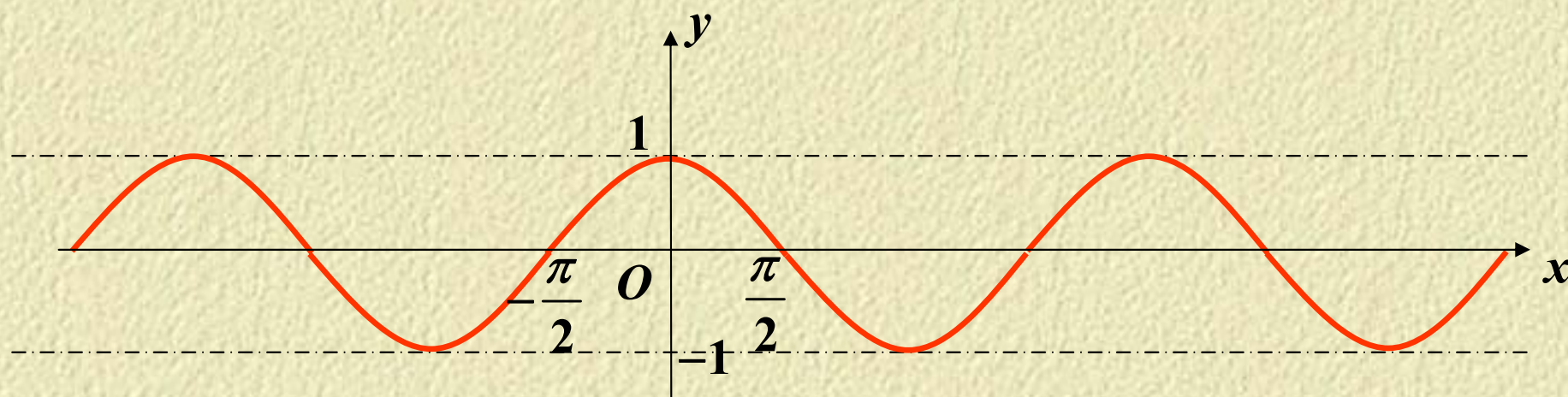
$$y = \ln x = \log_e x$$

(5) 三角函数

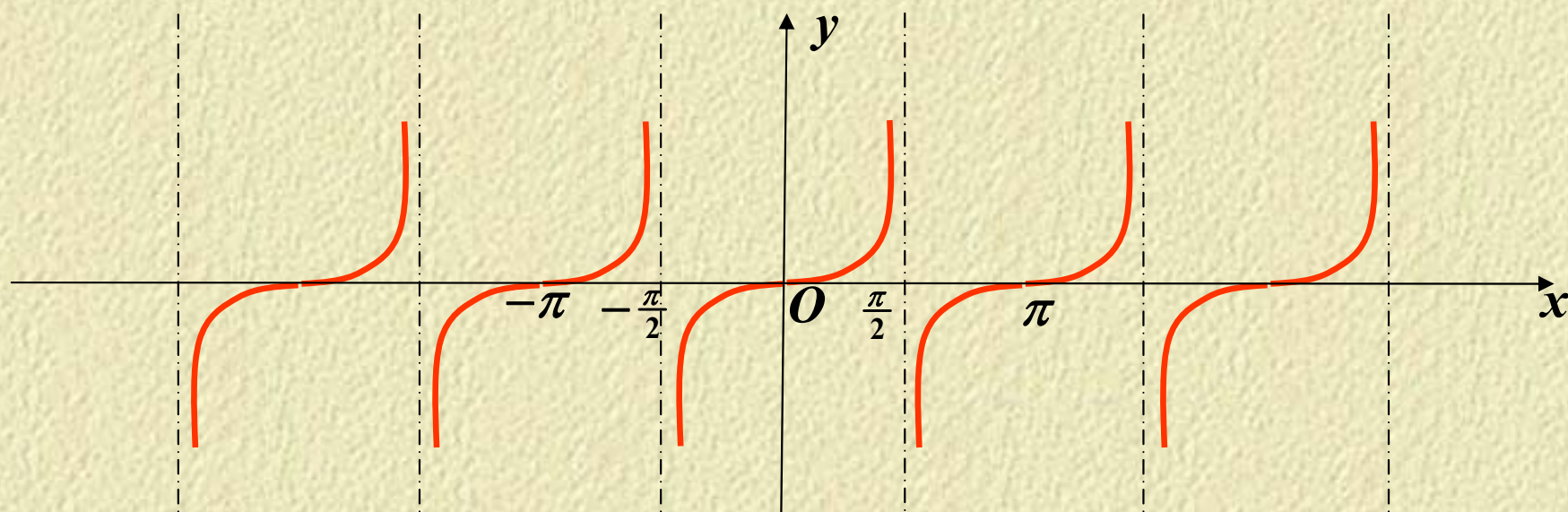
正弦函数 $y = \sin x$



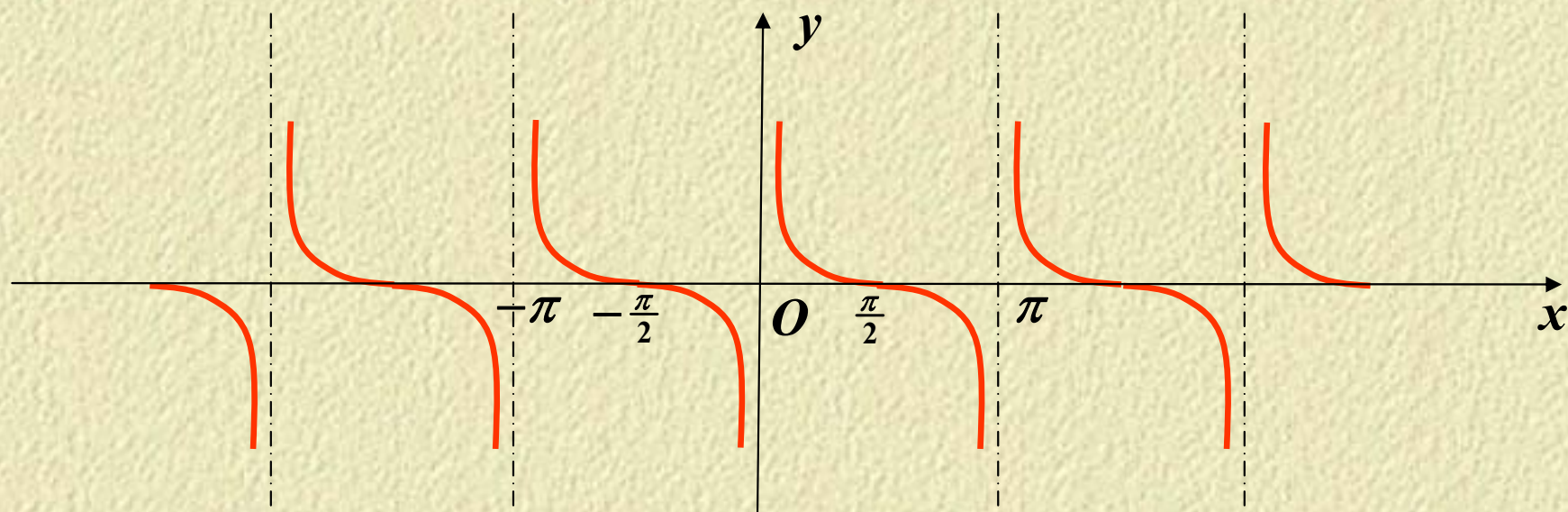
余弦函数 $y = \cos x$



