第五节　极限的运算法则

一　极限的四则运算法则

二　求极限方法举例

三　复合函数的极限

一、极限运算法则

定理1　设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则

(1) $\boxed{\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B;}$

(2) $\boxed{\lim(f(x)g(x))=(\lim f(x))(\lim g(x))=AB;}$

(3) 如果 $B\neq 0$, $\boxed{\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}.}$

证　$\because \lim f(x)=A,\quad \lim g(x)=B.$

$\therefore\ f(x)=A+\alpha,\ g(x)=B+\beta.$ 其中 $\alpha\to 0, \beta\to 0.$

由无穷小运算法则, 得

$$[f(x)\pm g(x)]-(A\pm B)=\alpha\pm\beta\to 0.\quad \therefore (1)\text{成立}.$$

$$[f(x)\cdot g(x)]-(A\cdot B)=(A+\alpha)(B+\beta)-AB$$

$$=(A\beta+B\alpha)+\alpha\beta\to 0.\qquad \therefore (2)\text{成立}.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)}$$

$$\because\quad \lim(B\alpha-A\beta)=0.$$

$$\lim B(B+\beta)=B\lim(B+\beta)=B^2\neq 0$$

利用无穷小与极限非零的函数的商仍是无穷小得

$$\frac{B\alpha - A\beta}{B(B+\beta)}$$ 是无穷小，所以(3)成立.

推论1　如果 $\lim f(x)$ 存在，c 为常数，则

$$\boxed{\lim(cf(x)) = c\lim f(x) = cA.}$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论2　如果 $\lim f(x)$ 存在，n 为正整数，则

$$\boxed{\lim(f(x))^n = (\lim f(x))^n = A^n.}$$

二、求极限方法举例

例1　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$=(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-3\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0,$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}.$$

小结

1. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0} x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0^{\ n}+a_1x_0^{\ n-1}+\cdots+a_n=f(x_0).$$

2. 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

若 $Q(x_0)=0$, 则商的法则不能应用.

例2　求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

解　$\because \lim\limits_{x\to1}(x^2+2x-3)=0,$　商的法则不能用

又 $\because \lim\limits_{x\to1}(4x-1)=3\neq0,$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{4x-1}=\frac{0}{3}=0.$$

先求倒数.

由无穷小与无穷大的关系,得

$$\lim_{x\to1}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$$

例3　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$. $(\dfrac{0}{0}$ 型未定式$)$

解　$x\to 1$时,分子,分母的极限都是零.

先约去不为零的无穷小因子$x-1$后再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x+3)\cancel{(x-1)}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)

例4 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型未定式}\right)$

解 $x\to\infty$时, 分子,分母的极限都是无穷大.

无穷大

$\Downarrow$

无穷小

先用x^3去除分子分母,分出无穷小,再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

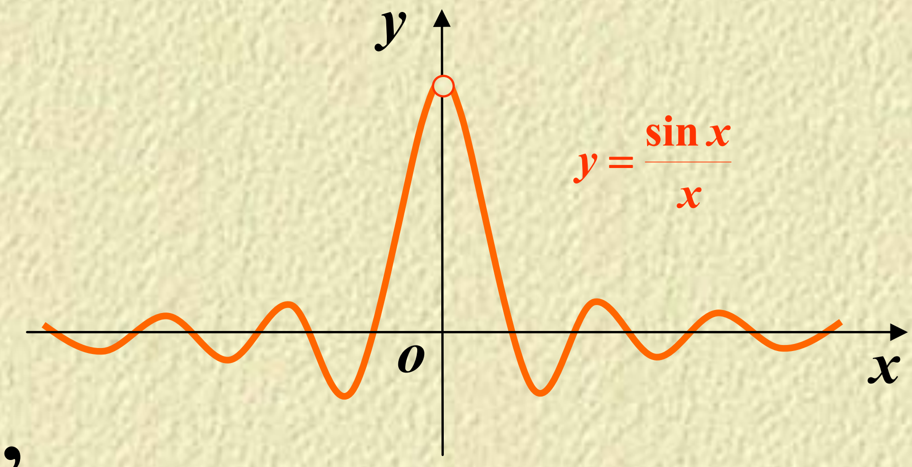
(无穷小分出法)

小结　当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, \text{当} n=m,\\ 0, \text{当} n>m,\\ \infty, \text{当} n<m,\end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子, 分母, 以分出无穷小, 然后再求极限.

