第六节　极限存在准则　两个重要极限

一　夹逼准则和重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

二　重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e$

一 夹逼准则和重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

定理1 设

(1) 存在$\eta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\eta$ 时, 有

$$g(x)\le f(x)\le h(x),$$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$,

那末当$x\to x_0$ 时, $f(x)$ 的极限存在, 且

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

证 $\forall\ \varepsilon>0$, $\because\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$,

所以$\exists\delta_1,\delta_2>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, 恒有

$$|g(x)-A|<\varepsilon \quad 即\ A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon$$

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，恒有

$$|h(x)-A|<\varepsilon,\ 即\ A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon$$

取 $\delta=\min\{\eta,\delta_1,\delta_2\}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有

$$A-\varepsilon<g(x)\le f(x)\le h(x)<A+\varepsilon$$

即恒有 $\qquad |f(x)-A|<\varepsilon,$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.$

对于自变量其他的趋向过程下的极限, 也有类似的定理, 例如夹逼准则的数列形式是:

定理2 如果数列 x_n, y_n 及 z_n 满足下列条件:

(1) $y_n\le x_n\le z_n$ （$n>N, N$为某个正整数）

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n=a,$

那末数列 x_n 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

定理1和定理2称为**夹逼准则**.

注意：夹逼准则不仅可以用来判别极限的存在性，还可以用来求极限.

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$

解 $\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1,$

第一章 函数 极限 连续

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

例2　证明 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

$n^{\frac{1}{n}}$

证　显然 $1<\sqrt[n]{n}$

记 $h_n=\sqrt[n]{n}-1,$ 则

$\Rightarrow h_n<1$ ×

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots$$

$$>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2$$

二项式放缩

所以 $h_n < \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$ 即 $\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}) = 1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$

例3　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1^x + 2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}}.$

解　记 $f(x) = (1^x + 2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}}$, 显然 $3 \le f(x).$

因为 $f(x) \le (3 \cdot 3^x)^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{1}{x}}3$,　而 $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to 0} 3^u = 1$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1^x + 2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}} = 3.$

例4 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

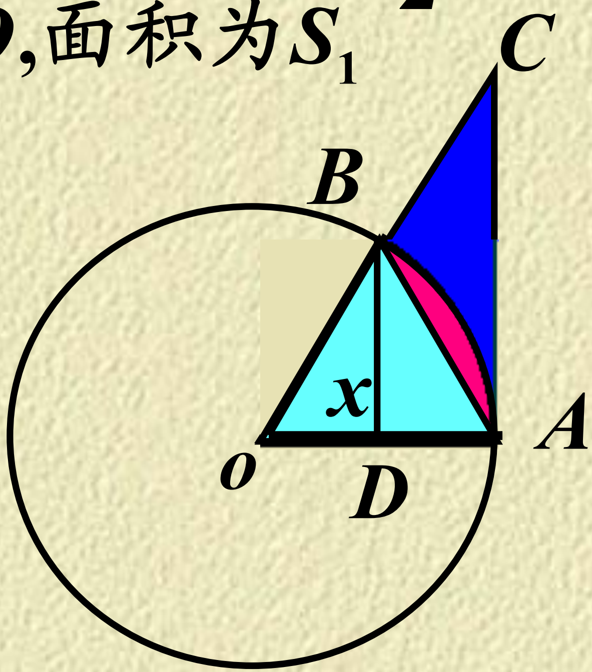
证 先证 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

设单位圆圆心为O, 圆心角$\angle AOB = x$, $(0<x<\dfrac{\pi}{2})$

作单位圆的切线, 得高为AC的ΔACO,面积为S_1

圆心角为x的扇形OAB,面积为S_2,

高为BD的ΔOAB, 面积为S_3,



$\because \sin x = BD$, $x=$弧AB, $\tan x = AC$,

且

$$S_3 < S_2 < S_1,$$

$\therefore \sin x < x < \tan x$, 即 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1,$

由于

$$\lim_{x\to 0^+}\cos x = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

所以

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$$

而

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 1$$

所以

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

例5　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$=1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1}$$

例6　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}}$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} \overset{令 u=\arcsin x}{=} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=1$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1}$$

同理 $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1}$

例8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\dfrac{2x}{3x}\dfrac{3x}{\sin 3x}\right)=\dfrac{2}{3}$.

二 重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

在第二节中,利用单调有界原理证明了重要极限

不妨取 $n=[x]$
整数part

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

现在说明 n 换成连续变量 x,在 $x\to+\infty, x\to-\infty, x\to\infty$ 时,极限仍然存在,且等于 e.

例8 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$

证 先证 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$

不妨设 $x>1$, 取 $n=[x]$, 由于 $n\le x<n+1$, 所以

$$1+\frac{1}{n+1}\le 1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n}$$

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n}\le (1+\frac{1}{x})^{x}\le (1+\frac{1}{n})^{n+1},$$

由于 $x\to+\infty \Leftrightarrow n\to\infty$，而

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}\cdot\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{n})=e,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n}=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{-1}=e,$$

所以由夹逼准则得

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e.$$

再证 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e.$

变量替换

令 $x=-(1+t)$, 则 $x\to-\infty\Leftrightarrow t\to+\infty$, 所以

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t+1})^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}(\frac{t}{t+1})^{-t-1}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(\frac{t+1}{t})^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^t\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})=e.$$

所以

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.}$$

令 $t=\dfrac{1}{x}$, $x\to\infty\Leftrightarrow t\to0$, 所以

$$\boxed{\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.}$$

例9 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x})^{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{3}{-x})^{-\frac{x}{3}}]^{-3}=(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{3}{-x})^{-\frac{x}{3}}})^{3}$

$=\frac{1}{e^{3}}$.

例10 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+x}{2+x})^{2x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x+2})^{x+2}]^{2}(1+\frac{1}{x+2})^{-4}\quad=e^{2}$.

例11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \overset{令u=(1+x)^{\frac{1}{x}}}{=} \lim\limits_{u\to e}\ln u=\ln e=1$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.}$$

例12 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解 原式 $\overset{令u=e^x-1}{=} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\ln(1+u)}=1$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.}$$