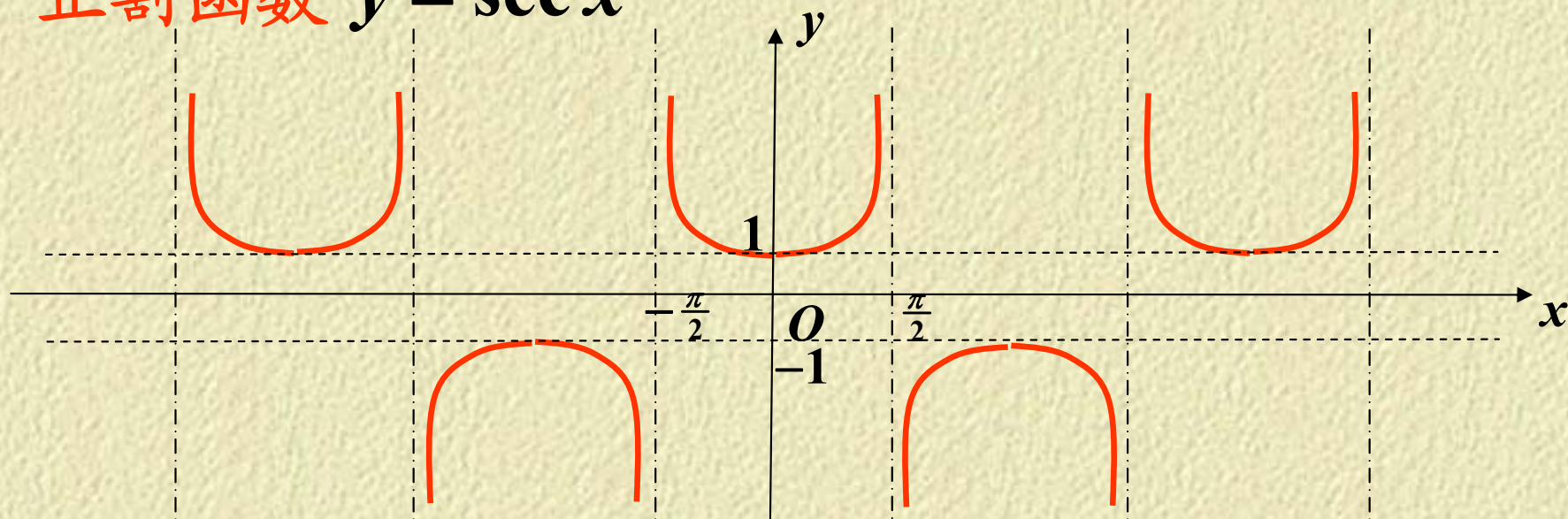
正切函数 $y = \tan x$



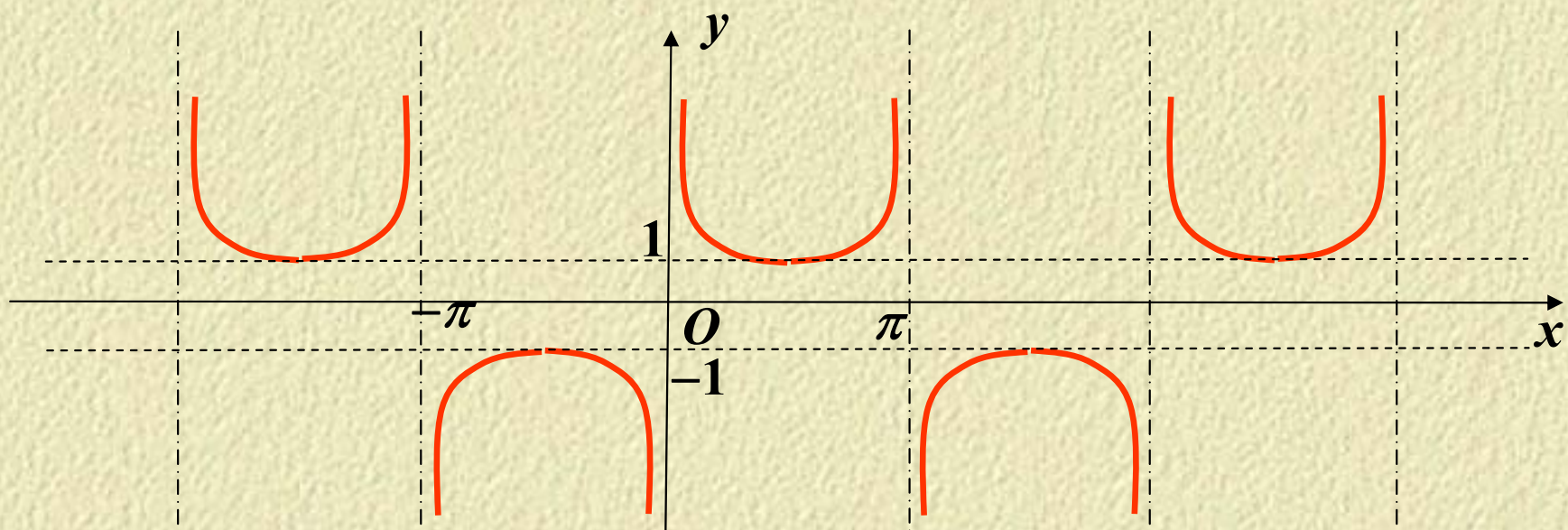
余切函数 $y = \cot x$



正割函数 $y = \sec x$

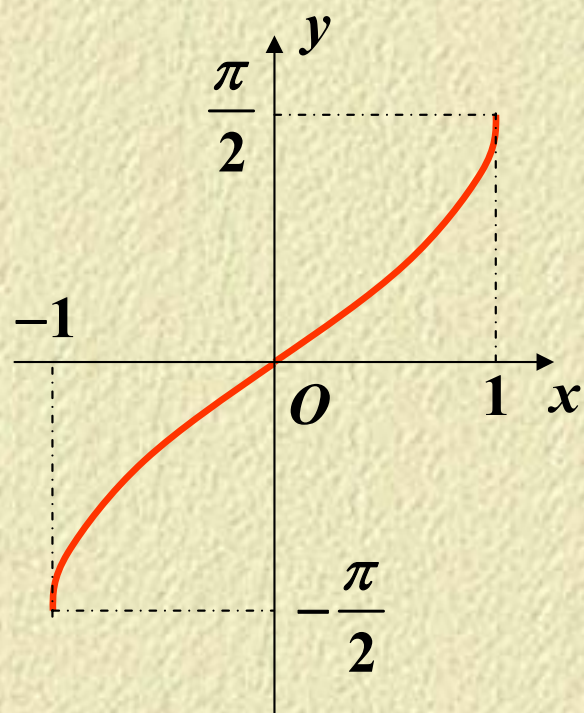


余割函数 $y = \csc x$

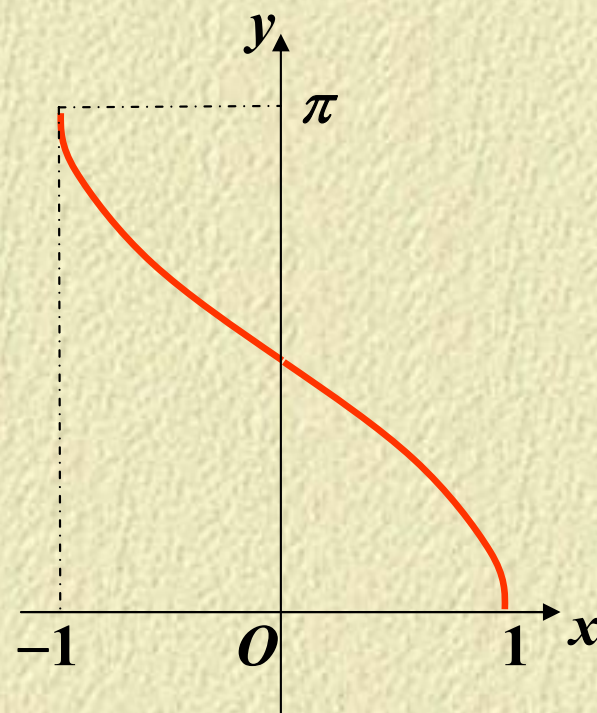