例5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.



解 当$x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}$为无穷小，

而$\sin x$是有界函数.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

例6 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$. ($\infty-\infty$ 型未定式)

解 $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=0$$

例7 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$. ($0\cdot\infty$ 型未定式)

解 $$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}\Rightarrow\frac{\infty}{\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

有理化法

例7　求极限 $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

解 $$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

通分，消零因子

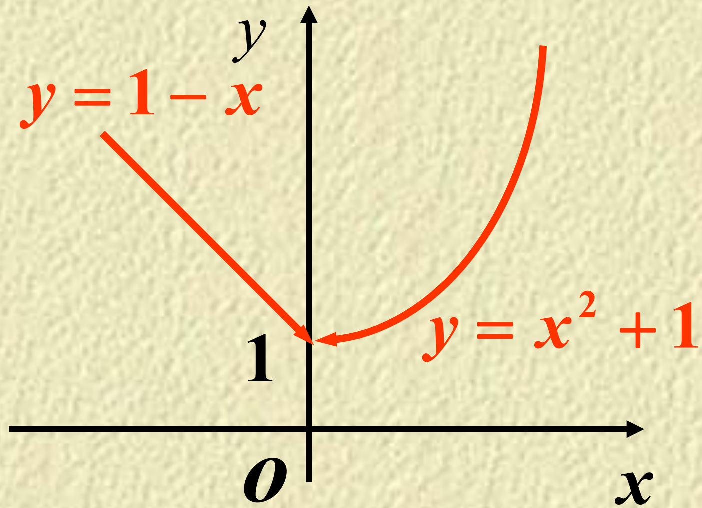
分段

例8 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\ge 0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

解 $x=0$是函数的分段点，两个单侧极限为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-x)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1,$$



左右极限存在且相等，

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x^2+1)=5$$

三　复合函数的极限

定理2(复合函数的极限)　设函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$ 的复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在 x_0 的某个领域内有定义. 若

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0, \lim_{u\to u_0} f(u)=A,$$

要内外极限均存在

且存在 $\delta_0>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时, 有 $\varphi(x)\neq u_0$, 则当 $x\to x_0$ 时, $y=f(\varphi(x))$ 的极限存在, 且有

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=A.$$

证　$\forall\varepsilon>0, \because \lim_{u\to u_0} f(u)=A, \therefore \exists\eta>0$, 当 $0<|u-u_0|<\eta$ 时, 恒有

$$|f(u)-A|<\varepsilon,$$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，所以对上面的 η，$\exists\delta_1>0$，使得当

$0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，恒有

$$|\varphi(x)-u_0|<\eta,$$

取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$0<|\varphi(x)-u_0|<\eta,$$

即恒有

$$|f(\varphi(x))-A|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=A.$$

说明

(1) 根据定理的条件，复合函数求极限的公式可写为

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) \overset{令 u=\varphi(x)}{=} \lim_{u\to u_0} f(u) = A,$$

因此这也提供了一个求极限的方法: 变量替换法.

(2) 如果将定理的条件作相应的修改, $x \to x_0$ 可用其他的六种自变量的趋向过程代替.

例9 求极限 $\lim\limits_{x\to x_0} a^x (a>0, a\neq 1)$.

解 由于 $a^x = e^{x\ln a}$，而 $\lim\limits_{x\to x_0} x\ln a = x_0 \ln a$, 所以

$$\lim_{x\to x_0} a^x \overset{令 u=x\ln a}{=} \lim_{u\to x_0\ln a} e^u = e^{x_0\ln a} = a^{x_0}.$$

例10　求 $\lim_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{1}{n})$.

解　因为 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, 且 $(1+\frac{1}{n})^n \neq e$

$$\lim_{u\to e}\ln u = \ln e = 1$$

所以　原式 $=\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})^n$

$$\overset{令u=(1+\frac{1}{n})^n}{=} \lim_{u\to e}\ln u = 1$$