(6) 反三角函数

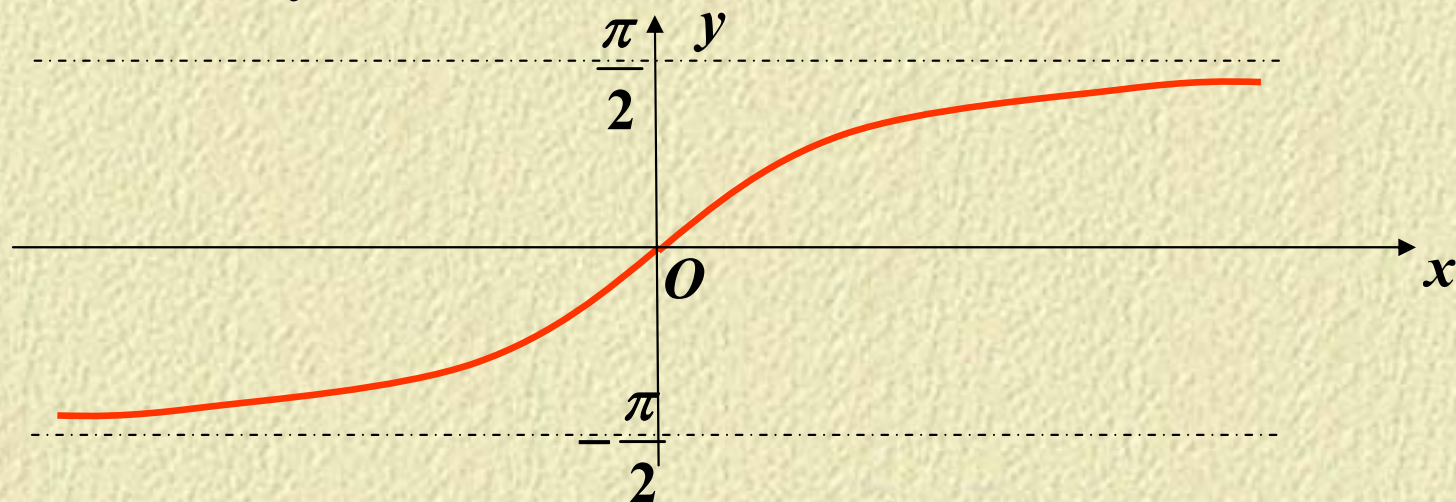
反正弦函数 $y = \arcsin x$



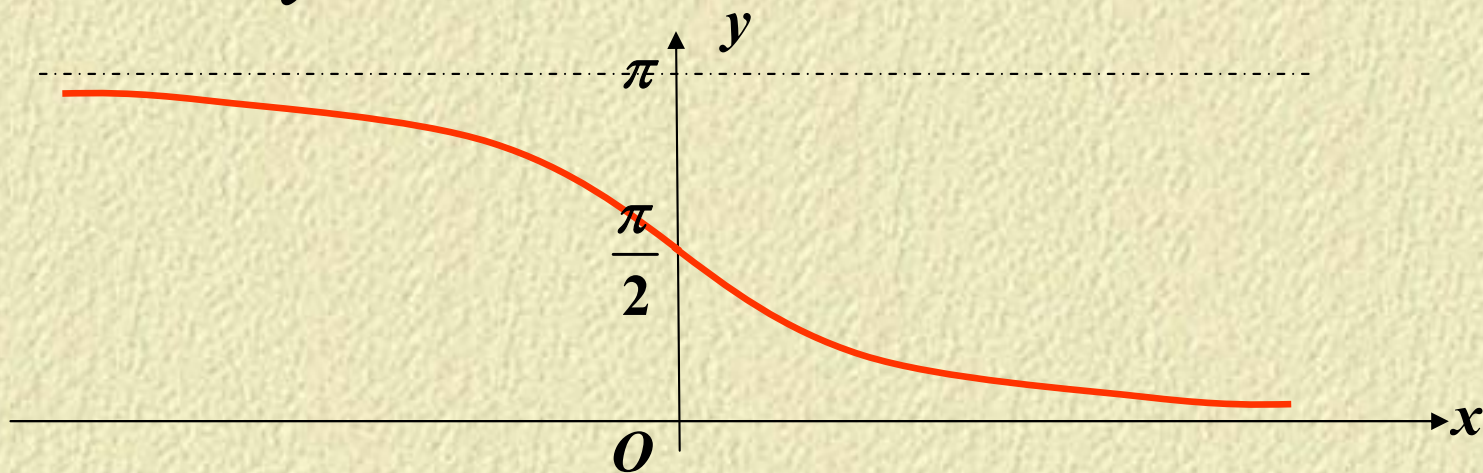
反余弦函数 $y = \arccos x$



反正切函数 $y = \arctan x$



反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$



常数函数, 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

2 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可由一个式子表示的函数,称为初等函数.

多项式函数

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

其中 $n \in \mathbf{N}, a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}, a_0 \neq 0$.

有理函数

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}$$

其中 $n, m \in \mathbf{N}, a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_m \in \mathbf{R}, a_0, b_0 \neq 0$.

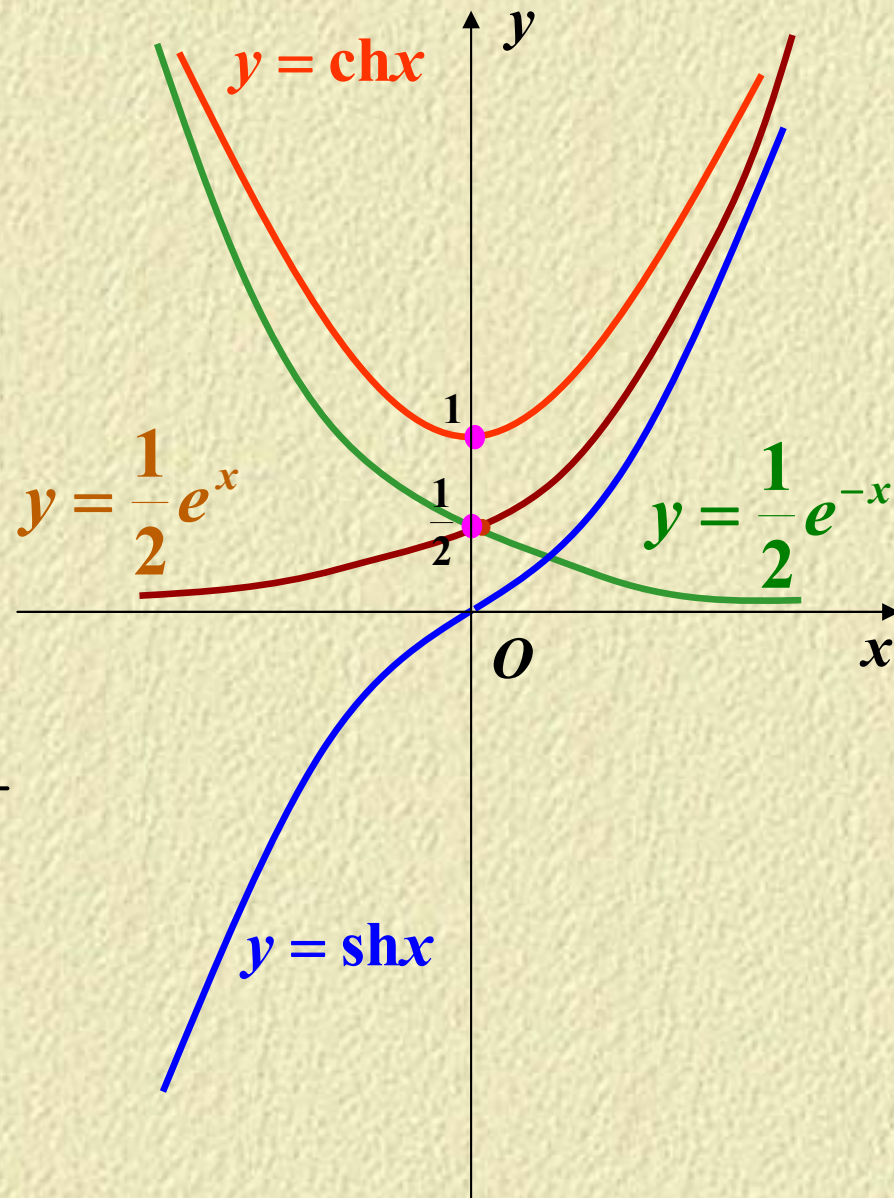
3 双曲函数

双曲正弦 $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$D: (-\infty, +\infty)$, 奇函数.

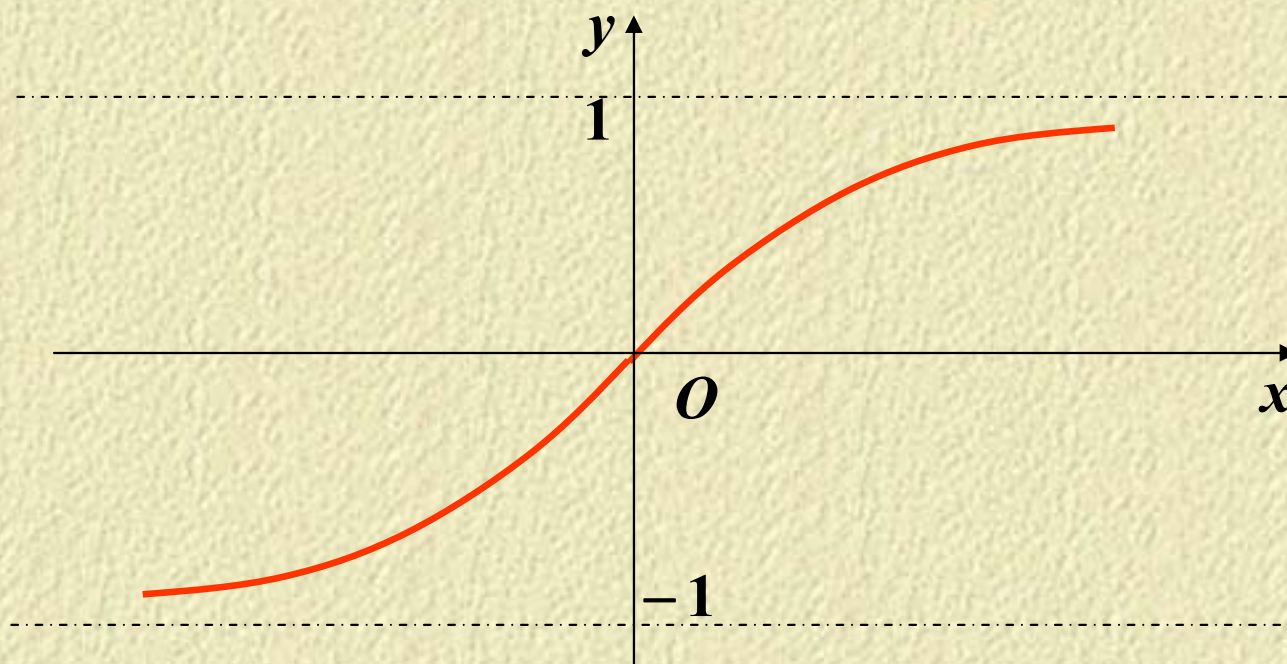
双曲余弦 $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$D: (-\infty, +\infty)$, 偶函数.



双曲正切 $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$D: (-\infty, +\infty)$ 奇函数, 有界函数,



双曲余切 $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

双曲函数常用公式

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y ;$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y ;$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 ;$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x ;$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

反双曲函数

反双曲正弦 $y = \operatorname{arsh} x$;

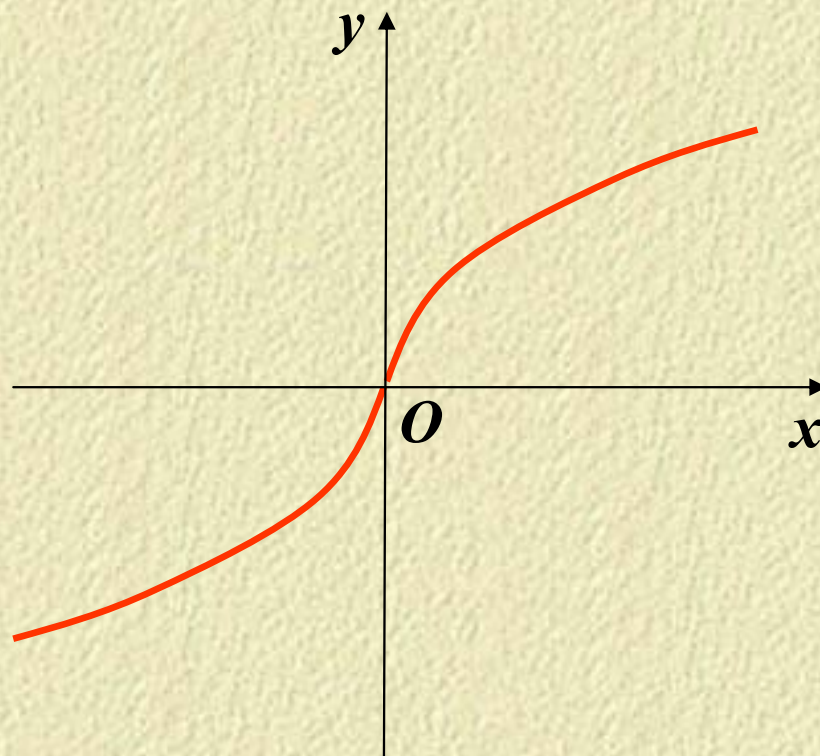
$$y = \operatorname{arsh} x$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$D : (-\infty, +\infty)$$

奇函数,

在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.



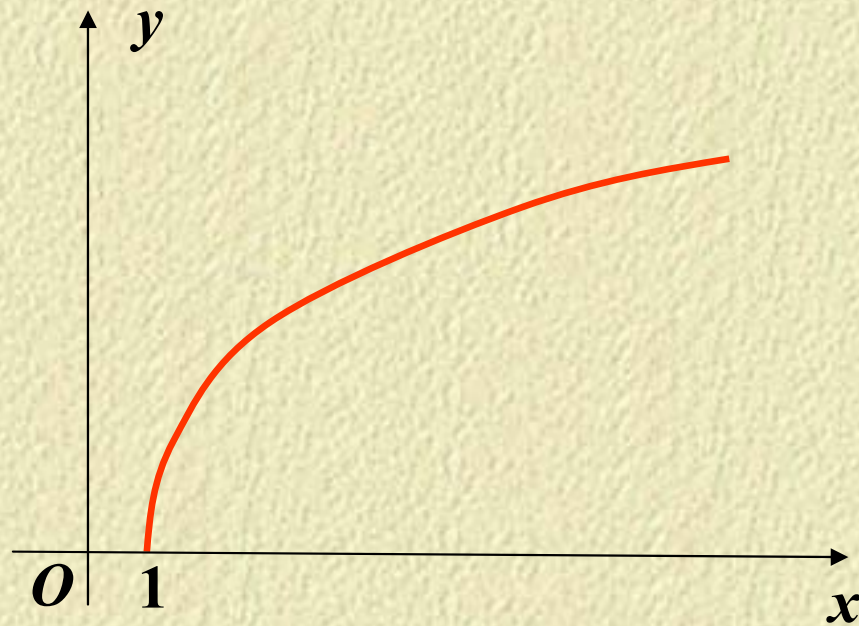
反双曲余弦 $y = \operatorname{arch} x$

$$y = \operatorname{arch} x$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$D : [1, +\infty)$$

在 $[1, +\infty)$ 内单调增加 .



反双曲正切 $y = \operatorname{arth} x$

$$y = \operatorname{arth} x$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$D : (-1, 1)$$

奇函数,

在 $(-1, 1)$ 内单调增加 .

